تمرین

مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید :

۱) $f(x)=۷۳$

۲) $f(x)=۷x+۳$

۳) $f(x)=x^{۳}+۳x^{۲}+۷x+۳$

۴) $f(x)=۲-۵x+۴x^{۲}$

۵) $f(x)=۳x-۴x^{۳}$

۶) $f(x)=\frac{۴-۵x}{۳}+x^{۲}$

۷) $f(x)=\frac{x^{۳}}{۳}+\frac{x^{۲}}{۲}+x+۱$

۸) $f(x)=(۱+۳x)^{۲}$

۹) $f(x)=a_{۰}+a_{۱}x$

۱۰) $f(x)=a_{۰}+a_{۱}x+a_{۲}x^{۲}$

۱۱) $f(x)=a_{۰}+a_{۱}x+a_{۲}x^{۲}+a_{۳}x^{۳}$

۱۲) $f(x)=x+(۳x+۲)^{۲}$

۱۳) $f(x)=(۲x+۳)(۳x-۷)$

۱۴) $f(x)=(x^{۳}-x)(x-۹)$

۱۵) $f(x)=(x+۱)(\frac{x^{۲}}{۲}+x)$

۱۶) $f(x)=(۵x-۴)(۱-\frac{x}{۲})$

۱۷) $f(x)=x^{۳}(۳x-۲)$

۱۸) $f(x)=۳x(x^{۲}+۱)(x+۲)$

۶ــ اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق‌پذیر باشند و $g(x)\neq ۰$ و $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ آن‌گاه داریم :

$$y'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^{۲}}$$

یعنی : مشتق یک تابع کسری برابر است با حاصل‌ضرب مشتق صورت در مخرج منهای حاصل‌ضرب مشتق مخرج در صورت، تقسیم بر توان دوم مخرج.

مثال ۱۱: مشتق تابع $y=\frac{۳x}{x-۲}$ هنگامی که $x\neq ۲$ باشد چنین است :

$$y'=\frac{۳(x-۲)-(۱)۳x}{(x-۲)^{۲}}=\frac{۳x-۶-۳x}{(x-۲)^{۲}}=\frac{-۶}{(x-۲)^{۲}}$$

و مشتق $y=\frac{۱}{x^{۲}}$ ، $x\neq ۰$:

$$y'=\frac{-۲x}{x^{۴}}=\frac{-۲}{x^{۳}}$$

مشتق تابعِ مرکب

۷ــ اگر $y=f(u)$ و $u=g(x)$ دو تابع مشتق‌پذیر باشند آن‌گاه y نسبت به x دارای مشتق است. اگر مشتق y نسبت به u را با y'_u ومشتق y نسبت به x را با y'_x نشان می‌دهیم. داریم :

$$y'_x=y'_u.u'(x)=f'(u)g'(x)$$

مثال ۱۲: اگر $y=u^{۲}+u$ و $u=x^{۲}-۱$ باشد، داریم :

$$y'_x=y'_u.u'(x)=(۲u+۱)(۲x)=\left[۲(x^{۲}-۱)+۱\right](۲x)=۴x^{۳}-۲x$$

مثال ۱۳: می‌خواهیم مشتق $y=(x^{۴}-۳x^{۲}+۱)^{۳}$ را حساب کنیم :

فرض می‌کنیم $u=x^{۴}-۳x^{۲}+۱$ پس $y=u^{۳}$ و خواهیم داشت :

$$y'_u=۳u^{۲} \quad \text{و} \quad u'_x=۴x^{۳}-۶x$$

بنابراین :

$$y'_x=y'_u.u'_x=۳(x^{۴}-۳x^{۲}+۱)^{۲}(۴x^{۳}-۶x)$$
$$=۶x(۲x^{۲}-۳)(x^{۴}-۳x^{۲}+۱)^{۲}$$

نتیجه: اگر $y=u^{n}$ و u تابعی از x باشد، خواهیم داشت :

$$y'_x=nu'.u^{n-۱}$$

زیرا داریم :

$$y'_x=y'_u.u'_x \quad \text{و} \quad y'_u=nu^{n-۱}$$

که چون y'_x و u'_x همان y' و u' هستند، دستور بالا را چنین می‌نویسند : $y'=nu'.u^{n-۱}$

مثال ۱۴: اگر $y=(۲x^{۳}+x)^{۵}$ باشد، آن‌گاه : $y'=۵(۶x^{۲}+۱)(۲x^{۳}+x)^{۴}$

۸ ـ اگر $f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر و مثبت باشد و $y=\sqrt{f(x)}$، آن‌گاه داریم :

$$y'=\frac{f'(x)}{۲\sqrt{f(x)}} \quad \text{و} \quad (f(x)>۰)$$

مثال ۱۵: مشتق $y=\sqrt{x}$ برابر است با : $y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$

مشتق $y=\sqrt{۷x+۳}$، $(x>-\frac{۳}{۷})$ برابر است با : $y'=\frac{۷}{۲\sqrt{۷x+۳}}$

