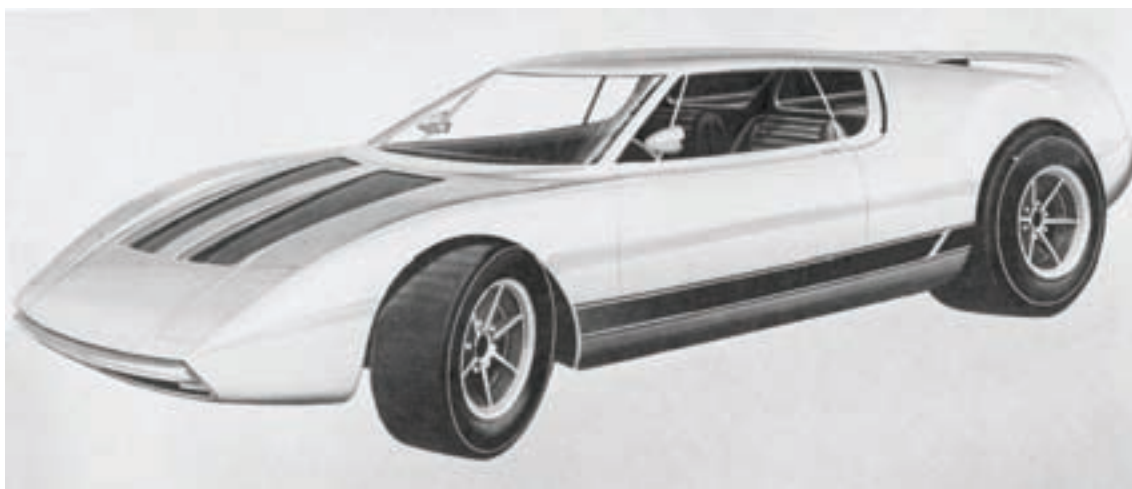




برج طغرل شهری



از برخورد صفحات با یکدیگر در فضا، احجام هندسی می توانند به وجود آیند.

چگونگی وضعیت دو صفحه نسبت به هم

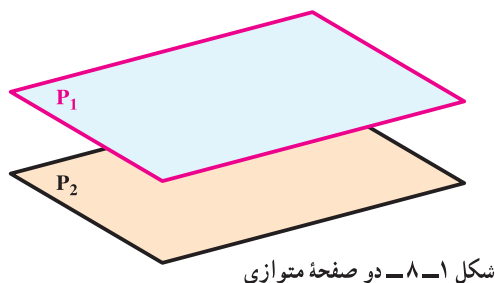
هدفهای رفتاری: در پایان این فصل از فراگیر انتظار می‌رود:

– وضعیت دو صفحه را نسبت به هم بررسی کند.

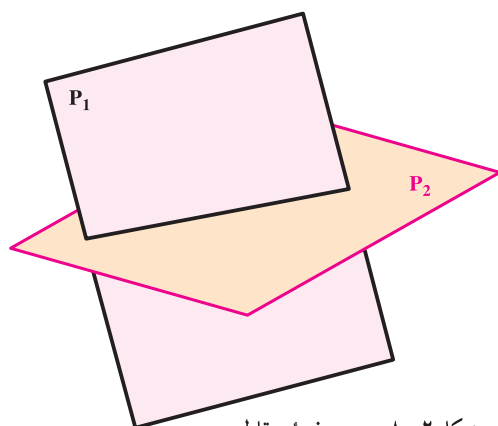
۸-۱- حالات مختلف دو صفحه

دو صفحه نسبت به هم تنها دو حالت می‌توانند داشته باشند^۱.

دو صفحه متوازی هستند (شکل ۸-۱).



شکل ۸-۱- دو صفحه متوازی



شکل ۸-۲- دو صفحه متقاطع

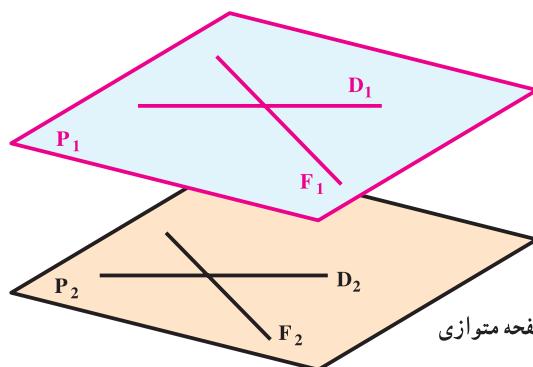
دو صفحه متقاطع هستند (شکل ۸-۲).

