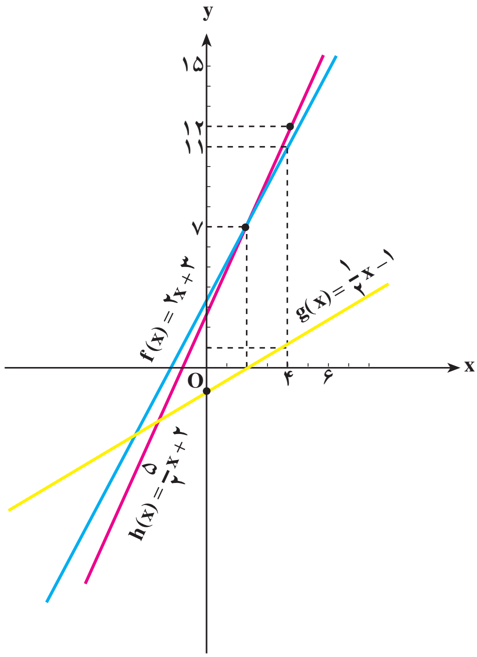
x	۲	۴	۶
$f(x)$	$۴+۳=۷$	$۸+۳=۱۱$	$۱۲+۳=۱۵$
$g(x)$	$۱-۱=۰$	$۲-۱=۱$	$۳-۱=۲$
$f(x)+g(x)$	$۷+۰=۷$	$۱۱+۱=۱۲$	$۱۵+۲=۱۷$
$h(x)=\frac{۵}{۲}x+۲$	$۵+۲=۷$	$۱۰+۲=۱۲$	$۱۵+۲=۱۷$

به‌طوری که دیده می‌شود : $f(۲)=۷$ و $g(۲)=۰$ و $f(۲)+g(۲)=۷$ و $h(۲)=۷$ است.

در جدول‌های قبل مشاهده می‌شود که مقادیر $f(x)+g(x)$ و $h(x)$ برای xهای موردنظر با یکدیگر برابرند. این مطلب ما را به تعریف تابع جدید $h=f+g$ ، که مجموع دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ می‌باشد، رهنمون می‌سازد یعنی :

$$y=h(x)=(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

در شکل زیر نمودار تابع‌های f و g و h مثال بالا را رسم کرده‌ایم. ملاحظه می‌شود که برای همهٔ xهای موردنظر اندازه‌های به‌دست آمده بر روی نمودار با اعداد به‌دست آمده در جدول سازگار است.



تمرین

مقدار هر یک از توابع $f(x)=x$ و $g(x)=x^۲-۱$ و $h(x)=x(x^۲-۱)$ را برای $x=-۱$ و $x=۰$ و $x=۱$ محاسبه کنید و با تشکیل جدولی مقادیر به‌دست آمده برای $f(x)\times g(x)$ را با $h(x)$ مقایسه نمایید. آیا از روی آن می‌توانید تعریفی برای حاصل‌ضرب دو تابع نتیجه بگیرید؟

همان‌طور که دیده‌ایم، در توابع حقیقی مقدار تابع برای هر مقدار از دامنه، عددی حقیقی است. بنابراین همان‌گونه که در اعداد حقیقی، چهار عمل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم تعریف می‌شود برای توابع نیز می‌توان مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت تعریف کرد.

تعریف: دو تابع حقیقی f و g را در نظر می‌گیریم و دامنه آن‌ها را یکسان می‌کنیم، یعنی دامنه آن‌ها را مجموعه $D = D_f \cap D_g$ قرار می‌دهیم. فرض کنید x متعلق به D باشد، در این صورت :

الف ــ **مجموع** دو تابع f و g را با نماد $f + g$ نشان می‌دهیم و آن‌را چنین تعریف می‌کنیم :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

ب ــ **تفاضل** دو تابع f و g را با نماد $f - g$ نشان می‌دهیم و آن را چنین تعریف می‌کنیم :

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

ج ــ **حاصل‌ضرب** دو تابع را با نماد $f.g$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$(f.g)(x) = f(x) \times g(x)$$

د ــ **تقسیم** دو تابع f و g را با نماد $\frac{f}{g}$ نشان می‌دهیم و آن‌را چنین تعریف می‌کنیم :

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad , \quad g(x) \neq ۰$$

دامنهٔ همهٔ توابع تعریف شده در بالا $D_f \cap D_g$ است مگر در حالت (د) که باید جواب‌های $g(x) = ۰$ را از دامنهٔ مشترک حذف کرد.

