

## کاربرد دایره و بیضی در نقشه‌برداری

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از فراگیر انتظار می‌رود:

- ۱- اصطلاحات: دایره، شعاع، وتر، قطر، زاویه در دایره، زاویه مرکزی، زاویه‌ی محاطی، زاویه‌ی ظلّی و کمان در خور یک زاویه را با رسم شکل تعریف کند.
- ۲- شعاع دایره را به وسیله‌ی زاویه‌ای که مماس بر کره‌ی زمین از یک نقطه با صفحه‌ی افق می‌سازد را با ذکر یک مثال محاسبه کند.
- ۳- عرض جغرافیایی یک محل را به وسیله‌ی دوربین زاویه‌یاب محاسبه کند.
- با رسم شکل ثابت کند زاویه‌ی قائم ستاره‌ی قطبی به وسیله‌ی دوربین تئودولیت که در محل اندازه‌گیری می‌شود با عرض جغرافیایی محل برابر است.
- ۴- اصطلاحات: مماس، خط مماس، رسم مماس از یک نقطه خارج دایره بر دایره، شعاع نقطه‌ی تماس، شعاع عمود بر وتر، را با رسم شکل تعریف کند.
- ۵- بیضی و پارامترهای بیضی، فشردگی بیضی را با رسم شکل تعریف کند.
- ۶- با ذکر یک مثال و رسم شکل اندازه‌ی فشردگی و خروج از مرکز بیضی را محاسبه کند.
- ۷- مثال‌های حل شده در این فصل را فرا بگیرد.

### آیا می‌دانید

غیاث الدین جمشید کاشانی در جمله‌ی بسیار زیبایی با زبان ریاضی، «به نام خدا» را به این شکل بیان می‌کند:

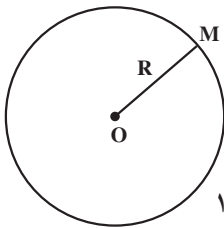
«به نام او که از اندازه‌ی نسبت محیط دایره به قطرش آگاه است» که در این جمله به نوعی اذعان می‌دارد که انسان از فهم و محاسبه‌ی دقیق عدد  $\pi$  ناتوان است.

## ۸-۱- تعریف دایره (Circle)

### آیا می‌دانید

غیاث‌الدین جمشید کاشانی که در حدود ۶۰۰ سال پیش می‌زیسته است (تاریخ وفات سال ۸۳۲ هجری قمری) اولین محاسب عدد  $\pi$  بوده است.

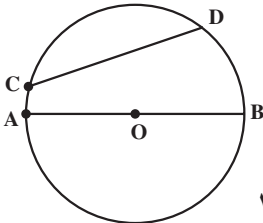
دایره مکان هندسی نقاطی است از یک صفحه که از یک نقطه‌ی ثابت به نام مرکز به یک فاصله باشند.



شکل ۸-۱

فاصله‌ی هر نقطه از دایره را تا مرکز دایره «شعاع دایره» گویند و آن را با حرف R نمایش می‌دهند.

تعریف وتر: پاره‌خطی که دو نقطه از پیرامون دایره را به هم وصل کند «وتر دایره» و بزرگ‌ترین وتر دایره را «قطر» گویند.



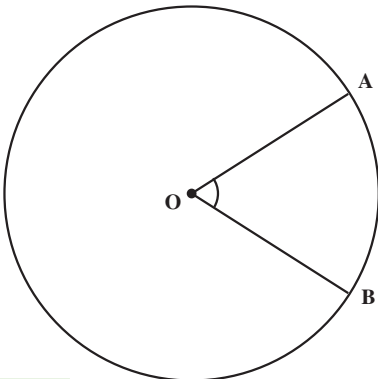
شکل ۸-۲

هر قطر دایره از مرکز دایره می‌گذرد و آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند؛ مانند: وتر CD و قطر AB (شکل ۸-۲).

## ۸-۲- زاویه در دایره

زاویه در دایره به سه حالت است: زاویه‌ی مرکزی، زاویه‌ی محاطی و زاویه‌ی ظلّی.

**تعریف زاویه‌ی مرکزی:** زاویه‌ی مرکزی زاویه‌ای است که رأس آن در مرکز دایره و دو ضلع آن شعاع‌های دایره باشند؛ مانند زاویه‌ی  $\angle AOB$  (شکل ۸-۳).



**قضیه:** اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی برابر است با اندازه‌ی کمان مقابل آن.

شکل ۸-۳

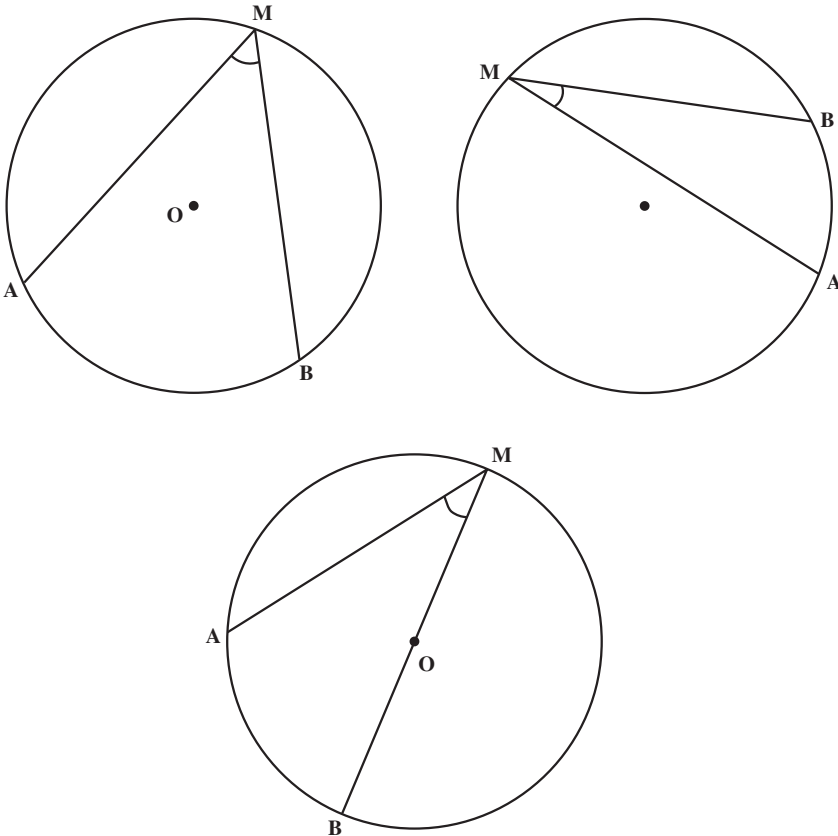
## آیا می‌دانید

غیاث‌الدین جمشید کاشانی در سن ۴۳ سالگی از دنیا رفته است. بنابراین یافته‌های با ارزش او در دوران جوانی او صورت گرفته است.

تعریف زاویه‌ی محاطی: زاویه‌ی محاطی زاویه‌ای است که رأس آن روی پیرامون دایره و دو ضلع آن دو وتر دایره باشد (شکل ۸-۴).

قضیه: اندازه‌ی زاویه‌ی محاطی برابر است با نصف کمان مقابل آن (شکل ۸-۴):

$$\angle AMB = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

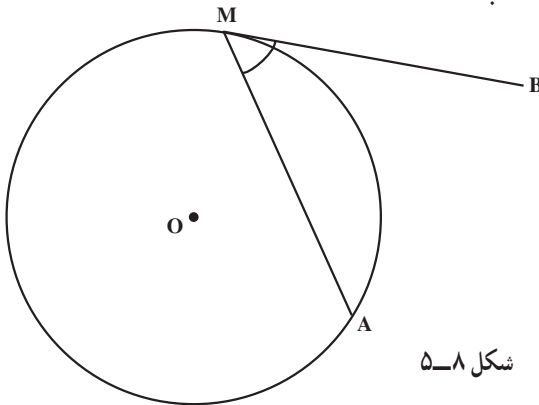


شکل ۸-۴

تعریف زاویه‌ی ظلّی: زاویه‌ی ظلّی زاویه‌ای است که رأس آن روی پیرامون دایره و یک ضلع آن وتر دایره و ضلع دیگر آن مماس بر دایره باشد.

