فصل ۴

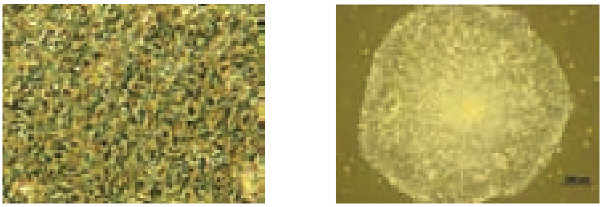
توابع نمایی و لگاریتمی

آیا رشد سلول‌ها، نظام‌های بانکداری در دنیا و نحوه‌ی محاسبه‌ی سنّ یک درخت کهنسال یا یک سنگ از دوران باستان، تابع قانون‌مندی‌های خاصی است؟

امروزه باتوجه به رشد روزافزون روش‌های پژوهشی کمی در علوم، هم نیاز و هم امکان استفاده از روش‌های ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر افزایش یافته‌است و مهم‌ترین ویژگی به کارگیری ریاضی، توانایی الگوسازی‌های ریاضیات است. یکی از جدیدترین این نمونه‌ها نقش الگوهای ریاضی در مطالعه‌ی سلول‌های بنیادی است.

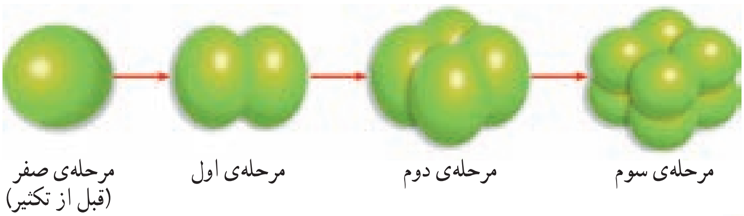
سلول‌های بنیادی

در یکی از روزهای سال ۱۳۸۲ این خبر به تمام دنیا مخابره شد. پژوهشکده‌ی رویان به عنوان مرکز تحقیقات علوم سلولی و درمان ناباروری جهاد دانشگاهی ، موفق به تولید سلول‌های بنیادی جنینی انسان شد . این سلول‌ها قابلیت تکثیر نامحدودی دارند و می‌توانند تمام انواع سلول‌های بدن نظیر عصب ، ماهیچه‌ی قلبی ، کبدی و ... را به‌وجودآورند.



شکل ۱- (سمت چپ) یک مجموعه از سلول های بنیادی دارای حدود ۱۰ هزار سلول است که در سمت راست با بزرگ‌نمایی بیشتر، سلول‌ها به‌صورت واضح نشان داده شده‌اند.

در شکل (۲) روند تکثیر سلول بنیادی جنینی در ۴ مرحله نشان داده شده است .



شکل ۲

اگر روند تکثیر سلول بنیادی جنینی مانند شکل (۲) ادامه پیدا کند :

فکر می‌کنید پس از مرحله‌ی نهم، چه تعداد سلول بنیادی خواهیم داشت؟ برای یافتن پاسخ، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

تعداد سلول‌های بنیادی تکثیر شده	تعداد مراحل تکثیر سلول‌ها
۱	۰
۲	۱
۴	۲
۸	۳
۱۶	۴
۳۲	۵
۶۴	۶
۱۲۸	۷
۲۵۶	۸
۵۱۲	۹

جدول ۱

با توجه به جدول (۱) می‌بینیم که سرعت تکثیر سلول‌های بنیادی چه‌قدر زیاد است !

۱- پس از چند مرحله، تعداد سلول‌های تکثیرشده، برابر با ۲۰۴۸ سلول خواهدبود؟

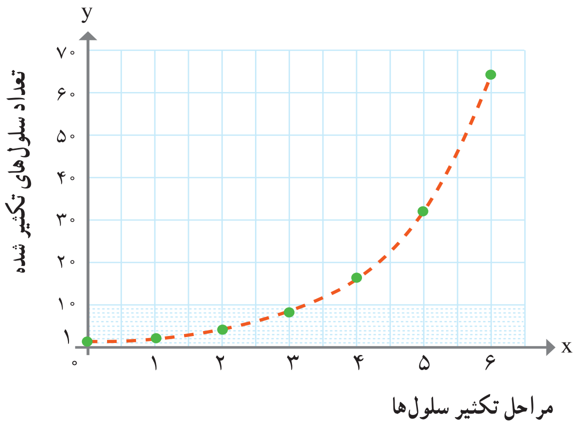
۲- آیا اعداد این جدول الگویی را مشخص می‌کنند؟ آیا می‌توانید قانونی بین این دو کمیت یعنی تعداد سلول‌ها و مراحل تکثیر آن‌ها به دست آورید؟

اگر بخواهیم تعداد سلول‌های تکثیر شده در مرحله‌ی بیستم یا مرحله‌ی سی‌ام و یا هر مرحله‌ی دیگری پیدا کنیم ، قطعاً باید به دنبال راه میان بری بگردیم وگرنه محاسبات طولانی و وقت‌گیر خواهد بود. به همین منظور جدول (۱) را بر حسب توان‌های ۲، بازنویسی می‌کنیم، جدول (۲) به دست می‌آید. شما هم جای علامت سؤال‌ها را با استفاده از ماشین حساب پر کنید.

تعداد سلول‌های تکثیر شده	مراحل تکثیر سلول‌ها
$۲^{۰} = ۱$	۰
$۲^{۱} = ۲$	۱
$۲^{۲} = ۴$	۲
$۲^{۳} = ۸$	۳
$۲^{۴} = ۱۶$	۴
⋮	⋮
$۲^{۹} = ۵۱۲$	۹
⋮	⋮
۱۶۳۸۴	؟
⋮	⋮
$۲^{۲۰} = ؟$	۲۰
⋮	⋮

جدول ۲

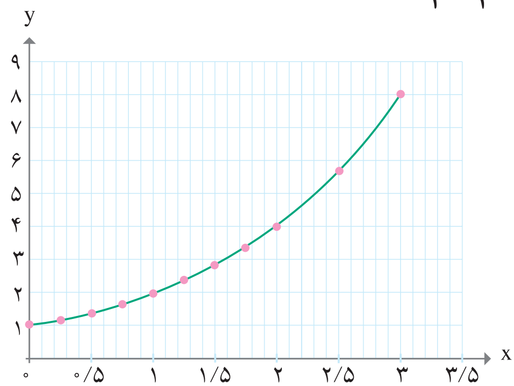
نمودار زیر، رابطه‌ی بین مراحل مختلف تکثیر سلول‌ها و تعداد سلول‌های تکثیر شده را نشان می‌دهد :



در فصل اوّل یک الگوی نمایی برای رشد باکتری‌ها به‌دست آوردیم که جرم تقریبی باکتری‌ها از ضابطه‌ی $g(x) = ۲^x$ ، محاسبه می‌شد، دوباره به آن فعالیت باز می‌گردیم :

۱– مقادیر به دست آمده در آن فعالیت را در جدولی تنظیم نمایید و نمودار آن را رسم کنید.

۲–اگر محور xها، بیانگر زمان و محور yها بیانگر جرم باکتری‌ها باشد، نمودار تابع $g(x) = ۲^x$ را برای $x = ۰, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۴}, ۱, \frac{۵}{۴}, \frac{۳}{۲}, \frac{۷}{۴}$ رسم نمایید و سپس آن را با شکل زیر مقایسه کنید .



می‌توانیم این نمودار را برحسب تابع $y = ۲^x$ بیان کنیم. به این گونه تابع‌ها، تابع نمایی می‌گویند که به دلیل متغیربودن نما، چنین نامی به آن‌ها داده شده است. برای تمام اعداد حقیقی x، (گویا و گنگ)، این منحنی را می‌توان برای نمایش تابع $g(x) = ۲^x$ به کار برد.

در این الگو رابطه‌ی بین زمان و مراحل رشد باکتری، یک تابع نمایی است زیرا رشد باکتری‌ها بر حسب زمان، به صورت توان‌ها یا نماهای ۲ است.

آیا عبارت $(-۲)^x$ را می‌توان به ازای تمام xهای حقیقی محاسبه کرد؟

هر تابع به صورت $y = a^x$ که a عددی حقیقی و $a \neq ۱$, $a > ۰$ و x یک متغیر است، یک تابع نمایی نامیده می‌شود.

۱– دامنه و برد تابع $y=a^x$ را به دست آورید.