مثال ۱: اگر $f(x) = x^۲ + x$ و $g(x) = x^۲ - ۱$ داریم :

$$D_f = \mathbb{R} \text{ ، } D_g = \mathbb{R}$$

برای مجموع، تفاضل و حاصل‌ضرب $\quad D = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad D = \mathbb{R}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^۲ + x + x^۲ - ۱ = ۲x^۲ + x - ۱$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^۲ + x - x^۲ + ۱ = x + ۱$$

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = (x^۲ + x)(x^۲ - ۱) = x^۴ + x^۳ - x^۲ - x$$

و برای $\frac{f}{g}$:

$$D = \mathbb{R} - \left\{x \middle| g(x) = ۰\right\} = \mathbb{R} - \left\{x \middle| x^۲ - ۱ = ۰\right\} = \mathbb{R} - \{-۱, +۱\}$$

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{y(x)} = \frac{x^۲ + x}{x^۲ - ۱} = \frac{x}{x - ۱}$$

پس :

$$(f+g)(-۲)=۲(-۲)^۲+(-۲)-۱=۵$$
$$(f-g)(-۲)=-۲+۱=-۱$$
$$(\frac{f}{g})(۳)=\frac{۳}{۳-۱}=\frac{۳}{۲}$$
$$(f.g)(۱)=۱+۱-۱-۱=۰$$

$\frac{f}{g}$ در $x=۱$ تعریف نشده است. بنابراین $(\frac{f}{g})$ (۱) را نمی‌توان تشکیل داد.

مثال ۲: اگر $f(x)=۲x+۴$ و $g(x)=x^۲-۳$ ، برای جمع، تفریق و ضرب دو تابع داریم :

$$D_f=\mathbb{R}\ ,\ D_g=\mathbb{R}\ ,\ D=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$$
$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=۲x+۴+x^۲-۳=x^۲+۲x+۱=(x+۱)^۲$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=۲x+۴-x^۲+۳=-x^۲+۲x+۷$$
$$(f.g)(x)=f(x)g(x)=(۲x+۴)(x^۲-۳)=۲x^۳-۶x+۴x^۲-۱۲$$
$$=۲x^۳+۴x^۲-۶x-۱۲$$

و برای تقسیم دو تابع :

$$D=\mathbb{R}-\{x|\,g(x)=۰\}=\mathbb{R}-\{x|\,x^۲-۳=۰\}$$

پس :

$$D=\mathbb{R}-\{-\sqrt{۳},+\sqrt{۳}\}$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۲x+۴}{x^۲-۳}$$

مثال ۳: اگر $f(x)=\frac{۱}{x}$ و $g(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ باشد دامنه و قانون تابع‌های $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را چنین حساب می‌کنیم :

$$D_f=\mathbb{R}-\{۰\}\quad,\quad D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$$

داریم :

$$D_{f-g}=(\mathbb{R}-\{۰\})\cap(\mathbb{R}-\{۱\})=\mathbb{R}-\{۰\ ,\ ۱\}$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{۱}{x}-\frac{x+۱}{x-۱}=\frac{x-۱-x^۲-x}{x(x-۱)}=\frac{-x^۲-۱}{x(x-۱)}$$
$$D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x|\,g(x)=۰\}=D_f\cap D_g-\left\{x\left|\frac{x+۱}{x-۱}=۰\right.\right\}$$
$$D_{f/g}=\mathbb{R}-\{۰,۱,-۱\}$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۱}{x}\div\frac{x+۱}{x-۱}=\frac{x-۱}{x(x+۱)}$$

مثال ۴: اگر $P(x)=x+۱$ و $h(x)=\sqrt{x-۱}$ باشد داریم :

$$D_P=\mathbb{R}\ ,\ D_h=\{x\,|\,x-۱\geq ۰\}=[۱,+\infty)$$

$$D_{p.h}=\mathbb{R}\cap[۱,+\infty)=[۱,+\infty)\quad (p.h)(x)=(x+۱)\sqrt{x-۱}$$

$$D_{p/h}=[۱,+\infty)-\{x\,|\,\sqrt{x-۱}=۰\}=(۱,+\infty)$$

$$(\frac{P}{h})(x)=\frac{x+۱}{\sqrt{x-۱}}$$

مثال ۵: در صورتی‌که $f(x)=۳x-۱$ و $g(x)=\frac{x+۱}{۳x-۱}$ ، داریم :

$$D_f=\mathbb{R}\quad ,\quad D_g=\mathbb{R}-\{\frac{۱}{۳}\}\quad\Rightarrow\quad D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{\frac{۱}{۳}\}$$

$$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)=۳x-۱\pm\frac{x+۱}{۳x-۱}=\begin{cases}\frac{۹x^۲-۵x+۲}{۳x-۱}=(f+g)(x)\\ \frac{۹x^۲-۷x}{۳x-۱}=(f-g)(x)\end{cases}$$