قضیه: اندازه‌ی زاویه‌ی ظلّی برابر است با نصف کمان مقابل آن (مطابق شکل ۵-۸):

$$\angle AMB = \frac{\widehat{MA}}{2}$$

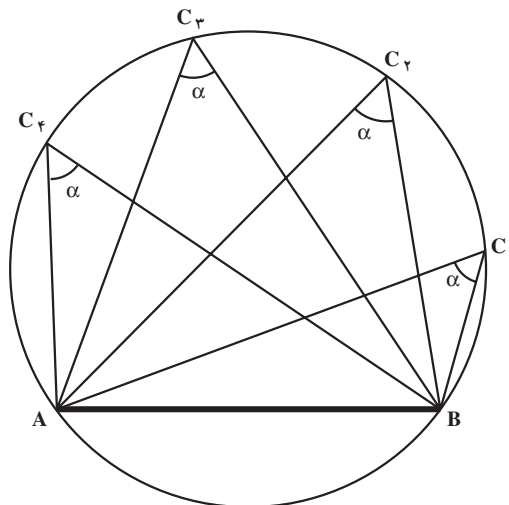


شکل ۵-۸

### ۸-۳- کمان درخور

تمام زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یک کمان با هم مساویند (شکل ۶-۸)

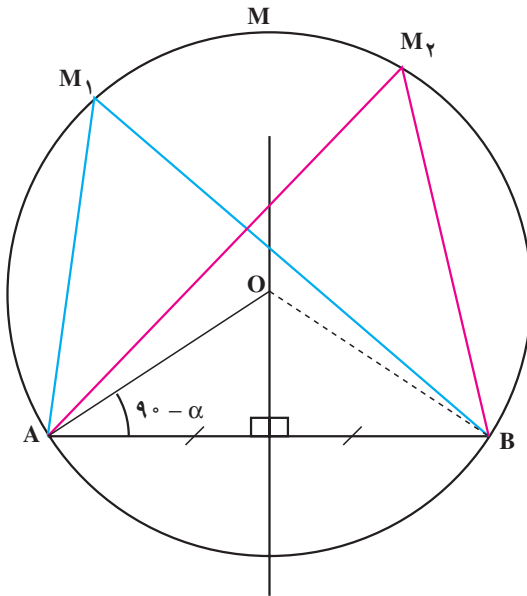
$$\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 = \widehat{C}_3 = \widehat{C}_4 = \frac{\widehat{AB}}{2} = \alpha$$



شکل ۶-۸

تعریف کمان درخور: به مکان هندسی رئوس‌ی زوایای محاطی که دو ضلع آن به طرف AB وصل می‌شوند، کمان درخور زاویه‌ی  $\alpha$  گویند.

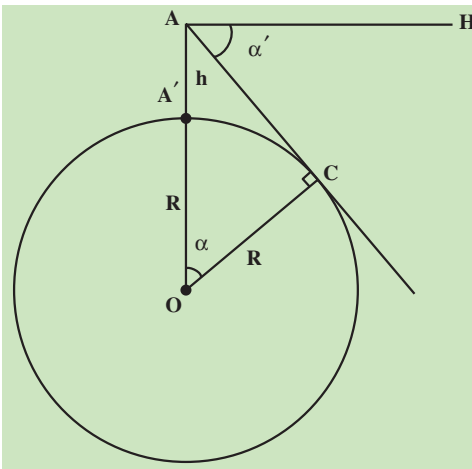
ترسیم کمان در خور: برای رسم کمان درخور زاویه  $\alpha$  مطابق شکل ۷-۸ روی پاره خط AB، ابتدا عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم و سپس از نقطه‌ی A یا B خطی رسم می‌کنیم که با AB زاویه‌ی  $(90^\circ - \alpha)$  بسازد. تا عمود منصف را در نقطه‌ی O قطع کند. نقطه‌ی O مرکز دایره‌ی مورد نظر است. به مرکز O و به شعاع OB دایره‌ای رسم می‌کنیم. در نتیجه کمان  $\widehat{AMB}$  کمان درخور



زاویه‌ی  $\alpha$  خواهد بود. زیرا بر اساس رسم و خاصیت زاویه‌ی مرکزی کمان  $\widehat{ANB}$  برابر  $2\alpha$  می‌شود و ما هر نقطه مانند  $M_1$  را روی کمان  $\widehat{AMB}$  در نظر بگیریم و به نقاط A و B وصل کنیم یک زاویه‌ی محاطی پدیدار می‌شود و طبق قضیه مساوی نصف کمان مقابل آن، یعنی  $\alpha$  می‌شود.

شکل ۷-۸

## ۸-۴- مثال‌هایی از کاربرد زاویه در دایره



مثال ۸-۱- از نقطه A به ارتفاع  $150^\circ$  متر که زاویه شیب  $\alpha'$  را اندازه‌گیری کرده‌ایم و مقدار آن  $\alpha = 1^\circ, 14', 36''$  شده است. مطلوبست محاسبه شعاع کره زمین.

شکل ۸-۸

راهکار کلی: مثلث  $OAC$  در شکل مقابل قائم الزاویه است (زیرا شعاع  $OC$  در نقطه تماس  $C$  بر مماس  $AC$  عمود است) و دو زاویه  $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}'$  می باشد چون اضلاع دو زاویه  $AOC$  و  $CAH$  دوجه دو بر هم عمودند طبق قضیه با هم مساویند.  
در مثلث  $AOC$  رابطه کسینوس ها را می نویسیم

$$\cos \alpha = \frac{OC}{OA} = \frac{R}{R+h} \quad (OA = OA' + A'A = R+h)$$

$$(R+h)\cos \alpha = R \quad \text{ضرب می کنیم}$$

$$R\cos \alpha = h\cos \alpha = R \quad \text{ساده می کنیم}$$

$$R\cos \alpha = R = h\cos \alpha$$

$$R - R\cos \alpha = h\cos \alpha \Rightarrow R = \frac{h\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

با داشتن زاویه  $\alpha$  و ارتفاع  $h$  شعاع کره ی زمین به دست می آید.

روش حل: در فرمول  $R = \frac{h\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$  مقادیر معلوم را قرار می دهیم  $1^\circ, 14', 36''$  و  $h = 1500$  متر

به دست می آید

$$R = \frac{1500 \times \cos(1^\circ, 14', 36'')}{1 - \cos(1^\circ, 14', 36'')} = 6369511/78 \text{ متر}$$

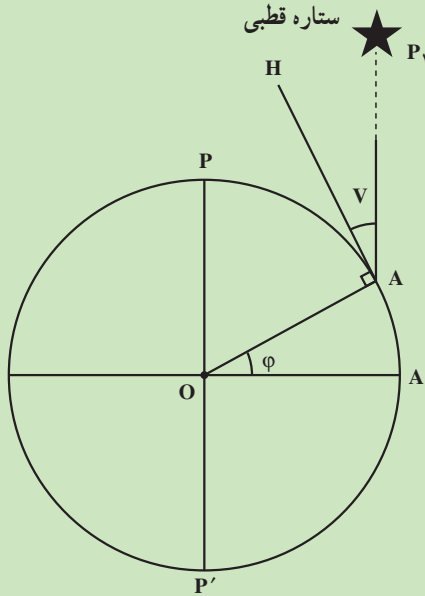
بحث و بررسی: با اندازه گیری زاویه شیب و ارتفاع محل می توان شعاع کره زمین را محاسبه

کرد.

مثال ۸-۲: برای اندازه گیری عرض جغرافیایی محل  $A$  دوربین زاویه یاب را در نقطه  $A$  مستقر کرده و به ستاره قطبی نشانه روی می کنیم. زاویه ارتفاعی ستاره قطبی را اندازه گیری کرده و برابر  $V = 35^\circ, 41'$  شده است عرض جغرافیایی را به دست آورید.

راهکار کلی: می دانیم ستاره قطبی تقریباً در امتداد محور کره زمین قرار دارد (حدود ۱ درجه از امتداد محور دورانی زمین انحراف دارد) و طبق شکل دو امتداد  $AP_1$  (امتداد نشانه روی) و  $OP$  (محور زمین) در فاصله بسیار دور را تقریباً با هم موازی در نظر می گیریم بنابراین دو زاویه  $\hat{V}$  و  $\hat{\phi}$  با هم برابرند (زیرا اضلاع آنها دو به دو بر هم عمودند  $OA \perp HA$  شعاع در نقطه تماس با خط مماس

(AH) عمود است و امتداد  $AP_1$  بر  $OA'$  عمود است زیرا  $OP \perp OA'$  عمود است بنابراین موازی آن یعنی  $AP_1 \perp OA'$  می باشد با اثبات  $\hat{V} = \hat{\varphi}$  با اندازه گیری زاویه ارتفاعی ستاره قطبی عرض جغرافیایی محل ( $\varphi$ ) به دست می آید.