مشتق $y=\sqrt{(۱+x^{۲})^{۳}}$ برابر است با : $y'=\frac{۳\times ۲x(۱+x^{۲})^{۲}}{۲\sqrt{(۱+x^{۲})^{۳}}}=۳x\sqrt{۱+x^{۲}}$

مشتق $y=\sqrt{\frac{۲x+۵}{۳x-۱}}$ برابر است با :

$$y'=\frac{\frac{۲(۳x-۱)-۳(۲x+۵)}{(۳x-۱)^{۲}}}{۲\sqrt{\frac{۲x+۵}{۳x-۱}}}=\frac{-۱۷}{۲\sqrt{(۲x+۵)(۳x-۱)^{۳}}}$$

تمرین

مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید و دامنهٔ مشتق‌پذیری هر تابع را مشخص کنید :

۱) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ ۲) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ ۳) $f(x)=\frac{2x-3}{3x+5}$

۴) $f(x)=\frac{3(2x+5)^2}{x^3}$ ۵) $f(x)=\frac{4}{(x-1)^3}$ ۶) $f(x)=\frac{x+1}{x(x-1)}$

۷) $f(x)=\frac{x^3-1}{x^3+1}$ ۸) $f(x)=\frac{1}{x^2+x-2}$ ۹) $f(x)=\left(\frac{x-1}{3-x}\right)^2$

۱۰) $f(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ ۱۱) $f(x)=(2x+3)^4$ ۱۲) $f(x)=(5x^2-2)^3$

۱۳) $f(x)=\sqrt{3x-2}$ ۱۴) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ ۱۵) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

۱۶) $f(x)=\sqrt{x(x-2)}$ ۱۷) $f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ ۱۸) $f(x)=(1+\sqrt{x})^3$

۱۹) $f(x)=\frac{x}{x+\sqrt{x}}$ ۲۰) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

مشتق تابع‌های مثلثاتی

۱ــ مشتق y = sinx : برای به‌دست آوردن مشتق sinx همان روش کلی را به‌کار می‌بریم، یعنی حد نسبت $\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ را در $h=0$ حساب می‌کنیم.

بنابر اتحاد مثلثاتی $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$ می‌توان آن را چنین نوشت :

$$\sin(x+h)-\sin x=\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x$$

پس خواهیم داشت :

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{(\cos h-1)\sin x+\cos x\sin h}{h}=\frac{\cos h-1}{h}\sin x+\frac{\sin h}{h}\cos x$$

از طرفی می‌دانیم که : $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ پس $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$

و از طرف دیگر :

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(\cos t-1)(\cos t+1)}{t(\cos t+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos^2 t-1}{t(\cos t+1)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin^2 t}{t(\cos t+1)}=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{\sin t}{t}\times\frac{\sin t}{\cos t+1}\right)=-1\times\frac{0}{2}=0$$

بنابراین :
$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{x} = \lim_{h\to 0}(\frac{\cosh-1}{h}\sin x + \frac{\sinh}{h}\cos x)$$
$$= \lim_{h\to 0}(\frac{\cosh-1}{h}\sin x) + \lim_{h\to 0}(\frac{\sinh}{h}\cos x)$$
$$= 0\times \sin x + 1\times \cos x = \cos x$$

درنتیجه مشتق $\sin x$ برابر است با $\cos x$، یا $y' = \cos x$. پس می‌توان گفت : تابع $\sin x$ برای هر مقدار x از $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن $\cos x$ است.

۲ــ مشتق $y = \cos x$: مشتق کسینوس را نیز می‌توان به روش مشابه به‌دست آورد. اما راه ساده‌تر آن این است که آن را به سینوس که مشتق آن را می‌شناسیم تبدیل کنیم، آن‌گاه با به‌کار بردن قاعدهٔ مشتق تابع مرکب، مشتق آن را حساب کنیم :
$$y=\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\sin u \quad , \quad u=\frac{\pi}{2}-x$$
پس :
$$y' = (\cos u)u' = (-1)\cos(\frac{\pi}{2}-x) = -\sin x$$
بنابراین تابع $\cos x$ برای هر مقدار x مشتق‌پذیر است و مشتق آن $-\sin x$ است.

۳ــ مشتق $y = \tan x$: برای محاسبهٔ این مشتق ابتدا می‌نویسیم : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ آن‌گاه دستور مشتق تابع کسری را درمورد آن به‌کار می‌بریم، خواهیم داشت :
$$y' = \frac{\cos x\cos x-(-\sin x)\sin x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$$
پس تابع $\tan x$ برای هر مقدار $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \;,\; k\in \mathbb{Z}$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ است.

۴ــ مشتق $y = \cot x$: در این‌جا نیز روش بالا را به‌کار می‌بریم :
$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$
$$y' = \frac{(-\sin x)\sin x-(\cos x)\cos x}{(\sin x)^2} = \frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$$
پس تابع $\cot x$ برای هر مقدار $x = k\pi \;,\; k\in \mathbb{Z}$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن $-(1+\cot^2 x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$ است.