۸-۲- دو صفحه متوازی

برای آن که دو صفحه متوازی باشند شرط لازم و کافی این است که دو خط متقاطع از یکی با دو خط متقاطع از دیگری موازی

باشند. در شکل ۸-۳ دو خط متقاطع به نامهای D_1 و F_1 از صفحه P_1 به ترتیب با دو خط متقاطع به نامهای D_2 و F_2 از صفحه P_2

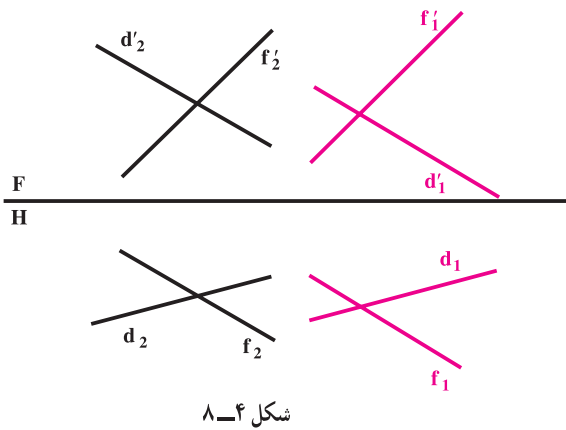
P_2 موازی هستند.



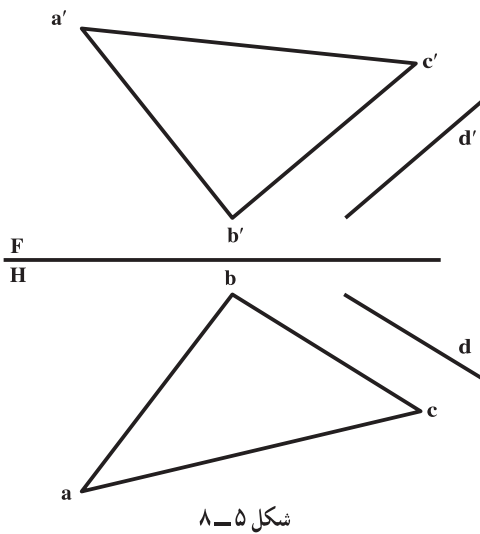
شکل ۸-۳- دو صفحه متوازی

۱- این مطلب برای زمانی است که دو صفحه نامحدود باشند، اما برای صفحات محدود ممکن است حالت سومی هم باشد که دو صفحه نه متوازیند و نه متقاطع.

در هندسه ترسیمی نیز با رعایت شرط یاد شده دو صفحه متوازی خواهند بود. در شکل ۸-۴ دو صفحه که به وسیله دو خط متقاطع نمایش داده شده‌اند با یکدیگر متوازی هستند.

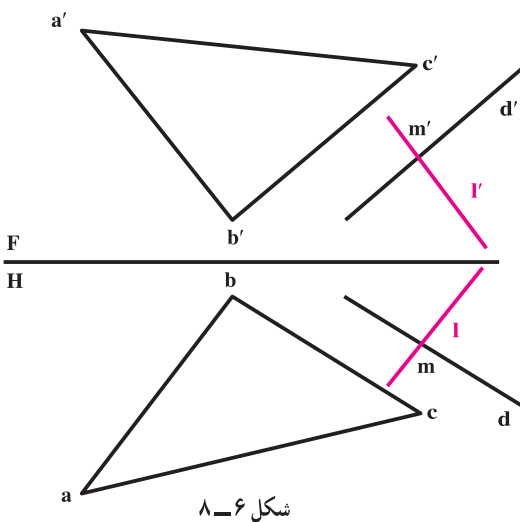


تمرین: خط dd' با صفحه ABC موازی است. صفحه‌ای بر D بگذرانید که با ABC موازی باشد (شکل ۸-۵).



حل: ابتدا نقطه‌ای از dd' مثل mm' را در نظر می‌گیریم (شکل ۸-۶).

از mm' خطی موازی با صفحه ABC رسم می‌کنیم. برای نمونه از mm' به موازات aa' و bb' رسم می‌کنیم.
این خط را ll' می‌نامیم. صفحه‌گذرنده بر خطوط dd' و ll' موازی با ABC است.