شکل ۸-۹

**روش حل:** چون ثابت شد دو زاویه  $\hat{\varphi} = \hat{V}$  برابرند در نتیجه عرض جغرافیایی محل A برابر با  $۳۵^\circ$ ،  $۴۱'$  می باشد.

**بحث و بررسی:** روش بسیار خوب و ساده با تقریب  $۱^\circ$  برای به دست آوردن عرض جغرافیایی محل می باشد.

## آیا می دانید

دانشمندان قدیم برای اندازه گیری محیط کره ی زمین و اندازه گیری قوس نصف النهار و هم چنین اندازه گیری طول و عرض جغرافیایی و برای ساختن اسطرلاب (ستاره یاب) و اندازه گیری ارتفاع خورشید و ستاره قطبی نیاز به دانستن نسبت محیط به قطر دایره را که همان عدد  $\pi$  می باشد داشتند.

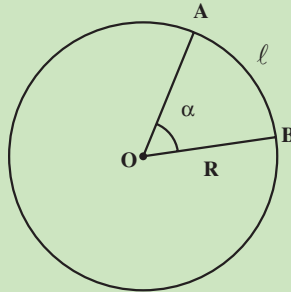
### ۸-۵- محاسبه‌ی طول کمانی از دایره C(O,R) مقابل به زاویه‌ی مرکزی $\alpha^\circ$

واضح است که طول کمان مقابل به زاویه‌ی مرکزی یک درجه برابر است با  $\frac{2\pi R}{360}$  بنابراین،

طول کمان مقابل به زاویه‌ی مرکزی  $\alpha^\circ$  برابر است با  $\frac{2\pi R\alpha}{360}$  یا  $\frac{\pi R\alpha}{180}$  در نتیجه طول کمان  $l = \frac{\pi R\alpha}{180}$  که  $\alpha$  برحسب درجه است. اگر  $\alpha$  را در عدد  $\frac{180}{\pi}$  ضرب کنیم برحسب رادیان می‌شود و رابطه‌ی فوق به صورت:  $l = R\alpha$  می‌گردد.

مثال ۸-۳: طول قوسی از مسیر را که به شکل کمانی از دایره به شعاع ۲۵ متر مقابل به زاویه مرکزی  $40'$ ،  $23^\circ$  قرار دارد به دست آورید.

راهکار کلی: مطابق شکل زیر شعاع دایره  $OA = OB = R$  معلوم و زاویه مرکزی مقابل به کمان  $\widehat{AB}$  یعنی  $\alpha$  نیز معلوم است می‌خواهیم طول قوس  $AB = l$  را به دست آوریم.



شکل ۸-۱۰

محیط دایره برابر است با  $2\pi R$  مقابل به زاویه  $360^\circ$  درجه مرکزی می‌باشد بنابراین طول قوسی از دایره که مقابل به زاویه  $1^\circ$  باشد برابر است با  $\frac{2\pi R}{360}$  پس نتیجه می‌شود طول قوس مقابل به زاویه  $\alpha^\circ$  برابر است با

$$l = \frac{2\pi R\alpha}{360}$$

( $\alpha$ ) در این فرمول برحسب درجه است  $l = \frac{\pi R\alpha}{180}$  به عدد ۲ ساده می‌کنیم .

اگر  $\alpha^\circ$  را در عدد  $\frac{180}{\pi}$  ضرب کنیم برحسب رادیان می‌شود یعنی



( $\alpha$  بر حسب رادیان)

$$l = \left(\frac{\pi R \alpha^\circ}{180^\circ}\right) \times \frac{180^\circ}{\pi} = R\alpha \Rightarrow l = R\alpha$$

روش حل: زاویه  $23^\circ, 40'$  را ابتدا به رادیان تبدیل می‌کنیم

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi} \Rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} \times D = \frac{\pi}{180^\circ} \times (23^\circ, 40') = 0.413 \text{ رادیان}$$

$$l = R\alpha = 25(0.413) = 10.325 \text{ متر}$$

بحث و بررسی: در نقشه برداری فرمول  $l = R\alpha$  که  $\alpha$  بر حسب رادیان است کاربرد زیادی در ژئودزی و مسیر دارد.

مثال ۸-۴: تراز استوانه‌ای به شعاع ۱ متر در حد ۲ میلی‌متر مدرج شده است زاویه مرکزی روبرو به کمان ۲ میلی‌متر چند دقیقه است.

راهکار کلی: با استفاده از فرمول  $l = R\alpha$  که در مسئله قبل ثابت شد مقدار  $\frac{l}{R}$  که  $l$  و  $R$  معلوم است و مقدار  $\alpha$  بر حسب رادیان به دست می‌آید که آنرا به وسیله رابطه  $\left(\frac{D}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi} \Rightarrow D = \frac{180^\circ \alpha}{\pi}\right)$  بر حسب درجه محاسبه می‌کنیم.

روش حل: طبق فرض  $R = 1 = 1000$  میلی‌متر و  $l = 2$  میلی‌متر مقادیر معلوم فوق را در فرمول  $\frac{l}{R}$  قرار می‌دهیم نتیجه می‌شود

$$\alpha = \frac{2}{1000} = \frac{1}{500} \text{ رادیان}$$

$$D = \frac{180^\circ \alpha}{\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \times \frac{1}{500} = 0.1145 = 0^\circ, 6', 53'' \approx 7'$$

بحث و بررسی: کاربرد فرمول  $l = R\alpha$  علاوه بر ژئودزی و مسیر حتی در تعیین دقت تراز و وسائیل نقشه برداری به کار می‌رود.

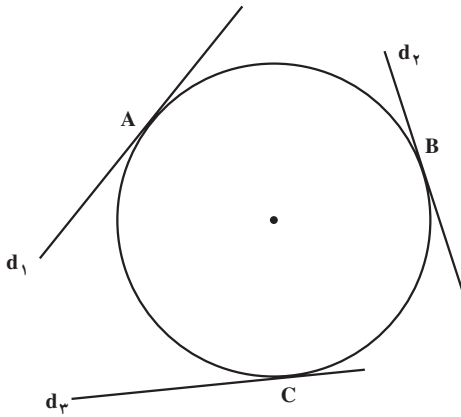
## آیا می‌دانید

مقدار عدد  $\pi$  را به صورت شعر نیز سروده‌اند:

گر ز قدر بی‌کنند از تو سؤال      پاسخی ده که خردمند تو را آموزد  
 خرد و بینش و آگاهی دانشمندان      ره سر منزل توفیق بما آموزد  
 تعداد حروف کلمه‌های بیت دوم شعر عدد بی را با ده رقم اعشار مشخص می‌کند.  
 (خرد  $\approx 3$ ، و  $\approx 1$ ، بینش  $\approx 4$ ، و  $\approx 1$ ، آگاهی  $\approx 5$ ، دانشمندان  $\approx 9$ ، ره  $\approx 2$ ،  
 سر منزل  $\approx 6$ ، توفیق  $\approx 5$ ، بما  $\approx 3$ ، آموزد  $\approx 5$ ) و در مجموع داریم:  
 $3/1415926535$

## ۸-۶ - قضایای کاربردی در نقشه‌برداری

هر خط که دایره را در یک نقطه قطع کند در آن دایره مماس است (شکل ۸-۱۱).



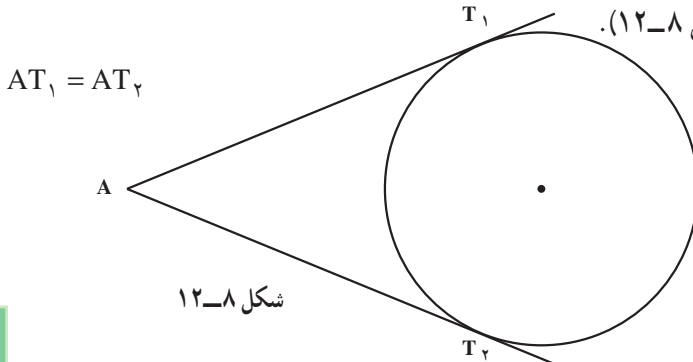
مانند خطوط:  $d_1$ ،  $d_2$  و  $d_3$  که به ترتیب

در نقاط A، B و C بر دایره مماس می‌باشند.