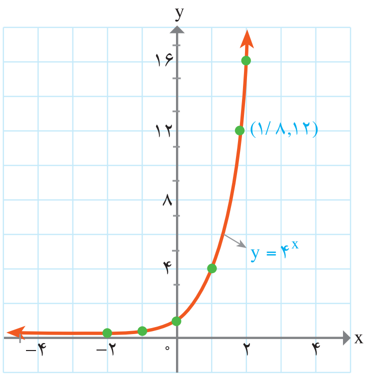
۲– آیا تابع نمایی $y=a^x$ یک تابع یک به یک است؟ چرا؟

مثال

الف) نمودار تابع نمایی $y=۴^x$ را در نقاط داده شده جدول زیر به‌دست آورید و سپس نقاط را به یکدیگر وصل نمایید.

x	۴^x	y
-۲	$۴^{-۲}$	$\frac{۱}{۱۶}$
−۱	$۴^{-۱}$	$\frac{۱}{۴}$
۰	$۴^۰$	۱
۱	$۴^۱$	۴
۲	$۴^۲$	$۴^۲=۱۶$

حل :



نمودار تابع نمایی ۴^x ، محور yها را در نقطه‌ی ۱ قطع می‌کند.

ب) با استفاده از نمودار $y = ۴^{x}$ ، مقدار تقریبی $۴^{۱/۸}$ را به‌دست آورید.

حل : از نمودار این تابع می‌توان به‌طور تقریبی مقدار y را برای همه‌ی مقادیر حقیقی x به‌دست آورد. با توجه به نمودار مقدار تقریبی y وقتی که $x = ۱/۸$ است، برابر با ۱۲ می‌باشد.

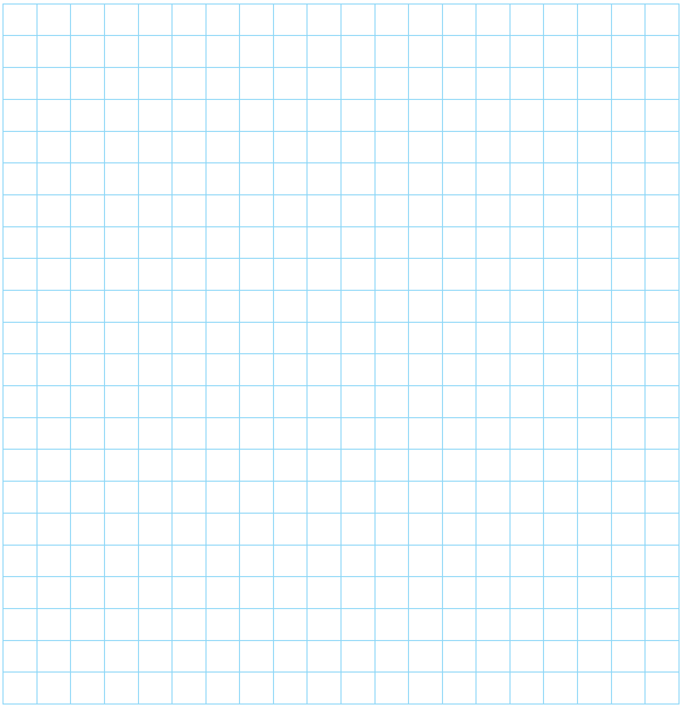
با استفاده از ماشین حساب، مقدار تقریبی $۴^{۱/۸}$ برابر است با :

$$۴^{۱/۸} \cong ۱۲/۱۲۵۷۳۲۵۳$$

۱- نمودار تابع $y = ۷^{x}$ را به ازای $-۱ \leq x \leq ۲$ رسم کنید.

۲- مقدار تقریبی $y = ۷^{۰/۶}$ را با استفاده از نمودار تابع به‌دست آورید.

۳- نمودار توابع $y = ۳^{x}$ و $y = ۳^{x-۱}$ و $y = ۳^{x} + ۳$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و آن‌ها را با هم مقایسه کنید.



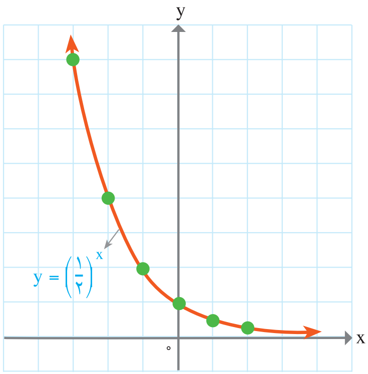
مثال

الف) نمودار $y=(\frac{۱}{۲})^x$ را رسم کنید.

نقطه‌ی تقاطع منحنی با محور yها، چیست؟

حل : چند نقطه‌ی دلخواه را درنظر می‌گیریم.

x	$(\frac{۱}{۲})^x$	y
۳-	$(\frac{۱}{۲})^{-۳}$	۸
۲-	$(\frac{۱}{۲})^{-۲}$	۴
۱-	$(\frac{۱}{۲})^{-۱}$	۲
۰	$(\frac{۱}{۲})^{۰}$	۱
۱	$(\frac{۱}{۲})^{۱}$	$\frac{۱}{۲}$
۲	$(\frac{۱}{۲})^{۲}$	$\frac{۱}{۴}$



نقطه‌ی تقاطع نمودار با محور yها، ۱ می‌باشد.

ب) با استفاده از شکل تابع، مقدار تقریبی $(\frac{۱}{۲})^{-۲/۵}$ را به‌دست آورید.

حل : مقدار y وقتی که $x=-۲/۵$ است، حدوداً ۵/۵ است. مقدار تقریبی $(\frac{۱}{۲})^{-۲/۵}$ برابر با $۵/۶۵۶۸۵۴۲۴۹ \cong (\frac{۱}{۲})^{-۲/۵}$ می‌باشد.

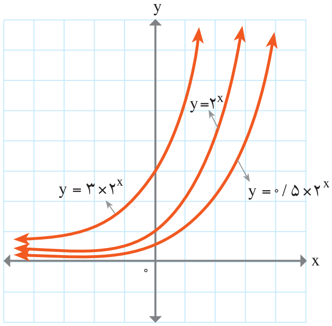
۱- نمودار $y=(\frac{۱}{۳})^x+۲$ را رسم کنید. نقطه‌ی تقاطع منحنی با محور yها، چیست؟

۲- با استفاده از نمودار تابع فوق، مقدار تقریبی $y=(\frac{۱}{۳})^{-۱/۵}+۲$ را به‌دست آورید.

توجه شود که در نمودار مثال قبل وقتی که x بزرگ می‌شود مقدار y کم می‌شود و برای xهای کوچک‌تر از صفر،مقدار y به سرعت افزایش می‌یابد. به طور کلی این وضعیت برای تمام توابع نمایی $y=a^x$ و $۰<a<۱$ برقرار است.

۳- از روی نمودار، ویژگی‌های تابع a^x را برای حالت $a>۱$ و $۰<a<۱$ را مشخص نمایید.

در شکل زیر، نمودار توابع $y=۲^x$ و $y=۳\times ۲^x$ و $y=۰/۵\times ۲^x$ نشان داده شده است.
توجه کنید :



همان‌گونه که از نمودارها، مشخص است، محل تقاطع منحنی $y=۲^x$ با محور yها، نقطه‌ی $y=۱$، منحنی $y=۳\times ۲^x$ ، نقطه‌ی $y=۳$ و برای منحنی $y=۰/۵\times ۲^x$ ، نقطه‌ی $y=۰/۵$ می‌باشد.

باتوجه به نمودار این سه تابع، چه وجه مشترک و چه وجه اختلافی بین این توابع ملاحظه می‌کنید؟

۱- فکر می‌کنید توابع $y = 10^x$ و $y = (\frac{1}{10})^x$ در چه نقطه‌ای محور yها را قطع می‌کنند. آیا می‌توانید بدون استفاده از جدول، نمودار تقریبی این دو تابع را رسم کنید؟

۲- نمودار توابع $y = 3^x$ و $y = 4^x$ و $y = 5^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و آن‌ها را در $x > 0$ و $x < 0$ با هم مقایسه کنید.

