و برای این که تابع در $x=-۱$ پیوسته باشد باید :

$$\lim_{x\to -۱} f(x)=f(-۱) \;\Rightarrow\; a+۲=۳ \;\Rightarrow\; a=۱$$

با جایگذاری مقدار a در رابطهٔ (۱) مقدار b تعیین می‌شود. $b=۰$

تمرین

۱ــ پیوستگی هریک از تابع‌های زیر را در نقطهٔ داده‌شده بررسی کنید.

الف) $f(x)=۲x^۲-۵x+۱\ ,\ (x=۲)$

ب) $f(x)=\dfrac{۲x^۲+x}{x-۲}\ ,\ (x=-۲)$

پ) $f(x)=\dfrac{x^۲-۱}{x^۲+۱}\ ,\ (x=-۱)$

ت) $f(x)=\dfrac{x+۲}{۲x-۳}\ ,\ (x=۳)$

ث) $f(x)=\begin{cases} ۳x^۲-x\ ,\ x \geq \dfrac{۳}{۲} \\ -۲x+۳\ ,\ x < \dfrac{۳}{۲} \end{cases}\ ,\ (x=-\dfrac{۳}{۲})$

ج) $f(x)=\begin{cases} -۳x+۵\ ,\ x\geq ۱ \\ x^۲+۴\ ,\ x<۱ \end{cases}\ ,\ (x=-۱)$

چ) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+۱}{x-۱}\ ,\ x>۳ \\ ۲\ ,\ x=۳ \\ ۵x-۱۳\ ,\ x<۳ \end{cases}\ ,\ (x=۳)$

ح) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{۴x^۲+۱}\ ,\ x\geq ۰ \\ (۲x-۱)^۲\ ,\ x<۰ \end{cases}\ ,\ (x=۰)$

خ) $f(x)=\begin{cases} \sin ۲x\ ,\ x>\dfrac{\pi}{۴} \\ \dfrac{۱}{۲}+\cos^۲ x\ ,\ x\leq \dfrac{\pi}{۴} \end{cases}\ ,\ (x=\dfrac{\pi}{۴})$

د) $f(x)=\begin{cases} \sin x+\cos x\ ,\ x\geq \dfrac{\pi}{۲} \\ ۲\sin^۲ x-۱\ ,\ x<\dfrac{\pi}{۲} \end{cases}\ ,\ (x=\dfrac{\pi}{۲})$

ر) $f(x)=\sqrt{۱-x} \quad , \quad x=۱$

ز) $f(x)=\sqrt{x^۲-۴} \quad , \quad x=-۲$

۲ــ عددهای a و b را چنان بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases} ax+۱ & , \ x \succ ۲ \\ ۱۳ & , \ x=-۲ \\ ۲ax^۲+bx-۱ & , \ x \prec ۲ \end{cases}$ در نقطهٔ

$x=-۲$ پیوسته باشد.

۳ــ حدود a را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases} -۲x+a & , \ x \geq ۱ \\ x^۲+۳x & , \ x<۱ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته

نباشد.

فصل چهارم

مشتق

بررسی چگونگی تغییرات مقادیر یک تابع، از مسائل مهم ریاضی است. مفهوم مشتق در ارتباط با چگونگی تغییرات یک تابع است. از آنجا که توابع در تمام علوم تجربی به‌کار گرفته می‌شوند، بررسی رفتار این توابع بسیار اساسی است و مشتق چگونگی رفتار توابع را بیان خواهد کرد.

آهنگ تغییر

بسیاری از مسائل ریاضی به بررسی تغییرات تابع نسبت به تغییرات متغیر مربوط می‌شود. مطالعهٔ آهنگ این تغییرات است که سرانجام به تعریف مشتق می‌انجامد. می‌دانیم که از دو چیز یا دو پدیده که تغییر یکی سبب تغییر دیگری می‌شود، مانند مساحت یک دایره و شعاع آن، حجم یک گاز و دمای آن، افزایش سرمایه و بهرهٔ آن، رشد جمعیت و شمار نوزادان، قطر یک درخت و سنّ آن[1] ... یکی را به‌عنوان متغیر (یا متغیر مستقل) و دیگری را به‌عنوان تابع (یا متغیر وابسته) انتخاب و همان‌طورکه در بخش تابع دیده شد، متغیر را با x و تابع را با y مشخص می‌کنند و بستگی میان آن‌ها را با f نشان می‌دهند و می‌نویسند :

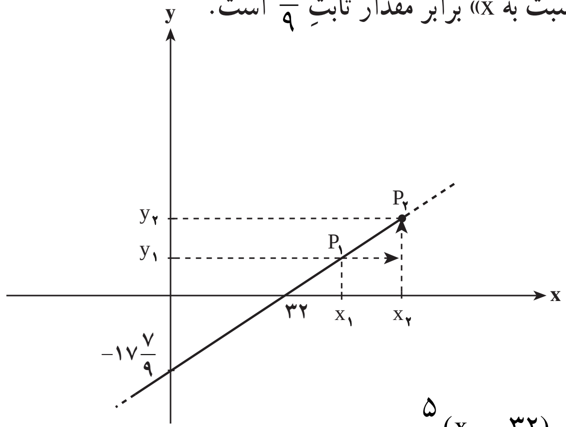
$$y = f(x)$$

عموماً با تغییر x مقدار $f(x)$ نیز تغییر خواهد کرد. ما در اینجا می‌خواهیم آهنگ نسبت این تغییرها را که دارای اهمیت ویژه‌ای است مورد بررسی قرار دهیم.