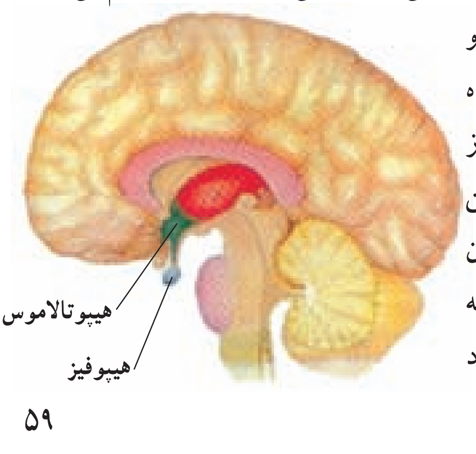
$$(f.g)(x)=(۳x-۱)\left(\frac{x+۱}{۳x-۱}\right)=x+۱$$

$$D_{f/g}=\mathbb{R}-\{\frac{۱}{۳}\}-\{x|g(x)=۰\}=\mathbb{R}-\{\frac{۱}{۳},-۱\}$$

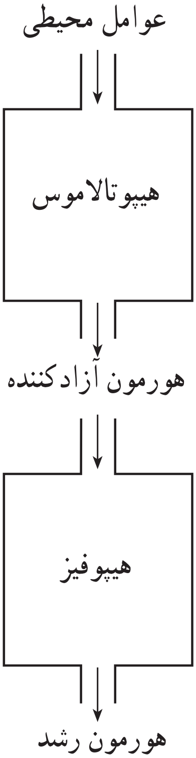
$$(\frac{f}{g}).(x)=(۳x-۱)\div(\frac{x+۱}{۳x-۱})=\frac{(۳x-۱)^۲}{x+۱}$$

۲ــ ترکیب دو تابع حقیقی

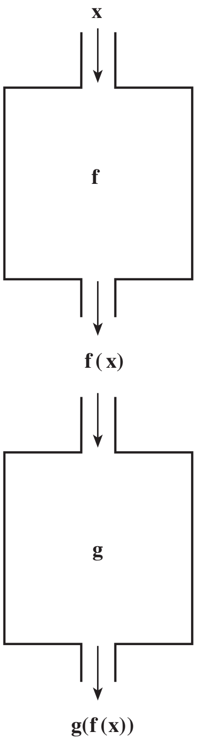
هیپوتالاموس بخشی از مغز است که تنظیم محیط درون بدن را انجام می‌دهد. اگر گرسنه یا تشنه می‌شویم یا دمای بدنمان افزایش یا کاهش می‌یابد، همگی با فرماندهی هیپوتالاموس انجام می‌شود، برای مثال هیپوتالاموس با تأثیر از عوامل محیطی و شرایط درون بدن، ملکولی به‌نام «هورمون آزادکننده هورمون رشد» را به درون خون ترشح می‌کند. پس از رسیدن این ملکول به غدهٔ هیپوفیز که بر سطح زیرین مغز چسبیده است، غده هیپوفیز به آزادسازی هورمون رشد در خون می‌پردازد. هورمون رشد از راه خون به بافت استخوان می‌رسد و بر سلول‌های آن اثر می‌گذارد و باعث رشد استخوان می‌شود.



بنابراین رشد استخوان تابعی از «هورمون رشد» و هورمون رشد تابعی از «هورمون آزادکننده هورمون رشد» است، درنتیجه رشد استخوان از ترکیب این دو تابع به‌دست می‌آید. چنان‌چه تابع را به‌عنوان یک ماشین درنظر بگیریم کار هیپوتالاموس و هیپوفیز را می‌توان به‌صورت روبه‌رو نشان داد :



اکنون اگر عمل هیپوتالاموس بر عوامل محیطی و شرایط درون بدن را با f و عمل غدهٔ هیپوفیز را با g نمایش دهیم، ترکیب دو تابع f و g را به‌صورت روبه‌رو خواهیم داشت :



پیش از تعریف ترکیب دو تابع به مثال‌های زیر توجه کنید :

مثال ۱ : اگر $f(x)=x^{۲}-۲x$ و $g(x)=۲x+۱$ ، می‌خواهیم مقادیر $g(۰)$ و $g(\frac{۱}{۲})$ و $g(۲x)$ و سپس $f(۱)$ و $f(۲)$ و $f(۲x+۱)$ و $f(۴x+۱)$ را محاسبه کنیم.

داریم :
$$D_f=\mathbb{R}\ ,\ D_g=\mathbb{R}$$

$$g(۰)=۲(۰)+۱=۱\quad ,\quad g(\frac{۱}{۲})=۲(\frac{۱}{۲})+۱=۱+۱=۲$$

$$g(۲x)=۲(۲x)+۱=۴x+۱$$

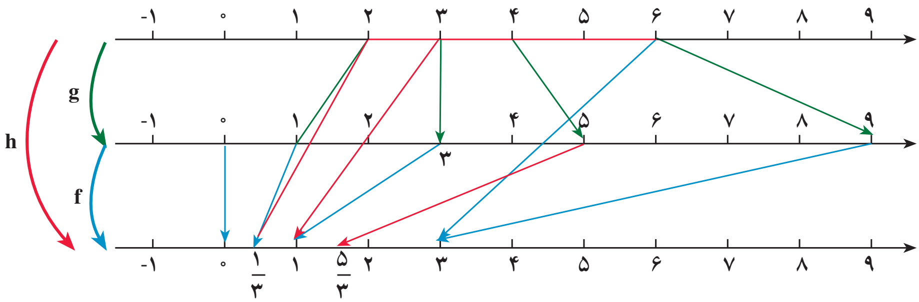
$$f(۱)=(۱)^{۲}-۲(۱)=۱-۲=-۱\qquad f(۲)=(۲)^{۲}-۲(۲)=۴-۴=۰$$