مثال

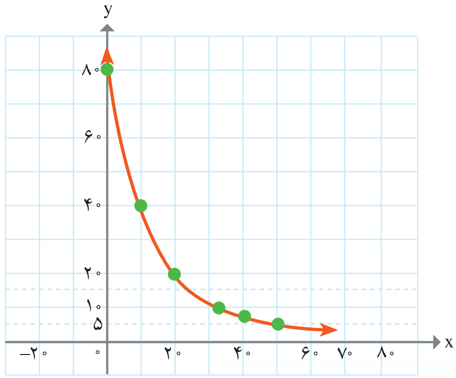
در جدول زیر، مقادیر x و y از یک تابع داده شده‌است. رفتار این تابع یا چگونگی تغییرات این تابع، یک تابع نمایی را مشخص می‌کند یا خیر؟ چرا؟

x	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
y	۸۰	۴۰	۲۰	۱۰	۵	۲/۵

حل : مقادیر x به صورت منظم، به‌فاصله‌ی ده واحد اضافه می‌شوند. مقادیر y به صورت زیر می‌باشند :

$$80 \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} 40 \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} 20 \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} 10 \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} 5 \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} 2/5$$

همان‌طورکه مشاهده می‌شود، مقادیر y با ضرب یک عدد ثابت در عدد قبلی، به‌دست می‌آیند.
با توجه به این‌که دامنه‌ی تغییرات x به صورت منظم در یک فاصله‌ی معین است و میزان تغییرات مقادیر y بر اثر ضرب در یک عدد ثابت است لذا این داده‌ها می‌تواند بیانگر رفتار یک تابع نمایی باشد.
نقاط معلوم در جدول را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم و سپس آن‌ها را به یک‌دیگر وصل می‌کنیم. شکل این تابع، همانند شکل یک تابع نمایی است.



آیا می‌توانید عبارت دقیق تابع نمایی بالا را به‌دست آورید؟

مسائل

۱- نمودار هر دسته ازتابع‌های زیر را در یک دستگاه مختصات رسم‌کنید و وضعیت آن‌ها را نسبت به هم مقایسه کنید.

الف) $y=2^x$, $y=2^x+3$, $y=2^x-4$

ب) $y=2^x$, $y=2^{x+5}$, $y=2^{x-4}$

ج) $y=2^x$, $y=3^x$, $y=5^x$

۲- در جدول زیر نقاطی از یک تابع داده شده است. آیا چگونگی تغییرات این تابع، نمایی است؟ چرا؟

x	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
y	۱۵	۲۱	۲۷	۳۳	۳۹	۴۵

۳- رفتار یا چگونگی تغییرات کدام یک از توابع زیر، نمایی است؟

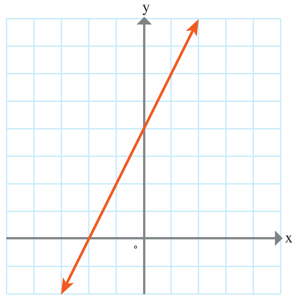
الف) $y=4^x+3$

ب) $y=2x(x-1)$

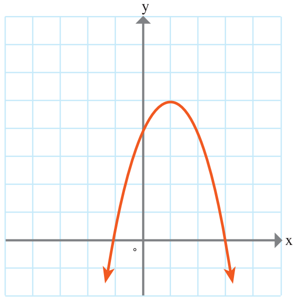
ج) $y+5x=8$

د) $y=x^4+3$

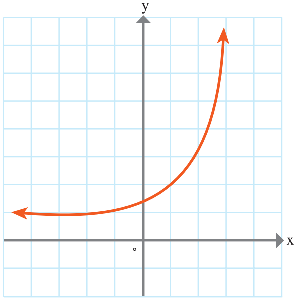
ز)



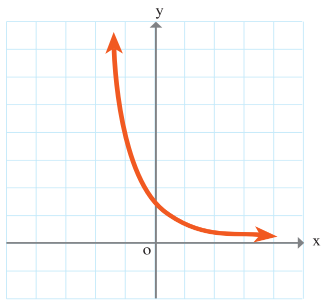
و)



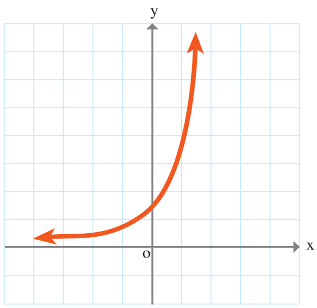
هـ)



۴- نرگس و فاطمه نمودار $y = (\frac{۱}{۳})^x$ را رسم کرده‌اند. کدام یک از آن‌ها، نمودار را درست رسم کرده است؟ دلیل خود را توضیح دهید.



نمودار رسم شده توسط نرگس



نمودار رسم شده توسط فاطمه

۵- توابع $y = ۳^x$ و تابع $y = x^۳$ چه فرق اساسی با هم دارند؟

۶- نمودار توابع زیر را رسم کنید. محل تقاطع نقاط نمودار با محور yها را پیدا کنید.
با استفاده از نمودار، مقدار تقریبی تابع در نقطه‌ی داده شده را به‌دست آورید.

الف) $y = ۹^x \quad ; \quad x = ۰/۸$

ب) $y = (\frac{۱}{۴})^x \quad ; \quad x = ۱/۷$

ج) $y = ۱۰^x \quad ; \quad x = ۰/۳$

د) $y = (\frac{۱}{۱۰})^x \quad ; \quad x = -۱/۳$

۷- مشخص کنید که آیا داده‌های زیر در هر جدول، بیانگر یک تابع نمایی است یا خیر؟ دلیل خود را توضیح دهید.

الف)

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y	۱	۶	۳۶	۲۱۶	۱۲۹۶	۷۷۷۶

ب)

x	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴
y	۵	۹	۱۳	۱۷	۲۱	۲۵

ج)

x	۱	۰	-۱	-۲
y	۴	۱	-۲	-۵

د)

x	۰	۱	۲	۳
y	۱	۰/۵	۰/۲۵	۰/۱۲۵

هـ)

x	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰
y	۱۶	۱۲	۹	۶/۷۵

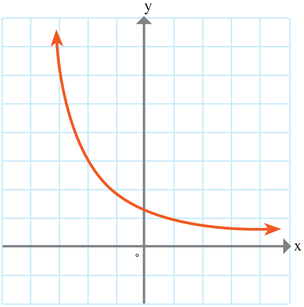
و)

x	−۱	۰	۱	۲
y	−۰/۵	۱/۵	−۲	+۴

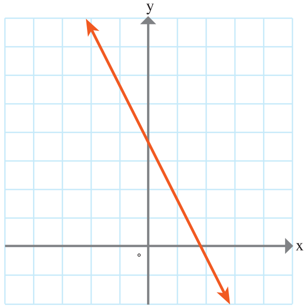
۸- مشخص کنید که از توابع زیر، کدام‌یک خطی هستند، کدام‌یک درجه‌ی دوم و کدام‌یک رفتار نمایی دارند؟

الف) $y = ۷^{x} - ۴$ ب) $y = -x(x+۱)$ ج) $y + ۳x = ۵$

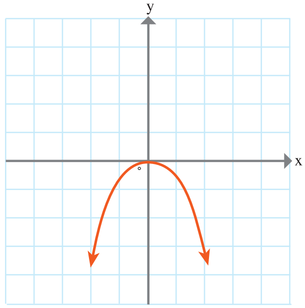
د)



هـ)



و)



(این قسمت از مطالب کتاب یعنی رشد و زوال نمایی، صرفاً جهت اطلاعات بیشتر دانش‌آموزان است و به عنوان سرفصل رسمی درس محسوب نمی‌شود.)

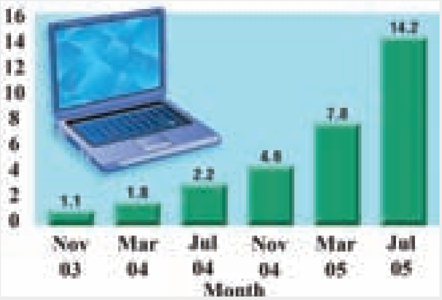
رشد و زوال نمایی

در این بخش به یکی از کاربردهای مهم توابع نمایی می‌پردازیم. ابتدا رشد نمایی را مورد توجه قرار می‌دهیم.

رشد نمایی

در یک بررسی آماری در یکی از کشورها، افزایش تعداد وبلاگ‌ها از نوامبر سال ۲۰۰۳ (آبان ماه ۱۳۸۲) تا جولای ۲۰۰۵ (تیرماه ۱۳۸۴) ۱۳/۷ درصد در هر ماه بوده است. فرض کنید y بیانگر تعداد کل وبلاگ‌ها برحسب میلیون و t بیانگر ماه‌ها از نوامبر ۲۰۰۳ باشد. در این صورت تعداد متوسط وبلاگ‌ها در هرماه از قانون (الگوی) زیر پیروی می‌کند.

$$y = ۱/۱(۱+۰/۱۳۷)^t = ۱/۱(۱/۱۳۷)^t$$



همان گونه که مشاهده می‌شود، رشد وبلاگ‌ها، یک نمونه از رشد نمایی است.
مثال دیگری از رشد نمایی سود بانکی می‌باشد.

پدر علی، مبلغ ۱۰۰ هزار تومان در حساب پس‌انداز، در یکی از بانک‌های کشور ذخیره می‌کند. طبق قانون اعلام شده از سوی بانک، این پول‌ها در ساخت یک بزرگراه سرمایه‌گذاری می‌شود. پیش‌بینی بانک این است که با گرفتن عوارض و درآمدهای تبلیغاتی بزرگراه در ۱۰ سال آینده،

حداقل می‌توان ۱۴ درصد سود پرداخت کرد. پدر علی، به علی می‌گوید که این حساب پس انداز را برای تو باز کرده‌ام و الآن که سن تو ابتدای ۱۷ سال است حساب‌کن که در پایان ۲۵ سالگی ، چه میزان پول در حساب پس‌اندازت وجود خواهد داشت؟

علی شروع به محاسبه کرد. مقدار پس‌انداز پایان سال اول ابتدای ۱۸ سالگی برابر است با :

$$۱۰۰,۰۰۰+(۱۰۰,۰۰۰\times\frac{۱۴}{۱۰۰})=۱۰۰,۰۰۰+۱۴,۰۰۰=۱۱۴,۰۰۰$$

مقدار پس انداز در پایان ۱۸ سالگی برابر است با :

$$۱۱۴,۰۰۰+(۱۱۴,۰۰۰)\times ۰/۱۴=۱۲۹,۹۶۰$$

این عبارت را می‌توان به صورت زیر باز نویسی کرد :

$$[۱۰۰,۰۰۰(۱/۱۴)](۱/۱۴)=۱۰۰,۰۰۰(۱/۱۴)^{۲}$$

به همین صورت اگر ادامه دهیم مقدار پس انداز علی پس از پایان ۲۵ سالگی برابر است با :

$$(۱۰۰,۰۰۰)\times(۱+۰/۱۴)^{۹}$$

بنابراین در حالت کلی، اگر نرخ سود $(۱۰۰\ r)$ درصد و سالیانه قابل پرداخت باشد ، در این صورت اگر مبلغی در پایان سال اول پرداخت می‌گردد (اصل به علاوه سود) $y_۱$ باشد ،

داریم :

$$y_۱=c+rc=c(۱+r)$$

که c مقدار اولیه‌ی پس‌انداز است.

مبلغ پس از دو سال برابر است با :

$$y_۲=[c(۱+r)][۱+r]=c(۱+r)$$

مبلغ پس از ۳ سال برابر است با :

$$y_۳=[c(۱+r)^{۲}][۱+r]=c(۱+r)^{۳}$$

معادله‌ی کلی رشد نمایی، به صورت $y=c(۱+r)^{t}$ است که در آن y بیانگر مقدار نهایی، Cبیانگر مقدار اولیه، r بیانگر میزان رشد (تغییرات) برحسب اعشار و t بیانگر زمان است.

مثال

فرض کنید ۴۰۰ هزار تومان در حساب پس‌اندازی که هر سال ۱۲ درصد سود می‌دهد، ذخیره شده‌است. مبلغ پس‌انداز را در پایان سال سوم حساب کنید .

حل : با توجه به فرمول $y_n = c(1+r)^n$, $n = ۳$, $c = ۴۰۰$, $r = ۰/۱۲$ و لذا،

داریم : $y_۳ = ۴۰۰,۰۰۰(1+۰/۱۲)^۳ = ۵۶۱۹۷۱/۲$

یعنی مبلغ پس انداز در پایان ۳ سال برابر با ۵۰۶/۱۹۷ هزار تومان است.

فعالیت

رشد جمعیت ایران طی سال‌های ۱۳۳۵ تا ۱۳۶۵، حدود ۳ درصد بوده است. اگر جمعیت ایران در سال ۱۳۵۵، حدود ۱۹ میلیون نفر بوده باشد، جمعیت ایران در سال ۱۳۶۵ چند نفر بوده است؟ اگر این رشد همچنان باقی می‌ماند، جمعیت کشور در سال ۱۳۸۸ چند میلیون نفر خواهد بود؟

از سال ۱۳۷۰ رشد جمعیت ایران با کاهش بی‌سابقه‌ای به حدود ۱/۵ درصد تنزل یافت. بنابراین اگر جمعیت ایران در سال ۱۳۶۵ حدود پنجاه میلیون نفر بوده است، با نرخ رشد ۱/۵ درصد، جمعیت ایران در سال ۱۳۸۸چند نفر خواهد بود؟ اگر همین نرخ رشد ثابت بماند، جمعیت ایران در سال ۱۴۰۴ چند نفر خواهد بود؟

زوال نمایی

همانند رشد نمایی، می توان صحبت از زوال نمایی کرد.

معادله‌ی کلی زوال نمایی، به فرم $y = c(1-r)^t$ است که در آن y بیانگر مقدار نهایی، c بیانگر مقدار اولیه، r بیانگر میزان نزول بر حسب اعشار و t بیانگر زمان است.

مثال

۱- یک قایق کاملاً بادی، روزانه ۶/۶۰ درصد بادش را از دست می‌دهد. قایق بادی دارای ۷۳۷۴۱/۷۸۸ سانتی‌متر مکعب باد می‌باشد.

الف) معادله‌ای بنویسید که بیانگر میزان از دست دادن باد قایق باشد.

حل : معادله‌ی کلی برای نزول نمایی به صورت $y = c(۱-r)^t$ است. لذا باتوجه به اطلاعات داده شده در مثال، می‌توان نوشت :

$$y = ۷۳۷۴۱/۷۸۸(۱-۰/۰۶۶)^t = ۷۳۷۴۱/۷۸۸(۰/۹۳۴)^t$$

بنابراین معادله‌ای که بیانگر از دست‌دادن باد در قایق است به صورت $y = ۷۳۷۴۱/۷۸۸(۰/۹۳۴)^t$ است که در آن y بیانگر مقدار باد در قایق برحسب سانتی‌مترمکعب و t بیانگر تعداد روزهاست.

ب) میزان بادی که بعد از ۷ روز قایق از دست می‌دهد، تخمین بزنید.

حل : معادله‌ی از دست دادن باد

$$y = ۷۳۷۴۱/۷۸۸(۰/۹۳۴)^t =$$

$$= ۷۳۷۴۱/۷۸۸(۰/۹۳۴)^۷ \qquad t = ۷$$

$$\approx ۴۵۷۱۹ \qquad \text{با استفاده از ماشین حساب}$$

بنابراین میزان بادی که قایق بعد از ۷ روز از دست داده، ۴۵۷۱۹ سانتی مترمکعب می‌باشد.

۲– جمعیت یکی از کشورهای خارجی، در سال ۲۰۰۰میلادی برابر با ۴۰،۰۰۰،۰۰۰ نفر بوده است. رشد جمعیت این کشور با نرخ ۱٪ در حال کاهش است. جمعیت این کشور در سال ۲۰۱۰ میلادی چند نفر خواهد بود؟

حل : با توجه به این‌که معادله‌ی کلی زوال نمایی به صورت $y = c(۱-r)^t$ می‌باشد با جایگذاری c , r , t، جمعیت این کشور در سال ۲۰۱۰ برابر است با :

$$y = ۴۰،۰۰۰،۰۰۰(۱-۰/۰۱)^{۱۰} = ۳۶۱۷۵۲۸۳$$

مسائل

۱– فرض کنید در یک کشت باکتری ، در پایان ۲ روز تعداد ۳۶۰،۰۰۰ باکتری و در پایان ۴ روز تعداد ۳،۲۴۰،۰۰۰ باکتری وجود دارند. مطلوب است :

الف) تعداد باکتری‌ها در شروع آزمایش

ب) تعداد باکتری‌ها در پایان ۲۴ ساعت

ج) تعداد باکتری‌ها در پایان ۳ روز

د) تعداد روزهایی که در پایان آن تعداد باکتری‌ها برابر با ۲۹،۱۶۰،۰۰۰ خواهدبود.

۲– جمعیت کشور مکزیک در سال ۲۰۰۰ میلادی، برابر با ۱۰۰،۳۵۰،۰۰۰ نفر می‌باشد. اگر نرخ رشد جمعیت ۱/۷٪ در سال باشد، جمعیت کشور مکزیک در سال ۲۰۱۲ چند نفر خواهد بود؟

۳– شخصی در بیست و پنجمین سالگرد تولدش وارث ۵۰،۰۰۰،۰۰۰ تومان شد. اگر این

شخص این مبلغ را با نرخ هشت درصد سود سالیانه سرمایه گذاری کند هنگام بازنشستگی در سن ۶۵ سالگی چه مبلغی دریافت می کند ؟

۴- جمعیت کشور لیتوانی در سال ۲۰۰۵، برابر با ۲،۲۹۰،۲۳۷ نفر بوده‌است. نرخ رشد جمعیت در این کشور با نرخ ۱/۱٪ در حال کاهش است. جمعیت این کشور در سال ۲۰۱۵ میلادی چند نفر خواهد بود؟

۵- (هواشناسی). فشار اتمسفر (برحسب میلی بار) در ارتفاع x برحسب متر از سطح دریا، به‌وسیله‌ی تابع زیر تقریب زده می‌شود.

$$f(x) = ۱۰۳۸(۱/۰۰۰۱۳۴)^{-x}$$

که x بین صفر تا ۱۰۰۰۰ خواهد بود.

