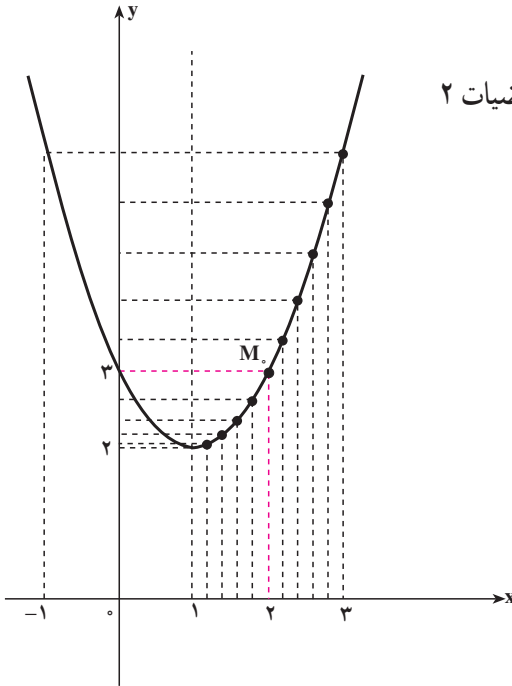


ب - نمودار تغییرات این تابع در ریاضیات ۲

رسم شده است.



از روی نمودار نیز دیده می شود که وقتی x به عدد ۲ نزدیک می شود، $f(x)$ به عدد ۳ نزدیک

می شود.

مثال ۳: تابع f ، با ضابطه $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ ، $x \neq 1$ ، را در نظر می گیریم. می خواهیم رفتار این

تابع را در نزدیکی $x_0 = 1$ بررسی کنیم.

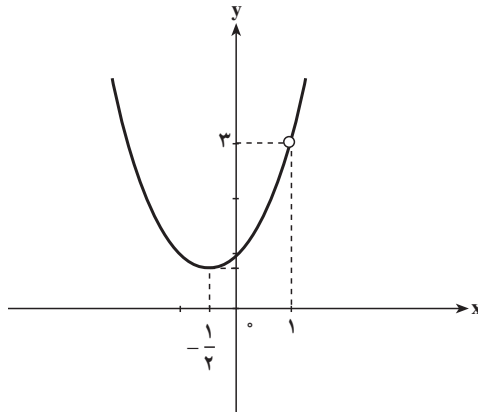
حل: مقدارهای $f(x)$ را برای برخی از مقدارهای x نزدیک به عدد ۱ محاسبه می کنیم. این

مقدارها در جدول زیر درج شده اند.

x	...	۰/۷۵	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	...	→ ۱	← ...	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	۱/۲۵	...
$f(x)$...	۲/۳۱۳	۲/۷۱	۲/۹۷۰	۲/۹۹۷	...	→ ۳	← ...	۳/۰۰۳	۳/۰۳۰	۳/۳۱	۳/۸۱۳	...

به طوری که جدول نشان می دهد با نزدیک شدن x به عدد ۱ (از راست یا چپ)، $f(x)$ به عدد ۳

نزدیک می شود.



مثال ۴: تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ را با دامنه $(1, \infty)$ در نظر بگیرید. می‌خواهیم مقادیر این تابع را در نزدیکی ۱ بررسی کنیم. در جدول زیر مقادیر تقریبی این تابع را به ازای برخی از مقادیر x در نزدیکی ۱ محاسبه کرده‌ایم.

x	$1 \leftarrow$	$1/0001$	$1/001$	$1/01$	$1/1$
y	$? \leftarrow$	$0/001$	$0/03$	$0/1$	$0/3$

همان‌طور که جدول نشان می‌دهد با نزدیک شدن x به ۱ مقادیر تابع f به صفر نزدیک می‌شوند.

تعریف حد توابع

اگر دامنه تابع f بازه I باشد و نقطه a به گونه‌ای باشد که بتوان از داخل I به a نزدیک شد، یعنی بتوان داخل I نقاطی متمایز از a را یافت که به a نزدیک باشند (به هر میزان که بخواهیم)، آنگاه با نزدیک شدن متغیر x (در بازه I) به نقطه a ممکن است مقادیر تابع $f(x)$ به عدد خاصی مانند L نزدیک شوند که در این حالت می‌گوییم تابع f در نقطه a حد دارد و حد آن L است و می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

با توجه به مثال‌های صفحات قبل می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2 + 4) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-1} = 0$$

مثال ۵: برای تابع $y = 1 + \sqrt{x}$ با دامنه $(0, \infty)$ می‌توان از داخل دامنه این تابع به صفر نزدیک شد و با نزدیک شدن $x \in (0, \infty)$ به صفر، مقدار $1 + \sqrt{x}$ به ۱ نزدیک می‌شود، پس