شکل ۸-۱۱

از هر نقطه خارج از دایره فقط دو مماس می‌توان بر دایره رسم کرد (طول این دو مماس با هم

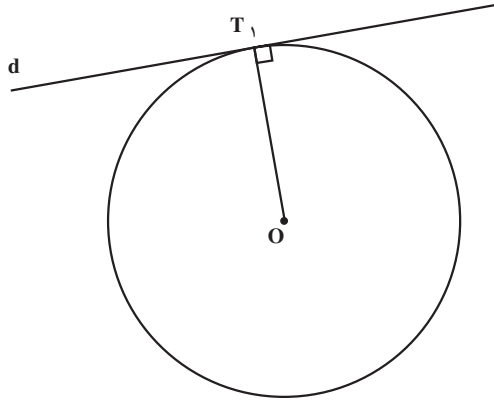
برابرند.) (مانند شکل ۸-۱۲).



شکل ۸-۱۲

شعاع نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است مانند شکل ۸-۱۳.

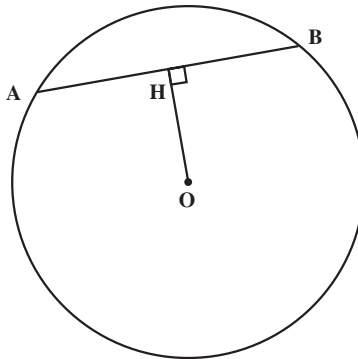
$$OT_1 \perp d$$



شکل ۸-۱۳

شعاع عمود بر وتر، وتر و کمان روبه‌رویش را نصف می‌کند مانند شکل ۸-۱۴.

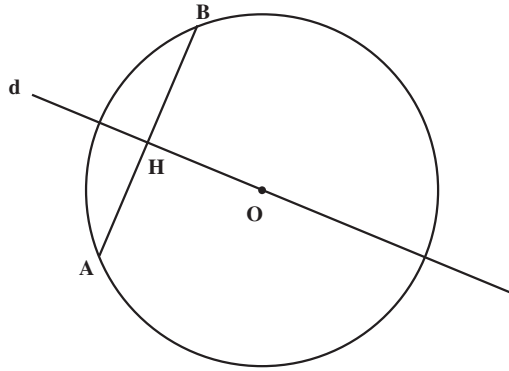
$$OH \perp AB \text{ و } AH = HB$$



شکل ۸-۱۴

عمود منصف هر وتر در دایره از مرکز دایره می‌گذرد مانند شکل ۸-۱۵.

$$d \perp AB \text{ و } AH = HB \text{ و } O \text{ مرکز دایره است}$$



شکل ۸-۱۵

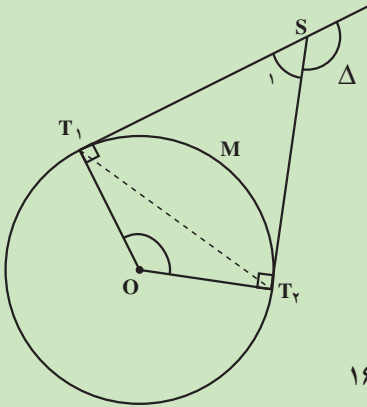
مثال ۸-۵: در شکل زیر زاویه انحراف  $\Delta = 124^\circ, 3'$  و شعاع دایره  $R = 74$  متر است و

مماس‌های  $ST_1$  و  $ST_2$  بر دایره رسم شده است

اولاً: زاویه مرکزی  $\angle T_1OT_2$  چقدر است؟

ثانیاً: زاویه‌ی ظلّی  $\angle ST_1T_2$  را به دست آورید.

ثالثاً: طول قوس  $\widehat{T_1MT_2}$  را محاسبه کنید.



شکل ۸-۱۶

راهکار کلی: اولاً: چون شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است بنابراین زوایای

$$\hat{T}_1 = \hat{T}_2 = 90^\circ$$

در چهارضلعی محاطی  $T_1ST_2O$  چون  $\hat{T}_1 = \hat{T}_2 = 90^\circ$  است نتیجه می‌شود  $\hat{O} + \hat{S} = 180^\circ$

رابطه ۱ و هم‌چنین رابطه ۲  $\hat{S} = 180^\circ$  (زیرا دو زاویه مجانب هستند)

از دو رابطه ۱ و ۲ نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} \hat{O} + \hat{S}_1 = 180^\circ \\ S_1 \neq 180^\circ \Rightarrow \hat{O} + \hat{S}_1 = \hat{S}_1 + \hat{\Delta} \Rightarrow \boxed{\hat{O} = \hat{\Delta}} \end{cases}$$

ثانیاً: زاویه ظلّی  $\angle ST_1T_2$  طبق قضیه برابر است با نصف کمان مقابلش (زاویه مرکزی  $\hat{O}$ )

$$\angle ST_1T_2 = \frac{\widehat{T_1T_2}}{2} = \frac{\hat{O}}{2} \quad (\text{برابر است با اندازه کمان مقابلش})$$

ثالثاً: طبق فرمول  $l = R\alpha$  با معلوم بودن شعاع و زاویه مرکزی طول قوس  $l$  محاسبه می‌شود.

روش حل: جواب اولاً: ثابت شد زاویه انحراف با زاویه مرکزی  $\hat{O}$  برابر است

$$\angle T_1OT_2 = \hat{O} = \hat{\Delta} = 124^\circ, 3'$$

جواب ثانیاً: چون زاویه ظلّی برابر با نصف کمان مقابلش می‌باشد

$$\angle ST_1T_2 = \frac{\widehat{T_1MT_2}}{2} = \frac{\hat{O}}{2} = \frac{124^\circ, 3'}{2} = 62^\circ, 15'$$

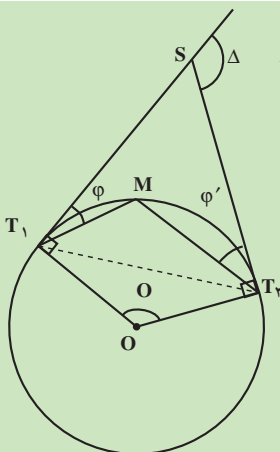
جواب ثالثاً: در فرمول  $l = R\alpha$  متر  $R = 74$  و  $\hat{\alpha} = \hat{O} = 124^\circ, 3'$  زاویه  $\alpha$  را برحسب

رادیان به دست می‌آوریم

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow \frac{\pi}{180^\circ} \times D = \frac{\pi}{180^\circ} \times (124^\circ, 3') = 2/17 \text{ رادیان}$$

$$l = R\alpha = 74 \times 2/17 = 160/58 \text{ متر مسیر}$$

بحث و بررسی: از این روش می‌توان پارامترهای یک قوس مسیر را به دست آورد.



شکل ۸-۱۷

مثال ۸-۶: در شکل روبه‌رو زاویه انحراف  $\hat{\Delta} = 27^\circ, 32'$

و زاویه‌ی  $1^\circ, 18'$  می‌باشد مطلوبست محاسبه

زاویه  $\angle MT_2S$

راهکار کلی: زاویه مرکزی  $\hat{O}$  را رسم می‌کنیم در مثال‌های قبل ثابت کردیم زاویه مرکزی  $\hat{O}$

با زاویه انحراف  $\hat{\Delta}$  برابر است و برابر نصف کمان مقابلش می‌باشد

$$\hat{O} \hat{\Delta} = \frac{\widehat{T_1 M T_2}}{2} = \frac{\widehat{T_1 M} + \widehat{M T_2}}{2} = \frac{\widehat{T_1 M}}{2} + \frac{\widehat{M T_2}}{2} \quad \text{رابطه ۱}$$

از طرف دیگر زاویه ظلّی برابر نصف کمان مقابلش پس نتیجه می‌شود  $\varphi \neq \frac{\widehat{M T_2}}{2}$  در رابطه ۱

به جای  $\frac{\widehat{M T_2}}{2}$  مساوی  $\varphi'$  را قرار می‌دهیم

$$\hat{\Delta} = \frac{\widehat{T_1 M}}{2} + \varphi' \Rightarrow \boxed{\frac{\widehat{T_1 M}}{2} \hat{\Delta} \quad \varphi' \quad \text{رابطه ۲}}$$

هم‌چنین زاویه  $\varphi$  زاویه ظلّی است برابر با نصف کمان روبه‌روی خود می‌باشد

$$\varphi \quad \frac{\widehat{T_1 M}}{2} \quad \text{رابطه ۳}$$

رابطه ۳ را در رابطه ۲ قرار می‌دهیم

$$\hat{\Delta} \quad \varphi' \Rightarrow \hat{\varphi}' \hat{\Delta} \hat{\varphi}$$

با داشتن  $\Delta$  و  $\varphi$  زاویه  $\varphi'$  به دست می‌آید.