الف) میزان فشار در سطح دریا چقدر است؟

ب) رستورانی در ارتفاع ۲۰۰۰ متری در اردبیل قرار دارد.

میزان فشار تقریبی اتمسفر در محل این رستوران چقدر است؟

ج) اگر ارتفاع افزایش پیدا کند ،چه اتفاقی در فشار اتمسفر ایجاد خواهد شد؟

لگاریتم و تابع لگاریتمی

محاسبه لگاریتم یک ابزار مناسب برای توصیف بسیاری از پدیده‌های طبیعی است، محاسبه شدت زلزله، مشخص‌کردن ضعیف‌ترین صدای قابل شنیدن توسط گوش انسان که به آن آستانه شنوایی می گویند و همین‌طور محاسبه آستانه درد که قوی‌ترین صدای قابل تحمل برای گوش انسان است، به کمک این مفهوم ریاضی یعنی لگاریتم قابل تعریف و محاسبه است. در پیش‌بینی تعداد جمعیت یک جامعه پس از زمان معینی که در برنامه‌ریزی اقتصادی نقش تعیین کننده‌ای دارد و یا هنگام محاسبه نیمه عمر عناصر رادیواکتیو که ماده اصلی در انرژی هسته‌ای است از لگاریتم استفاده می کنیم.

در بحث توابع نمایی دیدیم که تکثیر و رشد سلول‌ها از قوانین توابع نمایی پیروی می کنند. به کمک تابع نمایی $y = b^x$ می‌توان به طور مثال تعداد سلول‌ها را پس از زمان x پیش‌بینی کرد. در مواقعی نیاز است که بدانیم تعداد معینی از سلول‌ها پس از چه زمانی به‌وجود می‌آیند، برای پاسخ به این قبیل سؤالات از مفهوم جدیدی به نام تابع لگاریتمی که معکوس تابع نمایی است استفاده می کنیم.

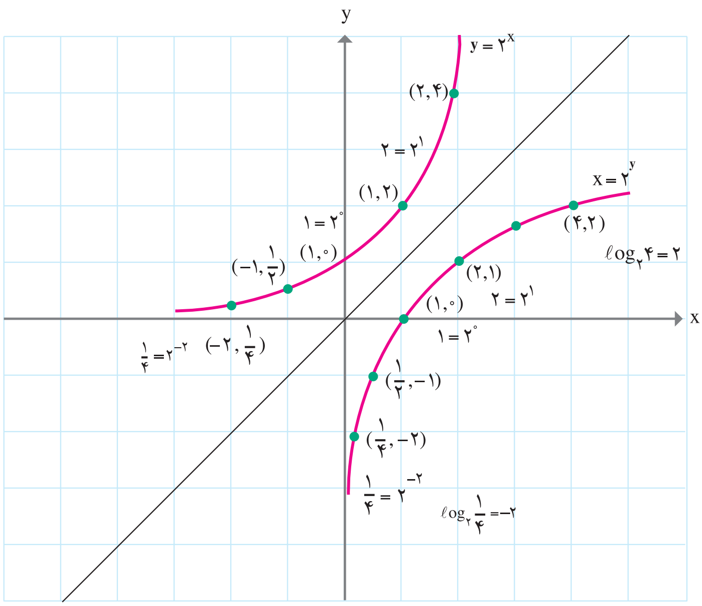
تابع لگاریتمی چیست و چگونه ساخته می‌شود؟

با تابع نمایی $y=2^x$ شروع می‌کنیم که تابعی یک به یک است و بنابراین تابع معکوس آن وجوددارد. به یاد آورید که معکوس تابع یک به یک $y=f(x)$ را می‌توان با یافتن قرینه‌ی نقاط روی نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ ساخت.

به جدول و نمودار زیر توجه کنید :

$y=2^x$	
x	y
۱	۲
۲	۴
۳	۸
۰	۱
-۱	$\frac{1}{2}$
-۲	$\frac{1}{4}$
-۳	$\frac{1}{8}$

$x=2^y$	
x	y
۲	۱
۴	۲
۸	۳
۱	۰
$\frac{1}{2}$	-۱
$\frac{1}{4}$	-۲
$\frac{1}{8}$	-۳



شکل(۱)

در شکل(۱) نمودار تابع نمایی و نمودار تابع معکوس آن (که تابع لگاریتمی نامیده می‌شود) نشان داده شده است. به عنوان مثال نقطه‌ی (۴ و ۲) روی نمودار تابع نمایی است. و نقطه‌ی (۲ و ۴) که قرینه‌ی آن نسبت به خط $y = x$ است روی نمودار تابع معکوس آن (تابع لگاریتمی) قرار دارد.

معکوس $y = ۲^x$ را می‌توان به صورت $x = ۲^y$ نوشت. در عبارت $x = ۲^y$، y را لگاریتم x در پایه‌ی ۲ می‌خوانیم و با نماد $y = \log_۲ x$ نشان می‌دهیم.

مثال

۱- هریک از تساوی‌های زیر را به صورت $x = ۲^y$ بنویسید.

الف) $y = \log_۲ \frac{۱}{۴} = -۲$

$\frac{۱}{۴} = ۲^{-۲}$

ب) $y = \log_۲ ۱ = ۰$

$۱ = ۲^۰$

۲- هر یک از تساوی‌های زیر را به صورت $y = \log_۲ x$ بنویسید.

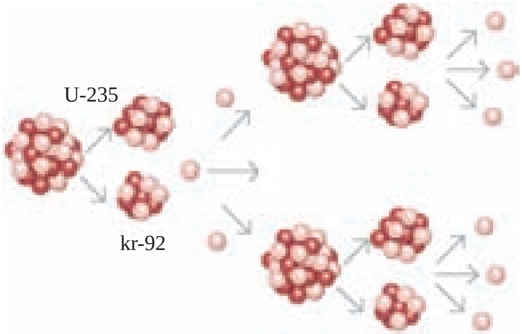
الف) $۲^۵ = ۳۲$

$\log_۲ ۳۲ = ۵$

ب) $۱۶^{\frac{۱}{۲}} = ۴$

$\log_{۱۶} ۴ = \frac{۱}{۲}$

در شکافت هسته‌ی اورانیوم، یک نوترون به هسته‌ی اورانیوم برخورد می‌کند و هسته‌ی اورانیوم به دو هسته‌ی سبک‌تر تقسیم می‌شود و مقداری انرژی، تولید شده و دو یا سه نوترون نیز آزاد می‌شود. نوترون‌های جدید خودشان به هسته‌های دیگر اورانیوم برخورد کرده و منجر به آزادسازی انرژی و نوترون‌های دیگر می‌شوند و همین‌طور این فرایند استمرار می‌یابد، این فرایند، واکنش زنجیره‌ای نامیده می‌شود. فرض کنیم در اثر شکافت هسته‌ی اورانیوم سه نوترون آزاد شود.



تعداد نوترون‌های آزاد شده	مرحله‌ی واکنش زنجیره‌ای
۳	۱
۹	۲
۲۷	۳
۸۱	۴

جدول فوق تعداد نوترون‌های آزاد شده را که از قانون تابع نمایی $y = ۳^x$ پیروی می‌کند نشان می‌دهد و به کمک آن می‌توان تعداد نوترون‌های آزاد شده را در مرحله‌ی x پیش‌بینی کرد. اگر بخواهیم بدانیم تعداد معینی از نوترون‌ها در کدام مرحله به‌وجود می‌آیند از تابع لگاریتمی $y = \log_۳ x$ که معکوس تابع نمایی فوق است استفاده می‌کنیم.

الف) در مرحله ششم چه تعداد نوترون آزاد شده خواهیم داشت؟
ب) در کدام مرحله تعداد نوترون‌های آزاد شده برابر با ۲۴۳ نوترون خواهد بود؟

فعالیت

۱- جدول‌ها را کامل کنید.

۲- هریک از نقاط جدول‌ها را روی صفحه شطرنجی مشخص کنید و سپس نمودارهای تابع $y = ۲^x$ و تابع $y = \log_۲ x$ را رسم کنید.