مثال ۱۶:

اگر : $y=2\sin x+3\cos x$ ، آن‌گاه $y'=2\cos x-3\sin x$

اگر : $y=\sin 5x$ ، آن‌گاه $y'=5\cos 5x$

اگر : $y=\cos\frac{x}{3}$ ، آن‌گاه $y'=-\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}$

اگر : $y=\tan(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2})$ ، آن‌گاه با قرار دادن $y=\tan u$ و $u=\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}$

خواهیم‌داشت : $y'=u'(1+\tan^2 u)=-\frac{1}{2}\left[1+\tan^2(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2})\right]$

نتیجه: اگر u و v را توابعی از x بگیریم، همهٔ دستورهای محاسبهٔ مشتق را که تاکنون دیده‌ایم می‌توان در جدولی به‌صورت زیر خلاصه کرد :

تابع	مشتق	مثال
$y=c$	$y'=0$	$y=7\Rightarrow y'=0\ ,\ y=-\sqrt{3}\Rightarrow y'=0\ ,\ y=1373\Rightarrow y'=0$
$y=ax+b$	$y'=a$	$y=4x-9\Rightarrow y'=4\ ,\ y=-5x+7\Rightarrow y'=-5$
x^n	nx^{n-1}	$y=x^6\Rightarrow y'=6x^5$
au	au'	$y=-3x^5\Rightarrow y'=-3(5x^4)=-15x^4$
$u+v$	$u'+v'$	$y=x^3+4x\Rightarrow y'=3x^2+4$
$u.v$	$u'.v+v'.u$	$y=(3x^2-x)(2x-3)\Rightarrow y'=(6x-1)(2x-3)+2(3x^2-x)$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$	$y=\frac{2x-1}{3x^2+5}\Rightarrow y'=\frac{2(3x^2+5)-6x(2x-1)}{(3x^2+5)^2}=\frac{-6x^2+6x+10}{(3x^2+5)^2}$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$y=\frac{1}{x^3}\Rightarrow y'=-\frac{3x^2}{x^6}=-\frac{3}{x^4}$
$\frac{1}{x^n}=x^{-n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}=-nx^{-n-1}$	$y=\frac{1}{x^5}\Rightarrow y'=\frac{-5}{x^6}=-5x^{-6}$
$f(u)$	$u'f'(u)$	$y=(3x^2+1)^4\Rightarrow y'=(6x)\left[4(3x^2+1)^3\right]=24x(3x^2+1)^3$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y=\sqrt{x^4+1}\Rightarrow y'=\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}}\ ,\ y=\sqrt{x}\Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin u$	$u'\cos u$	$y=\sin(3x-1)\ ,\ y'=3\cos(3x-1)$
$\cos u$	$-u'\sin u$	$y=\cos(x^2+1)\ ,\ y'=-2x\sin(x^2+1)$
$\tan u$	$u'(1+\tan^2 u)$	$y=\tan(1-x^2)\ ,\ y'=-2x\left[1+\tan^2(1-x^2)\right]$
$\cot u$	$-u'(1+\cot^2 u)$	$y=\cot(-5x)\ ,\ y'=5\left[1+\cot^2(-5x)\right]$

تمرین

مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید و در شماره‌های زوج مقدار مشتق را در نقطهٔ داده‌شده حساب کنید.

۱) $y=\sin x-\cos x$

۲) $y=3\cos x\sin 2x$ و $x=\pi$

۳) $y=3\sin^2 x+2\cos^3 x$

۴) $y=(\sin x+\cos x)^2$ و $x=3\frac{\pi}{2}$

۵) $y=\sin(-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})+\cos\frac{x}{2}$

۶) $y=\sin x\cos 3x$ و $x=\frac{\pi}{3}$

۷) $y=\frac{1}{\cos x+\sin x}$

۸) $y=\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$ و $x=0$

۹) $y=2\cos^2(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4})$

۱۰) $y=x+\sin\sqrt{x}$ و $x=\pi^2$

۱۱) $y=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$

۱۲) $y=\sin x\tan x$ و $x=\frac{\pi}{4}$

۱۳) $y=\tan^2 x-2\cot x$

۱۴) $y=\frac{1-\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}$ و $x=\frac{\pi}{2}$

۱۵) $y=\sqrt{1+\sin x}$

۱۶) $y=\frac{\sin x}{1+x}$ و $x=0$

۱۷) $y=\sin^3\sqrt{t}$

۱۸) $y=\sin\omega t+\cos\omega t$ و $t=\frac{\pi}{2\omega}$

سرگرمی ریاضی

پدری ۴۶ ساله، یک پسر ۲۶ ساله و یک دختر دارد. اگر بعد از چند سال، سن پدر برابر با مجموع سن دو فرزندش و سه‌برابر سن دخترش شود، سن کنونی دختر چقدر است؟

معلمان محترم، صاحب‌نظران، دانش‌آموزان عزیز و اولیای آنان می‌توانند نظر اصلاحی خود را درباره مطالب
این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۴۸۷۴ / ۱۵۸۵۵ - گروه درسی مربوط و یا پیام‌نگار (Email)
talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی