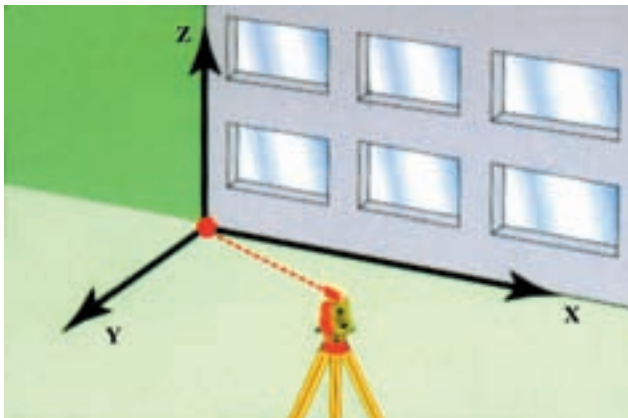


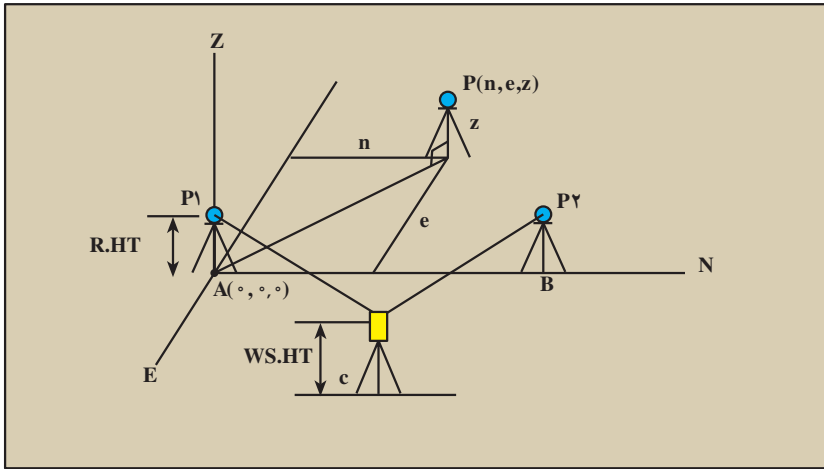
دستگاه مختصات (Coordinate System)

- هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از فراگیر انتظار می‌رود:
- ۱- محورهای مختصات را تعریف کند و دستگاه مختصات دویبعدی را شرح دهد.
 - ۲- دستگاه مختصات قطبی دویبعدی را توضیح دهد.
 - ۳- دستگاه مختصات سه‌بعدی را تعریف کرده، مختصات دکارتی در فضا را شرح دهد.
 - ۴- دستگاه مختصات استوانه‌ای یا نیم‌قطبی را شرح دهد.
 - ۵- روابط تبدیل مختصات استوانه‌ای را به مختصات قائم‌الزاویه و به‌عکس، با ذکر مثال، شرح دهد.
 - ۶- مختصات کروی را توضیح دهد.
 - ۷- روابط تبدیل مختصات کروی را به قائم‌الزاویه و به‌عکس، شرح دهد.
 - ۸- مثال‌های ارائه شده در این فصل را فراگیرد.



$x, y, z = 0$

شکل ۵-۱



شکل ۲-۵

۵-۱- تعریف محور (Axis)

یک خط جهت دار را که روی آن نقطه‌ای به نام مبدأ و طولی به نام واحد اندازه‌گیری تعیین شده باشد «محور» می‌نامند. جهت محور را از طرف چپ به راست «مثبت» و از طرف راست به چپ «منفی» در نظر می‌گیرند. معمولاً محور را با $x'Ox$ یا $y'Oy$ مطابق این شکل نشان می‌دهند.



شکل ۳-۵

هر عدد حقیقی را با یک نقطه از محور و هر نقطه از محور را با یک عدد حقیقی متناظر می‌کنیم. مبدأ O متناظر با عدد صفر و نقطه‌ی I متناظر با عدد یک است. در شکل ۳-۵ پاره خط OA را با در نظر گرفتن جهت مثبت محور «بردار» می‌نامیم و آن را با \vec{OA} نشان می‌دهیم. O را مبدأ و A را انتهای این بردار می‌خوانیم. طول پاره خط OA را بدون در نظر گرفتن جهت آن طول آن بردار نامیده، با $|\vec{OA}|$ نشان می‌دهند.

اگر A نقطه‌ای دل خواه روی محور باشد بنا به تعریف طول (مختص) نقطه‌ی A که آن را با x_A نشان می‌دهیم و به آن «اندازه‌ی جبری \vec{OA} » نیز می‌گوییم:

$$\overline{OA} = x_A$$



شکل ۴-۵

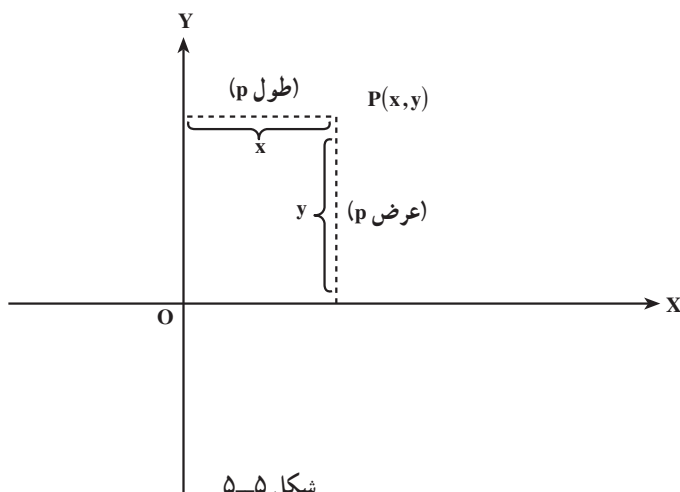
۵-۲- دستگاه مختصات دوی بعدی

مجموعه‌ی تمام زوج‌های مرتب از اعداد حقیقی را صفحه‌ی اعداد و هر زوج مرتب (x, y) را یک نقطه از این صفحه می‌نامیم. صفحه‌ی اعداد را با علامت R^2 نشان می‌دهند.

همان‌گونه که R^1 را با نقاط روی یک محور (فضای یک بعدی) مشخص می‌کنیم، می‌توانیم R^2 را با نقاط واقع در یک صفحه‌ی هندسی (فضای دوی بعدی) مشخص کنیم. روشی که برای R^2 به کار می‌بریم منسوب به «رنه دکارت» ریاضی‌دان فرانسوی است که ابداع تحلیلی در سال ۱۶۲۷ نیز کار اوست.

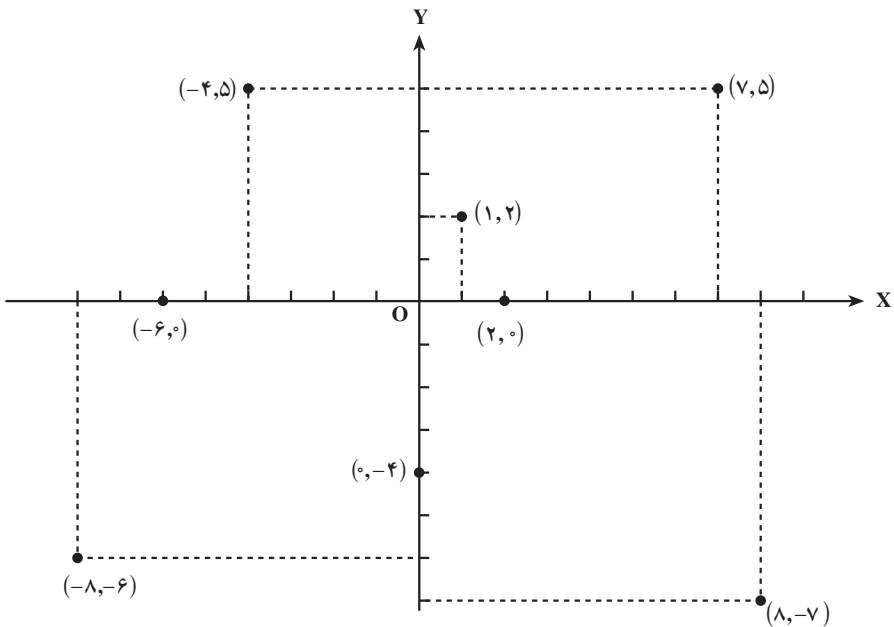
تعریف دستگاه دوی بعدی دکارتی (قائم‌الزاویه) (Cartesian): یک خط افقی در صفحه‌ی هندسی انتخاب می‌کنیم. آن را محور x ها می‌نامیم. خطی قائم نیز به نام محور y ها انتخاب می‌کنیم که عمود بر محور x ها باشد. نقطه‌ی برخورد محور x ها و محور y ها را مبدأ مختصات می‌نامیم و با حرف O نشان می‌دهیم. واحدی برای طول انتخاب می‌کنیم. (معمولاً واحد طول برای هر دو عدد یکسان انتخاب می‌شود.)

فرض می‌کنیم جهت مثبت روی محور x ها در طرف راست مبدأ و جهت مثبت روی محور y ها در طرف بالای مبدأ باشد (مطابق شکل ۵-۵). به زوج مرتب (x, y) از اعداد حقیقی نقطه‌ای مانند P روی صفحه هندسی نسبت می‌دهیم که دارای این مشخصات است: فاصله‌ی P از محور y ها برابر x است که اگر P در طرف راست محور y ها واقع شده باشد x مثبت و اگر در طرف چپ باشد x منفی است. x را طول (مختص x) نقطه‌ی P می‌نامیم. فاصله‌ی P از محور x ها برابر y است که اگر P بالای محور x ها باشد y مثبت و اگر P پایین محور x ها باشد y منفی خواهد بود. y را عرض



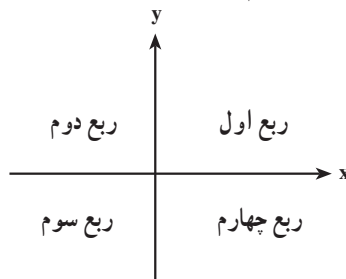
شکل ۵-۵

(مختص y) نقطه‌ی P می‌نامیم. بدین ترتیب، طول و عرض یک نقطه را «مختصات دکارتی قائم آن نقطه» می‌گویند. در شکل ۶-۵ یک دستگاه مختصات دکارتی قائم و چند نقطه را در آن می‌بینید.



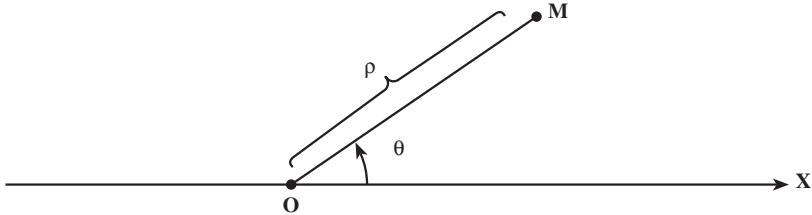
شکل ۶-۵

محور x ها و محور y ها صفحه‌ی اعداد را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند که هر قسمت را یک «ربع» می‌خوانیم. ربع اول ربعی است که در آن طول و عرض نقاط هر دو مثبت هستند؛ یعنی، ربع بالای x ها و سمت راست محور y ها، به همین ترتیب ربع‌های دیگر را در جهت عکس گردش عقربه‌های ساعت شماره‌گذاری می‌کنیم:



تعریف دستگاه مختصات قطبی (Polar) دو بعدی: مختصات هر نقطه در این دستگاه به وسیله‌ی دو پارامتر یکی طول و دیگری زاویه مشخص می‌شود (شکل ۶-۷). محور ثابتی را مانند

در نظر می‌گیریم؛ برای تعیین مختصات قطبی نقطه‌ی M طول $OM = \rho$ را در نظر گرفته دیگر زاویه‌ی θ (زاویه‌ای که OM با محور Ox در جهت خلاف عقربه‌ساعت می‌سازد) منظور می‌کنیم؛ بنابراین مختصات قطبی $M(\rho, \theta)$ نمایش داده می‌شود. (نقطه O مبدأ مختصات قطبی است).



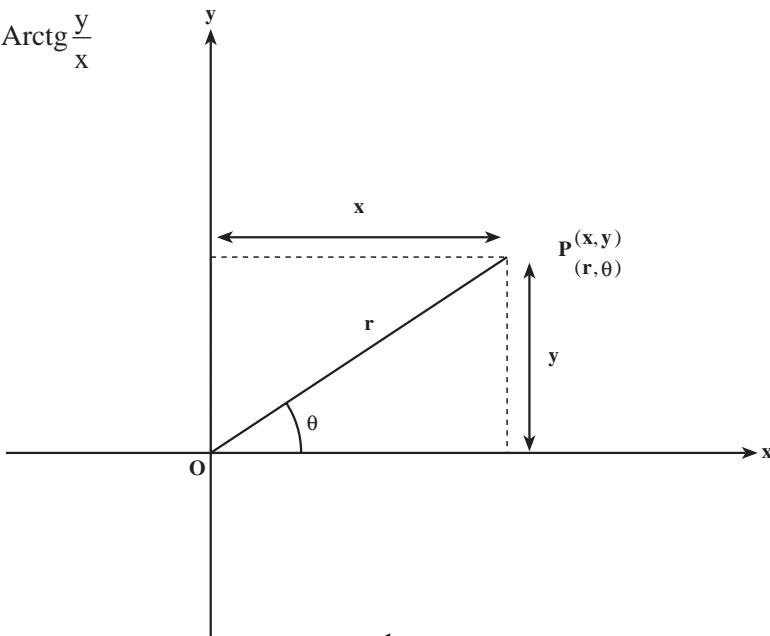
شکل ۷-۵

۳-۵- تبدیل مختصات قائم‌الزاویه به مختصات قطبی

اگر مختصات قائم‌الزاویه نقطه‌ی $p(x,y)$ معلوم باشد با توجه به تعریف مختصات کروی و ملاحظه‌ی شکل ۸-۵ از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\theta = \text{Arctg} \frac{y}{x}$$



شکل ۸-۵

در صورتی که مختصات قطبی نقطه‌ی p معلوم باشد و بخواهیم مختصات قائم‌الزاویه‌ی آن را به دست آوریم مطابق شکل صفحه‌ی قبل (شکل ۵-۸) از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم:

$$x = r \cos \theta$$

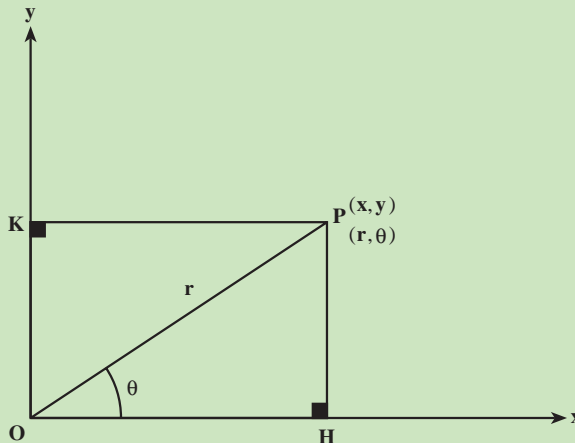
$$y = r \sin \theta$$

مثال ۵-۱: مختصات قائم‌الزاویه نقطه $A(1, \sqrt{3})$ معلوم است مطلوبست محاسبه‌ی مختصات

قطبی نقطه A .

راهکار کلی: در شکل زیر با توجه به این که مختصات قائم‌الزاویه نقطه P یعنی (x, y) معلوم

است می‌خواهیم مختصات قطبی آن (r, θ) را به دست آوریم.



شکل ۵-۹

رابطه تانژانت را در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle OPH$ می‌نویسیم

$$\text{tg} \theta = \frac{PH}{OH} = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \text{Arc tg} \frac{y}{x} \quad \text{رابطه ۱}$$

و رابطه فیثاغورث را نیز در این مثلث می‌نویسیم $OP^2 = PH^2 + OH^2$ و مقادیر x و y و r را در آن قرار می‌دهیم به طوری که

$$OP = r, \quad PH = y, \quad OH = x$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{رابطه ۲}$$

دو رابطه ۱ و ۲ تشکیل یک دستگاه دو معادله دو مجهول را می‌دهد که با حل آن می‌توانیم

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = \text{Arc tg } \frac{y}{x} \end{cases} \quad \text{مختصات را به هم تبدیل کنیم.}$$

روش حل: در مسئله فوق مختصات نقطه $A(1, \sqrt{3})$ یعنی $(y = \sqrt{3}, x = 1)$ می باشد اگر پارامترهای r و θ را از دستگاه تبدیل مختصات به دست آوریم مسئله حل می شود.

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = \text{Arc tg } \frac{y}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r^2 = (1)^2 + (\sqrt{3})^2 \\ \theta = \text{Arc tg } \frac{\sqrt{3}}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = 4 \Rightarrow r = 2 \\ \theta = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow P(2, 60^\circ) \quad \text{مختصات قطبی}$$

بحث و بررسی: به وسیله فرمول فوق و دستگاه تبدیل مختصات می توان مختصات دوطرفه قطبی و قائم الزاویه را به هم تبدیل کرد و در نقشه برداری برای پیاده کردن نقاط بیش تر از روش قطبی (طول و زاویه) استفاده می کنیم.

مطالعه‌ی آزاد

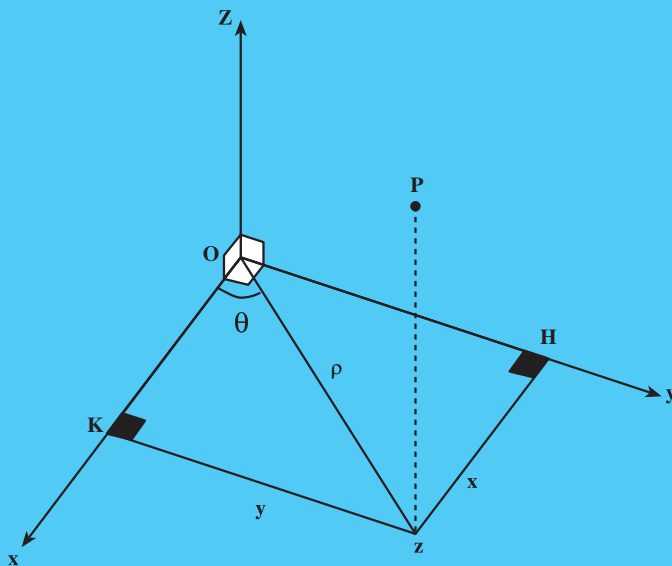
مثال ۲-۵: مختصات قائم الزاویه‌ی نقطه‌ی P عبارت است از $P(1, \sqrt{3}, 5)$ مختصات استوانه‌ای نقطه‌ی P را حساب کنید.

راهکار کلی: طبق تعریف مختصات استوانه‌ای نقطه‌ی P در فضا را روی صفحه xoy تصویر می کنیم که تصویر آن نقطه Z می شود حال از نقطه Z دو عمود بر محورهای ox و oy رسم می کنیم پارامترهای زیر مشخص می شود.

$$Oz = \rho, \quad zH = x, \quad zK = y, \quad \widehat{xoz} = \hat{\theta}$$

در حقیقت اگر مختصات استوانه‌ای را در صفحه xoy تصویر کنیم تبدیل به مختصات قطبی در صفحه به اضافه ارتفاع Z یعنی طول \overline{pz} می باشد و فرمول مختصات قطبی را در صفحه داریم اگر ارتفاع Z یعنی طول \overline{pz} به آن اضافه کنیم مختصات

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \\ y = \rho \cos \theta \end{cases} \quad \text{استوانه‌ای به دست می آید.}$$



شکل ۵-۱۰

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2 \\ \theta = \text{Arctg} \frac{y}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2 \\ \theta = \text{Arctg} \frac{y}{x} \\ Z = z \end{cases}$$

مختصات استوانه‌ای مختصات قطبی

روش حل: مفروضات مسئله عبارت‌اند از $x=1$ و $y=\sqrt{3}$ و $z=5$ که آن‌ها را در فرمول زیر قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2 \\ \theta = \text{Arc tg} \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1)^2 + (\sqrt{3})^2 = \rho^2 \\ \theta = \text{Arc tg} \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho^2 = 4 \\ \theta = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 2 & \text{به‌اضافه‌ی ارتفاع} \\ \theta = 60^\circ \\ z = 5 \end{cases}$$

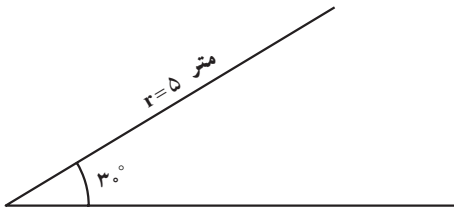
$$\Rightarrow p(2, 60^\circ, 5)$$

مختصات استوانه‌ای

بحث و بررسی: با نوشتن فرمول‌های مربوط به مختصات استوانه‌ای (قطبی) + ارتفاع) که به آن نیم قطبی نیز می‌گویند می‌توان مسائل مربوط به آن را حل کرد.

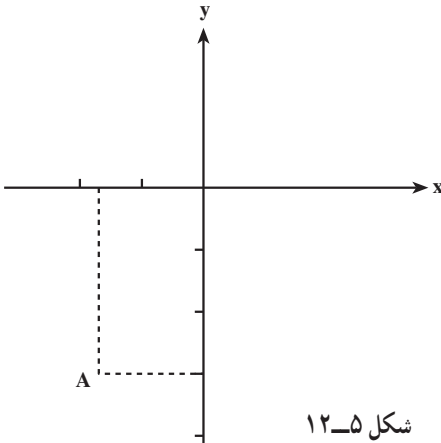
خودآزمایی

- ۱- ابتدا محورهای مختصات دوبعدی را رسم کنید، سپس نقطه‌ی A ، مختصات $(2, 3)$ و نقطه‌ی B با مختصات $(-3, 4)$ و نقطه‌ی C ، مختصات $(-5, -2)$ را در صفحه مشخص کنید.
- ۲- مختصات قطبی نقطه‌ی $M(5, 3^\circ)$ مطابق شکل ۱۱-۵ معلوم است. مختصات قائم‌الزاویه آن را به دست آورید:
- $M(5, 3^\circ)$



شکل ۱۱-۵

- ۳- مختصات قائم‌الزاویه‌ی نقطه‌ی $A(-\sqrt{3}, -3)$ است. مختصات قطبی آن را به دست آورید (شکل ۱۲-۵).



شکل ۱۲-۵

- ۴- مختصات قطبی نقطه‌ی $M = (8, 3^\circ)$ معلوم است. مختصات دکارتی (قائم‌الزاویه) آن را به دست آورید.

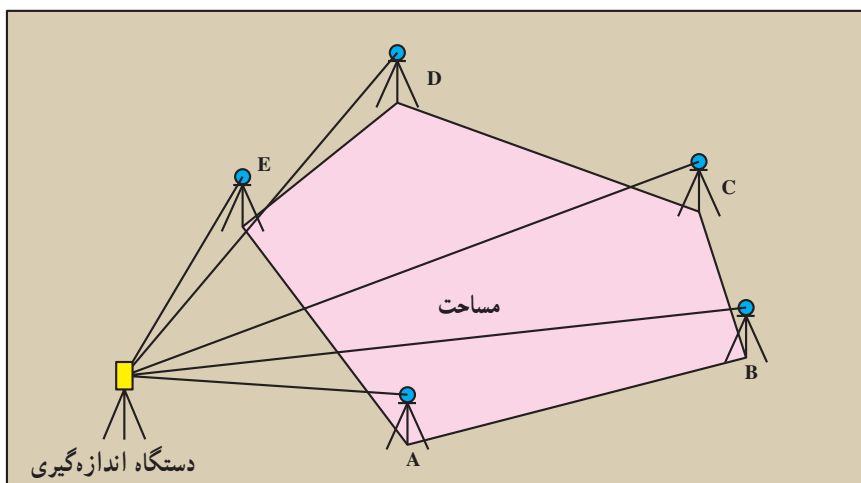
کار گروهی دانش‌آموزان

با نظارت و کمک معلمان عزیز مانند فصول قبل فعالیت آموزش و ارزیابی اعضا توسط گروه انجام شود.

محاسبه‌ی مساحت (Area)

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از فراگیر انتظار می‌رود:

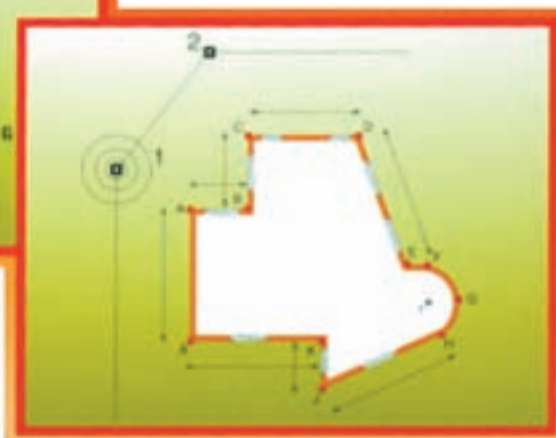
- ۱- روش‌های مختلف محاسبه‌ی مساحت مثلث را توضیح دهد.
- ۲- فرمول‌های محاسبه‌ی مساحت چهارضلعی‌ها (مربع، مستطیل، متوازی‌الاضلاع، لوزی و ذوزنقه) را بیان کند.
- ۳- روش‌های تعیین مساحت چهارضلعی‌های غیرمشخص را توضیح دهد.
- ۴- روش تعیین مساحت چندضلعی‌ها را به روش دستور «هرون» شرح دهد.
- ۵- فرمول‌های محاسبه‌ی مساحت دایره، قطاع و قطعه را با ذکر یک مثال در ۳ شکل بیان کند.
- ۶- فرمول محاسبه‌ی مساحت بیضی را با ذکر یک مثال و رسم شکل توضیح دهد.
- ۷- روش محاسبه‌ی سطح محصور با استفاده از ذوزنقه‌های هم‌ارتفاع را شرح دهد.
- ۸- محاسبه‌ی مساحت به روش «گوس» را شرح دهد.
- ۹- محاسبه‌ی مساحت به روش ذوزنقه‌های هم‌ارتفاع را شرح دهد.
- ۱۰- محاسبه‌ی مساحت به روش سیمپسون را شرح دهد.
- ۱۱- مثال‌های حل‌شده در این فصل را فرا بگیرد.



شکل ۱-۶

آیا می‌دانید

محاسبه‌ی مساحت مثلث: به دلیل نیاز بشر برای حل اختلاف مالکیت‌ها و تعیین حد و مرز زمین‌های حاصل‌خیز کشاورزی و آبرفتی مخصوصاً بعد از سیلاب‌ها و تقسیم عادلانه‌ی آن علم مساحی و اندازه‌گیری ابعاد و مساحت زمین بسیار مورد توجه دانشمندان بوده است.

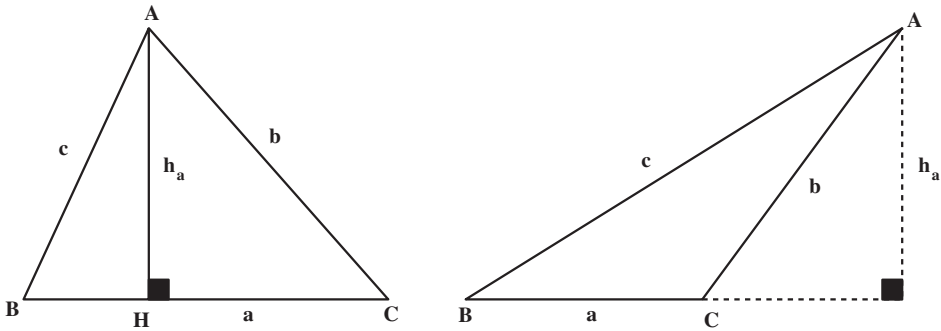


شکل ۲-۶- اندازه‌گیری‌های لازم جهت محاسبه‌ی مساحت

۱-۶ محاسبه‌ی مساحت اشکال هندسی

محاسبه‌ی مساحت مثلث: در شکل ۳-۶ سه ضلعی ABC را در نظر گرفته اضلاع روبه‌روی

هر زاویه با حروفی نظیر a, b, c و ارتفاع وارد بر هر ضلع را با h_a, h_b, h_c نشان می‌دهیم:



شکل ۳-۶

الف) مساحت مثلث برابر است با حاصل ضرب قاعده در نصف ارتفاع وارد بر آن ضلع:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

ب) مساحت مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن دو

ضلع:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A$$

ج) دستور Heron: محاسبه‌ی مساحت مثلث برحسب سه ضلع آن

اگر a, b, c اندازه‌های سه ضلع مثلث باشند، محیط مثلث یعنی $a + b + c$ را با $2P$ نمایش

می‌دهند و S مساحت مثلث را از دستور:

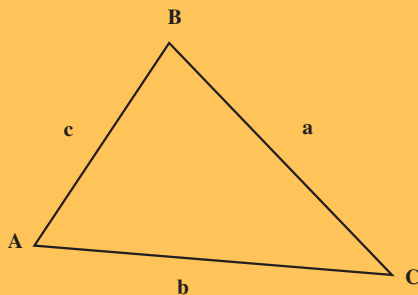
$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

به‌دست می‌آورند. این رابطه به مثابه‌ی دستور Heron در تعیین مساحت اراضی کاربرد فراوان دارد.

آیا می دانید

برای محاسبه‌ی مساحت در حالتی که سه ضلع آن معلوم است ابوالوفابوزجانی دانشمند مسلمان ایرانی در قرن چهارم هـ - ق فرمول آن را به شکل زیر بیان کرده است.

$$S = \sqrt{\left[\left(\frac{c+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{c-b}{2}\right)^2\right]}$$



تذکر: این فرمول در حقیقت با تغییراتی که روی آن انجام می‌شود فرمول محاسبه مساحت به روش هرون (دانشمند یونانی) به دست می‌آید.

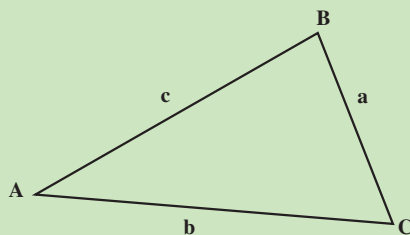
$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

مثال ۶-۱: زمینی است به شکل مثلث که اضلاع آن به ترتیب برابر 70° ، 50° و 60° متر می‌باشد مساحت آن را به دست آورید.

راهکار کلی: برای حل این نوع مسائل که سه ضلع مثلث معلوم باشد بخواهیم مساحت آن را به دست آوریم بهترین راه استفاده از فرمول بوزجانی یا (هرون) می‌باشد.

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \quad \text{که } P \text{ نصف محیط است}$$

$$P = \frac{a+b+c}{2}$$



شکل ۶-۴

روش حل: اضلاع مثلث را داریم به طوری که متر $a=70$ و متر $b=50$ و متر $c=60$

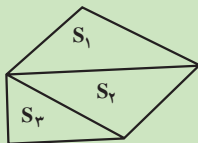
$$P = \frac{a+b+c}{2} = \frac{70+50+60}{2} = \frac{180}{2} = 90$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{90(90-70)(90-50)(90-60)} =$$

$$\sqrt{90(20)(40)(30)} = 1469.69 \text{ مترمربع}$$

بحث و بررسی: با توجه به محاسبه مساحت مثلث با دانستن اضلاع آن از فرمول فوق می توان آن را تعمیم داد برای تمام چندضلعی ها به این صورت که آن ها را به مثلث های مختلف تفکیک کنیم و مساحت هر مثلث را به همین روش به دست آورده سپس مساحت ها را با هم جمع کنیم تا مساحت کل به دست آید.

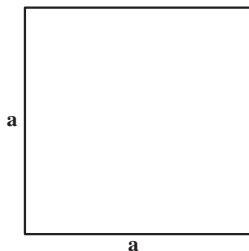
$$S = S_1 + S_2 + S_3$$



شکل ۵-۶

مساحت مربع: برابر حاصل ضرب یک ضلع در خود است (شکل ۶-۶).

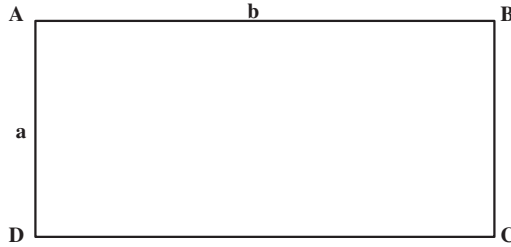
$$S = a^2$$



شکل ۶-۶

مساحت مستطیل: برابر حاصل ضرب طول در عرض است (شکل ۷-۶).

$$S = a.b$$

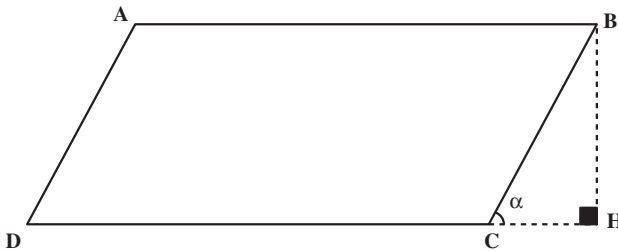


شکل ۶-۷

مساحت متوازی الاضلاع: برابر است با حاصل ضرب هر ضلع در ارتفاع وارد بر آن (مطابق شکل ۶-۸). در متوازی الاضلاع ABCD که BH ارتفاع وارد بر ضلع CD است:

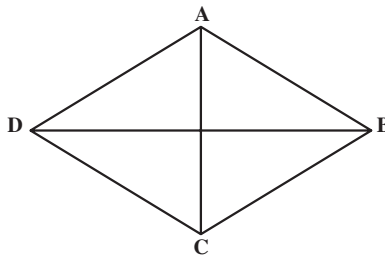
$$S = CD \times BH$$

$$S = CD \times BC \times \sin \alpha$$



شکل ۶-۸

مساحت لوزی: برابر است با نصف حاصل ضرب دو قطر: (شکل ۶-۹). $S = \frac{AC \times BD}{2}$

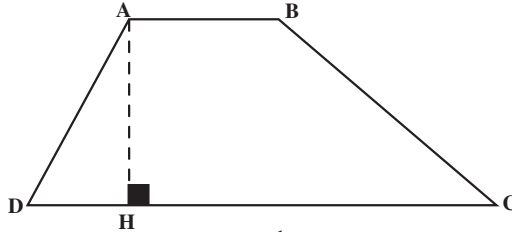


شکل ۶-۹

مساحت دوزنقه: برابر است با حاصل ضرب مجموع دو قاعده در نصف ارتفاع. مطابق شکل ۶-۱۰ در دوزنقه‌ی ABCD قاعده‌های AB و CD و ارتفاع AH مشخص است. مساحت دوزنقه

برابر است با :

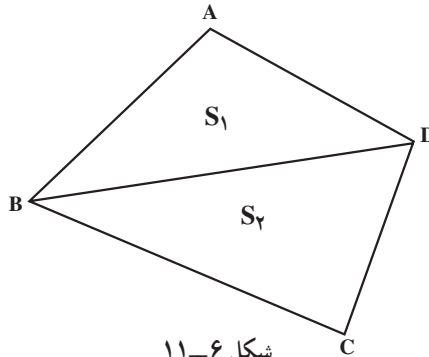
$$S = \frac{AB + CD}{2} \times AH$$



شکل ۶-۱۰

محاسبه‌ی مساحت چهارضلعی‌های غیر مشخص: برای محاسبه‌ی مساحت ابتدا آن‌را به دو مثلث تقسیم کرده، اضلاع آن دو مثلث را اندازه می‌گیریم. مساحت هر مثلث را براساس دستور «هرون» به دست می‌آوریم و با هم جمع می‌کنیم (مطابق شکل ۶-۱۱):

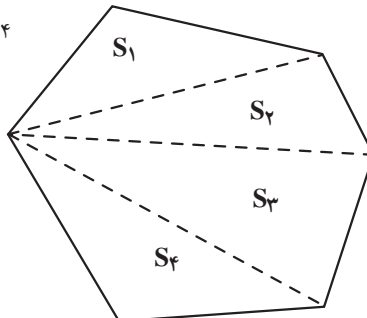
$$S = S_1 + S_2$$



شکل ۶-۱۱

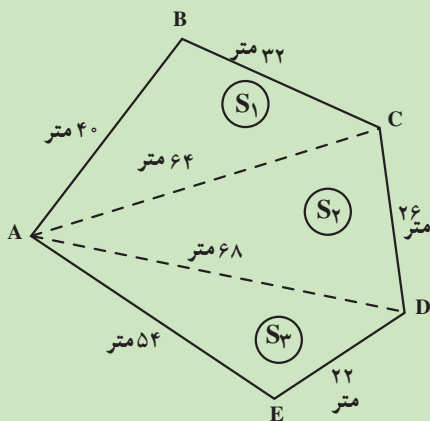
محاسبه‌ی چندضلعی‌های غیر مشخص: ابتدا مطابق شکل ۶-۱۲ آن‌را به چند مثلث تقسیم کرده، طول اضلاع هر مثلث را اندازه‌گیری می‌کنیم؛ سپس مساحت هر مثلث را براساس دستور «هرون» به دست آورده با هم جمع می‌کنیم:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$



شکل ۶-۱۲

مثال ۶-۲: زمین به شکل چندضلعی مقابل که اندازه اضلاع و دو قطر آن داده شده است
 مطلوبست محاسبه مساحت چندضلعی.



شکل ۶-۱۳

راهکار کلی: برای محاسبه مساحت چندضلعی فوق آن را به صورت سه مثلث تفکیک شده به مساحت های

S_1, S_2, S_3 در نظر می گیریم و طبق فرمول بوزجانی - هررون $S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$
 مساحت هر کدام را محاسبه و سپس مساحت کل را به دست می آوریم $S = S_1 + S_2 + S_3$

روش حل: مساحت های S_1, S_2 و S_3 را طبق فرمول به صورت زیر به دست می آوریم.

$$P_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{2} = \frac{40 + 32 + 64}{2} = 68$$

$$a_1 = 40 \text{ متر} \quad b_1 = 32 \text{ متر} \quad c_1 = 64 \text{ متر}$$

$$S_1 = \sqrt{68(68-40)(68-32)(68-64)} = \sqrt{68(28)(36)(4)} = 523/62 \text{ متر مربع}$$

$$S_1 = 523/62 \text{ متر مربع}$$

$$P_2 = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{2} = \frac{64 + 26 + 68}{2} = 79$$

$$a_2 = 64 \text{ متر} \quad b_2 = 26 \text{ متر} \quad c_2 = 68 \text{ متر}$$

$$S_2 = \sqrt{79(79-64)(79-26)(79-68)} = \sqrt{79(15)(53)(11)} = 831/18 \text{ متر مربع}$$

$$S_2 = 831/18 \text{ متر مربع}$$

$$P_3 = \frac{a_3 + b_3 + c_3}{2} = \frac{68 + 22 + 54}{2} = 72 \quad a_3 = 68 \quad b_3 = 22 \quad c_3 = 54$$

$$S_3 = \sqrt{72(72-68)(72-22)(72-54)} = \sqrt{72 \times 4 \times 50 \times 18} = 509/12 \text{ متر مربع}$$

$$S_3 = 509/12 \text{ متر مربع}$$

$$\text{متر مربع کل } S = S_1 + S_2 + S_3 = 523/62 + 831/18 + 509/12 = 1863/92$$

بحث و بررسی: با توجه به این که هر چند ضلعی را می توان به تعدادی مثلث تفکیک کرد و با اندازه گیری اضلاع و تعدادی از قطرهای آن با استفاده از فرمول فوق مساحت های مثلث ها و سپس مساحت کل چندضلعی را به دست آورد.

محاسبه ی مساحت چهارضلعی غیر مشخص (روش دوم): در صورتی که از یک چهارضلعی اندازه ی دو قطر و زاویه ی بین آن ها معلوم باشد مساحت چهارضلعی را می توان از فرمول $S = \frac{AC \times BD}{2} \sin \alpha$ به دست آورد.

اثبات رابطه ی فوق ارتفاع های AH و CH' را مطابق با شکل ۱۴-۶ رسم می کنیم. بنابراین:

$$S = S_{ABD} + S_{BCD}$$

$$S = \frac{BD \times AH}{2} + \frac{BD \times CH'}{2} = \frac{BD}{2} (AH + CH') \quad \text{رابطه ی ۱}$$

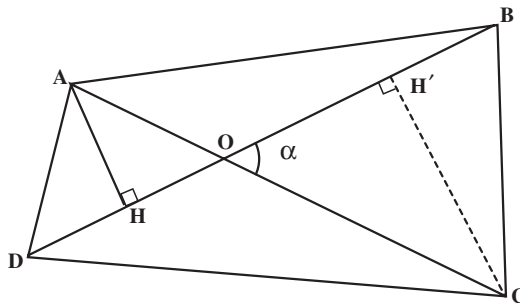
$$\text{در مثلث } \triangle AOH \quad AH = AO \sin \alpha$$

$$\text{در مثلث } \triangle COH' \quad CH' = CO \sin \alpha$$

مقادیر فوق را در رابطه ی ۱ قرار می دهیم که در نتیجه

$$S = \frac{BD}{2} (AO \sin \alpha + CO \sin \alpha) = \frac{BD}{2} \times AC \sin \alpha$$

و حکم ثابت است.



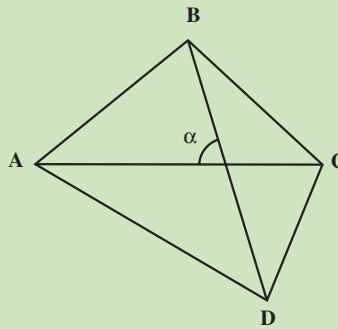
شکل ۱۴-۶

مثال ۳-۶: زمینی است به شکل چهارضلعی غیرمستطیل که اندازه دو قطر آن به ترتیب برابرند با ۱۵۴ متر و ۱۲۷ متر و زاویه بین دو قطر $23^\circ, 47'$ می باشد مساحت چهارضلعی را به دست آورید.

راهکار کلی: مساحت چهارضلعی با داشتن دو قطر و زاویه بین آنها ثابت شده که برابر است با

حاصل ضرب یک قطر در نصف قطر دیگر ضربدر سینوس زاویه بین آنها $S = \frac{BD}{2} \times AC \sin \alpha$ از

این فرمول برای محاسبه مساحت استفاده می کنیم.



شکل ۱۵-۶

روش حل: طبق فرض مسئله متر $AC = 127$ و متر $BD = 154$ و $\alpha = 23^\circ, 47'$ می باشد

مقادیر معلوم فوق را در فرمول قرار می دهیم

$$S = \frac{BD}{2} \times AC \sin \alpha = \frac{154}{2} \times 127 \sin(23^\circ, 47') = 3943/66 \text{ متر مربع}$$

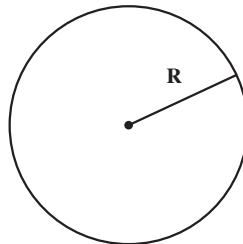
$$S = 3943/66 \text{ متر مربع}$$

بحث و بررسی: در یک چهارضلعی در صورتی که اندازه گیری اضلاع امکان پذیر نباشد و فقط

بتوانیم دو قطر و زاویه بین دو قطر را اندازه گیری کنیم مساحت از این فرمول محاسبه می شود.

مساحت دایره: برابر است با مجذور شعاع در عدد پی:

$$S = \pi R^2$$

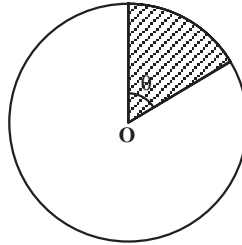


شکل ۱۶-۶

مساحت قطاع: می‌دانیم قطاع قسمتی از هر دایره است که محصور بین دو شعاع باشد. اگر R شعاع دایره و θ زاویه مرکزی قطاع مورد نظر برحسب درجه باشد (شکل ۱۷-۶).
مساحت قطاع برابر است با:

$$S = \pi R^2 \times \frac{\theta^\circ}{360^\circ}, \quad \theta \text{ برحسب درجه،}$$

$$S = \frac{R^2 \theta}{2}, \quad \theta \text{ برحسب رادیان،}$$



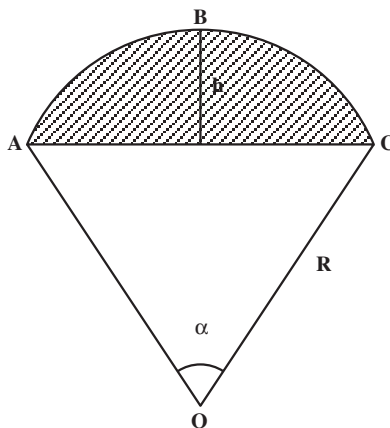
شکل ۱۷-۶

مساحت قطعه: قطعه، قسمتی از دایره‌ی محصور بین محیط و یک وتر دایره است (شکل ۱۸-۶).
و مساحت آن از فرمول: $S = R^2 \left(\frac{\pi\alpha}{360^\circ} - \frac{1}{2} \sin \alpha \right)$ به دست می‌آید.
اثبات: با توجه به شکل زیر

مساحت مثلث مساحت قطاع

$$S_{ABC} = AOCB - AOC = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha = R^2 \left(\frac{\pi\alpha}{360^\circ} - \frac{1}{2} \sin \alpha \right)$$

قطعه



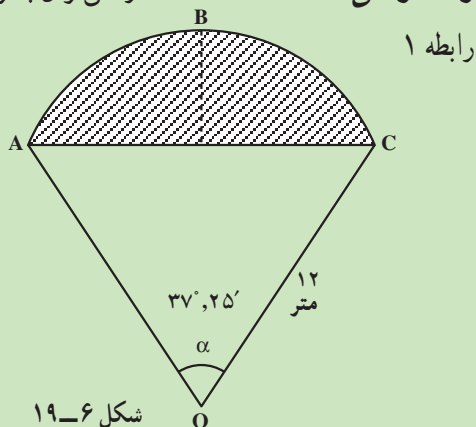
شکل ۱۸-۶

مثال ۶-۴: در دایره‌ای به شعاع ۱۲ متر قطعه مطابق شکل زیر زاویه مرکزی $\alpha = 37^\circ, 25'$ قرار دارد مطلوب است محاسبه مساحت قطعه.

راهکار کلی: مساحت قطعه ABC را می‌توان با توجه به شکل به صورت زیر نوشت.

$$S_{ABC} = S_{AOCB} - S_{AOC}$$

مساحت مثلث مساحت قطاع مساحت قطعه



شکل ۶-۱۹

از طرفی می‌دانیم مساحت قطاع برابر است با

$$S_{AOCB} = \frac{\pi R^2 \alpha^\circ}{360^\circ} \quad \text{رابطه ۲}$$

مساحت قطاع

(مساحت یک مثلث برابر است با نصف

حاصل ضرب دو ضلع ضربدر سینوس زاویه بینشان)

$$S_{AOC} = \frac{R \times R}{2} \sin \alpha = \frac{R^2}{2} \sin \alpha \quad \text{رابطه ۳}$$

مساحت مثلث

رابطه‌های ۲ و ۳ را در رابطه ۱ قرار می‌دهیم.

$$S_{ABC} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{R^2}{2} \sin \alpha = \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi \alpha}{180^\circ} - \sin \alpha \right)$$

$$S_{ABC} = \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi \alpha}{180^\circ} - \sin \alpha \right) \quad \text{بر حسب درجه می‌باشد}$$

روش حل: مقادیر معلوم را در فرمول مساحت قطعه که در بالا به دست آمد قرار می‌دهیم.

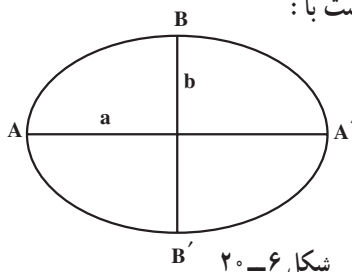
$$S_{ABC} = \frac{(12)^2}{2} \left[\frac{\pi(37^\circ, 25')}{180^\circ} - \sin(37^\circ, 25') \right] = 3/27 \text{ مترمربع}$$

بحث و بررسی: در صورتی که شکل زمین یا سازه به صورت قطعه باشد از فرمول بالا می‌توان

مساحت آن را محاسبه کرد.

مساحت بیضی: اگر نصف قطر بزرگ‌تر بیضی را a و نصف قطر کوچک‌تر آن را b بنامیم (شکل ۶-۲)، مساحت بیضی برابر است با:

$$S = \pi ab$$



شکل ۶-۲

۶-۲ محاسبه‌ی مساحت با استفاده از مختصات رئوس (روش گوس)

اگر مختصات رئوس چندضلعی بسته‌ای که اضلاع آن را خطوط مستقیم تشکیل می‌دهد، در دست باشد، دقیق‌ترین راه محاسبه مساحت آن چندضلعی استفاده از «روش گوس» است. برای محاسبه‌ی مساحت اشکال که به صورت منحنی‌های بسته‌ای هستند می‌توان از این روش استفاده کرد. مبنی بر آن‌ها که آن‌ها را به شکل n ضلعی در نظر بگیریم. هرچه فاصله‌ی نقاط اندازه‌گیری را کوچک‌تر کنیم دقت محاسبه‌ی مساحت بیش‌تر می‌شود.

محاسبه‌ی مساحت چهارضلعی $ABCD$: اگر مختصات رئوس چهارضلعی را به ترتیب،

$A(x_A, y_A)$ ، $B(x_B, y_B)$ ، $C(x_C, y_C)$ ، $D(x_D, y_D)$ در نظر بگیریم مساحت را می‌توان از این فرمول به دست آورد:

$$S = \frac{1}{2} [(x_A y_B + x_B y_C + x_C y_D + x_D y_A) - (x_B y_A + x_C y_B + x_D y_C + x_A y_D)]$$

از رابطه‌ی زیر نیز می‌توان برای سهولت حفظ و نوشتن فرمول فوق استفاده نمود:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{x_A}{y_A} & \frac{x_B}{y_B} & \frac{x_C}{y_C} & \frac{x_D}{y_D} & \frac{x_A}{y_A} & & \\ \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown & & \\ & & & & & & \end{array}$$

تبصره: وسطین / طرفین

به این ترتیب، مجموع حاصل ضرب طرفین رابطه‌ی یاد شده منهای مجموع حاصل ضرب وسطین با دو برابر مساحت چهارضلعی $ABCD$ برابر خواهد بود.

تبصره: این فرمول را می‌توان برای محاسبه‌ی مساحت یک n ضلعی تعمیم داد:

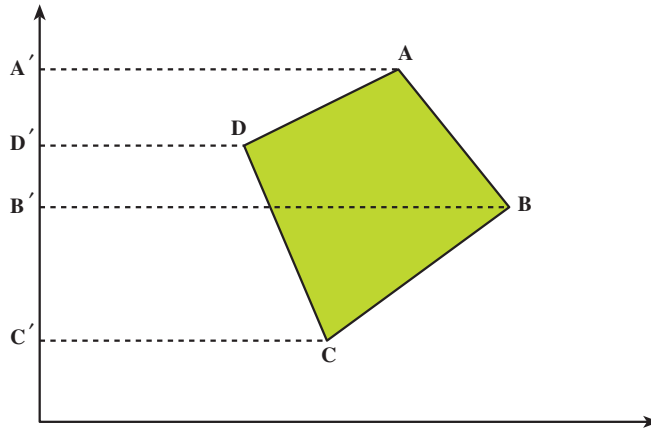
$$\begin{array}{ccccccc} \frac{x_{A_1}}{y_{A_1}} & \frac{x_{A_2}}{y_{A_2}} & \frac{x_{A_3}}{y_{A_3}} & \dots & \frac{x_{A_n}}{y_{A_n}} & \frac{x_{A_1}}{y_{A_1}} & \\ \diagdown & \diagup & \diagdown & \dots & \diagdown & \diagup & \\ & & & & & & \end{array}$$

$$S = \frac{1}{2} [(x_{A_1} y_{A_2} + x_{A_2} y_{A_3} + \dots) - (x_{A_2} y_{A_1} + x_{A_3} y_{A_2} + \dots)]$$

توجه: در رابطه‌ی فوق رعایت توالی رئوس الزامی است.

اثبات فرمول مختصات

مطابق شکل ۶-۲۱ می‌توان مساحت ABCD را به این صورت نوشت:



شکل ۶-۲۱

$$S_{ABCD} = S_{ABB'A'} + S_{B'BCC'} - S_{A'ADD'} - S_{D'DCC'}$$

با توجه به این که مساحت هر دوزنقه برابر است با مجموع دو قاعده در نصف ارتفاع،

$$S_{ABB'A'} = \frac{1}{2}(x_A + x_B)(y_A - y_B) \quad \text{بنابراین}$$

$$S_{B'BCC'} = \frac{1}{2}(x_B + x_C)(y_B - y_C)$$

$$S_{A'ADD'} = \frac{1}{2}(x_A + x_D)(y_A - y_D)$$

$$S_{D'DCC'} = \frac{1}{2}(x_D + x_C)(y_D - y_C)$$

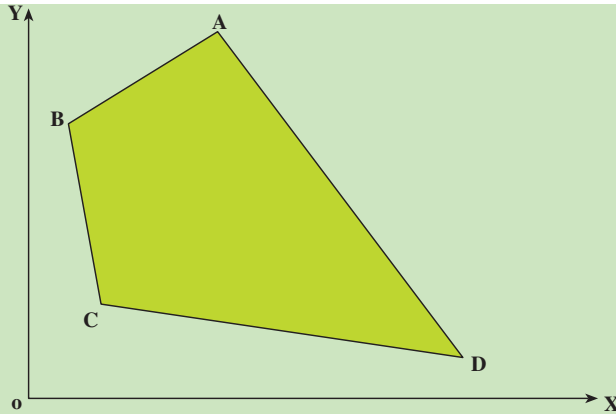
پس از ضرب و ساده‌کردن، فرمول به این صورت درمی‌آید:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}[(x_A y_B + x_B y_C + x_C y_D + x_D y_A) - (x_B y_A + x_C y_B + x_D y_C + x_A y_D)]$$

مثال ۶-۵: مطلوب است محاسبه مساحت چهارضلعی ABCD که مختصات رئوس آن

معلوم و عبارت‌اند از:

$$A / \begin{matrix} ۳۷۰ / ۳۵ \\ ۷۶۰ / ۴۷ \end{matrix} \quad B / \begin{matrix} ۸۹ / ۱۸ \\ ۵۷۰ / ۶۵ \end{matrix} \quad C / \begin{matrix} ۱۵۹ / ۴۲ \\ ۱۹۰ / ۲۵ \end{matrix} \quad D / \begin{matrix} ۹۰۴ / ۴۱ \\ ۹۰ / ۱۸ \end{matrix} \quad \text{متر}$$



شکل ۶-۲۲

راهکار کلی: فرمول مساحت چندضلعی با داشتن مختصات رئوس آن عبارت است از

$$S = \frac{1}{4} [(x_A y_B + x_B y_C + x_C y_D + x_D y_A) - (x_B y_A + x_C y_B + x_D y_C + x_A y_D)]$$

تذکر: برای نوشتن فرمول مساحت می توان مختصات رئوس چندضلعی را به صورت کسر زیر

در کنار هم نوشت

$$\frac{x_A}{y_A} \quad \frac{x_B}{y_B} \quad \frac{x_C}{y_C} \quad \frac{x_D}{y_D} \quad \frac{x_A}{y_A}$$

تذکر: نقطه اول A در انتها تکرار شده

و علامت طرفین و علامت وسطین می باشد.

$$\left[\text{مجموع حاصل ضرب وسطین} - \text{مجموع حاصل ضرب طرفین} \right] = \text{مقدار مساحت}$$

روش حل: مختصات رئوس چهارضلعی را در فرمول قرار می دهیم.

$$S = \frac{1}{4} \{ [(370/35)(570/65) + (89/18)(190/25) + (159/42)(90/18) + (904/41)(760/47)] - [(89/18)(760/47) + (159/42)(570/65) + (904/41)(190/25) + (370/35)(90/18)] \}$$

$$S = 283102/99 \text{ متر مربع}$$

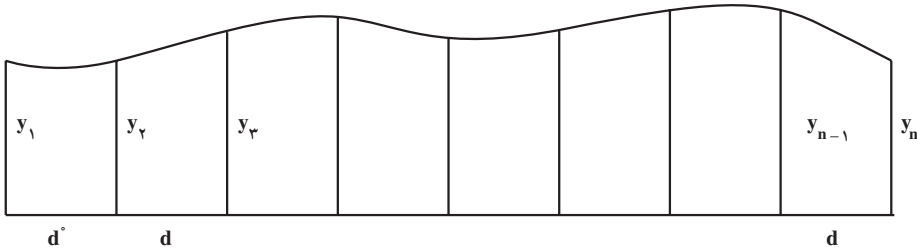
بحث و بررسی: در تمام برداشت ها که مختصات رئوس پلیگون معلوم باشد می توان از این

فرمول برای محاسبه مساحت استفاده کرد. این فرمول در محاسبه مساحت در نرم افزارها و دستگاه های

اندازه گیری نیز استفاده می شود.

۳-۶ فرمول سیمپسون (Simpson)

برای استفاده از این فرمول در موقع برداشت باید ابتدا بر روی خط مبنی یک عده تقسیمات مساوی زوج (مثلاً به اندازه d) جدا کرده (مطابق شکل) سپس طول‌های عمود y_1 و y_2 و y_3 و y_n را اندازه‌گیری کرد (n فرد).



شکل ۳-۶

این فرمول به شکل کلی زیر است :

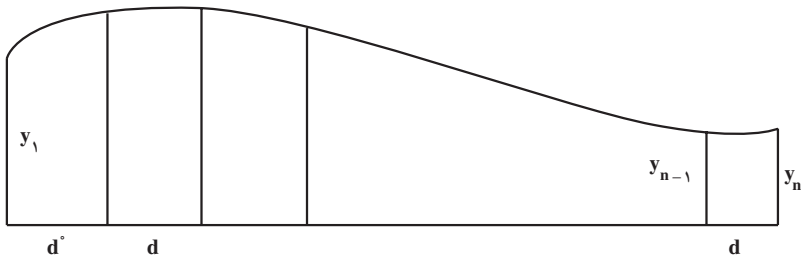
$$S = \frac{d}{3} (y_1 + 2 \sum y_i + 4 \sum y_p + y_n)$$

که در آن $\sum y_i$ مجموع طول عمودهای فرد غیر از y_1 و y_n و $\sum y_p$ مجموع طول عمودهای زوج و d فاصله عمودها می‌باشد.

۴-۶ فرمول دوزنقه‌های هم ارتفاع

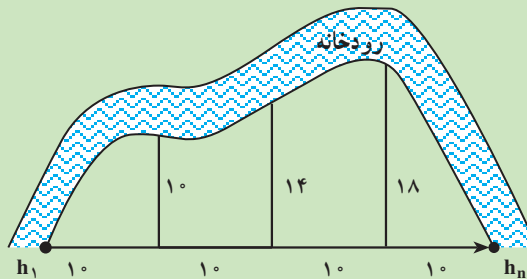
وقتی دقت زیادی مورد نظر نباشد چون با جدا کردن قسمت‌های مساوی روی خط مبنا شکل تبدیل به یک عده شکل‌های تقریباً دوزنقه می‌شود که می‌توان مساحت هریک را از روی دستور مربوط به مساحت دوزنقه حساب کرد. فرمول زیر نتیجه گرفته می‌شود.

$$S = d \left(\frac{y_1 + y_n}{2} + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} \right)$$



شکل ۴-۶

مثال ۶-۶: به منظور تعیین مساحت قطعه زمینی در کنار رودخانه (مطابق شکل) اندازه‌های به دست آمده را می‌بینید این مساحت چند مترمربع است؟



شکل ۶-۲۵

راهکار کلی: این مسئله را ظاهراً می‌توان از دو روش دوزنقه‌های هم‌ارتفاع و سیمپسون حل کرد ولی چون تعداد تقسیمات مساوی فرد در نظر گرفته شده رابطه سیمپسون را نمی‌توان به کار برد و از رابطه دوزنقه‌های هم‌ارتفاع استفاده می‌کنیم.

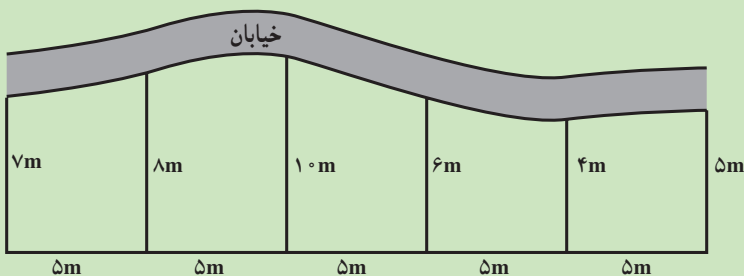
$$S = d \left(\frac{y_1 + y_n}{2} + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} \right) \Rightarrow \text{روش حل}$$

$$S = 10 \left(\frac{10 + 18}{2} + 10 + 14 + 18 \right) \Rightarrow$$

$$S = 420 \text{ m}^2$$

بحث و بررسی: همان‌طور که در شکل بالا مشاهده می‌کنید ارتفاع h_1 و h_n در قطعه‌های اول و آخر زمین صفر است بنابراین در رابطه بالا به جای آن‌ها صفر قرار می‌گیرد.

مثال ۶-۷: مساحت قطعه زمین زیر چند مترمربع است؟



شکل ۶-۲۶

راهکار کلی: چون تعداد تقسیمات مساوی زوج می باشد می توان از رابطه سیمپسون برای محاسبه مساحت این قطعه زمین استفاده کرد. پس از سمت چپ عمودها را از شماره ۱ شماره گذاری می کنیم و رابطه سیمپسون را به کار می بریم.

$$\left\{ \begin{array}{l} S = \frac{d}{3}(y_1 + 2\sum y_i + 4\sum y_p + y_n) \\ \sum y_i = 10 + 4 = 14 \\ \sum y_p = 8 + 6 = 14 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} S = \frac{5}{3}(7 + 2 \times (14) + 4(14) + 5) \\ = \frac{5}{3}(7 + 28 + 56 + 5) \\ = 160 \text{ m}^2 \end{array} \right. \text{ روش حل}$$

بحث و بررسی: این مسئله را می توان از رابطه دوزنقه های هم ارتفاع حل کرد. اما روش سیمپسون دقت بیشتری دارد و برای محاسبه مساحت روش مناسب تری می باشد.

مسائل

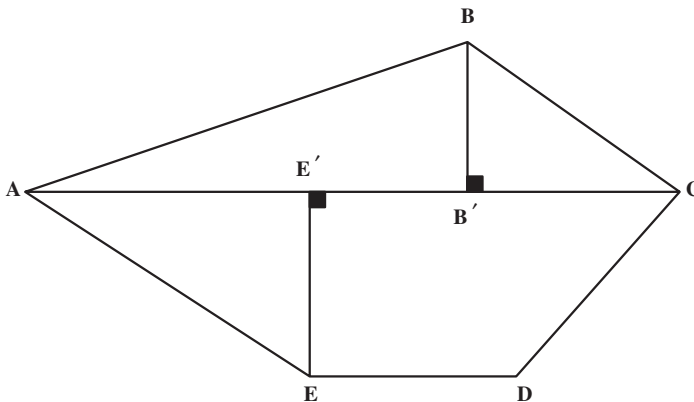
مسئله ۱: برای اندازه گیری مساحت پنج ضلعی ABCDE آن را به صورت شکل ۶-۲۷

تقسیم کرده، طول های زیر را اندازه گیری کرده ایم. مطلوب است محاسبه ی مساحت زمین:

$$AE' = 37/40 \quad E'C = 48/15$$

$$AB' = 56/46, \quad B'C = 28/02, \quad BB' = 21/12, \quad EE' = 29/18 \quad \text{و} \quad ED = 27/03$$

(اندازه گیری ها بر حسب متر است.)

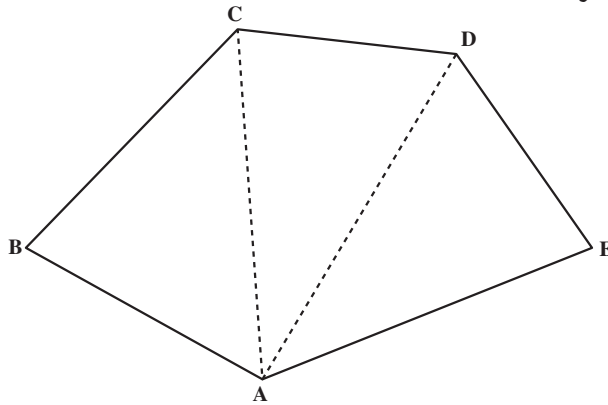


شکل ۶-۲۷

مسأله‌ی ۲: برای محاسبه‌ی مساحت، قطعه زمینی (مطابق شکل ۶-۲۸) اضلاع و دو قطر آن اندازه‌گیری شده‌اند. مساحت زمین را به‌دست آورید:

$$AE = 46/07, DE = 33/95, CD = 31/05, BC = 39/80, AB = 35/16$$

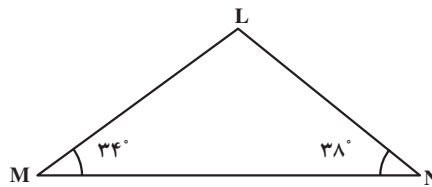
$$AC = 45/20 \text{ و } AD = 48/13$$



شکل ۶-۲۸

مسأله‌ی ۳: به‌منظور تعیین مساحت قطعه زمینی به شکل مثلث MNL (شکل ۶-۲۹) زوایای M و N و طول MN اندازه‌گیری شده و مقادیر زیر به‌دست آمده است. مساحت قطعه زمین را به‌دست آورید:

$$MN = 52/09 \text{ متر و } \angle N = 38^\circ \text{ و } \angle M = 34^\circ$$



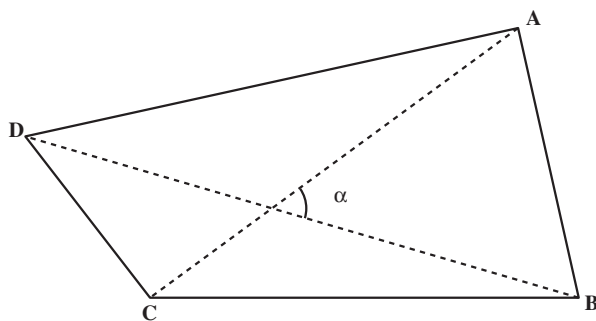
شکل ۶-۲۹

مسأله‌ی ۴: زمینی است به شکل چهارضلعی ABCD (شکل ۶-۳۰) می‌خواهیم مساحت آن را تعیین کنیم، اما به سبب وجود موانع بین بعضی اضلاع نتوانستیم به‌طور مستقیم اضلاع چهارضلعی را اندازه‌گیری کنیم و به‌جای آن دو قطر AC و BD و زاویه‌ی بین دو قطر را اندازه‌گیری کرده‌ایم. با این ترتیب، مساحت زمین را به‌دست آورید:

$$AC = 62/15 \text{ متر}$$

$$BD = 78/06 \text{ متر}$$

$$\hat{\alpha} = 54^\circ$$



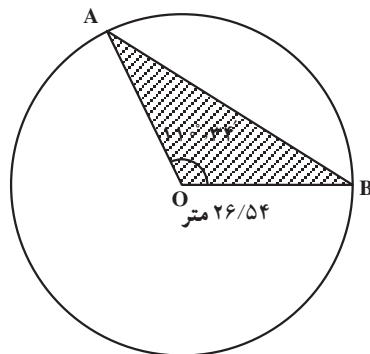
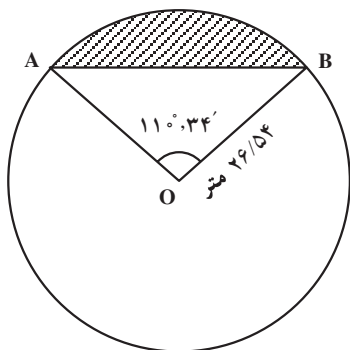
شکل ۶-۳۰

مسئله ۵: مساحت قطعه زمین ABCDEF را که مختصات رئوس آن معلوم است به روش گوس محاسبه کنید.

$$A/100, B/98, C/125, D/287, E/301, F/153$$

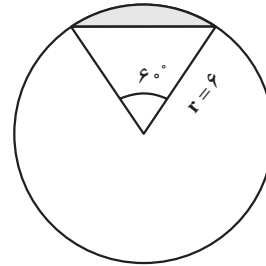
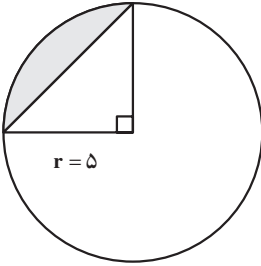
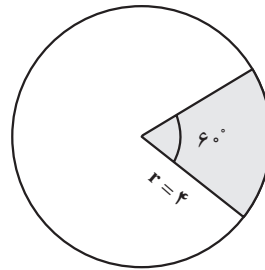
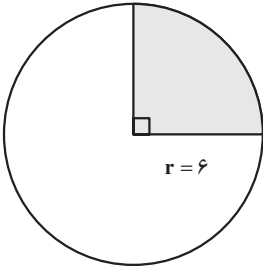
$$A/100, B/150, C/210, D/170, E/122, F/104$$

مسئله ۶: دایره‌ای به شعاع $26/54$ متر است (شکل ۶-۳۱). وتر AB مقابل زاویه $110^\circ, 34'$ است. سطح هاشور زده را محاسبه کنید.



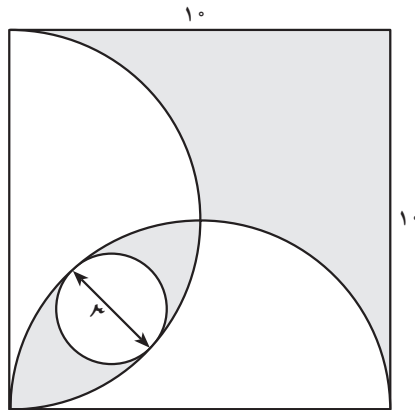
شکل ۶-۳۱

مسئله ۷: مساحت ناحیه‌های سایه‌دار را در شکل ۶-۳۲ بیابید.



شکل ۶-۳۲

مسأله‌ی ۸: مساحت ناحیه‌ی سایه‌دار را در شکل ۶-۳۳ بیابید.



شکل ۶-۳۳

مسأله‌ی ۹: مساحت یک باغچه به شکل بیضی که قطرهای آن به ترتیب ۱۲ و ۸ متر می‌باشند را به دست آورید.

آیا می‌دانید

زندگی‌نامه: ابوالوفاء محمد بن یحیی بن اسماعیل بوزجانی از بزرگترین ریاضی‌دانان و منجمان دوره‌ی اسلامی است که در سال ۳۲۸ هـ. ق در شهر بوزجان (نام قدیم تربت جام) تولد یافت و در سن بیست سالگی به عراق مهاجرت کرد و تا آخر عمر در بغداد می‌زیست و با بیرونی معاصر بود و کسوفی را با قرارداد قبلی با هم رصد کرده‌اند بوزجانی که یکی از مشاهیر علم هندسه می‌باشد دارای تألیفات بی‌شماری است از آن جمله کتاب اعمال هندسی و کتاب مجسطی بوزجانی (درباره‌ی علم مثلثات مسطحه و کروی و فرمول‌های مطرح شده) کتاب حساب بوزجانی و جواب ابوالوفاء برای محاسبه مساحت مثلث به حبوبی و مسأله‌های متعدد دیگر.

منابع

- ۱- کتاب متفکران اسلام جلد دوم ترجمه آرام فصل پنجم ص ۱۴۶
- ۲- تاریخ علوم عربی نوشته مصطفی موالدی جلد ۳ ص ۵۳-۵۰ عربی سال ۱۹۷۹ محل انتشار دمشق
- ۳- کتاب بوزجانی‌نامه