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sqrt{x}) = 1$$

مثال ۶: برای تابع $y = \sqrt{1-x^2}$ با دامنه $(-1, 1)$ می‌توان از داخل دامنه این تابع به -1 نزدیک شد و با نزدیک شدن $x \in (-1, 1)$ به -1 مقادیر $\sqrt{1-x^2}$ به صفر نزدیک می‌شوند، پس

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{1-x^2} = 0$$

تمرین

۱- هر یک از جدول‌های زیر را کامل کنید، و حد هر تابع را در نقطه مورد نظر مشخص کنید (برای محاسبه می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} (-2x + 5)$

x	...	0	0/5	0/9	0/99	0/999	...	1	...	1/0001	1/001	1/01	1/1	1/5	...
f(x)

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x + 3)$

x	...	-1	-0/5	-0/1	-0/01	-0/001	-0/0001	...	0	...	0/0001	0/001	0/01	0/1	0/5	1	...
f(x)

پ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$

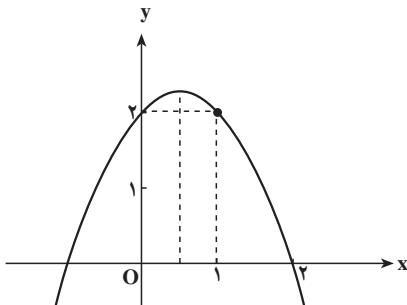
x	...	-2	-1/5	-1/1	-1/01	-1/001	-1/0001	...	-1	...	-0/999	-0/99	-0/9	-0/8	-0/5	0	...
f(x)

ت) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$

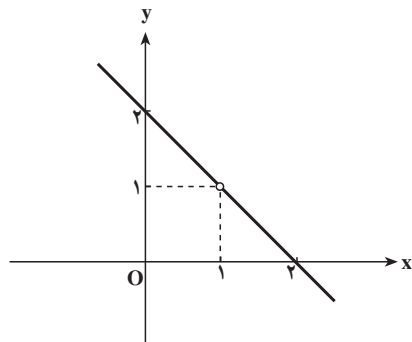
x	...	2	2/5	2/9	2/99	2/999	...	3	...	3/001	3/01	3/1	3/5	4	...
f(x)

۲- با تشکیل جدول، حد تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$ را در صفر تعیین کنید.

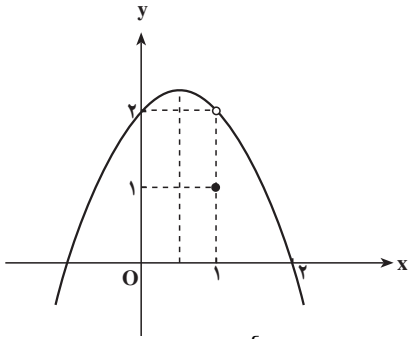
۳- با استفاده از نمودار، حد توابع زیر را در نقطه داده شده (در صورت وجود) مشخص کنید.



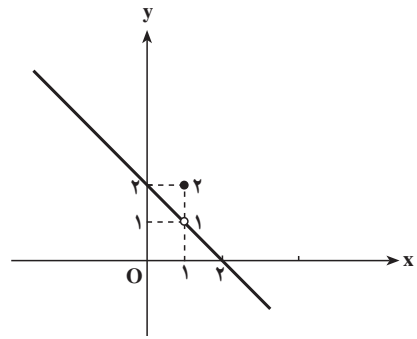
ب) $\lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 + x + 2)$



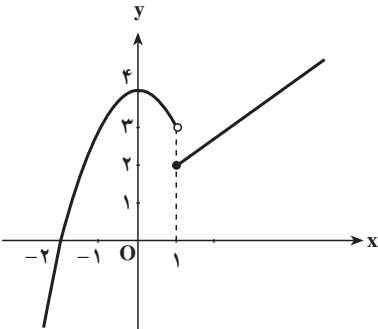
الف) $\lim_{x \rightarrow 1} (-x + 2)$



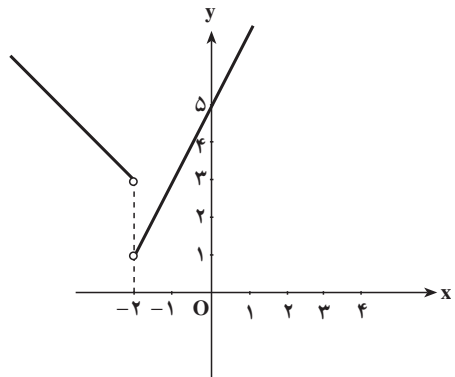
$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x), f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 2, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$



$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x), f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$



$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x), f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 1 \\ -x^2 + 4, & x < 1 \end{cases}$$



$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow 2} f(x), f(x) = \begin{cases} 2x + 5, & x > 2 \\ -x + 1, & x \leq 2 \end{cases}$$

نکته: باید توجه کنید که حد تابعی مانند f در نقطه‌ای مانند x_0 ، به معین بودن یا معین نبودن تابع

در x_0 بستگی ندارد. یعنی ممکن است:

(۱) تابع f در x_0 تعریف نشده باشد، اما وقتی x به x_0 نزدیک می‌شود، حد داشته باشد.

(۲) تابع f در x_0 تعریف شده باشد اما وقتی x به x_0 نزدیک می‌شود، تابع حد نداشته باشد.

به علاوه هنگامی که تابع در نقطه x_0 دارای حد است، حد تابع می‌تواند با مقدار تابع برابر باشد

یا نباشد. یعنی ممکن است:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

مثال ۱: می‌خواهیم حد تابع $f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{x-3}, x \neq 3$ را در $x = 3$ به دست آوریم.

حل: این تابع در $x = 3$ تعریف نشده است. اما وقتی x به عدد ۳ نزدیک می‌شود دارای حد

است، زیرا برای $x \neq 3$ داریم

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = x-2$$

$$\Rightarrow f(x) = x-2, \quad x \neq 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x-2) = 1$$

(قبلاً دیدیم که $\lim_{x \rightarrow 3} (x-2) = 1$ است).

بنابراین دیده می‌شود که تابع فوق در $x = 3$ تعریف نشده است، اما در $x = 3$ دارای حد است.

$$\text{مثال ۲: تابع } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & x \neq 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases} \text{ داده شده است. می‌خواهیم حد این تابع را در}$$

$x = 2$ تعیین کنیم.

حل: این تابع در $x = 2$ تعریف شده است زیرا $f(2) = 5$ ، و همان‌طور که در مثال ۲ دیده شد،

داریم $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 3) = 3$ پس این تابع در $x = 2$ ، دارای حد است اما حد آن با مقدار تابع در

$x = 2$ برابر نیست ($3 \neq 5$).

مثال ۳: می‌خواهیم حد تابع $f(x) = x^2 + 3x + 4$ را در $x = -2$ تعیین کنیم.

حل: قبلاً دیدیم که $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 3x + 4) = 2$ ؛ از طرفی این تابع در $x = -2$ معین است و

مقدار $f(-2)$ برابر است با: $f(-2) = (-2)^2 + 3(-2) + 4 = 2$.

مقدار تابع در $x = -2$ برابر است، یعنی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 3x + 4) = f(-2) = 2$$

$$\text{مثال ۴: تابع } f \text{ با ضابطه } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq 1 \\ 2x + 1, & x < 1 \end{cases} \text{ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم حد این}$$

تابع را در عدد ۱ تعیین کنیم.

حل: این تابع در $x = 1$ تعریف شده است. قبلاً دیدیم که وقتی x از طرف راست به عدد ۱

نزدیک می‌شود مقدارهای تابع به -1 نزدیک می‌شوند و در مثال ۱ دیدیم که وقتی x از طرف چپ به

عدد ۱ نزدیک می‌شود مقدارهای تابع به 3 نزدیک می‌شوند. چون این دو مقدار با هم مساوی نیستند

پس وقتی x به عدد ۱ نزدیک می‌شود، این تابع دارای حد نیست.

حد راست و حد چپ یک تابع

تعریف: تابع f را که در بازه I شامل x تعریف شده است، مگر احتمالاً در خود x ، در نظر

می‌گیریم :

الف - اگر x از طرف راست به x_0 نزدیک شود و مقادیرهای تابع f به عددی مانند L_1 نزدیک شوند، (یا به بیان دیگر، هرگاه بتوانیم هرچه قدر که بخواهیم $f(x)$ را به L_1 نزدیک کنیم، به شرط آن که x را از طرف راست به اندازه کافی به x_0 نزدیک کرده باشیم)؛ L_1 را حد راست تابع f در x_0 می‌نامند و می‌نویسند :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L_1$$

ب - اگر x از طرف چپ به x_0 نزدیک شود و مقادیرهای تابع f به عددی مانند L_2 نزدیک شوند، (یا به بیان دیگر، هرگاه بتوانیم هر چه قدر که بخواهیم $f(x)$ را به L_2 نزدیک کنیم به شرط آن که x را از طرف چپ به اندازه کافی به x_0 نزدیک کرده باشیم)؛ L_2 را حد چپ تابع f در x_0 می‌نامند و می‌نویسند :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L_2$$

از آنچه گذشت نتیجه می‌شود که اگر x_0 یک نقطه میانی در دامنه f باشد و تابع f در نقطه x_0 حد راست و حد چپ داشته باشد، و این دو حد با هم برابر باشند، تابع در x_0 دارای حد است؛ و برعکس، اگر تابع در یک نقطه حد داشته باشد، در آن نقطه حد راست و حد چپ دارد و این دو حد با هم برابرند.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

اما اگر x_0 یک نقطه انتهایی دامنه تابع f باشد، در این حالت حد چپ یا راست f در x_0 همان حد تابع f در x_0 است. مثلاً در مورد تابع \sqrt{x} با دامنه $(0, \infty)$ حد راست این تابع در صفر و حد این تابع در صفر یکی هستند. فقط در نقاطی که نقاط میانی دامنه یک تابع هستند مفهوم حد تابع و حد راست و چپ تابع با هم متفاوتند.

مثال ۱: تابع $f(x) = x^2 - 2x + 3$ داده شده است، می‌خواهیم وجود حد راست و حد چپ این تابع را در ۲ بررسی کنیم.

حل: دیدیم که اگر x از طرف راست به ۲ نزدیک شود مقادیرهای تابع بالا به ۳ نزدیک می‌شوند یعنی $L_1 = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 2x + 3) = 3$ حد راست تابع؛ و در صورتی که x از چپ به ۲ نزدیک شود مقادیرهای تابع به ۳ نزدیک می‌شوند. یعنی $L_2 = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 2x + 3) = 3$ حد چپ تابع.

چون حد راست و حد چپ این تابع در ۲ با هم برابرند ($L_1 = L_2 = 3$)، تابع در نقطه $x = 2$

دارای حد است و داریم :

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 3) = 3$$

مثال ۲: تابع $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x \geq 1 \\ x^2+2x-6 & , x < 1 \end{cases}$ داده شده است می خواهیم وجود حد این تابع را

در ۱ بررسی کنیم.

چون وقتی x از طرف راست به ۱ نزدیک می شود داریم $x > 1$ ، حد راست این تابع از

$$f(x) = 2x + 1 \text{ محاسبه می شود بنابراین :}$$

$$\text{قبلاً محاسبه شد) } (L_1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 1) = 3 \text{ حد راست}$$

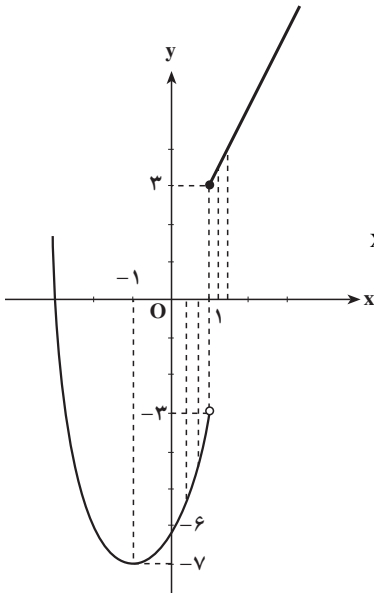
و چون وقتی x از طرف چپ به ۱ نزدیک می شود داریم $x < 1$. پس حد چپ از $f(x) = x^2 + 2x - 6$ به دست می آید یعنی :

$$\text{حد چپ} = L_2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2x - 6) = -3$$

به طوری که دیده می شود حد چپ و حد راست این تابع در نقطه $x = 1$ با هم برابر نیستند

$(L_1 = 3 \neq L_2 = -3)$ ، پس این تابع در $x = 1$ حد ندارد.

نمودار تابع نیز درستی محاسبه بالا را نشان می دهد.



$x < 1 \Rightarrow$

x	-4	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	2	-3	-6	-7	-6	-3

$$x \geq 1 \Rightarrow y = 2x + 1, \begin{matrix} | \\ +1 \\ | \end{matrix} \begin{matrix} | \\ 3 \\ | \end{matrix}$$

قضیه‌های حد

محاسبه حد تابع‌ها با استفاده از تعریف، به روشی که در مثال‌ها دیده شد (نزدیک کردن متغیر به x_0 و محاسبه $f(x)$ و تشکیل جدول)، معمولاً طولانی است. به این علت از قضیه‌هایی که در مورد حد توابع وجود دارد و آن‌ها را بدون اثبات می‌پذیریم استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱: حد تابع ثابت $f(x) = k$ (ک عددی است حقیقی و ثابت) در هر عدد دلخواه x_0 ،

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} k = k \text{ یعنی } k \text{ مقدار ثابت } k \text{ است.}$$

مثال: اگر $f(x) = 5$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 5 = 5, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} 5 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} 5 = 5, \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} 5 = 5$$

قضیه ۲: حد تابع $f(x) = x$ (تابع همانی) در هر نقطه x_0 برابر با x_0 است یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} x = 3, \quad \lim_{x \rightarrow -1} x = -1$$

مثال:

قضیه ۳: اگر دو تابع f و g دامنه یکسانی داشته باشند و در نقطه x_0 دارای حد باشند و

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2 \text{ ، آنگاه}$$

الف - مجموع این دو تابع یعنی $f(x) + g(x)$ در x_0 حد دارد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_1 + l_2$$

یعنی، حد مجموع دو تابع (با دامنه یکسان) برابر است با مجموع حدهای آن دو تابع.

ب - تفاضل این دو تابع یعنی $f(x) - g(x)$ در x_0 حد دارد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_1 - l_2$$

یعنی حد تفاضل دو تابع (با دامنه یکسان) برابر است با تفاضل حدهای آن دو تابع.

پ - حاصل ضرب این دو تابع یعنی $f(x).g(x)$ در x_0 حد دارد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x).g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x). \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_1.l_2$$

یعنی، حد حاصل ضرب دو تابع (با دامنه یکسان) برابر است با حاصل ضرب حدهای آن دو تابع.

ت - خارج قسمت این دو تابع یعنی $\frac{f(x)}{g(x)}$ در x_0 ، به شرط $l_2 \neq 0$ ، حد دارد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{l_1}{l_2}, \quad l_2 \neq 0$$

یعنی، حد خارج قسمت دو تابع (با دامنه یکسان)، به شرط صفر نبودن حد مخرج، برابر است با خارج قسمت حدهای آن دو تابع.

نکته: قضیه‌های الف و ب را می‌توان به تعدادی متنهای از توابع تعمیم داد یعنی:

- ۱- حد مجموع چند تابع برابر است با مجموع حدهای آن‌ها.
 - ۲- حد حاصل ضرب چند تابع برابر است با حاصل ضرب حدهای آن‌ها.
- از قضیه‌های بالا نتیجه‌های زیر به دست می‌آید.

۱- اگر حد تابع f در نقطه x_0 برابر با l و k عدد ثابتی باشد

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (kf(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (k) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k \cdot l$$

مثلاً چون $\lim_{x \rightarrow 1} (2x+1) = 3$ پس $\lim_{x \rightarrow 1} 4(2x+1) = 4(3) = 12$

۲- حد تابع $f(x) = x^n$ (n عدد صحیح و مثبت) در x_0 برابر است با x_0^n یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$$

مثال: حد تابع $f(x) = x^3$ در $x = 2$ برابر است با $2^3 = 8$ یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x)^3 = (2)^3 = 8$$

۳- اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = l^n$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$ (به شرط آن که $\sqrt[n]{f(x)}$

در یک بازه شامل x_0 تعریف شده باشد).

مثال: دیدیم که $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 3) = 3$ پس $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 3)^4 = 3^4 = 81$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 - 2x + 3} = \sqrt{3}$$

۴- حد تابع چندجمله‌ای $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + 1$ (عدد صحیح و مثبت).

به کمک نتیجه‌های بالا و قضیه حد مجموع چند تابع، ثابت می‌شود که حد تابع چندجمله‌ای

$f(x)$ در x_0 برابر است با $f(x_0)$ یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + 1)$$

$$= ax_0^n + bx_0^{n-1} + cx_0^{n-2} + \dots + 1 = f(x_0)$$

مثال: داریم:

$$۱) \lim_{x \rightarrow 2} (f(x) = 2x + 1) = f(2) = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 2} (f(x) = x^2 - 2x + 3) = f(2) = 2^2 - 2(2) + 3 = 4 - 4 + 3 = 3$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x^2 + 2x - 1) = (2)^2 + (2)^2 + 2(2) - 1 = 15$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow 2} (-2x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 6x + 1) = -2(2)^4 + 3(2)^3 + 5(2)^2 - 6(2) + 1 \\ = -32 + 24 + 20 - 12 + 1 = 1$$

۵- حد تابع گویای کسری - حد تابع $q(x) = \frac{ax^m + bx^{m-1} + \dots + 1}{a'x^n + b'x^{n-1} + \dots + 1}$ ، (m و n عددهای

صحیح و مثبت) در x برابر است با مقدار آن تابع در نقطه x_0 (به شرط آن که x_0 ریشهٔ مخرج کسر نباشد).

مثال ۱: داریم:

$$۱) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 1}{3x - 5} = \frac{2(-1) + 1}{3(-1) - 5} = \frac{-2 + 1}{-3 - 5} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 1}{2x + 5} = \frac{(-2)^2 - (-2) - 1}{2(-2) + 5} = \frac{5}{1} = 5$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - x^2 + 5}{-2x^2 + 3x - 1} = \frac{2(2)^3 - (2)^2 + 5}{-2(2)^2 + 3(2) - 1} = \frac{17}{-3} = \frac{-17}{3}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)^2}{2x^2 - x - 5} = \frac{(-2+2)^2}{2(-2)^2 - (-2) - 5} = \frac{0}{5} = 0$$

مثال ۲: دو تابع $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = x^2 - 2x$ داده شده‌اند، می‌خواهیم:

الف - حد تابع f را در ۱ بیابیم.

ب - حد تابع g را در ۱ به دست آوریم.