مثال ۱: تابع یا معادلهٔ $y = \frac{۵}{۹}(x - ۳۲)$ را، که درجهٔ گرما را برحسب سانتی‌گراد به‌صورت تابعی از درجهٔ گرما برحسب فارنهایت مشخص می‌کند، در نظر می‌گیریم. در ریاضی ۱ خواندیم که رابطهٔ بین x و y خطی است. در ریاضی ۲ این رابطه با عنوانِ تابع خطی معرفی شد. در آنجا اشاره شد که در چنین حالتی نسبت تغییرات y به تغییرات x همواره عددی ثابت است که به آن شیب خط

۱ــ در اغلب مثال‌های بالا متغیرهای دیگری نیز دخالت دارد که در اینجا ما آن‌ها را در نظر نگرفته‌ایم. مثلاً افزایش سرمایه به‌مدت، حجم گاز به فشار، رشد جمعیت به میزان مرگ‌ومیر... .

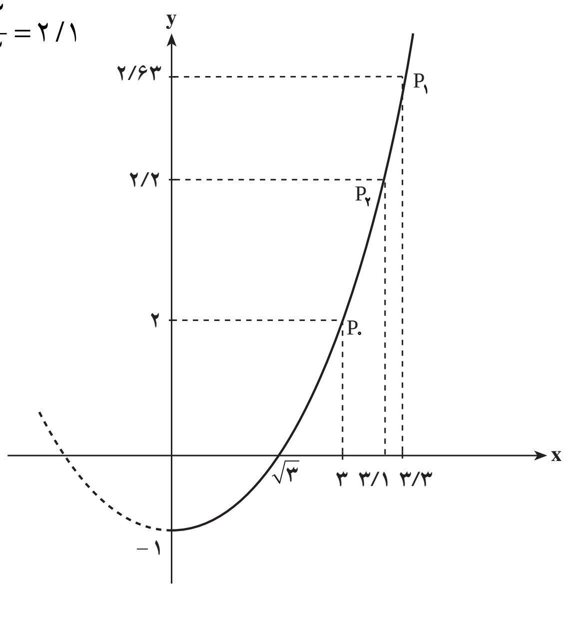
می‌گوییم. در اینجا این عددِ ثابت $\frac{۵}{۹}$ است. به عبارت دیگر هنگامی که x به اندازهٔ ۹ درجهٔ فارنهایت افزایش یابد، y به اندازهٔ ۵ درجه سانتی‌گراد افزایش می‌یابد. بیان ریاضی این مطلب آن است که «آهنگ تغییراتِ y نسبت به x» برابر مقدار ثابتِ $\frac{۵}{۹}$ است.



$$\frac{۵}{۹} = \frac{\frac{۵}{۹}(x_۲ - ۳۲) - \frac{۵}{۹}(x_۱ - ۳۲)}{x_۲ - x_۱} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} =$$ آهنگ تغییر y نسبت به x (شیب خط $P_۱P_۲$)

مثال ۲: تابع $y = f(x) = \frac{۱}{۳}x^۲ - ۱$ را در نظر بگیرید. در سال‌های گذشته دیدید که نمودار این تابع، منحنی (سهمی) و تابعِ غیرخطی است. درنتیجه نسبت تغییراتِ y به تغییرات x در فواصل مختلف ثابت نیست. مثلاً وقتی x از $x_۰ = ۳$ به $x_۱ = ۳/۳$ تغییر کند، y از $f(x_۰) = ۲$ به $f(x_۱) = ۲/۶۳$ تغییر خواهد کرد و نسبت تغییرات برابر است با :

$$\frac{f(x_۱) - f(x_۰)}{x_۱ - x_۰} = \frac{۲/۶۳ - ۲}{۳/۳ - ۳} = ۲/۱$$



اما اگر x از $x_\circ = ۳$ به $x_۲ = ۳/۱$ تغییر کند خواهیم داشت :

$$\frac{f(x_۲)-f(x_\circ)}{x_۲-x_\circ}=\frac{f(۳/۱)-f(۳)}{۳/۱-۳}=\frac{۲/۲۰۳-۲}{۰/۱}=\frac{۰/۲۰۳}{۰/۱}=۲/۰۳$$

برای این‌که نسبت تغییرات این تابع را در نزدیکی ۳ بهتر ببینیم، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم :

x	…	۲	…	۲/۶	۲/۸	۲/۹	۳	۳/۱	۳/۳	…	۴	…
f(x)	…	۰/۳۳	…	۱/۲۵	۱/۶۱	۱/۸۰	۲	۲/۲۰	۲/۶۳	…	۴/۳۳	…
$x-۳$	…	-۱	…	$-۰/۴$	$-۰/۲$	$-۰/۱$	۰	۰/۱	۰/۳	…	۱	…
$f(x)-f(۳)$	…	$-۱/۶۷$	…	$-۰/۷۵$	$-۰/۳۹$	$-۰/۱۹۷$	۰	۰/۲	۰/۶۳	…	۲/۳۳	…
$\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}$	…	۱/۶۷	…	۱/۸۷	۱/۹۳	۱/۹۷	?	۲/۰۳	۲/۱	…	۲/۳۳	…

با توجه به این‌که :

$$\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\frac{\frac{۱}{۳}x^۲-۱-۲}{x-۳}=\frac{\frac{۱}{۳}(x^۲-۹)}{x-۳}=\frac{x+۳}{۳}$$

سطر آخر جدول را می‌توان با قرار دادن مقادیر x در عبارت $\frac{x+۳}{۳}$ به‌آسانی محاسبه کرد. در واقع اعداد سطر آخر جدول آهنگ متوسط تغییرات تابع را در نقطهٔ $x_\circ = ۳$ نشان می‌دهند. به‌طوری که دیده می‌شود این آهنگ علاوه‌بر تابع f به نقطهٔ $x_\circ = ۳$ و مقدار $x-x_\circ$ نیز بستگی دارد، و وقتی که x با مقادیر کوچک‌تر از ۳ یا بزرگ‌تر از ۳ به ۳ نزدیک می‌شود این نسبت به ۲ نزدیک می‌گردد. بنابراین حد این آهنگ تغییر در نقطهٔ $x_\circ = ۳$ برابر با ۲ می‌باشد یعنی :

$$\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}=\lim_{x\to ۳}\frac{x+۳}{۳}=۲$$

اگر به جای $x_\circ = ۳$ مثلاً $x_\circ$ را برابر با ۶ بگیریم آهنگ متوسط تغییر متفاوت خواهد بود و می‌توان دید که در این صورت نسبت مورد نظر به ۴ نزدیک خواهد شد.