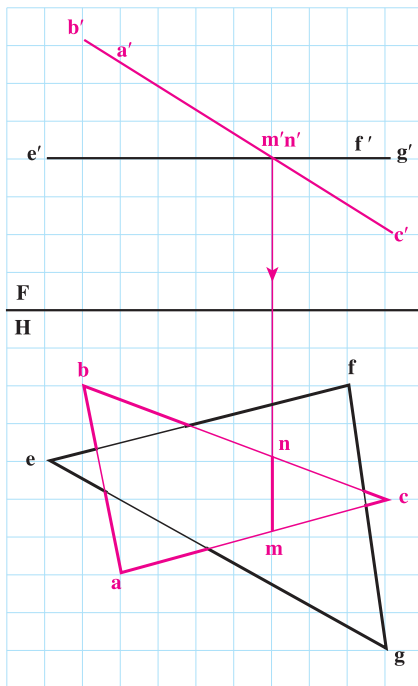
۱- چون در نمای روبه‌رو، d' با c' و b' در نمای افقی d با bc موازی است، پس dd' که با یک خط از ABC موازی است، با خود آن موازی خواهد بود.

۳-۸- دو صفحه متقاطع

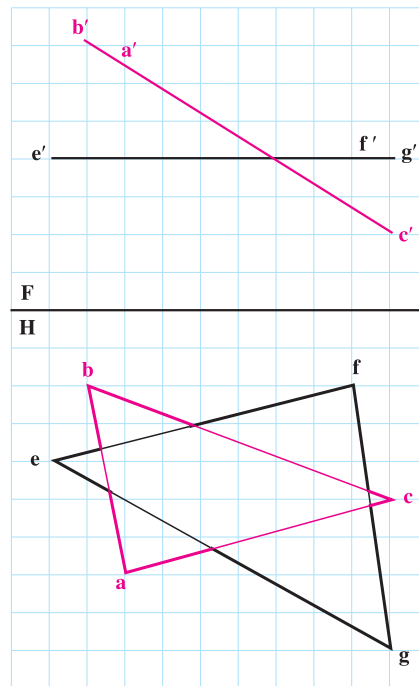
اگر دو صفحه با هم موازی نباشند، متقاطع خواهند بود.

اگر دو صفحه تخت باشند، خط حاصل از برخورد آنها، یک خط مستقیم است که آن را «برخورد» یا «فصل مشترک دو صفحه» نامند.

برخورد دو صفحه در حالت خاص: در برخورد دو صفحه، ممکن است یکی از صفحات حالت خاص داشته باشد، مانند صفحات تصویر، صفحه قائم، منتصب، روبه‌رو و افقی. در این صورت تعیین فصل مشترک آن با صفحه دوم بسیار آسان است. تمرین اول: دو صفحه ABC (منتصب) و EFG (افقی) برخورد کرده‌اند. شکل ۷-۸ فصل مشترک یک خط منتصب است که به سادگی به کمک رابط مشخص می‌شود (mm').



شکل ۷-۸



شکل ۷-۸

شکل ۷-۸

تمرین دوم: صفحه $ABCD$ و صفحه efg مفروضند، مطلوب است برخورد آنها (شکل ۸-۸).

حل: تنها ضلع از صفحه $ABCD$ که احتمال برخورد آن با صفحه efg هست، ضلع AB یا $aa'bb'$ است که از نقطه برخورد

آن در تصویر روبه‌رو رابط می‌کنیم تا به ab در تصویر افقی برسیم؛ (شکل ۹-۸ ب)

اگر m در داخل سطح مثلث efg واقع شد، mm' یک نقطه از فصل مشترک است و اگر mm' بیرون از سطح efg قرار

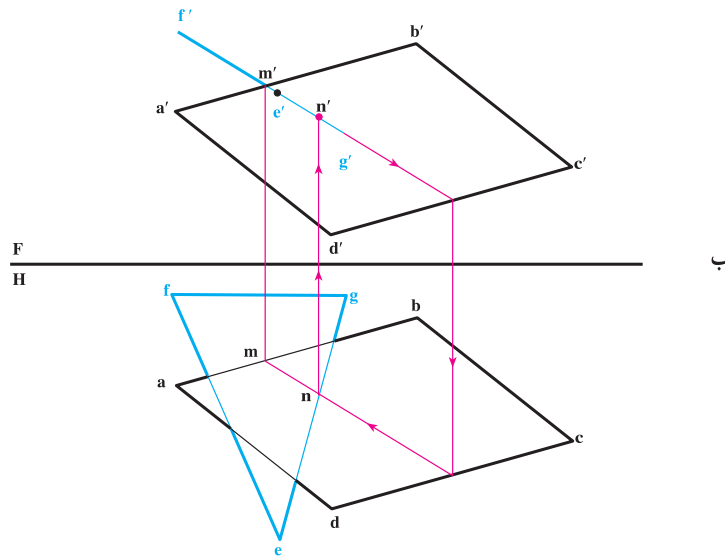
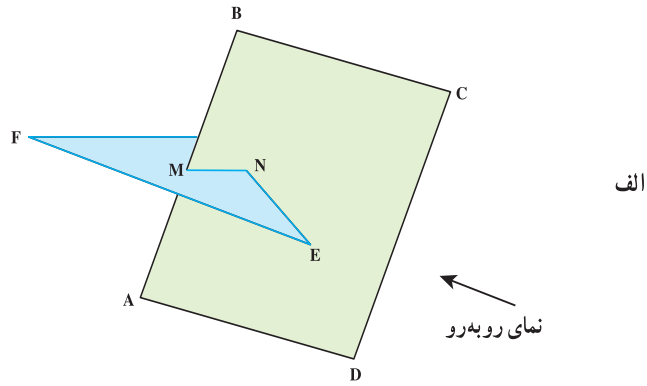
گرفت، $aba'b'$ ، نقطه اشتراکی با مثلث ندارد؛