پ - تابع‌های $f(x) + g(x)$ و $f(x) - g(x)$ ، $f(x).g(x)$ و $\frac{f(x)}{g(x)}$ را تعیین و حد هر یک از

این توابع را در ۱ پیدا کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 2(1) + 1 = 3$$

داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x) = (1)^2 - 2(1) = -1$$

$$f(x) + g(x) = 2x + 1 + x^2 - 2x = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = (1)^2 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \Rightarrow 2 = 3 + (-1) \Rightarrow 2 = 2$$

$$f(x) - g(x) = 2x + 1 - (x^2 - 2x) = -x^2 + 4x + 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 + 4x + 1) = -(1)^2 + 4(1) + 1 = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \Rightarrow 4 = (3) - (-1) \Rightarrow 4 = 4$$

$$f(x).g(x) = (2x + 1)(x^2 - 2x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (f(x).g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 - 3x^2 - 2x) = 2(1)^3 - 3(1)^2 - 2(1) = -3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} [f(x).g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} f(x). \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \Rightarrow -3 = (3)(-1) \Rightarrow -3 = -3$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x + 1}{x^2 - 2x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 1}{x^2 - 2x} = \frac{2(1) + 1}{(1)^2 - 2(1)} = -3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} \Rightarrow -3 = (3) / -1 \Rightarrow -3 = -3$$

نتایج به دست آمده را در جدول زیر خلاصه می کنیم.

تابع	حد	
$f(x) = 2x + 1$	$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$	
$g(x) = x^2 - 2x$	$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x) = -1$	
$f(x) + g(x) = x^2 + 1$	$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2$	$2 = 3 + (-1)$
$f(x) - g(x) = -x^2 + 4x + 1$	$\lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 + 4x + 1) = 4$	$4 = 3 - (-1)$
$f(x).g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x$	$\lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 - 3x^2 - 2x) = -3$	$-3 = (3).(-1)$
$f(x)/g(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 2x}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x + 1}{x^2 - 2x} \right) = -3$	$-3 = \frac{3}{-1}$

حد تابع‌های ساده مثلثاتی

در مورد حد توابع مثلثاتی قضیه‌های زیر را داریم:

قضیه ۱: تابع $f(x) = \sin x$ در هر نقطه $x_0 \in \mathbb{R}$ دارای حد است و مقدار این حد برابر است با $f(x_0) = \sin x_0$. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin x = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

قضیه ۲: تابع $f(x) = \cos x$ در هر نقطه $x_0 \in \mathbb{R}$ دارای حد است و مقدار این حد برابر است با $f(x_0) = \cos x_0$. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = +1$$

و

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

قضیه ۳: تابع $f(x) = \tan x$ (یا $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$) برای همه مقادیر حقیقی x به جز $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

که برای آن‌ها داریم $\cos x = 0$ ، دارای حد است و مقدار این حد برابر است با $f(x_0) = \tan x_0$. یعنی: $x_0 \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x_0 \neq k\pi + \frac{\pi}{2}} \tan x = \tan x_0$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x = \tan \frac{\pi}{4} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \tan x = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

قضیه ۴: تابع $f(x) = \cot x$ (یا $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$) برای همه مقادیر حقیقی x به جز $x = k\pi$ که برای

آن‌ها داریم $\sin x = 0$ ، دارای حد است و مقدار این حد برابر است با $f(x_0) = \cot x_0$ ، $x_0 \neq k\pi$ یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x_0 \neq k\pi} \cot x = \cot x_0.$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{4}} \cot x = \cot \frac{5\pi}{4} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{6}} x \cot x = \left(\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{6}} x \right) \left(\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{6}} \cot x \right) = \left(-\frac{\pi}{6} \right) \left(\cot \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

برای آشنایی بیشتر با دستورهای که گفته شد، حدهای زیر را حساب می‌کنیم:

$$۱) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x + \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos x = \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - \sin^2 x}{\cos x + 1} = \frac{2 \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) - \sin^2 \left(-\frac{\pi}{3} \right)}{\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + 1} = \frac{2 \left(\frac{1}{2} \right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (2 \sin x + \cos^2 x) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{7}{4}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} (\tan x + \cot x) = \tan \left(-\frac{\pi}{4} \right) + \cot \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -1 - 1 = -2$$

تمرین

۱- حد چپ و حد راست هر یک از تابع‌های زیر را در نقطه داده شده به دست آورید و معلوم

کنید کدام یک از این توابع دارای حد است.

$$\text{الف) } f(x) = \begin{cases} -3x + 4, & x \geq 1 \\ 2x^2 + x, & x < 1 \end{cases} \quad \text{ب) } f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x-1}, & x \geq 2 \\ x^2 + 2, & x < 2 \end{cases}$$

$$\text{پ) } f(x) = \begin{cases} -4x^2 + 3, & x > \frac{1}{2} \\ 2x + 1, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

در نقطه $x = \frac{1}{2}$

$$\text{ت) } f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x > 2 \\ x+3, & x \leq 2 \end{cases}$$

در نقطه $x = -2$

$$\text{ث) } f(x) = \begin{cases} 2 \sin x - 1, & x \geq \frac{\pi}{2} \\ \cos x + 1, & x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$

$$\text{ج) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x+1}, & x \geq 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$$

در نقطه $x = 0$

۲- حدهای زیر را حساب کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (4x - 5)$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right)$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x - 3)$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow 2} (-2x^2 + 3x^2 - x + 4)$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x+2}{x-2}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2+1}{x^2+x+1}$$

$$\text{چ) } \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(-2x^2+1)^3}{x^2+1}$$

$$\text{ح) } \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x+2}{3x^2+4} \times \frac{\sqrt{x-1}}{x+1} \right)$$

$$\text{خ) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (2 \sin x - 1)$$

$$\text{د) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (\cos x + \sin^2 x + 1)$$

$$\text{ذ) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin^2 x + \cos x)$$

$$\text{ر) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{\cos x} \right)$$

$$\text{ز) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(\sin \frac{\pi x}{2} \right)$$

$$\text{ژ) } \lim_{x \rightarrow 2} \tan \left(\frac{\pi x}{3} \right)$$

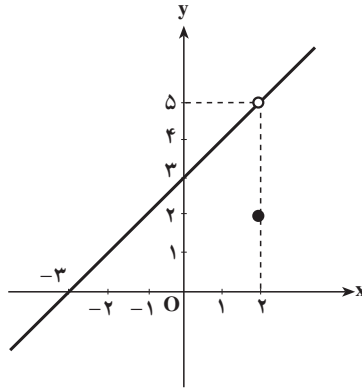
۳- از روی هر نمودار، حد راست و حد چپ تابع را، در نقطه داده شده تعیین کنید و مشخص

نمایید که کدام تابع حد دارد.

الف) $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \neq 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

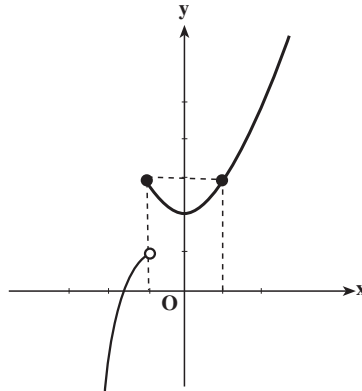
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$



ب) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \geq 1 \\ -x^2 + 2, & x < 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$



۴- دو تابع f و g به صورت $f(x) = x^2 - x - 2$ و $g(x) = \frac{1}{x-2}$ داده شده‌اند.

الف- حد هر یک از این دو تابع را در ۳ به دست آورید.

ب- تابع‌های $f+g$ و $f-g$ و $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را تعیین و حد هر یک از آن‌ها را در ۳ پیدا کنید.

پ- حد تابع‌های $(f(x))^3$ و $\sqrt[3]{f(x)}$ و $\frac{1}{g(x)}$ و $3g(x)$ را در ۳ تعیین کنید.

۵- اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 4$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -3$ باشد، حد هر یک از تابع‌های زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$

ب) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x))$

پ) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$

ت) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

ث) $\lim_{x \rightarrow x_0} 2\sqrt{f(x)}$

ج) $\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x))^f$

۶- تابع $f(x) = \begin{cases} (a+1)x+3, & x > 2 \\ -2x^2+1, & x \leq 2 \end{cases}$ مفروض است. عدد a را چنان بیابید که در نقطه $x=2$ تابع حد داشته باشد.

۷- تابع $f(x) = \begin{cases} ax+2b, & x > 3 \\ ax^2+bx+2, & x < 3 \end{cases}$ مفروض است. عددهای a و b را چنان بیابید که $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6$.

۸- در صورتی که $f(x+2) = \frac{x+4}{x}$ ، $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ را حساب کنید.

۹- هر یک از حدهای زیر را حساب کنید:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin(x - \frac{\pi}{6}) + \cos 2x + \sin \frac{x}{2}}{2 \tan \frac{x}{4} + \cos^2(x - \frac{\pi}{4})} \quad (\text{ب}) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \sin(x + \frac{\pi}{6}) \right) \quad (\text{الف})$$

توجه: اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ آن گاه حد تابع $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ را در x_0 نمی توان با استفاده از قضایای مطرح شده محاسبه نمود (چرا؟). برای تعیین مقدار این حد با توجه به نوع تابع های $f(x)$ و $g(x)$ ، روش های دیگری را می توان اختیار کرد.

مثال: حد تابع $q(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ را در $x=2$ می توان به صورت زیر محاسبه کرد.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 2) = 4 - 6 + 2 = 0 \quad \text{چون}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 4 - 4 = 0 \quad \text{و}$$

برای یافتن حد تابع $q(x)$ با توجه به این که $x \neq 2$ داریم $x-2 \neq 0$ و می توان نوشت:

$$q(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$$

پس:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+2} = \frac{2-1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

قضیه فشردگی: فرض کنید به ازای هر x از بازه‌ای مانند I که شامل نقطه x_0 است، مگر

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

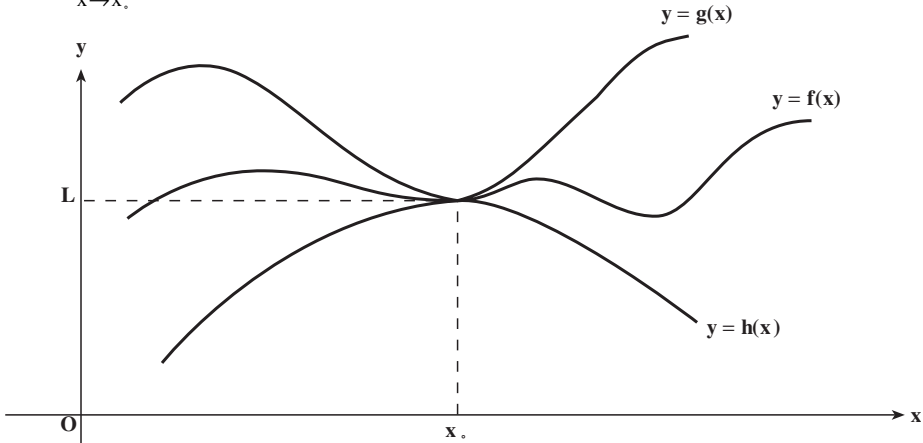
احتمالاً در x_0 داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$$

و

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

آن‌گاه:



$$3 - x^2 \leq f(x) \leq 3 + x^2$$

مثال: فرض کنید به ازای هر $x \neq 0$ داشته باشیم:

حد $f(x)$ را در $x = 0$ تعیین کنید.

$$\text{حل: چون } \lim_{x \rightarrow 0} (3 + x^2) = 3 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} (3 - x^2) = 3$$

بنابراین طبق قضیه فشردگی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$$

قضیه: اگر x برحسب رادیان باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

اثبات: در دایره‌ای مثلثاتی کمان \widehat{AM} را مساوی

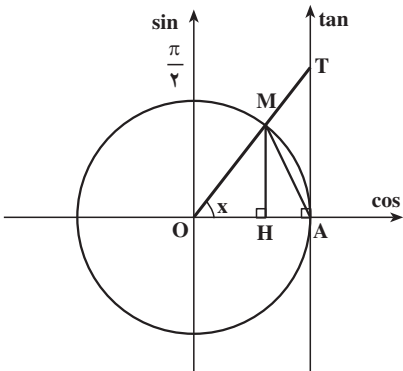
x رادیان ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) در نظر می‌گیریم. تصویر نقطه M

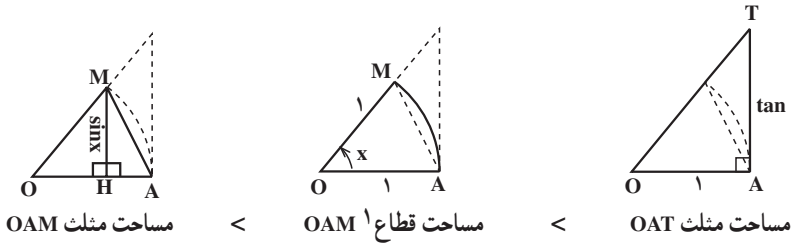
روی محور کسینوس‌ها را H و نقطه برخورد OM با

محور تانژانت‌ها را T می‌نامیم. می‌دانیم که $HM = \sin x$

و $AT = \tan x$ و $OA = 1$ است. با توجه به شکل آشکار

است که:





بنابراین

$$\frac{1}{2} OA \cdot MH < \frac{1}{2} \times 1 \times x < \frac{1}{2} OA \cdot AT$$

$$\frac{1}{2} \times 1 \times \sin x < \frac{1}{2} \times 1 \times x < \frac{1}{2} \times 1 \times \tan x$$

$$\sin x < x < \tan x$$

از تقسیم نابرابری‌های بالا بر $\sin x$ که مثبت است خواهیم داشت:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

اما می‌دانیم که اگر a و b دو عدد مثبت و $a > b$ ، داریم $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$: اینک چون $\cos x > 0$ و

$\frac{x}{\sin x} > 0$ ، نابرابری‌های بالا را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

اما $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$. پس طبق قضیه فشردگی حد تابع $\frac{\sin x}{x}$ که بین این دو

تابع قرار دارد، برابر 1 می‌شود. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

در حالتی که $0 < x < \frac{\pi}{2}$ نیز ثابت می‌شود که $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$ ، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

نکته: می‌دانیم که اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1 \neq 0$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1}$. بنابراین از $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\text{نتیجه می‌شود } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

۱- مساحت قطاع x رادیان در دایره‌ای به شعاع R برابر است با: $S_{\text{قطاع}} = \frac{1}{2} R^2 x$