$$f(۲x+۱)=(۲x+۱)^{۲}-۲(۲x+۱)=۴x^{۲}-۱$$

$$f(۴x+۱)=(۴x+۱)^{۲}-۲(۴x+۱)=۱۶x^{۲}+۸x+۱-۸x-۲=۱۶x^{۲}-۱$$

مثال ۲ : توابع
$$\begin{cases}f:[۰,۹]\to\mathbb{R}\\ f(x)=\frac{۱}{۳}x\end{cases}\ ,\ \begin{cases}g:[۲,۶]\to\mathbb{R}\\ g(x)=۲x-۳\end{cases}\ ,\ \begin{cases}h:[۲,۶]\to\mathbb{R}\\ h(x)=\frac{۲}{۳}x-۱\end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم و نمودار و جدول آن‌ها را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم :



x	$۲x-۳$	$\frac{۱}{۳}(۲x-۳)=\frac{۲}{۳}x-۱$
۲	۱	$\frac{۱}{۳}$
۳	۳	۱
⋮	⋮	⋮
۶	۹	۳

$h(۲)=\frac{۱}{۳}$

$h(۳)=۱$

⋮

$h(۶)=۳$

به‌طوری که دیده می‌شود :

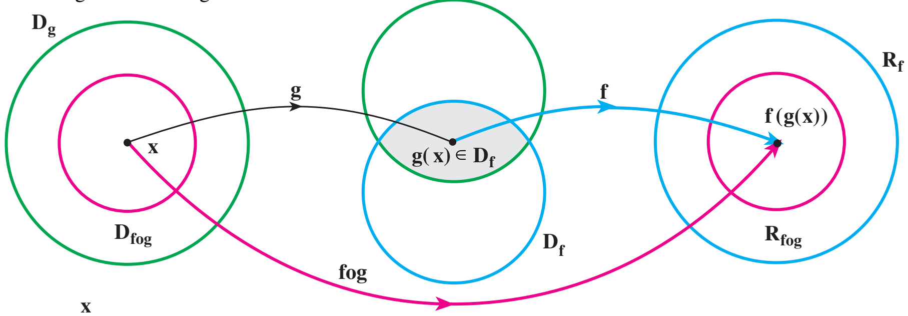
$$x \xrightarrow{g} ۲x-۳=y \xrightarrow{f} f(y)=f(۲x-۳)=\frac{۲}{۳}x-۱=h(x) \Rightarrow h(x)=f(g(x))$$

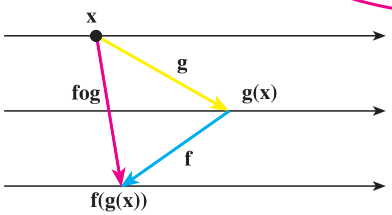
یعنی $h:x\mapsto \frac{۲}{۳}x-۱$ تابعی است که نخست بر روی x مانند تابع g عمل می‌کند و آن را به $g(x)=۲x-۳$ تبدیل می‌نماید، آنگاه بر $g(x)=۲x-۳$ مانند تابع f عمل می‌نماید و آن را به $\frac{۱}{۳}(۲x-۳)$ تبدیل می‌کند.

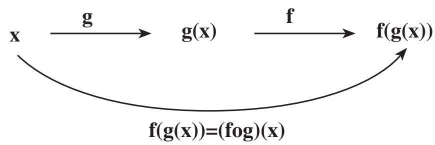
تابع h را که به این ترتیب به‌دست می‌آید ترکیب دو تابع f و g می‌نامند. اینک به بیان تعریف کلی زیر می‌پردازیم :

تعریف: ترکیب دو تابع g و f تابعی است که آن را با نماد fog نشان می‌دهیم (بخوانید اف اُجی) و به‌صورت $(fog)(x)=f(g(x))$ یا $fog:x\mapsto f(g(x))$ تعریف می‌کنیم، دامنهٔ این تابع همهٔ عددهای حقیقی x متعلق به D_g است به‌طوری که $g(x)$ متعلق به D_f باشد یعنی :

$$D_{fog}=\{x\in D_g | g(x)\in D_f\}$$







مثال ۱: اگر $f(x)=x^۲$ ، $g(x)=\sqrt{x}$ ، داریم :

$$(fog)(x)=f(g(x))=(g(x))^۲=(\sqrt{x})^۲=x$$

توجه کنید که دامنهٔ تابع $(fog)(x)=x$ ، $\mathbb{R}$ نیست زیرا :

$$D_f=\mathbb{R} , D_g=\{x\in\mathbb{R}|x\geq ۰\}=[۰,+\infty)$$

پس :

$$D_{fog}=\{x\in[۰,+\infty)|\ \sqrt{x}\in\mathbb{R}\}$$

اما $\sqrt{x}\in\mathbb{R}$ برقرار است ؛ زیرا $x\in[۰,+\infty)$.

بنابراین داریم :

$$D_{fog}=[۰,+\infty)$$

$$(fog)(x)=x \quad , \quad x\in[۰,+\infty)$$

مثال ۲: دو تابع $f(x)=x-۲$ و $g(x)=\sqrt{x+۱}$ داده شده‌اند. دامنهٔ تابع‌های fog و gof را محاسبه نمایید و سپس توابع gof و fog را تشکیل دهید.

حل:

$$D_f=\mathbb{R}\ ,\ D_g=[-۱\ ,\ +\infty)$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}\ |\ x-۲\in[\ \ ۱\ ,\ +\infty)\}$$

$$x-۲\in[\ \ ۱\ ,\ +\infty)\Rightarrow x-۲\geq\ \ ۱\Rightarrow x\geq ۱$$

$$D_{gof}=[۱,+\infty)$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}=\{x\in[\ \ ۱\ ,\ \infty)|\ \sqrt{x+۱}\in\mathbb{R}\}=[-۱,+\infty)$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)+۱}=\sqrt{x-۲+۱}=\sqrt{x-۱}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=g(x)-۲=\sqrt{x+۱}-۲$$

مثال ۳: تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x-۳$ داده شده است تابع fof را تشکیل دهید.

حل:

$$D_f=\mathbb{R}\ ,\ D_{fof}=\{x\in\mathbb{R}|\ \frac{۱}{۳}x-۳\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$$

$$(fof)(x)=f(f(x))=\frac{۱}{۳}f(x)-۳=\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۳}x-۳)-۳$$

$$(fof)(x)=\frac{۱}{۹}x-۱-۳=\frac{۱}{۹}x-۴$$

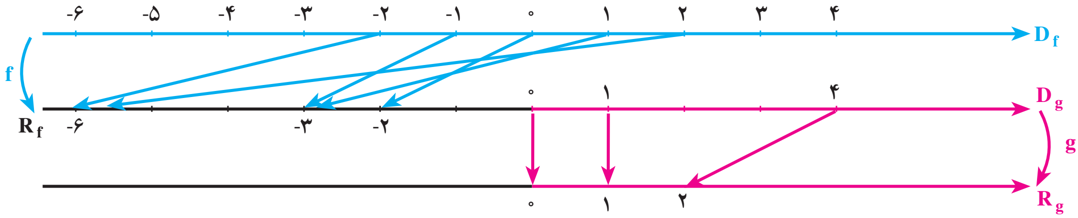
مثال ۴: اگر $f(x)=x^۲$ و $g(x)=x-۲$ ، جدول زیر همهٔ عملیات تعریف شده روی این دو تابع را نشان می‌دهد.

عمل	تابع	قانون تابع	دامنه
$+$	$f+g$	$(f+g)(x)=x^۲+x-۲$	$D_f\cap D_g$
$-$	$f-g$	$(f-g)(x)=x^۲-x+۲$	$D_f\cap D_g$
$\times$	$f.g$	$(fg)(x)=x^۲(x-۲)$	$D_f\cap D_g$
$\div$	$\frac{f}{g}$	$(\frac{f}{g})(x)=\frac{x^۲}{x-۲} \quad ; \quad x\neq ۲$	$D_f\cap D_g-\{x\|g(x)=۰\}$
o	fog	$(fog)(x)=(x-۲)^۲$	$\{x\in D_g\|g(x)\in D_f\}$
	gof	$(gof)(x)=x^۲-۲$	$\{x\in D_f\|f(x)\in D_g\}$

توجه: به‌طوری که دیده می‌شود $(gof)(x)=x^۲-۲$ و $(fog)(x)=(x-۲)^۲$ و چون $x^۲-۲\neq(x-۲)^۲$ پس درحالت کلی $fog\neq gof$

در برخی از موارد ترکیب دو تابع ممکن نیست به مثال زیر توجه کنید.

مثال: دو تابع $x\geq ۰\ ,\ g:x\to\sqrt{x}$ و $x\in\mathbb{R}\ ,\ f:x\to -x^۲-۲$ داده شده‌اند، نمودار زیر نشان می‌دهد که ترکیب gof ممکن نیست زیرا $D_g\cap R_f=\varnothing$



تمرین: آیا در مثال بالا ترکیب دو تابع به‌صورت fog ممکن است؟

مثال: دو تابع $f(x)=\frac{۲}{x}$ و $g(x)=\frac{۱}{۱-x^۲}$ داده شده‌اند. عملیات روی این دو تابع را می‌توان نظیر جدول قبل مشخص کرد.

عمل	تابع	قانون تابع	دامنه
$+$	$h=f+g$	$h(x)=\frac{۲}{x}+\frac{۱}{۱-x^۲}$	$\mathbb{R}-\{۰,-۱,+۱\}$
$-$	$h=f-g$	$h(x)=\frac{۲}{x}-\frac{۱}{۱-x^۲}$	$\mathbb{R}-\{۰,-۱,+۱\}$
$.$	$h=f.g$	$h(x)=\frac{۲}{x}\times\frac{۱}{۱-x^۲}=\frac{۲}{x(۱-x^۲)}$	$\mathbb{R}-\{۰,-۱,+۱\}$
$\div$	$h=\frac{f}{g}$	$h(x)=\frac{۲}{x}\div\frac{۱}{۱-x^۲}=\frac{۲(۱-x^۲)}{x}\quad g(x)\neq ۰$	$\mathbb{R}-\{۰,-۱,+۱\}$
$\div$	$h=\frac{g}{f}$	$h(x)=\frac{۱}{۱-x^۲}\div\frac{۲}{x}=\frac{x}{۲(۱-x^۲)}\quad f(x)\neq ۰$	$\mathbb{R}-\{۰,-۱,+۱\}$
o	$h=fog$	$h(x)=f\big(g(x)\big)=\frac{۲}{\frac{۱}{۱-x^۲}}=۲(۱-x^۲)$	$\{x\in\mathbb{R}-\{\pm۱\}\mid\frac{۱}{۱-x^۲}\in\mathbb{R}-\{۰\}\}=\mathbb{R}-\{\pm۱\}$
o	$h=gof$	$h(x)=g\big(f(x)\big)=\frac{۱}{۱-\frac{۴}{x^۲}}=\frac{x^۲}{x^۲-۴}$	$\{x\in\mathbb{R}-\{۰\}\mid\frac{۲}{x}\in\mathbb{R}-\{\pm۱\}\}=\mathbb{R}-\{۰,\pm۲\}$

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{۱-x}$ و $g(x)=\sqrt{x-۱}$ باشد، تابع $P(x)=f(x)+g(x)$ را به‌دست آورید.

داریم : $D_f=\{x|۱-x\geq ۰\}=(-\infty\ ,\ ۱]$

$D_g=\{x|\ x-۱\geq ۰\}=[۱\ ,\ +\infty)$

پس : $D_P=D_f\bigcap D_g=\{۱\}\ ,\ P(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{۱-x}+\sqrt{x-۱}$

یا $P(۱)=۰$ ، بنابراین $P=\{(۱,۰)\}$

تمرین

۱ــ توابع f و g داده شده‌اند، تابع‌های $f\pm g$ و fog و $\frac{f}{g}$ و دامنه‌های آن‌ها را به‌دست آورید.

$f(x)=x^{۲}+۲\quad ,\ g(x)=۴x+۲$

$f(x)=\frac{۲x-۳}{۵}\quad ,\ g(x)=\frac{x}{x-۱}$

$f(x)=۲x^{۲}-x\quad ,\ g(x)=\frac{۱}{x}$

$f(x)=\sqrt{x-۱}\quad ,\ g(x)=x-۱$

$f(x)=\frac{x+۳}{x-۳}\quad ,\ g(x)=\frac{x-۳}{x+۳}$

$f(x)=\sin ۲x\quad ,\ g(x)=\sin x$

$f(x)=\tan x\quad ,\ g(x)=\cot x$

۲ــ توابع $f(x)=-۲$ و $g(x)=x^{۲}+۱$ داده شده‌اند :

الف ــ توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ و $\frac{g}{f}$ را تشکیل دهید ؛

ب ــ نمودار تابع‌های f، g و $f+g$ را در یک‌دستگاه محورهای مختصات رسم کنید (بهتر است در ترسیم از رنگ‌های مختلف استفاده شود).

۳ــ برای توابع f و g داده شده در زیر، تابع‌های fog و gof و دامنه‌های آن‌ها را مشخص نمایید.

۱) $f(x)=x+۲\quad ,\ g(x)=x^{۲}-۳$

۲) $f(x)=x^{۲}+x\quad ,\ g(x)=\sqrt{۴x+۱}$

۳) $f(x)=\frac{x}{x+۱}$, $g(x)=۲x^۲-x+۱$

۴) $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sqrt{۱-x^۲}$

۵) $f(x)=x^۲+۲x+۱$, $g(x)=|x|$

۴ــ اگر $f(x)=x$ و $g(x)=(x+۱)^۲$ باشد $(gof)(x)-(fog)(x)$ را بیابید.

۵ــ اگر $f(x)=x+a$ و $g(x)=ax^۲+bx+c$ باشد a و b و c را طوری تعیین کنید که داشته باشیم $(fog)(x)=x^۲-۳x+۴$.

۶ــ اگر $f(x)=\tan x$ و $g(x)=\sqrt{\frac{۲x}{۱+x^۲}}$ باشد gof را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

۷ــ اگر $f(x)=\frac{۱}{x}$ باشد fof را به‌دست آورید و سپس $f[f(۳)]$ را محاسبه نمایید.

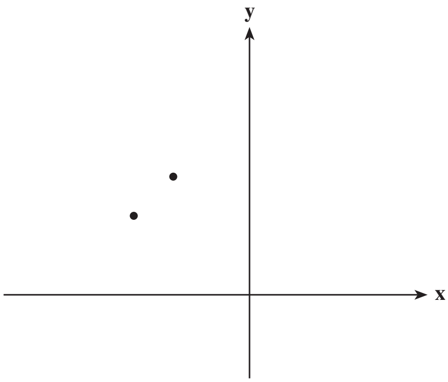
فصل سوم

حد و پیوستگی

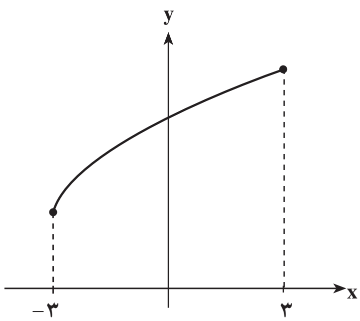
احمد یکی از دانش‌آموزان درس ریاضی ۳ است. احمد علاقه‌مند به رسم توابع و تشخیص چگونگی نمودار تابع است. یک روز او تصمیم گرفت نمودار تابع $y=f(x)=\frac{x-۱}{\sqrt{x+۳}-۲}$ را در بازه $[-۳,۳]$ رسم کند. احمد با استفاده از ماشین‌حساب با محاسبات تقریبی جدول زیر را تشکیل داد

x	−۳	−۲/۵	−۲	−۱/۵	−۱	−۰/۵	۰	۰/۵	۱/۵	۲	۲/۵	۳
y	۲	۲/۷	۳	۳/۲۲	۳/۴۱	۳/۵۸	۳/۷۳	۳/۸۷	۴/۱۲	۴/۲۳	۴/۳۴	۴/۴۴

احمد به‌ازای $x=۱$ مقدار تابع را حساب نکرد. چون تابع در این نقطه تعریف نشده است و این نقطه در دامنه تابع قرار ندارد. او نقاط به‌دست آمده از نمودار تابع را در صفحه مشخص کرد.



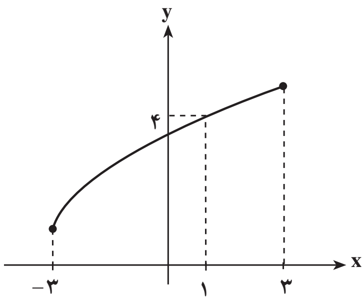
احمد نتیجه گرفت نمودار تابع باید به شکل زیر باشد.



یکی از دوستان احمد گفت این تابع در $x=۱$ تعریف نشده است اما این نمودار مقداری برای این تابع در $x=۱$ مشخص می‌کند. حتماً در این نتیجه‌گیری اشکالی وجود دارد. احمد برای اطمینان از درستی نتیجه‌گیری خود گفت بهتر است مقدارهای این تابع در اطراف نقطه $x=۱$ را بیشتر بررسی کنیم. اگرچه تابع در $x=۱$ تعریف نشده است ولی می‌توانیم برای مقدارهایی از x نزدیک ۱ مقدارهای تابع را حساب کنیم و ببینیم آیا مقدارهای به‌دست آمده همانند نمودار رسم شده عدد خاصی را نشان می‌دهند؟ این بار احمد جدولی ساخت که مقدارهای تابع را در نزدیکی‌های نقطه ۱ حساب کند.

x	۰/۸	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	$\rightarrow$ ۱ $\leftarrow$	۱/۰۰۰۰۱	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
y	۳/۹۴	۳/۹۷	۳/۹۹۷	۳/۹۹۹۷	۳/۹۹۹۹۷	$\rightarrow$? $\leftarrow$	۴/۰۰۰۰۰۲	۴/۰۰۰۲	۴/۰۰۰۲	۴/۰۰۲	۴/۰۲

با محاسبه جدول بالا احمد نتیجه‌گیری کرد که با نزدیک شدن مقدارهای x به ۱ مقدارهای f(x) به ۴ نزدیک می‌شوند. نمودار رسم شده برای تابع نیز چنین مطلبی را نشان می‌دهند.



آنچه که احمد برای بررسی این تابع در اطراف نقطه ۱ انجام داد حدگیری نام دارد و می‌گویند حد تابع $y=\frac{x-۱}{\sqrt{x+۳}-۲}$ در نقطه ۱ برابر ۴ است.

موارد بسیاری پیش می‌آید که تابعی مانند f(x) در نقطه‌ای مانند a تعریف نشده باشد ولی ما علاقه‌مند باشیم بدانیم که مقدارهای تابع برای مقدارهای x نزدیک a چگونه است. در این حالت باید بررسی کرد که با نزدیک شدن x به a آیا مقدارهای f(x) به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟

تمرین

۱ــ تابع $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ با قانون $f(x)=x^۲+۳x+۴$ مفروض است. مقدار f(x) را برای هر x داده شده در جدول‌های صفحهٔ بعد محاسبه کنید (تا چهار رقم اعشار) و نتیجهٔ محاسبه را بنویسید (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

x	···	−۳	−۲/۹	−۲/۵	−۲/۱	−۲/۰۱	−۲/۰۰۱	−۲/۰۰۰۱	−۲/۰۰۰۰۱	···→	−۲
f(x)	···									···→	

x	−۲	←···	−۱/۹۹۹۹	−۱/۹۹۹	−۱/۹۹	−۱/۹	−۱/۸	−۱/۵	−۱/۲	−۱	···
f(x)		←···									···

نتیجه: جدول‌های بالا نشان می‌دهند که وقتی x به سمت عدد ... نزدیک می‌شود، تابع f(x) به عدد ... نزدیک می‌شود.

۲ـ تابع $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با قانون $g(x) = x^{۲} - ۲x$ داده شده است. مقادیر g(x) را برای هر x داده شده در جدول زیر محاسبه کنید (تا چهار رقم اعشار) و نتیجه را بنویسید.

x	···	۰	۰/۱	۰/۵	۰/۸	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	···→	۱
g(x)	···									···→	

x	۱	←···	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	۱/۲	۱/۵	۱/۹	۲	···
g(x)		←···									···

نتیجه: جدول بالا نشان می‌دهد...

۳ـ تابع $h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با قانون $h(x) = -x^{۲} + ۴$ مفروض است. مقدارهای h(x) را برای هر x داده شده در جدول زیر محاسبه کنید (تا چهار رقم اعشار) و نتیجه را بنویسید.

x	···→	−۱	−۰/۹	−۰/۵	−۰/۳	−۰/۱	−۰/۰۱	−۰/۰۰۱	−۰/۰۰۰۱	···→	۰	←···	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۲	۰/۵	۱
h(x)	···→									···→		←···							

نتیجه: جدول بالا نشان می‌دهد...

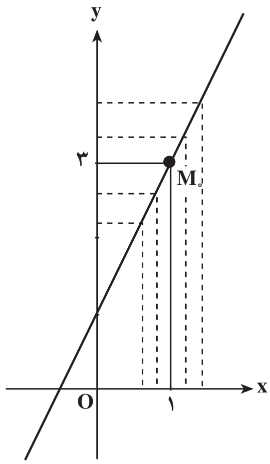
مثال ۱ : تابع $f(x) = ۲x + ۱$ را در نظر می‌گیریم و مقدار این تابع را برای برخی مقادیر x کوچک‌تر از ۱ که به تدریج به عدد ۱ نزدیک می‌شوند، هم‌چنین مقدار این تابع را برای بعضی مقادیر x بزرگ‌تر از ۱ که به تدریج به عدد ۱ نزدیک می‌شوند، محاسبه می‌کنیم.

x	···	۰	۰/۵	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	···→	۱	←···	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	۱/۵	۲	···
f(x)	···	۱	۲	۲/۸	۲/۹۸	۲/۹۹۸	···→	۳	←···	۳/۰۰۲	۳/۰۲	۳/۲	۴	۵	···

نمودار تابع $f(x)=۲x+۱$ را رسم می‌کنیم. برای این منظور کافی است دو نقطه از خط را مشخص کنیم :

$$A\left|\begin{array}{l} x=۰ \\ y=۱ \end{array}\right.$$

$$B\left|\begin{array}{l} x=-\frac{۱}{۲} \\ y=۰ \end{array}\right.$$



همان‌طور که از جدول و نمودار دیده می‌شود با نزدیک شدن متغیر x به عدد ۱، مقدار تابع f یعنی f(x) به عدد ۳ نزدیک می‌شود.

مثال ۲: تابع $f(x)=x^۲-۲x+۳$ داده شده است. می‌خواهیم :

الف ــ رفتار این تابع را در نزدیکی $x_۰=۲$ بررسی کنیم ؛

ب ــ نمودار این تابع را رسم کرده و از روی آن درستی محاسبهٔ قسمت الف را بررسی کنیم.

حل: الف ــ مقادیر f(x) را برای برخی از مقدارهای x نزدیک به عدد ۲ محاسبه می‌کنیم و در جدول زیر می‌نویسیم.

x	…	۱	۱/۲	۱/۵	۱/۸	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	…→	$\boxed{۲}$	←…	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱	۲/۵	۲/۹	۳	…
f(x)	…	۲	۲/۰۴	۲/۲۵	۲/۶۴	۲/۸۱	۲/۹۸	۲/۹۹۸	…→	$\boxed{۳}$	←…	۳/۰۰۲	۳/۰۲	۳/۲	۴/۲۵	۵/۶۱	۶	…

به‌طوری که دیده می‌شود، هرگاه x به عدد ۲ نزدیک می‌شود، f(x) به عدد ۳ نزدیک می‌شود.