تمرین: جدولی مشابه جدول بالا برای همان تابع f در نقطهٔ $x_\circ = ۶$ تشکیل دهید.

هنگامی که متغیر از $x_\circ$ به x تغییر می‌کند مقدار $x-x_\circ$ را نمو متغیر و مقدار $f(x)-f(x_\circ)$ را نمو تابع در $x_\circ$ می‌نامند و نسبت $\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$ را آهنگ متوسط تغییرات تابع در $x_\circ$ با نمو داده شده می‌نامند.

مثال ۳: در تابع f با ضابطهٔ $y=f(x)=x^۲-۵x+۶$ می‌خواهیم :

الف ــ آهنگ متوسط تغییر تابع را در $x_۱ = ۳$ با نمو ۲ تعیین کنیم.

ب ــ آهنگ متوسط تغییر تابع را در $x_۱ = ۵$ با نمو ۲ به‌دست آوریم.

الف) $x_۱ = ۳ \Rightarrow y_۱ = f(x_۱) = f(۳) = ۹ - ۱۵ + ۶ = ۰$

$x_۲ = ۳ + ۲ = ۵ \Rightarrow y_۲ = f(x_۲) = f(۵) = ۲۵ - ۲۵ + ۶ = ۶$

$y_۲ - y_۱ = f(x_۲) - f(x_۱) = ۶ - ۰ = ۶$

آهنگ متوسط تغییر در $x_۱ = ۳$ با نمو ۲ به‌صورت زیر تعیین می‌شود :

$$\frac{f(۵) - f(۳)}{۵ - ۳} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

ب) $x_۱ = ۵ \Rightarrow y_۱ = f(x_۱) = f(۵) = ۲۵ - ۲۵ + ۶ = ۶$

$x_۲ = ۵ + ۲ = ۷ \Rightarrow y_۲ = f(x_۲) = f(۷) = ۴۹ - ۳۵ + ۶ = ۲۰$

$y_۲ - y_۱ = ۲۰ - ۶ = ۱۴$

آهنگ متوسط تغییر در $x_۱ = ۵$ با نمو ۲ به‌صورت زیر تعیین می‌شود.

$$\frac{f(۷) - f(۵)}{۷ - ۵} = \frac{۱۴}{۲} = ۷$$

به‌طورکلی آهنگ متوسط تغییر تابع $y = f(x)$ نسبت به متغیر x، هنگامی که متغیر روی بازه‌ای از $x_۱$ تا $x_۲$ از دامنهٔ تابع تغییر می‌کند به‌صورت زیر است :

$$\frac{f(x_۲) - f(x_۱)}{x_۲ - x_۱}$$

اگر قرار دهیم $x_۲ - x_۱ = h$ ، داریم $x_۲ = x_۱ + h$ و مقدار آهنگ متوسط تغییر تابع در $x_۱$ با نمو h عبارت است از :

$$\frac{f(x_۱ + h) - f(x_۱)}{h}$$

مثال ۴: تابع f با ضابطهٔ $y = x^۲ + ۳$ داده شده است. می‌خواهیم آهنگ متوسط تغییر این تابع را به‌ازای $x_۱ = ۲$ و $h = ۰/۳$ به‌دست آوریم.

داریم : $x_۱ = ۲ \; , \; x_۱ + h = ۲ + ۰/۳ = ۲/۳$

$f(x_۱) = f(۲) = ۴ + ۳ = ۷$

$f(x_۱ + h) = f(۲/۳) = ۵/۲۹ + ۳ = ۸/۲۹$

درنتیجه

$$\frac{f(x_۱+h)-f(x_۱)}{h}=\frac{۸/۲۹-۷}{۰/۳}=\frac{۱/۲۹}{۳}=۴/۳$$

مثال ۵: می‌خواهیم دستور کلی محاسبهٔ آهنگ متوسط تغییر تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^۲+۳x+۳$ را وقتی متغیر از $x_۱$ به اندازهٔ h تغییر کند به‌دست آوریم.

داریم :

$$\frac{f(x_۱+h)-f(x_۱)}{h}$$

$$f(x_۱)=x_۱^۲+۳x+۳$$

$$f(x_۱+h)=(x_۱+h)^۲+۳(x_۱+h)+۳$$

$$f(x_۱+h)-f(x_۱)=(x_۱+h)^۲+۳(x_۱+h)+۳-(x_۱^۲+۳x_۱+۳)$$

$$=۲x_۱h+۳h+h^۲$$

$$\frac{f(x_۱+h)-f(x_۱)}{h}=\frac{۲x_۱h+۳h+h^۲}{h}$$

$$=\frac{h(۲x_۱+۳+h)}{h}=۲x_۱+۳+h$$

به‌عنوان نمونه، آهنگ متوسط تغییر تابع بالا نسبت به متغیر x به‌ازای $x_۱=۴$ و $h=۰/۰۵$ برابر است با :

$$\frac{f(۴+۰/۰۵)-f(۴)}{۰/۰۵}=۲(۴)+۳+۰/۰۵=۱۱/۰۵$$

نکته: در دستور بالا می‌توان به جای $x_۱$ ، مقدار x را قرار داد در این صورت خواهیم داشت :

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مثال ۶: تابع f با ضابطهٔ $y=f(x)=x^۲+۵x+۴$ داده شده است.

الف ــ دستور کلی آهنگ متوسط تغییر این تابع را نسبت به متغیر x تعیین کنید.

ب ــ حد آهنگ متوسط تغییر این تابع را در $h=۰$، تعیین کنید.

پ ــ آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی $x=۳$ و $h=۰/۴$ به‌دست آورید.

ت ــ حد آهنگ متوسط تغییر این تابع در قسمت پ را در $h=۰$ تعیین کنید.

حل:

الف)
$$f(x)=x^{۲}+۵x+۴$$
$$f(x+h)=(x+h)^{۲}+۵(x+h)+۴$$
$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^{۲}+۵(x+h)+۴-(x^{۲}+۵x+۴)$$

درنتیجه

$$f(x+h)-f(x)=۲xh+۵h+h^{۲}$$

پس

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{۲xh+۵h+h^{۲}}{h}=\frac{h(۲x+۵+h)}{h}=۲x+۵+h$$

ب)
$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}(۲x+۵+h)=۲x+۵$$

پ)
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=۲x+۵+h=۲(۳)+۵+۰/۴=۱۱/۴$$

ت)
$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=۲(۳)+۵=۱۱$$

حد به‌دست‌آمده در قسمت (ت) مثال بالا را آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطهٔ $x=۳$ می‌نامند.

به‌طور کلی تعریف زیر را داریم :

آهنگ لحظه‌ای تغییریک تابع: در تابع f مقدار $\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_{۱}+h)-f(x_{۱})}{h}$ را آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطهٔ $x_{۱}$ می‌نامند.

به عنوان مثال آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x)=x^{۳}+۲x+۱$ در نقطهٔ $x_{۱}=-۲$ برابر است با :

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۲+h)-f(-۲)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(-۲+h)^{۳}+۲(-۲+h)+۱-(-۸-۴+۱)}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۱۴h-۶h^{۲}+h^{۳}}{h}=\lim_{h\to ۰}(۱۴-۶h+h^{۲})=۱۴$$

نکته: اگر ضابطهٔ تابع به‌صورت $x=f(t)$ باشد، دستور بالا به صورت زیر درمی‌آید :

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

مثال ۱: اندازهٔ مساحت مربعی را که طول ضلع آن x است برابر با y می‌گیریم. بنابراین $y=f(x)=x^{۲}$. آهنگ تغییر y نسبت به x در $x_{\circ}=۵$ برای نموهای $h=\circ/۱ ,\circ/۲ ,\circ/۳ ,\circ/۴$ در جدول زیر آمده است :

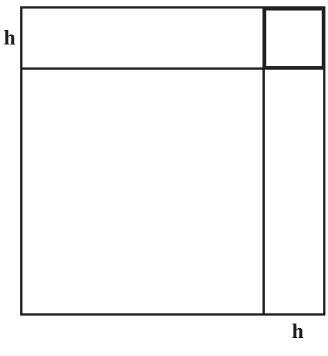
x	۵	۵/۱	۵/۲	۵/۳	۵/۴
$y=x^{۲}$	۲۵	۲۶/۰۱	۲۷/۰۴	۲۸/۰۹	۲۹/۱۶
h	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴
$f(۵+h)-f(۵)$	۰	۱/۰۱	۲/۰۴	۳/۰۹	۴/۱۶
$\frac{f(۵+h)-f(۵)}{h}$	?	۱۰/۱	۱۰/۲	۱۰/۳	۱۰/۴

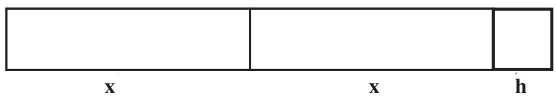
به‌طوری‌که دیده می‌شود وقتی x به ۵ نزدیک می‌گردد یعنی h کوچک می‌شود،

$\frac{f(۵+h)-f(۵)}{h}$ به ۱۰ نزدیک می‌شود. در واقع داریم :

$$\lim_{x\to x_{\circ}}\frac{f(x)-f(x_{\circ})}{x-x_{\circ}}=\lim_{x\to ۵}\frac{x^{۲}-۲۵}{x-۵}=\lim_{x\to ۵}(x+۵)=۱۰$$

شکل زیر تعبیر هندسی این مطلب است.





$f(x+h)-f(x)=(۲x+h)h$

پس :
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(۲x+h)h}{h}=۲x+h$$

یعنی اگر h به‌اندازهٔ کافی کوچک باشد $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ تقریباً با ۲x برابر می‌شود، پس :

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}(۲x+h)=۲x$$

مثال ۲: معادلهٔ حرکت یک متحرک روی یک خط مستقیم به‌صورت $x=f(t)۲t^{۲}-۵t+۱$ است.

الف ــ آهنگ لحظه‌ای تغییر مکان این متحرک را در نقطهٔ $t_۱=-۱$ به‌دست آورید.

ب ــ آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع را در نقطهٔ $t_۱=۳$ به‌دست آورید.

پ ــ دستورکلی آهنگ لحظه‌ای تغییر مکان این متحرک را تعیین کنید.

حل:

الف) در نقطهٔ $t_۱=-۱$ داریم :

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۱+h)-f(-۱)}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۲(-۱+h)^{۲}-۵(-۱+h)+۱-(۲+۵+۱)}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{-۹h+۲h^{۲}}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}(-۹+۲h)=-۹$$

ب) در نقطهٔ $t_۱=۳$ داریم :

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۲(۳+h)^{۲}-۵(۳+h)+۱-(۱۸-۱۵+۱)}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۷h+۲h^{۲}}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}(۷+۲h)=۷$$

پ) برای تعیین دستور کلی آهنگ لحظه‌ای تغییر متحرک در نقطهٔ t داریم :

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰} \frac{۲(t+h)^۲ - ۵(t+h) + ۱ - (۲t^۲ - ۵t + ۱)}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰} \frac{۲h^۲ + ۴th - ۵h}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰}(۲h + ۴t - ۵) = ۴t - ۵$$

همان‌طورکه در مثال‌های بالا دیده شد، آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع برابر حد آهنگ متوسط تغییر تابع است، وقتی نمو متغیر به صفر نزدیک می‌شود.

تمرین

۱ــ تابع $f(x) = x^۲ + ۶x - ۷$ داده شده است.

الف ــ آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی متغیر از $x_۱ = ۲$ به $x_۲ = ۶$ تغییر کند، تعیین کنید.

ب ــ آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع را در نقطهٔ $x_۰ = ۴$ به‌دست آورید.

۲ــ نقطهٔ $M(x,y)$ را بر نمودار تابع $y = x^۲$ انتخاب می‌کنیم و تصاویر M را بر ox و oy به‌ترتیب A و B می‌نامیم $(x > ۰)$. اگر S اندازهٔ مساحت مستطیل OAMB باشد S را به‌صورت تابعی از x مشخص کنید. آهنگ تغییر S نسبت به x و آهنگ لحظه‌ای تغییر را در $x_۰ = ۴$ به‌دست آورید.

۳ــ یک بادکنک کره‌ای شکل را باد کرده‌ایم تا به شکل کره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر درآمده است. اگر به بادکردن آن ادامه دهیم به‌طوری که در هر ثانیه یک میلی‌متر به شعاع آن افزوده شود، آهنگ متوسط تغییر مساحت این بادکنک را در ۲۰ ثانیهٔ اول به‌دست آورید. آهنگ لحظه‌ای افزایش مساحت سطح کره را در ثانیه ۱۰ حساب کنید.

۴ــ اگر $p(t) = ۳۰۰۰ + ۱۰۰t^۲$ نمایش جمعیت یک نوع باکتری در زمان t باشد (t بر حسب ساعت)، آهنگ متوسط افزایش جمعیت را در ۵ ساعت اول پس از زمان $t_۰ = ۲$ به‌دست آورید. آهنگ لحظه‌ای افزایش جمعیت را در $t = ۳$ حساب کنید.

۵ــ حجم آب یک استخر در حال تخلیه برحسب لیتر به‌وسیلهٔ برابری $V = ۱۲۰(۲۵۰۰ - ۵۰t + t^۲)$ به زمان t برحسب دقیقه بستگی دارد. آهنگ متوسط تخلیه در ۸ دقیقهٔ اول را پیدا کنید. آهنگ لحظه‌ای خالی‌شدن را در دقیقهٔ دهم از آغاز تخلیه به‌دست آورید.

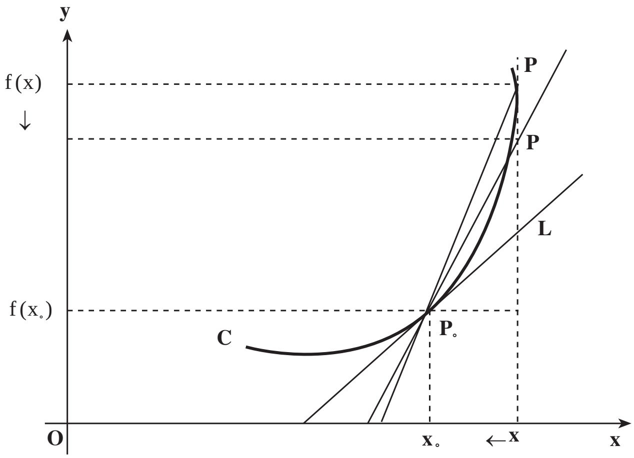
تعریف مشتق

اگر به نمودار تابع خطی ذکر شده در مثال ۱ از بخش قبل توجه کنید، آهنگ متوسط تغییر تابع

در هر بازه‌ای ثابت است. به‌عبارت دیگر نقطهٔ $P_۲$ و $P_۱$ هر چه که باشند این نسبت تغییر نمی‌کند. بنابراین آهنگ لحظه‌ای تغییر با آهنگ متوسط تغییر همواره مساوی و برابر با شیب خط $P_۱P_۲$ می‌باشد. ولی در مثال ۲ نسبت تغییرات y به تغییراتِ x ثابت نیست. اولین نسبتِ محاسبه شده (قبل از جدول) شیب خط $P_۰P_۱$ و در ادامه شیب خطِ $P_۰P_۲$ می‌باشد. هریک از نسبت‌های محاسبه شده در جدول نیز شیب خطِ گذرنده از دو نقطه نمودار تابع مانند دو خط یاد شده می‌باشد.

در آن مثال این سؤال می‌تواند مطرح شود که وقتی نقطهٔ $P(x,f(x))$ بر روی نمودار تابع به نقطهٔ $P_۰(۳,f(۳))$ نزدیک و نزدیک‌تر شود، خط گذرا از دو نقطهٔ P و $P_۰$ به چه خطی نزدیک می‌شود، یعنی $\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}$ به شیب چه خطی نزدیک می‌شود.