۳- هر نقطه از نمودار تابع نمایی را با نقطه نظیرش از تابع لگاریتمی مقایسه کنید.

۴- دامنه و برد دو تابع را با هم مقایسه کنید :

$g(x)=\log_{۲} x$	
(x,y)	$y=\log_{۲} x$
$(۱,۰)$	$۰=\log_{۲} ۱$
...	$۱=\log_{۲} ۲$
$(\frac{۱}{۲},-۱)$	...
$(۴,g(۴))$	...
...	$\log_{۲} \frac{۱}{۴}=-۲$
...	$\log_{۲}\sqrt{۲}=\frac{۱}{۲}$
$(۲^{۳},۳)$	...
$(a,g(a))$	...

$f(x)=۲^{x}$	
(x,y)	$y=۲^{x}$
$(۰,۱)$	$۱=۲^{۰}$
$(۱,۲)$	...
...	$\frac{۱}{۲}=۲^{-۱}$
...	$(۲,f(۲))$
...	$\frac{۱}{۴}=۲^{-۲}$
...	...
$(۳,۸)$	...
...	...

نمودار تابع $f(x)=۳^{x}$ و نمودار تابع معکوس آن را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و به این سؤالات پاسخ دهید :

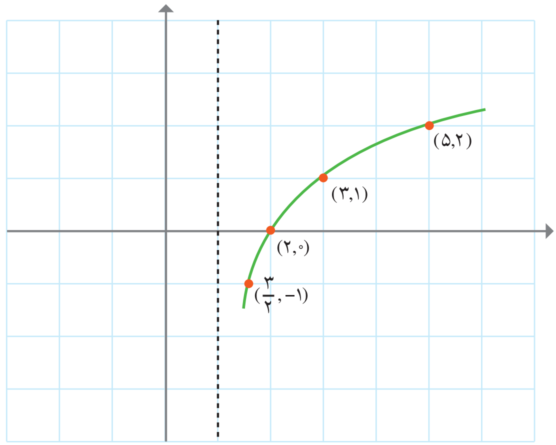
الف) دامنه و برد هرکدام از توابع را مشخص کنید.

ب) دامنه و برد تابع لگاریتمی و تابع معکوس‌اش را با هم مقایسه کنید.

مثال

نمودار تابع $y = \log_{۲}(x - ۱)$ را رسم می‌کنیم.

$y = \log_{۲}(x-۱)$	
x	y
۲	۰
۳	۱
۵	۲
$\frac{۳}{۲}$	-۱
⋮	⋮



توجه کنید که به x مقادیر کمتر از ۱ را نمی‌دهیم. زیرا دامنه‌ی تابع لگاریتمی مقادیر مثبت است.

یعنی باید : $x - ۱ > ۰$ باشد و در نتیجه $x > ۱$ قابل قبول است.

به همین دلیل ابتدا خط $x = ۱$ را به صورت نقطه‌چین رسم می‌کنیم تا نمودار راحت‌تر و دقیق‌تر رسم شود.

فعالیت

می‌خواهیم نمودار تابع $y = \log_{\frac{۱}{۲}} x$ و نمودار تابع $y = (\frac{۱}{۲})^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم.

۱- ابتدا جدول صفحه‌ی بعد را تکمیل کنید :

(x,y)	$y=\log_{\frac{۱}{۲}} x$	$y=(\frac{۱}{۲})^x$	(x,y)
$(\frac{۱}{۲},۱)$	$۱=\log_{\frac{۱}{۲}} \frac{۱}{۲}$		$(۱,\frac{۱}{۲})$
$(۲,-۱)$	$-۱=\log_{\frac{۱}{۲}} ۲$		$(-۱,۲)$
$(۴,-۲)$	$-۲=\log_{\frac{۱}{۲}} ۴$		$(-۲,۴)$
$(\frac{۱}{\sqrt{۲}},\frac{۱}{۲})$	...	...	$(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{\sqrt{۲}})$
			(,)

۲- هریک از نقاط دو جدول را در دستگاه مختصات مشخص کرده، نمودار تابع لگاریتمی را رسم کنید.

۳- نمودار معکوس تابع لگاریتمی را نسبت به خط $y=x$ رسم کنید.

۴- دامنه و برد تابع نمایی را از روی نمودار مشخص کنید.

۵- دامنه و برد تابع لگاریتمی را از روی نمودار مشخص کنید.

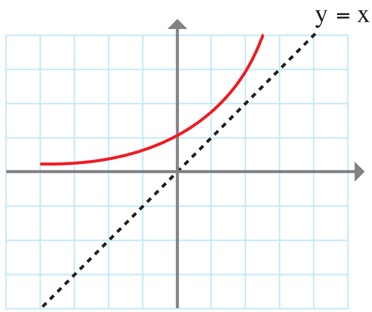
۶- حدس می‌زنید که نمودارهای تابع $y=(\frac{۱}{۳})^x$, $y=\log_{\frac{۱}{۳}} x$ چگونه باشند.

به نمودارهای زیر توجه کنید.

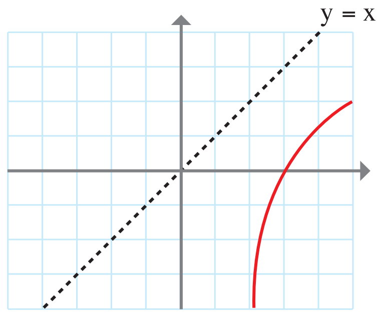
کدام شکل نمودار کدام تابع می‌تواند باشد؟

الف) $y=\log_2(x-2)$ ب) $y=\log_3 x$ ج) $y=2^{-x}$

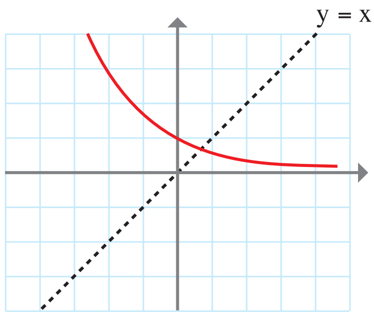
د) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ هـ) $y=2+\log_2 x$



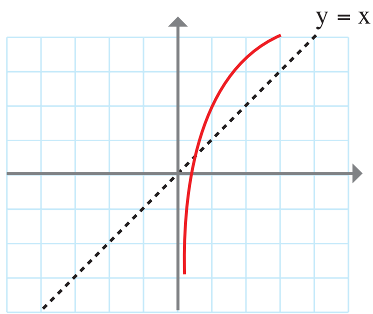
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

مجدداً به فعالیت‌های ۱ و ۲ و ۳ توجه کنید. ملاحظه می‌کنید که تابع لگاریتمی برای مقادیر مثبت x تعریف می‌شود.

دامنه تعریف توابع لگاریتمی مقادیر مثبت است و برد توابع لگاریتمی مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ است.

محاسبه‌ی لگاریتم یک عدد

تابع $f(x)=\log_{۳} x$ را درنظر بگیرید. می‌خواهیم $f(۸۱)$ را به‌دست آوریم :

فرض کنیم : $f(۸۱)=y$ یا $\log_{۳} ۸۱=y$

از تعریف لگاریتم داریم : $۸۱=۳^y$ و یا $۳^y=۳^۴$ و در نتیجه : $y=۴$

مثال

$\log_{۸} ۲$ و $\log_{\frac{۱}{۳}} ۸۱$ را محاسبه کنید.

الف) $\log_{۸} ۲=y$

$$۲=۸^y$$

$$۲=۲^{۳y}$$

$$۱=۳y$$

$$y=\frac{۱}{۳}$$

ب) $\log_{\frac{۱}{۳}} ۸۱=y$

$$۸۱=\left(\frac{۱}{۳}\right)^y$$

$$۸۱=۳^{-y}$$

$$y=-۴$$

۱– نشان دهید که :

۱) $\log_{۴} ۱۶=۲$ ۲) $\log_{۳} \frac{۱}{۲۷}=-۳$

۲– مقدار $\log_{۵} ۵$ و $\log_{\frac{۱}{۶}} \frac{۱}{۶}$ را محاسبه کنید. در حالت کلی $a\neq ۱$ و $a>۰$ و $\log_a a$ را محاسبه و عبارت زیر را کامل کنید.

لگاریتم هر عدد a در پایه‌ی ...... مساوی ...... است.

۳- در عبارت‌های زیر y را بیابید.

الف) $\log_{۴} ۱ = y$ ب) $\log_{۲} ۸ = y$ ج) $\log_{۱۰} ۰/۰۱ = y$ د) $\log_{\frac{۱}{۶}} ۳۶ = y$

معادله‌ی لگاریتمی

عبارت‌های زیر نمونه‌هایی از معادلات لگاریتمی هستند.

۱) $\log_{۱۰} x = ۲$ ۲) $\log_{۳} x = \log_{۳} ۵$

۳) $\log_{۲} x + \log_{۲} ۵ = ۴$ ۴) $\log_{۲}(x+۱) + \log_{۲} x = \log_{۲} ۶$

منظور از حل معادله‌ی لگاریتمی یافتن مقدار و یا مقدارهایی برای x است که در معادله صدق کند.

مثال

معادلات لگاریتمی زیر را با توجه به تعریف لگاریتم حل می‌کنیم.

الف) $\log_{۱۰} x = ۲$

$x = ۱۰^{۲}$

$x = ۱۰۰$

ب) $\log_{۵} x = -۱$

$x = ۵^{-۱}$

$x = \frac{۱}{۵}$

معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\log_{۳} x = ۴$ ۲) $\log_{۲}(x-۱) = -۱$ ۳) $\log_{۰/۰۱} x = \frac{۱}{۲}$

در حل بسیاری از معادلات لگاریتمی به حالتی می‌رسیم که در طرفین تساوی دو لگاریتم قراردارد. برای ادامه حل به مفهوم زیر نیاز داریم :

ـ اگر $a > ۰$ و $a \neq ۱$ باشد آن‌گاه از تساوی $\log_a x = \log_a z$ می‌توان تساوی $x = z$ را نتیجه گرفت و بالعکس.

مثال

۱) $\log_۲ x = \log_۲ \sqrt{۲}$

$$x = \sqrt{۲}$$

۲) $\log_۵ (۲x - ۱) = \log_۵ x$

$$۲x - ۱ = x$$

$$x = ۱$$

۳) $\log_۷ (x^۲ - ۲) = \log_۷ x$

$$x^۲ - ۲ = x$$

$$x^۲ - x - ۲ = ۰$$

$$x = \frac{۱ \pm \sqrt{۱ + ۸}}{۲}$$

$$x = ۲ \;,\; x = -۱$$

۴) $\log_۵ x = \log_۵ ۷$

$$x = ۷$$

در مثال شماره‌ی ۳، $x = -۱$ قابل قبول نیست زیرا لگاریتم برای اعداد مثبت تعریف می‌شود. به بیان دیگر $x = -۱$ در دامنه‌ی تعریف لگاریتم‌های معادله‌ی فوق نیست.

معادلات زیر را حل کنید : (جواب‌های قابل قبول برای معادلات زیر را مشخص کنید.)

۱) $\log_۳ (x^۲ - ۱۵) = \log_۳ ۲x$

۲) $\log_{۱۰} (x^۲ - ۳۰) = \log_{۱۰} x$

۳) $\log_x ۱۶ = ۲$

قوانین (قضایا) لگاریتم‌ها

هنگام حل بسیاری از مسائل واقعی در فیزیک، پزشکی، زمین‌شناسی و ... که در آن‌ها معادلات لگاریتمی به‌کار رفته است نیازمند استفاده از قوانینی که بین لگاریتم‌ها برقرار است می‌شویم. به همین جهت در این بخش به بیان و اثبات این قوانین می‌پردازیم.

همان‌طور که می‌دانیم : $۱۶\times ۱۲۸ = ۲^۴ \times ۲^۷ = ۲^{۴+۷}$

می‌خواهیم ببینیم که آیا درباره لگاریتم‌ها نیز می‌توان نوشت : $\log_۲ ۲^۴ \times ۲^۷ = \log_۲ ۲^۴ + \log_۲ ۲^۷$

دو طرف تساوی را جداگانه محاسبه می‌کنیم.

$\log_۲ ۲^۷ = b$ $\qquad$ $\log_۲ ۲^۴ = a$ $\qquad$ $\log_۲ ۱۶\times ۱۲۸ = \log_۲ ۲^۴ \times ۲^۷ = \log_۲ ۲^{۱۱} = y$

$۲^۷ = ۲^b$ $\qquad$ $۲^۴ = ۲^a$ $\qquad$ مطابق تعریف لگاریتم $\quad ۲^{۱۱} = ۲^y$

$b = ۷$ $\qquad$ $a = ۴$ $\qquad$ $y = ۱۱$

بنابراین : $\log_۲ ۲^۴ + \log_۲ ۲^۷ = a + b = ۴ + ۷ = ۱۱$

در حالت کلی نیز می‌توان ثابت کرد که :

برای اعداد حقیقی و مثبت a , b , c که $(c \neq ۱)$

$$\log_c a.b = \log_c a + \log_c b$$

حال به اثبات رابطه بالا می‌پردازیم. با فرض اینکه $\log_c ab = p$ ، از تعریف لگاریتم داریم :

$ab = c^p$

$\log_c b = n \ , \ \log_c a = m$

$b = c^n \quad , \ a = c^m$

$ab = c^m \times c^n = c^{m+n}$

$ab = c^p$

$ab = c^{m+n}$

بنابراین : $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$ یا $c^p = c^{m+n}$

مثال

$\log_{۱۰} ۲ + \log_{۱۰} ۵ = \log_{۱۰} ۱۰ = ۱$

برای هر عدد حقیقی مثبت c,b,a که $(c \neq ۱)$ است می‌توان ثابت کرد که:

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

مثال

برای محاسبه‌ی $\log_{۱۰} ۰/۱$ می‌توان نوشت :

$\log_{۱۰} \frac{۱}{۱۰} = \log_{۱۰} ۱ - \log_{۱۰} ۱۰ = ۰ - ۱ = -۱$

از اینکه $\log_۳ ۵ = ۱/۴۶۵۰$ و $\log_۳ ۲۰ \simeq ۲/۷۲۶۸$ است، استفاده می‌کنیم و $\log_۳ ۴$ را محاسبه می‌نماییم.

$\log_۳ ۴ = \log_۳ \frac{۲۰}{۵} = \log_۳ ۲۰ - \log_۳ ۵ \simeq ۱/۲۶۱۸$

ثابت کنید $\log_c a^x = x\log_c a$ و $x \in \mathbb{R}$ و a و c اعداد حقیقی مثبت (راهنمایی : فرض کنید $\log_c a = n\ ,\ \log_c a^x = m$)

مثال

الف) $\log_{5}\sqrt{5} = \log_{5} 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_{5} 5 = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$

ب) $2\log_{10}\sqrt{2} + \log_{10} 5 = \log_{10}(\sqrt{2})^2 + \log_{10} 5 = \log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10} 10 = 1$

مسائل

۱- درستی تساوی $\log_c abd = \log_c a + \log_c b + \log_c d$ را تحقیق کنید. (a و b و c و d اعداد حقیقی مثبت‌اند و $c \neq 1$ است.)

۲- نشان دهید که : $\log 3^5 = 5\log 3$

۳- از تساوی $a^n = \underbrace{a.a. \ldots .a}_{n \text{ بار}}$ ، $n \in \mathbb{N}$ استفاده کنید و رابطه‌ی $\log_c a^n = n\log_c a$ را نتیجه بگیرید.

۴- حاصل عبارات زیر را محاسبه کنید :

۱) $\log_{10} 100$ ۲) $\log_{10} 1000$ ۳) $\log_{10} 4 + \log_{10} 25$ ۴) $2\log_{10} 4 + \log_{10} 4$

۵- اگر $\log_{10} 3 = n\ ,\ \log_{10} 2 = m$ باشد عبارات زیر را محاسبه کنید : (برحسب n,m)

۱) $\log_{10} 18$ ۲) $\log_{10} 32 + \log_{10} 27$

۶- از این‌که $\log_4 2 = 0/5$ است استفاده کنید و $\log_4 32$ را محاسبه کنید.

۷- حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید :

۱) $\log_2 16$ ۲) $\log_7 \frac{1}{49}$ ۳) $\log_2 \sqrt{8}$ ۴) $\log_3 54 - \log_3 2$

۵) $2\log_{10} 5 + \log_{10} 4$ ۶) $2\log_{10} 2 + \log_{10} 250$

۷) $\log_{10} 24 - \frac{1}{2}\log_{10} 9 + \log_{10} 125$ ۸) $3\log_{10}\sqrt[3]{4} - \log_{10} 25$

حل معادلات لگاریتمی با استفاده از قوانین لگاریتم‌ها

از قوانین لگاریتم‌ها استفاده کرده و مثال‌هایی از معادلات لگاریتمی را حل می‌کنیم.

مثال

۱) $3\log_5 x - \log_5 4 = \log_5 16$

$$\log_5 x^3 - \log_5 4 = \log_5 16$$

$$\log_5 \frac{x^3}{4} = \log_5 16 \Rightarrow \frac{x^3}{4} = 16 \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = 4$$

اگر در معادله‌ی اصلی به جای x عدد ۴ را قرار دهیم :

$$3\log_5 4 - \log_5 4 = \log_5 16$$

$$2\log_5 4 = \log_5 16$$

$$2\log_5 4 = \log_5 4^2$$

بنابراین جواب x=۴ قابل قبول است.

۲)

$$\log_3 x + \log_3 (2x+1) = 1$$

$$\log_3 x(2x+1) = 1$$

$$2x^2 + x = 3^1$$

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$x = 1 ,\ x = -\frac{3}{2}$$

جواب‌ها را در معادله‌ی اصلی قرار می‌دهیم :

$$\log_3 1 + \log_3 3 = 1$$

$$\log_3 (-\frac{3}{2}) + \log_3 2(-\frac{3}{2}) + 1 = 1$$

توجه کنید که $x = -\frac{3}{2}$ در دامنه‌ی تعریف لگاریتم‌ها نیست و بنابراین جواب قابل قبول برای معادله‌ی لگاریتمی نیست. بنابراین تنها جواب x=۱ در معادله‌ی اصلی صدق می‌کند.

مسائل

۱– معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱) $\log_{۹} x = \frac{۳}{۲}$

۲) $\log_{۵}(x+۱) = \frac{۱}{۲}$

۳) $\log_{۱۰}(۴-x) = \log_{۱۰}(۶-x) - \log_{۱۰} x$

۴) $\log_{۳} ۵ + \log_{۳} x = \log_{۳} ۱۰$

۵) $\log_{۴} a + \log_{۴} ۹ = \log_{۴} ۲۷$

۶) $\log_{۱۰} ۱۶ - \log_{۱۰} ۲x = \log_{۱۰} ۲$

۷) $\log_{۷} ۲۴ - \log_{۷}(x+۵) = \log_{۷} ۸$

۸) $\log_{۲} n = \frac{۱}{۴}\log_{۲} ۱۶ + \log_{۲} ۴۹$

۹) $\log_{a} ۴n - ۲\log_{a} x = \log_{a} x$

۱۰) $\log_{b} ۸ + ۳\log_{b} n = ۳\log_{b}(x-۱)$

۱۱) $\log_{۱۰} z + \log_{۱۰}(z+۳) = ۱$

۱۲) $\log_{۶}(a^{۲}+۲) + \log_{۶} ۲ = ۲$

۱۳) $\log_{۲}(t+۲) + \log_{۲}(t-۲) = ۱$

۱۴) $\log_{۴} x + \log_{۴}(x-۶) = ۲$

۱۵) $\log_{\frac{۱}{۱۰}}(x^{۲}-۱) = -۱$

۲– برای هر عدد حقیقی و مثبت که c,e,a,x که $(c,e \neq ۱)$ است ثابت کنید.

۱) $\log_{c} \frac{۱}{x} = -\log_{c} x$

۲) $\log_{c} a = \frac{\log_{e} a}{\log_{e} c}$

۳) $c^{\log_{c} a} = a$

۴) $\log_{c} c^{a} = a$

۳– با استفاده از قوانین لگاریتم‌ها یا هر راه حل دیگر نشان دهید که :

۱) $\log_{۲۷} ۳ \times \log_{۳} ۲۷ = ۱$

۲) $\log_{۷} ۴۹ = ۲\log_{۷} ۷ = ۲$

۳) $\log_{۳}(\log_{۳}(\log_{۲} ۸)) = ۰$

۴- کدام راه‌حل درست و کدام یک نادرست است؟ استدلال کنید.

۱) $\log_{۳} x = ۹$

$۳^x = ۹$

$۳^x = ۳^۲$

$x = ۲$

۲) $\log_{۳} x = ۹$

$x = ۳^۹$

$x = ۱۹۰۸۳$

۵- آیا راه حل زیر درست است؟
استدلال کنید.

$\log_{۱۰}(۲x - ۱) = ۰$

$\log_{۱۰} ۲x - \log_{۱۰} ۱ = ۰$

$\log_{۱۰} ۲x - ۰ = ۰$

$۲x = ۱$

$x = \frac{۱}{۲}$

۶- معادله‌ی $\log_{۱۰}(x+۲) = \log_{۱۰} ۸ - \log_{۱۰}(x-۵)$ را حل کنید.
چگونه می‌توانید از درستی جواب به‌دست آمده اطمینان حاصل کنید؟

۷- با توجه به نمودار تابع $y = \log_۲ x$ نمودار تابع $y = \log_۲(x+۱)$ و تابع معکوس آن‌را رسم کنید.

۸- یکی از کاربردهای مفهوم لگاریتم در شیمی، محاسبه‌ی pH یک محلول است. بر طبق تعریف، pH معیاری از میزان اسیدی، بازی (قلیایی) یا خنثی بودن یک محلول است و از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$$pH = -\log_{۱۰}\left[H_۳O^+\right]$$

در این رابطه $\left[H_۳O^+\right]$ غلظت یون هیدرونیوم[1] را نشان می‌دهد.

الف) pH هریک از محلول‌های زیر را حساب کنید.

۱- در آب پرتقال غلظت یون هیدرونیوم $(H_۳O^+)$ برابر $۲/۹ \times ۱۰^{-۴}$ مول بر لیتر است.

---

۱. یون هیدرونیوم، $H_۳O^+$، از جمله یون‌های چند اتمی مهمی است که در فرآیندهای زیستی اهمیت بسیاری دارد و واحد اندازه‌گیری آن مول بر لیتر است.

$(\log ۲۹ = ۱/۴۶)$

۲– در شیر منیزی (شربت معده) غلظت یون هیدرونیوم (H_3O^+) برابر $۲/۵ \times ۱۰^{-۱۱}$ مول بر لیتر است.

$(\log ۲۵ = ۱/۳۹)$

۳– در آب خالص غلظت یون هیدرونیوم (H_3O^+) برابر ۱×۱۰^{-۷} مول بر لیتر است.

ب) محلول‌ها را بر مبنای مقدار pH آن‌ها به سه دسته به صورت زیر تقسیم می‌کنند.

۱) اسیدی $pH < ۷$

۲) خنثی $pH = ۷$

۳) بازی $pH > ۷$

مقدار غلظت یون هیدرونیوم در محلول خنثی چند مول بر لیتر است؟

خواندنی

ـ زمین‌لرزه یا زلزله، لرزش و جنبش خفیف یا شدید زمین است که به علت آزاد شدن انرژی ناشی از گسیختگی سریع در پوسته زمین در مدتی کوتاه به وقوع می‌پیوندد. محلی که منشأ زلزله از آن‌جا شروع شده و انرژی ازآن خارج می‌شود را کانون زلزله و نقطه‌ی بالای کانون در سطح زمین را مرکز زلزله می گویند.

بزرگی زمین لرزه از رابطه لگاریتمی $\log E = ۱۱/۴ + ۱/۵M$ به‌دست می‌آید که در آن M بزرگی زلزله در مقیاس ریشتر و E انرژی آزاد شده در واحد ارگ است. رابطه‌ی فوق نشان می‌دهد که با افزایش یک درجه‌ای M مقدار انرژی آزاد شده تقریباً ۳۲ برابر می گردد. انرژی یک زلزله‌ی ۸ ریشتری را برابر با انرژی انفجار یک میلیارد تن ماده‌ی انفجاری TNT برآورد کرده‌اند.

$$\log E = ۱۱/۴ + ۱/۵ \times ۸ = ۲۳/۴ \Rightarrow E = ۱۰^{۲۳/۴}$$

زلزله‌ها از جنبه‌ی آزاد شدن انرژی به دو صورت افقی و عمودی تقسیم‌بندی می‌گردند. خرابی‌های عمده و وسیع معمولاً براثر زلزله‌هایی از نوع افقی صورت می‌گیرد.

البته باید توجه داشت که میزان انرژی رسیده به هر نقطه از سطح زمین علاوه بر میزان انرژی آزاد شده درمرکز به مجموعه عواملی از قبیل فاصله از مرکز زلزله، جنس خاک، مقاومت بنا و ... بستگی دارد.

زلزله‌ای که در سال ۱۳۶۹ در منطقه‌ی رودبار رخ داد ۷/۳ ریشتر بود. میزان انرژی آزادشده در مرکز زلزله را تخمین بزنید.

همچنین بزرگی زلزله‌ی بم در سال ۱۳۸۲، ۶/۶ ریشتر گزارش شده است. میزان انرژی آزادشده در این منطقه را تخمین بزنید.