روش حل: با داشتن مقادیر معلوم  $1^\circ, 18'$  و  $27^\circ, 32'$  از فرمول

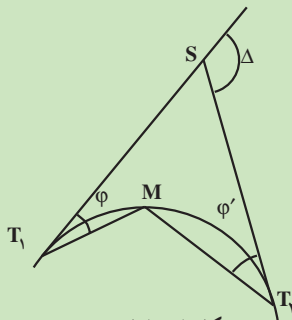
اثبات شده  $\hat{\varphi}' \hat{\Delta} \hat{\varphi}$  مقدار  $\varphi'$  به طریق زیر به دست می‌آید

$$\varphi' \neq 27^\circ, 32' - 1^\circ, 18' = 17^\circ, 14'$$

بحث و بررسی: با این روش برای پیاده کردن نقاط قوس مسیر دایره شکل روش تقاطع دو

دستگاه دوربین زاویه‌یاب که یکی در نقطه  $T_1$  و دیگری در نقطه  $T_2$  مستقر می‌کنیم و با داشتن

زاویه‌های  $\varphi$  و  $\varphi'$  نقطه مجهول  $M$  از قوس پیاده می‌گردد.



شکل ۸-۱۸

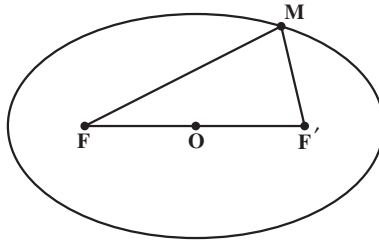
## ۷-۸- بیضی (Ellipse)

تعریف بیضی: بیضی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که مجموع فاصله‌های هر یک از آن‌ها از دو نقطه‌ی ثابت آن صفحه، مقدار ثابتی باشد.

در شکل ۸-۱۹ هر یک از دو نقطه‌ی ثابت را یک «کانون بیضی» و فاصله‌ی دو کانون را «فاصله‌ی کانونی بیضی» می‌نامیم. کانون‌های بیضی را معمولاً با دو حرف  $F$  و  $F'$  و فاصله‌ی کانونی را با  $2c$  نشان می‌دهیم:

$$FF' = 2c$$

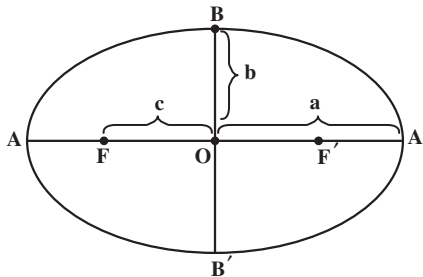
مجموع فاصله‌های هر نقطه‌ی بیضی را از دو کانون که مقدار ثابتی است با  $2a$  نمایش می‌دهیم. پس اگر نقطه‌ی  $M$  از صفحه به بیضی تعلق داشته باشد، داریم  $MF + MF' = 2a$ ، دو خط  $MF$  و  $MF'$  را «شعاع‌های حامل نقطه‌ی  $M$ » یا «شعاع‌های کانونی نقطه‌ی  $M$  از بیضی» می‌نامیم. از تعریف بیضی نتیجه می‌گیریم که:  $a > c$  است.



شکل ۸-۱۹

پارامترهای بیضی: در بیضی شکل ۸-۲۰ فاصله‌ی  $AA'$  را «قطر بزرگ» یا «اطول بیضی» گویند که مقدار آن برابر است با  $2a$ ،  $2a$  (قطر کانونی). فاصله‌ی  $BB'$  را «قطر کوچک» یا «قطر اقصی بیضی» می‌گویند. مقدار آن مساوی است با:  $2b$ ،  $2b$  (قطر غیرکانونی).

فاصله‌ی  $FF' = 2c$ ،  $2c$  را «فاصله‌ی کانونی بیضی» گویند که مقدار آن برابر است با:  $2c$ ،  $2c$  رابطه‌ی  $a^2 = b^2 + c^2$  همواره بین پارامترهای بیضی برقرار است.



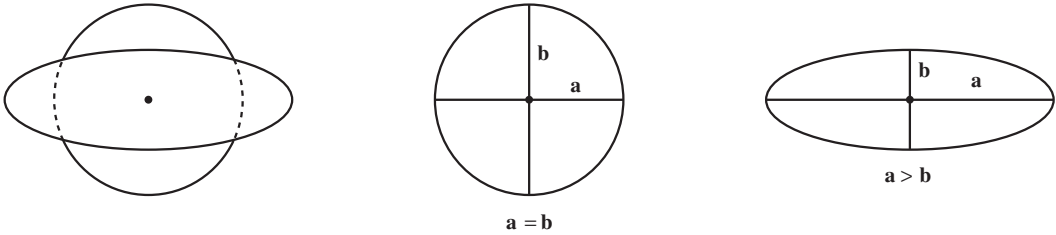
شکل ۸-۲۰

فشردگی بیضی: اگر دایره‌ای را در راستای یک قطرش فشار دهیم (یا بکشیم) شکل دایره

تبدیل به بیضی می‌شود.

میزان این فشردگی برابر است با اختلاف نسبی دو شعاع حداکثر (a) و حداقل (b) که مطابق

شکل ۸-۲۱ برهم عمودند.



$$f = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$$

شکل ۸-۲۱

بنابراین فشردگی دایره برابر صفر است.

مثال: فشردگی زمین را برای بیضی مبنای WGS84 در صورتی که شعاع زمین در استوا

$a = 6378137$  و در قطبین  $b = 6356752 / 382$  باشد محاسبه کنید.

$$f = 1 - \frac{b}{a} = 1 - \frac{6356752 / 382}{6378137} \approx 3\%$$

خروج از مرکز بیضی: معیار دیگری که برای فشردگی بیضی در محاسبات هندسی به کار

می‌رود، خروج از مرکز می‌باشد که آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad \text{رابطه‌ی}$$

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

چون

$$\Rightarrow e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

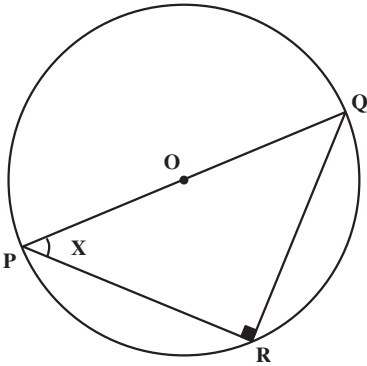
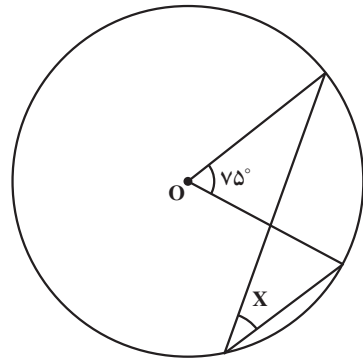
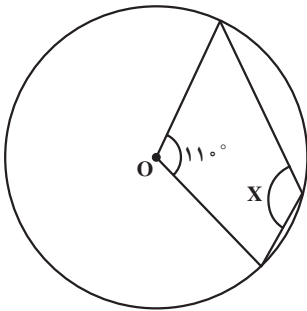
$$c^2 = a^2 - b^2 \quad \text{تذکر:}$$

تمرین: خروج از مرکز را برای مثال بالا محاسبه نمایید.

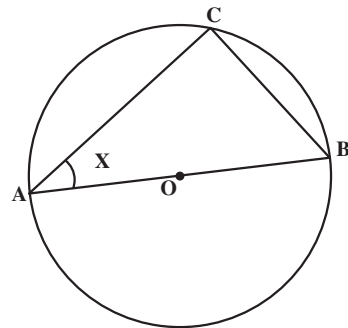


## خودآزمایی

- ۱- دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر رسم و وترى به طول ۷ سانتی‌متر جدا کنید؛ سپس قطر  $AB$  را به دل‌خواه رسم نموده از نقطه‌ی  $M$  روی دایره خارج از قطر به دو سر  $AB$  وصل کنید. زاویه‌ی  $\angle AMB$  چند درجه است؟ چرا؟
- ۲- در هر یک از شکل‌های زیر مقدار زاویه‌ی  $x$  را بیابید:



$$|PR| = |RQ|$$

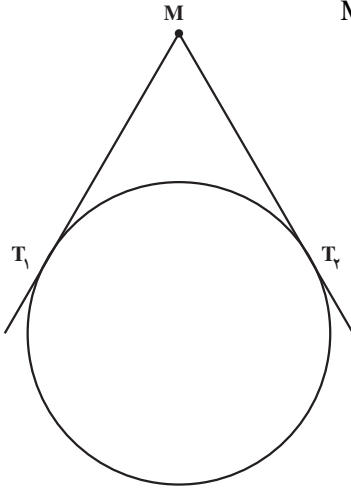


$$|BC| = |OB|$$

شکل ۸-۲۲

۳- از نقطه‌ی M شکل ۲۳-۸ دو خط  $MT_1$  و  $MT_2$

را بر دایره‌ی O مماس کرده‌ایم. ثابت کنید  $MT_1 = MT_2$

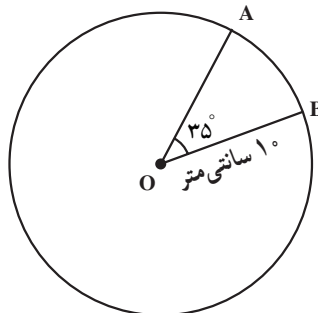


شکل ۲۳-۸

۴- طول پاره خط AB را به اندازه‌ی ۸ سانتی متر رسم کنید و کمان درخور زاویه‌ی  $3^\circ$  درجه را روی آن ترسیم نمایید.

۵- مثلث ABC را طوری رسم نمایید که طول BC، ۵ سانتی متر و زاویه‌ی  $\hat{A} = 6^\circ$  و ارتفاع وارد بر ضلع BC، ۳ سانتی متر باشد.

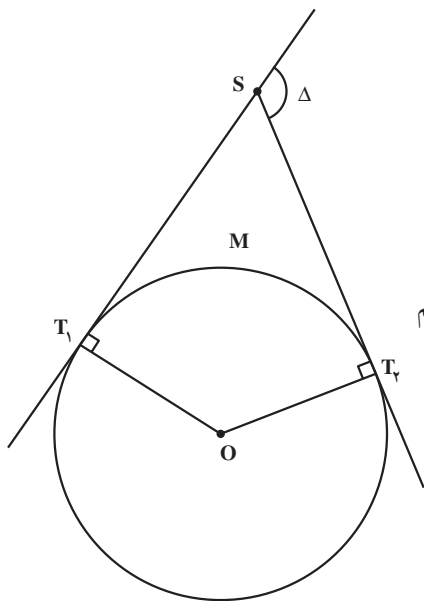
۶- در یک دایره به شعاع  $1^\circ$  سانتی متر طول کمان مقابل به زاویه‌ی  $35^\circ$  (شکل ۲۴-۸) چند سانتی متر است؟



شکل ۲۴-۸

۷- در یک دایره به شعاع  $1^\circ$  متر، زاویه‌ی روبه‌رو به کمانی از این دایره که طول آن ۵ متر است، چند رادیان و چند درجه است؟

۸- در شکل ۲۵-۸ از نقطه‌ی S مماس‌های  $ST_1$  و  $ST_2$  بر دایره به مرکز O، به شعاع R



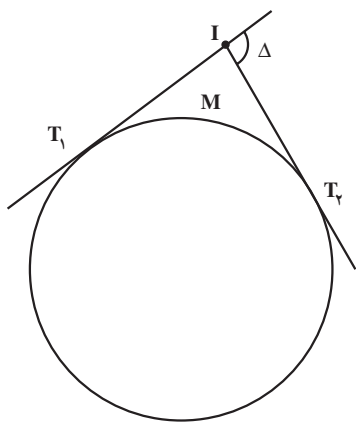
رسم شده است. اگر زاویه‌ی انحراف  $\Delta = 12^\circ$  باشد،  
 اولاً: زاویه‌ی  $\angle T_1OT_2$  چه قدر است؟  
 ثانیاً: زاویه‌ی ظلّی  $\angle ST_1T_2$  را به دست آورید.  
 ثالثاً: اگر شعاع دایره،  $R = 150$  متر باشد طول  
 قوس  $\widehat{T_1MT_2}$  را محاسبه کنید.  
 راهنمایی: هر دو زاویه که اضلاع آن دویه دو برهم  
 عمود باشند مساویند.

شکل ۸-۲۵

۹- از نقطه‌ی I شکل ۸-۲۶ مماس  $IT_1$  و  $IT_2$  را بر دایره‌ای به شعاع  $250$  متر رسم کرده‌ایم.

اگر زاویه‌ی انحراف  $\Delta = 30^\circ, 11^\circ$  باشد مطلوب

است محاسبه‌ی طول مماس  $IT_1$  و اندازه‌ی کمان  $\widehat{T_1MT_2}$ .



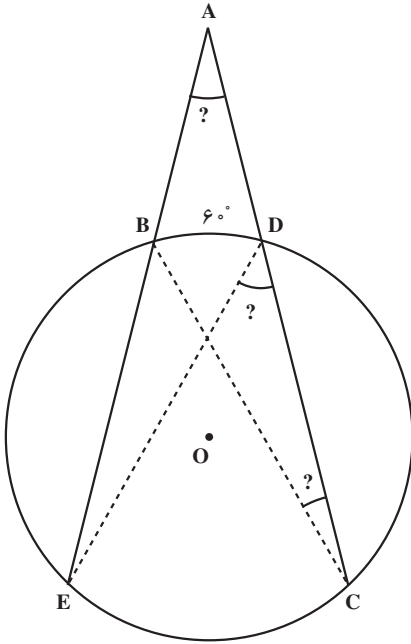
شکل ۸-۲۶

۱۰- در شکل‌های ۸-۲۷ و ۸-۲۸، دو وتر BC و DE یکدیگر را در نقطه‌ی A قطع کرده‌اند

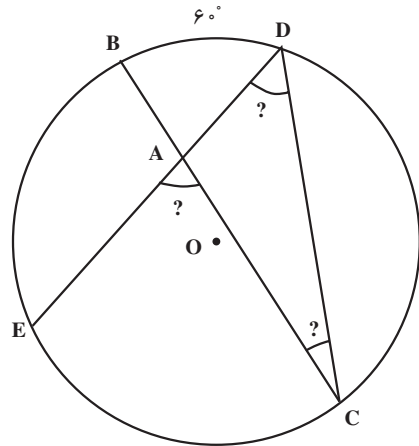
$$\widehat{BD} = 60^\circ \text{ و } \widehat{CE} = 100^\circ .$$

اولاً هر یک از دو زاویه‌ی C و D چند درجه است؟

ثانیاً مقدار زاویه‌ی خارجی EAC از مثلث ADC چند درجه است؟



شکل ۸-۲۸



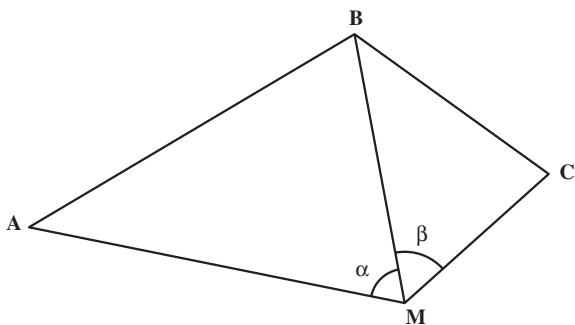
شکل ۸-۲۷

## آیا می‌دانید



ابوریحان بیرونی در تعریف دایره از فصل نخست کتاب التفهیم آورده است: «دایره چیست؟ شکلی است بر سطحی که گرد بر گرد او خطی بود که نام او محیط است و به میان او نقطه‌ای است که او را مرکز گویند و همه‌ی خط‌های راست که از مرکز بیرون آیند و به محیط رسند، هم چند (مساوی) یکدیگر باشند.»

۱۱- مطابق شکل ۸-۲۹ سه نقطه ی A ، B و C روی نقشه مفروض اند. می خواهیم محل نقطه ی M را طوری تعیین کنیم که  $\angle AMB = \alpha$  و زاویه ی  $\angle BMC = \beta$  شود. روش ترسیم را برای به دست آوردن نقطه ی M شرح دهید؛ سپس سه نقطه ی A ، B و C که در یک امتداد نباشند در روی کاغذ در نظر بگیرید. اگر  $\alpha = 3^\circ$  و  $\beta = 30^\circ$  ،  $32^\circ$  باشد محل نقطه ی M را به روش ترسیم به دست آورید.



شکل ۸-۲۹

۱۲- بیضی ای که اندازه ی قطرهای آن به ترتیب ۶ و ۴ سانتی متر باشد رسم کنید (در صورتی که مرکز بیضی بر مبدأ مختصات و محورهای بیضی بر محورهای مختصات منطبق باشند)؛ سپس فشردگی و خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.

۱۳- در حوضی به شکل بیضی که نصف قطر بزرگ آن متر  $a = 5$  و فاصله ی دو کانون بیضی ۶ متر است،

اولاً: نصف قطر کوچک آن را حساب کنید.

ثانیاً: روش ترسیم و پیاده کردن آن را بیان نمایید.

ثالثاً: فشردگی و خروج از مرکز بیضی را حساب کنید.

۱۴- در یک باغچه به شکل بیضی که قطرهای آن به ترتیب  $2^\circ$  و  $12^\circ$  متر است،

اولاً: فاصله ی کانونی آن را به دست آورید.

ثانیاً: خروج از مرکز آن را به دست آورید.

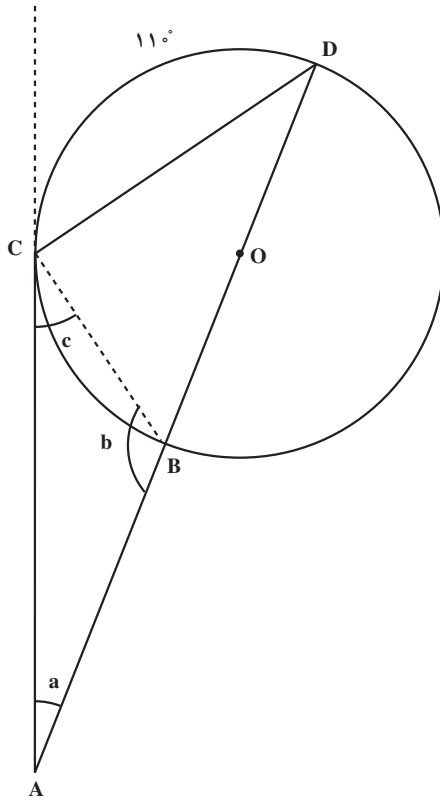
ثالثاً: مساحت بیضی را محاسبه نمایید.

۱۵- در یک بیضی هایفورد  $a = 6378249$  و متر  $b = 6356515$  است. فشردگی و

خروج از مرکز آن را حساب کنید.

۱۶- اگر شعاع کره‌ی زمین  $6400$  کیلومتر باشد، طول کمان یک درجه، یک دقیقه و یک ثانیه در روی زمین را به دست آورید.

۱۷- در شکل ۸-۳ مقدار زوایای  $a$ ،  $b$  و  $c$  را به دست آورید. (خط  $AC$  بر دایره در نقطه‌ی  $C$  مماس است.)



شکل ۸-۳

## مسائل

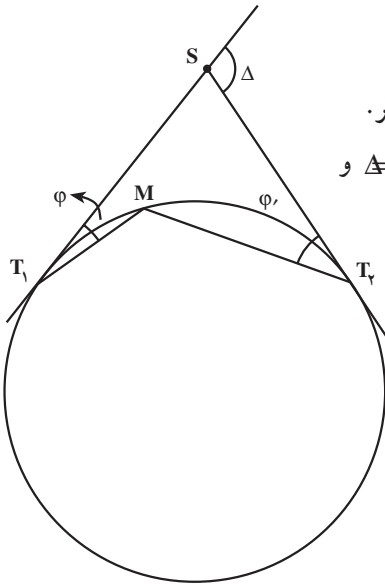
### مسئله ۱

موضوع: محاسبه‌ی یک زاویه از روی زوایای دیگر.

در این شکل ۸-۳۱ زاویه‌ی انحراف  $\Delta = 36^\circ$ ،  $25'$  و

زاویه‌ی  $18'$ ،  $12^\circ$  نشان داده شده است. مطلوب است

$$\cdot \hat{\varphi}' = MT_{\gamma} \hat{S} \varphi'$$



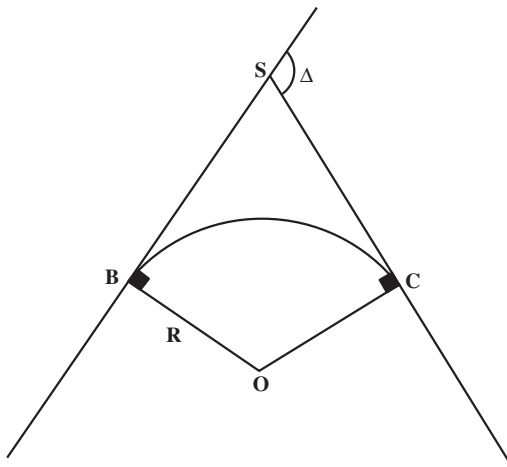
شکل ۸-۳۱

### مسئله ۲

موضوع: الف) محاسبه‌ی زاویه‌ی مرکزی بر حسب زاویه‌ی انحراف  $\Delta$ ، ب) محاسبه‌ی طول

قوس  $\widehat{BC}$ . در صورتی که زاویه‌ی انحراف  $\Delta = 24^\circ, 30'$  و شعاع قوس  $35/42$  متر باشد (شکل

۸-۳۲).



شکل ۸-۳۲

## کارگروهی دانش آموزان

دانش آموزان هر گروه برای خود یک سرگروه تعیین کنید. هر یک اعضای درس را برای اعضاء بازگو کنند با دریافت تعدادی سؤال از هر یک از اعضاء، از گروه آزمون پیشرفت برگزار کنید، سؤالات را با همکاری یکدیگر تصحیح کرده و میزان یادگیری اعضاء را ارزیابی کنید.

## مطالعه‌ی آزاد



**نکته:** آقای غیاث‌الدین جمشید کاشانی، معروف به جمشید کاشی بر نیمکت راهروی دادگاه غمگین نشسته است. قرار است دقایقی دیگر در حالی که لباس زندان بر تن دارد، برود و از خود دفاع کند. اما بهتر است که به او نخندید که مثلاً چه دفاعی؟ این را هم می‌دانیم، اما اتفاق است خبر که نمی‌کند آدم هم آدم است یک وقت دیدی خودت جای او قرار گرفتی. سراغش می‌روم و بعد از کلی تعارف و استدلال امیدوارش می‌کنم به این که بتواند از دادگاه تخفیف بگیرد. راضی که می‌شود، مصاحبه را شروع می‌کنم:

– آقای غیاث‌الدین جمشید کاشانی! آیا بهتر نیست شما قبل از آن که وصیت خود و آخرین حرف‌تان را در محضر عدالت بگویید، برای خواننده‌های ما توضیح بدهید که جرم‌تان چیست؟

– جرم من شکنجه بیش از حد است!

– اگر امکان دارد بیش‌تر توضیح بدهید. چه کسی

را شکنجه کرده‌اید و هدف شما چه بوده است؟

– من یک زبان بسته را شکنجه کرده‌ام به خاطر این

که محاسبات ریاضی‌دان‌ها دقیق شود، عدد زبان بسته‌ی بی  $(\pi)$ .





– از نوع پاسخ دادن تان مشخص است که هنوز نسبت به این زبان بسته دشمنی دارید.

– بله درست است. به ما طوری یاد داده اند که این اعداد، شوم و نحس اند و بدبختی می آورند.

– چه کسانی؟

– استاد های ریاضی دان ما.

– اگر امکان دارد داستان را از اول برای ما تعریف کنید.

جمشید به این جا که رسید آهی کشید در فکر فرو رفت و این طور گفت :

– ببینید همه ما می دانیم در طبیعت، انسان چیزهایی تکراری می بیند، مثلاً دو تا، سه تا یا چند تا از هر چیز، سرتان را درد نیاورم مصری ها اعداد خرده را هم وارد معامله کردند. آن ها به همه اطمینان دادند که عدد لازم نیست همیشه صحیح باشد بلکه روی خرده ی اعداد هم می شود حساب کرد و خودتان می دانید که کسر را اختراع کردند.

یک پرتقال برای دو نفر یعنی یک تقسیم بر دو، به هر کدام چقدر می رسد؟

یک قسمت از دو قسمت ؛ پس کسر از تقسیم درست شد.

پس هر عدد درسته را هم می شود خردش کرد مثل صدتومانی که به پنج تا بیست تومانی یا چهار سکه بیست و پنج تومانی خرد می شود. این طوری همه ی اعداد را خرد و حقیر کردند. مثلاً اندازه ی محیط مربع نسبت به یک ضلعش چقدر است؟ همه می دانید ۴.

$$\frac{\text{اندازه ی محیط مربع}}{\text{اندازه ی ضلع مربع}} = 4$$

یا اندازه ی مساحت مربع نسبت به ضلعش چقدر است؟ می شود خود خود ضلع.

$$\frac{\text{اندازه ی مساحت مربع}}{\text{اندازه ی ضلع مربع}} =$$

یک روز یک معلم باهوش چینی برای تنبیه شاگردانش به آن ها مسأله ای داد که در هیچ کتابی قبل از آن نیامده بود اول کلی توضیح داد تا بچه ها را قانع کرد که دایره یک شکل گویولی و ناز است چرا؟ چون تناسب اندام دارد (مثل خود چینی ها!). پس همه ی

دایره‌ها باید اندازه‌ی محیط‌شان به قطرشان نسبت ثابتی داشته باشد. چرا مربع داشته باشد و دایره نداشته باشد؟ پس اگر هر دایره‌ای را به همان اندازه که دلمان بخواهد بکشیم و محیط و قطرش را اندازه بگیریم و اندازه‌ی محیط را بر اندازه‌ی قطر تقسیم کنیم یک عدد ثابت می‌شود که بعدها یونانی‌ها این عدد ثابت را بی  $\pi$  نامیدند.

$$\pi = \frac{\text{اندازه‌ی محیط دایره}}{\text{اندازه‌ی قطر دایره}}$$

یعنی دیگر می‌دانیم قطر هر دایره را باید چند برابر کنیم تا محیط آن را به دست آوریم و برعکس اگر محیط دایره را داشته باشیم تقسیم بر چند کنیم تا اندازه‌ی قطرش را بفهمیم که البته معمولاً دومی، سخت‌تر می‌شود. سپس جمشید گفت: آن معلم چینی نمی‌دانست چه کار مهمی کرده است هر چند چینی‌ها همیشه فکر می‌کردند جواب  $3/5$  است. یونانی‌ها هم به دنبال این عدد گشتند اما هیچ کس مثل من شانس نیارود. ما خیلی این در و آن در زدیم تا این که بالاخره گیر افتاد. من این عدد گم شده‌ی زبان بسته را تنها که گیر آوردم با ترفندهایی شکنجه کردم و از زیر زبانش حرف کشیدم.

– می‌شود بهتر توضیح بدهید؟

– ترفندهای مرا شما نمی‌فهمید فقط ریاضی‌دان‌ها می‌فهمند اما سعی می‌کنم اهمیت و هیجان داستان را کمی بیش‌تر به شما نشان دهم.

– خب حالا توضیح بدهید شما چه کاری انجام داده‌اید؟

– بنده ارقام عدد  $\pi$  را آن قدر دقیق حساب کردم که سه قرن بعد از من کسی نتوانست آن را دقیق‌تر کند.

$$\pi = 3/141592653589793$$

– ریاضی‌دان‌ها کلاً چه مدت این عدد را شکنجه داده‌اند؟

– این‌طور نمی‌شود جواب داد فقط می‌توان گفت هزار سال که روی شاخش است.

– به عنوان آخرین حرف یا وصیت چه چیزی برای گفتن دارید؟

– می‌خواستم به دیگران بگویم زرنگی هم حدی دارد، اما زیبایی نه، ریاضی گرچه حيله است اما از بس زیباست هیچ کس نمی‌تواند بعد از آن که دچارش شد یا

آلوده‌اش شد، ترکش کند. من هم نمی‌توانم به عنوان حرف آخر از کسانی که بعد از من به این دام می‌افتند می‌خواهم اگر خواستند از این‌گونه اعداد حرف بکشند بدانند چه سؤالاتی باید پرسند که این طوری نه وقت خودشان را تلف کنند و نه جان و عمر آن بیچاره‌ها را.

من کم کم با غیاث‌الدین جمشید خداحافظی می‌کنم و او را با اتهاماتش تنها می‌گذارم بالاخره او احتیاج به تفکر دارد تا برای دفاع در دادگاه خود را آماده کند.

منبع : ماجراهای حسایی

سرگذشت : پیدایش اعداد

نویسنده : امید وهابی املشی

## منابع فارسی

- هندسه، تألیف، سرژلانگ جین مورو، ترجمه‌ی دکتر محمدعلی رضوانی.  
دایرةالمعارف هندسه، تألیف محمدهاشم رستمی.  
هندسه، سال دوم ریاضی فیزیک دبیرستان، تألیف احمد بیرشک و محمدطاهر معیری.  
هندسه، سال دوم تجربی، تألیف محمود فصیحیان و محمود کرباسی.  
هندسه، نظام جدید آموزش متوسطه سال اول، مؤلفان: زهرا گویا و سهیلا غلام‌آزاد.  
هندسه، مقدمات ترسیم فنی، مؤلف: احمد متقی‌پور.  
ریاضیات ۱ و ۲، نظام جدید آموزش متوسطه سال اول، مؤلف: دکتر اسماعیل بابلیان.  
ریاضی، سال دوم راهنمایی، تألیف گروه ریاضی دانشگاه مشهد.  
هندسه، رشته‌ی علوم ریاضی مراکز تربیت معلم، مؤلف: صفر باهمت شیروانه‌ده.  
هندسه، سال چهارم ریاضی فیزیک  
هندسه، سال سوم علوم تجربی، مؤلفان: محسن حسام‌الدین و محمدهادی شهرستانی.  
ریاضیات ۳ و ۴، نظری و فنی و حرفه‌ای، مؤلفان: دکتر اسماعیل بابلیان و میرزا جلیلی.  
هندسه‌ی تحلیلی، سال چهارم ریاضی فیزیک، مؤلفان: حسین غیور – حسین مجدوب‌زنجانی.  
هندسه‌ی ۲، نظری، رشته‌ی ریاضی فیزیک سال دوم، مؤلفان: زهرا گویا و سهیلا غلام‌آزاد.  
ریاضی سال اول، دوره‌ی راهنمایی، مؤلفان: گروه ریاضی دانشگاه مشهد.  
ریاضی سال سوم، دوره‌ی راهنمایی، مؤلفان: گروه ریاضی دانشگاه مشهد.  
ریاضیات عالی برای نقشه‌برداری، نویسنده غلامرضا نخعی‌زاده.

جزوه‌ی نقشه‌برداری مسیر، مؤلف: سلطان محمود کریمی.

نقشه و نقشه‌برداری، سازمان نقشه‌برداری کشور، مؤلفان: علی اسلامی‌راد و بابک شمعی.

مبانی نقشه‌برداری، نظام جدید متوسطه، فنی و حرفه‌ای، مؤلف: دکتر بهمن مقرب‌نیا.

نقشه‌برداری ۱، فنی و حرفه‌ای (گروه عمران)، مؤلفان: شمس نوبخت و یحیی مهرپویان.

نقشه‌برداری، تألیف مهندس شمس نوبخت.

نقشه‌برداری جدید، جلد ۱ و ۲، تألیف دکتر حسن شمسی.

ژئودزی، تألیف مهندس علی نوری.

نقشه‌برداری معدن، سال سوم هنرستان، مؤلف: رحمت‌الله استوار.

ژئودزی ماهواره‌ای، تألیف مهندس علی نخلستانی.

مقدمه‌ای بر نجوم عالی، تألیف عباس ریاضی‌کرمانی.

مبانی حساب و دیفرانسیل و انتگرال، گرانویل، ترجمه‌ی محمود آق‌اولی.

عکاسی ۱، فنی و حرفه‌ای (گروه هنر) مؤلف: مجتبی آقایی سربرزه.

هیئت، سال پنجم ریاضی، مؤلف: سیدباقر هیوی.

نقشه‌برداری مقدماتی، تألیف دکتر قدرت‌الله تمدنی.

مسئله‌های تاریخی ریاضیات، ترجمه‌ی پرویز شهریاری.

هندسه‌ی دلپذیر، تألیف دکتر احمد شرف‌الدین.

هندسه‌ی مثلث‌ها، ترجمه‌ی ابوالقاسم قربانی.

مجلات نقشه‌برداری، نشریه‌ی علمی و فنی سازمان نقشه‌برداری.

کاتالوگ شرکت‌های لایکا – سوکیشا – پنتاکس – زایس. کرن – نیکون، تاپ‌کن.

نقشه‌برداری، سال چهارم هنرستان، بهداشت محیط، مؤلف: بهمن مقرب‌نیا.

## منابع خارجی

- 1 - A text book of Advanced Surveying Jawahar |a| sharma.
- 2 - A text book of Surveying a levelling R. A GOR 1994.
- 3 - Surveying volume 1 Dr K.R. ARORA.

4 - Surveying NARINDER SiNGH 1982.

5 - A text book of Surveying J. KAUSHIK 1988.

6 - ELEMENTARY SURVEYING Seventh Edition Russell C. Brinker paul  
Woif.

7 - Surveying JACK B. evtt.

8 - Site Surveying and Levelling John Clancy.