به نمودار زیر توجه کنید. شیب خط $P_۰P$ برابر است با : $\frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰}$



امّا وقتی نقطهٔ P بر روی نمودار تابع به نقطهٔ ثابتِ $P_۰$ نزدیک شود آنگاه x به $x_۰$ نزدیک می‌شود. از طرفی خطِ قاطع $P_۰P$ به خطِ مماس بر منحنی (L) نزدیک خواهد شد پس :

$$\text{حد شیب خط قاطع } P_۰P \underset{P \to P_۰}{=} \text{شیب خط مماس بر نمودار تابع در نقطه } P_۰$$

$$= \lim_{x \to x_۰} \frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰}$$

این همان آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطهٔ به طول $x_۰$ می‌باشد.

مثال ۱: می‌خواهیم شیب خط مماس بر نمودار تابعی به معادلهٔ $y = x^۲ - x$ را در نقطهٔ $P_۰(۲,۲)$ به‌دست آوریم.

$$x = ۲ \text{ شیب خط مماس در نقطهٔ } = \lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = \lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-x-۲}{x-۲} = \lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۱)}{x-۲} = ۳$$

مثال ۲: تابع $y=\frac{x}{x-۱}$ و نقطهٔ $P_۰$ به طول صفر را روی نمودار آن در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم شیب خط مماس بر نمودار تابع را در $P_۰$ به‌دست آوریم.

$$x = ۰ \text{ شیب خط مماس در نقطهٔ } = \lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰} = \lim_{x\to ۰}\frac{\frac{x}{x-۱}}{x} = \lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x-۱} = -۱$$

تذکر: شیب نمودار تابع در یک نقطه به معنی شیب خط مماس بر نمودار یا آهنگ لحظه‌ای تغییر در آن نقطه (در صورتِ وجود) می‌باشد.

تابع $y=f(x)$ و نقطهٔ $x_۰$ از دامنهٔ این تابع را در نظر می‌گیریم. اگر h نمو متغیر در نقطه $x_۰$ باشد، برای تابع، نمو $f(x_۰+h)-f(x_۰)$ را خواهیم داشت. حد نسبت نمو تابع به نمو متغیر را، هنگامی که نمو متغیر به صفر نزدیک می‌شود، یعنی: $\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+h)-f(x_۰)}{h}$

را (در صورتی که این حد وجود داشته باشد)، مشتق تابع f در نقطهٔ $x_۰$ می‌نامند و آن را با $f'(x_۰)$ یا $y'(x_۰)$ نشان می‌دهند. یعنی:

$$y'(x_۰)=f'(x_۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+h)-f(x_۰)}{h}$$

با قراردادن $x=x_۰+h$، مشتق تابع f در نقطهٔ $x_۰$ را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to x_۰}\frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰}=f'(x_۰)$$

از تعریف بالا و مطالبِ خوانده شده در بخش‌های قبل می‌توان نتیجه گرفت که:

الف) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطهٔ $x_۰$ برابر است با مشتق تابع در نقطهٔ $x_۰$.

ب) شیب خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ $x_۰$ برابر است با مشتق تابع در نقطهٔ $x_۰$.

بدیهی است گزاره‌های فوق وقتی اعتبار دارند که حدهای به‌کار رفته در تعاریفِ مفاهیمِ فوق وجود داشته باشند.

تابع f در نقطهٔ $x_۰$ مشتق‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه $f'(x_۰)$ وجود داشته باشد. هم‌چنین تابع f را در بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر گویند هرگاه f در هر نقطهٔ دلخواه x از آن بازه مشتق‌پذیر باشد. در این صورت مشتق را با $f'(x)$ یا به‌طور ساده با y' نمایش می‌دهند (گاهی برای مشتق نمادهای $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{df}{dx}$ نیز به‌کار برده می‌شود).

مثال ۱: محاسبهٔ مشتق $f(x)=3x^2-4x$ در نقطهٔ $x=-1$:

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[3(-1+h)^2-4(-1+h)\right]-\left[3(-1)^2-4(-1)\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-6h+3h^2-4h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-10h+3h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(-10+3h)=-10$$

مثال ۲: می‌خواهیم مشتق $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ را در نقطهٔ $x=2$ به‌دست آوریم.

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x+1}{x-1}-5}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{-3x+6}{x-1}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-3(x-2)}{(x-1)(x-2)}=-3$$

نکته: هنگامی که بخواهیم مشتق یک تابع را در چند نقطه حساب کنیم، بهتر است نخست $f'(a)$ یعنی مشتق را در نقطهٔ دلخواه a حساب کنیم، آن‌گاه به‌جای a هریک از مقادیر داده شده را بگذاریم.

مثال ۳: مشتق $f(x)=x^2-x$ را در $x=-1$ و $x=0$ و $x=\frac{1}{2}$ و $x=3$ به‌دست آورید.

ابتدا مشتق تابع را در نقطهٔ a محاسبه می‌کنیم :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x^2-x)-(a^2-a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a-1)}{x-a}=2a-1$$

بنابراین :

$$f'(-1)=-2-1=-3 \quad ، \quad f'(\tfrac{1}{2})=1-1=0$$

$$f'(0)=-1 \quad ، \quad f'(3)=6-1=5$$

تمرین: با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع‌های زیر را در نقطهٔ داده‌شده به‌دست آورید :

۱) $f(x)=3x-1 \;,\; x=2$

۲) $f(x)=x^3+3x^2-2 \;,\; x=1$

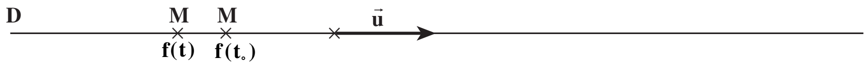
۳) $f(x)=\frac{1}{1-x} \;,\; x=-1$

۴) $f(x)=\frac{x}{1+x} \;,\; x=0$

۵) $f(x)=2\sqrt{1-x} \;,\; x=-3$

۶) $f(x)=ax^2+bx+c \;,\; x=-\frac{b}{2a}$

سرعت یک متحرک: متحرکی روی خط D در حرکت است. با انتخاب یک نقطهٔ O از D به‌عنوان مبدأ و یک بردار واحد $\vec{u}$ روی آن، خط D را به یک محور تبدیل می‌کنیم، به‌طوری که در هر لحظه فاصلهٔ (جهت‌دار) متحرک از O یک عدد حقیقی می‌باشد. این فاصله را که تابعی است از زمان t با معادلهٔ $s = f(t)$ مشخص می‌کنیم. چنانچه در لحظهٔ t_0 متحرک در نقطهٔ M_0 و فاصلهٔ آن از $O: s_0 = f(t_0)$، و در لحظهٔ t در نقطهٔ M و فاصلهٔ آن از $O: s = f(t)$ باشد، متحرک در زمان $t - t_0$ مسافت M_0M را که برابر است با $s - s_0 = f(t) - f(t_0)$ پیموده است. بنابراین سرعت متوسط آن



$\dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ است. در واقع این عبارت همان آهنگ تغییر متوسط تابع $f(t)$ نسبت به تغییر t است. هنگامی که زمان $t - t_0$ بی‌اندازه کوچک باشد، سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای متحرک نزدیک می‌شود. سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظهٔ t_0 همان حد سرعت متوسط آن در $t = t_0$ است که آن را با $v(t_0)$ نمایش می‌دهند.

بنابراین :

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

اما حد بالا همان مشتق تابع $f(t)$ در لحظهٔ t_0 است. یعنی $v(t_0) = f'(t_0)$، به‌طورکلی $v(t) = f'(t)$، یعنی سرعت متحرک برابر است با مشتق مسافت نسبت به زمان. $f'(t)$ ممکن است منفی نیز باشد. در چنین حالتی برای محاسبهٔ اندازه سرعت قدرمطلق $f'(t)$ را در نظر می‌گیرند. در هر حال علامت $f'(t)$ جهت حرکت متحرک را مشخص می‌کند. برابری بالا را گاهی به صورت $v(t) = \dfrac{ds}{dt}$ نیز می‌نویسند.

مثال ۴: اگر طول نقطهٔ متحرک M که بر محور $x'ox$ در حرکت است، در زمان t (ثانیه) برابر با x (سانتی‌متر) باشد به‌طوری که $x = t^2 - 4t + 3$، سرعت متحرک را در ثانیه‌های ۱ و ۳ و ۵ به‌دست آورید.

حل: برای یافتن سرعت (لحظه‌ای) به محاسبهٔ مشتق می‌پردازیم :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left[(t+h)^2 - 4(t+h) + 3\right] - \left[t^2 - 4t + 3\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2th - 4h + (h)^2}{h} = \lim_{h \to 0}(2t - 4 + h) = 2t - 4$$

پس $v(t)=f'(t)=۲t-۴$ بنابراین در ثانیه‌های ۱، ۳ و ۵ سرعت به‌ترتیب برابر است با :

$$v(۱)=۲-۴=-۲ \qquad v(۳)=۶-۴=۲ \qquad v(۵)=۱۰-۴=۶$$

یعنی در ثانیه‌های ۱ و ۳ مقدار سرعت ۲ سانتی‌متر در ثانیه و در ثانیهٔ ۵ ، ۶ سانتی‌متر در ثانیه است. به‌علاوه در $v(۱)=-۲$ علامت منفی بیانگر این است که متحرک با سرعت ۲ سانتی‌متر در ثانیه از راست به چپ در حرکت است. در لحظه‌ای که جهت حرکت تغییر می‌کند سرعت صفر می‌شود. اما داریم $v(t)=۲t-۴$. پس $v(t)$ در لحظهٔ $t=۲$ صفر می‌شود و در این لحظه $x=-۱$. بنابراین هنگامی که متحرک در حرکت خود از راست به چپ به ۱- می‌رسد سرعتش صفر شده و جهت حرکتش تغییر می‌کند و از چپ به راست می‌شود.

مشتق دوم: مشتق $y=f(x)$ یعنی $y'=f'(x)$ را (درصورتی که وجود داشته باشد) مشتق اول، و مشتق $y'=f'(x)$ را (در صورت وجود) مشتق دوم تابع $y=f(x)$ می‌نامند و با $y''=f''(x)$ نشان می‌دهند.

مثال ۵: به‌طوری که در مثال ۴ دیده شد مشتق اول $y=x^۲-x$ عبارت است از $y'=۲x-۱$ و مشتق دوم آن :

$$y''=۲$$

نکته: گفتیم که اگر معادلهٔ حرکت یک متحرک $s=f(t)$ باشد مشتق اول آن یعنی $s'=f'(t)$ را سرعت می‌نامند و با $v(t)$ نمایش می‌دهند. مشتق دوم $f(t)$، یا مشتق $v(t)$ را شتاب متحرک می‌گویند و با $a(t)$ نشان می‌دهند، یعنی $v(t)=f'(t)$ و $a(t)=v'(t)=f''(t)$.

در مثال ۴ دیدیم که اگر $f(t)=t^۲-۴t+۳$ باشد داریم : $v(t)=f'(t)=۲t-۴$

پس : $a(t)=f''(t)=۲$.

تمرین

۱ــ شیب خط مماس بر نمودار تابع‌های زیر را در نقطهٔ داده‌شده به‌دست آورید. (از مشتق این توابع که در صفحه‌های پیش محاسبه شده است استفاده کنید) :

۱) $y=\frac{۱}{۳}x^۲-۱ \quad , \quad x=۳$

۲) $y=x^۲ \quad , \quad x=-۱$

۳) $y=۳x^۲-۴x \quad , \quad x=-۱$

۴) $y=x^۲-x \quad , \quad x=\frac{۱}{۲}$

۲ــ متحرکی که بــر محور xها در حرکت است دارای معادلهٔ $x = t^{۲} - ۲t - ۱$ است (t را برحسب ثانیه و x را سانتی‌متر بگیرید). سرعت متوسط این متحرک را در فاصلهٔ زمانی $t = ۱$ و $t = ۴$ و سرعت لحظه‌ای آن را در زمان‌های $t = ۰$ و $t = ۱$ و $t = ۳$ به‌دست آورید.

۳ــ توپی را با سرعت اولیهٔ ۳۰ متر در ثانیه به‌طور قائم از زمین به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر جهت مثبت فاصله از نقطهٔ پرتاب به‌طرف بالا باشد، معادلهٔ حرکت به شکل $S = -\frac{۱}{۲}gt^{۲} + ۳۰t$ است که در آن $g = ۹/۸ m/s^{۲}$ شتاب گرانش زمین است. بنابراین، $x = f(t) = -۴/۹t^{۲} + ۳۰t$. مطلوب است محاسبهٔ :

الف ــ سرعت لحظه‌ای توپ در پایان یک ثانیه پس از پرتاب.

ب ــ سرعت لحظه‌ای توپ در پایان ۳ ثانیه پس از پرتاب.

۴ــ توپ تنیسی را به هوا پرتاب کرده‌ایم. اگر مسافت پیموده‌شده‌به‌وسیلهٔ توپ، برحسب متر، تابعی از زمان t برحسب ثانیه به‌صورت $s = ۱۲t - ۳t^{۲}$ باشد، سرعت متوسط توپ را در ۲ ثانیهٔ اول به‌دست آورید. سرعت آن را در لحظهٔ t حساب کنید. در چه زمانی این سرعت صفر می‌شود و در چه ارتفاعی؟ در لحظهٔ $t = ۴$ ثانیه پس از پرتاب، وضعیت توپ چگونه است و سرعت آن چقدر است؟

دستورها و قضیه‌های مشتق‌گیری

به‌طوری که در مثال‌های بالا دیدید در محاسبهٔ مشتق یک تابع، با استفاده از تعریف آن، عملیات نسبتاً زیادی را باید انجام داد. به‌ویژه هرگاه تابع f(x) دارای عبارتی پیچیده باشد این کار بسیار مشکل و خسته‌کننده است. اما خوشبختانه روش دیگری وجود دارد که مبتنی بر چند دستور و قضیهٔ ساده است و محاسبهٔ مشتق را بسیار آسان می‌کند.

به‌طوری‌که گفته شد دستورها و قضیه‌هایی وجود دارند که محاسبهٔ مشتق توابع را آسان می‌سازند. اینک به بیان آن‌ها می‌پردازیم. برخی را اثبات می‌کنیم و برخی دیگر را بدون اثبات می‌پذیریم.

۱ــ اگر c یک عدد ثابت و $f(x) = c$ ، آنگاه داریم $f'(x) = ۰$

زیرا :

$$f'(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to ۰} ۰ = ۰$$

پس می‌توان گفت : مشتق توابع ثابت برابر با صفر است.

مثال ۶: اگر $y = ۸$ باشد، آن‌گاه $y' = ۰$

۲ــ اگر $y = f(x) = x^{n}$ ، آن‌گاه $y' = f'(x) = nx^{n-۱}$

مثال ۷: اگر $y = x^۶$ آن‌گاه $y' = ۶x^۵$

نتیجه: اگر $y = x$ آن‌گاه $y' = ۱$

۳ــ اگر $f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر و a عددی ثابت و $y = af(x)$ آن‌گاه :

$$y' = (af(x))' = af'(x)$$

مثال ۸: اگر $y = -۵x^۷$ آن‌گاه $y' = -۵(۷x^۶) = -۳۵x^۶$

۴ــ اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق‌پذیر و $y = f(x) + g(x)$ ، آن‌گاه :

$$y' = f'(x) + g'(x)$$

زیرا :

$$y' = \lim_{h \to ۰} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to ۰} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

بنابراین می‌توان گفت : **مشتق مجموع دو تابع برابر است با مجموع مشتق‌های آن دو تابع**. این مطلب را می‌توان به بیش از دو تابع تعمیم داد.

نتیجه: اگر $y = ax + b$ آن‌گاه $y' = a$

مثال ۹: مشتق $y = ۳x^۵ - ۵x^۲$ را محاسبه کنید.

حل: اگر قرار دهیم $f(x) = ۳x^۵$ و $g(x) = -۵x^۲$ خواهیم داشت :

$$f'(x) = ۱۵x^۴ \quad \text{و} \quad g'(x) = -۱۰x$$

پس :

$$y' = f'(x) + g'(x) = ۱۵x^۴ - ۱۰x$$

۵ــ اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق‌پذیر باشند و $y = f(x)g(x)$ آن‌گاه داریم :

$$y' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

مثال ۱۰: مشتق $y = (۳x - ۲)(x^۲ + ۱)$ برابر است با :

$$y' = ۳(x^۲ + ۱) + ۲x(۳x - ۲) = ۳x^۲ + ۳ + ۶x^۲ - ۴x = ۹x^۲ - ۴x + ۳$$

اگر ابتدا y را به‌صورت $y = ۳x^۳ - ۲x^۲ + ۳x - ۲$ به‌دست آوریم و سپس از آن مشتق بگیریم باز هم به همان نتیجهٔ بالا می‌رسیم.