طبق شکل روشن است که اضلاع دیگر چهارضلعی اشتراکی با مثلث ندارند؛ پس باید این نکته را بررسی کرد که آیا اضلاع

مثلث با صفحه برخورد می‌کنند یا نه؟

خط $e'g'$ را خطی از صفحه چهارضلعی فرض می‌کنیم و برخورد آن را معین می‌کنیم که nm' خواهد شد.

۸-۹- بنا براین، پاره خط $mm'nn'$ جواب مسئله است (شکل ۹-۸).



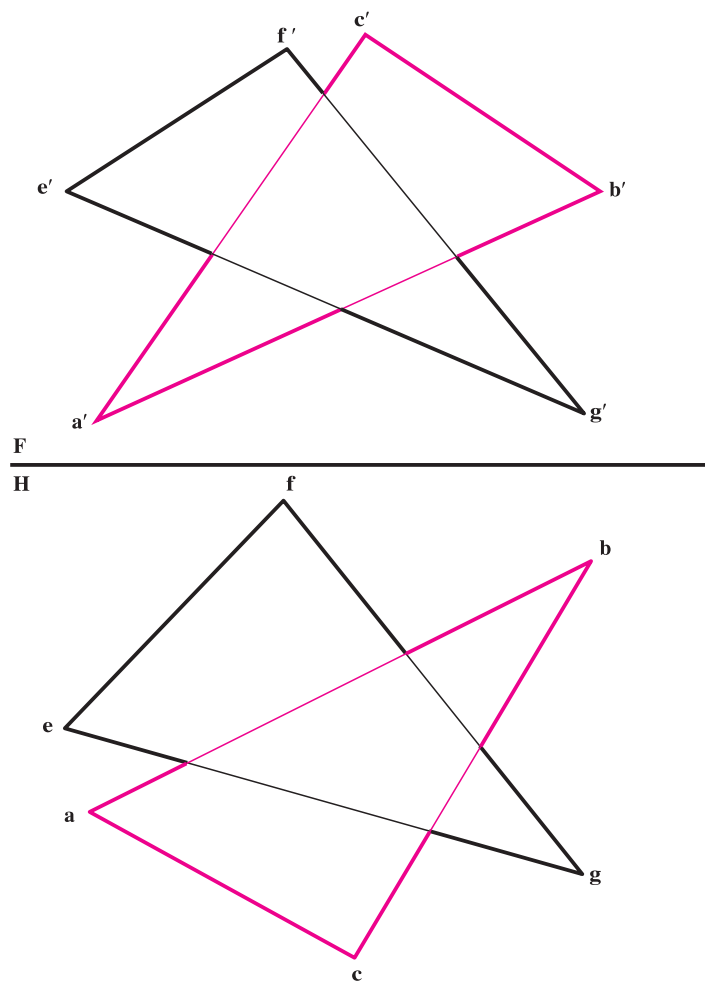
شکل ۹-۸

حل مسئله برخورد یک صفحه غیر خاص با صفحات خاص دیگر به عهده هنرجویان است.

۸-۴- برخورد دو صفحه دلخواه

دو صفحه abc و gef را که هر دو با قسمتی از خود معرفی شده‌اند در نظر بگیرید. تعیین فصل مشترک آنها مورد نظر است (شکل ۱-۸). مطابق آنچه که از دو تصویر درک می‌شود، برای خطوط bc و fe و ac برخوردی وجود ندارد. پس برخورد احتمالی بین خطوط eg و fg از صفحه efg با صفحه abc و خط ab از صفحه abc با صفحه efg خواهد بود. یکی از روش‌های حل مسئله این است که به دلخواه یکی از خطوط مانند eg را انتخاب و برخورد آن را با abc (اگر وجود داشته باشد) تحقیق کنیم.

۱- $abcd$ چگونه صفحه‌ای است؟ آیا می‌توانید راه حل دیگری برای این مسئله پیشنهاد کنید؟

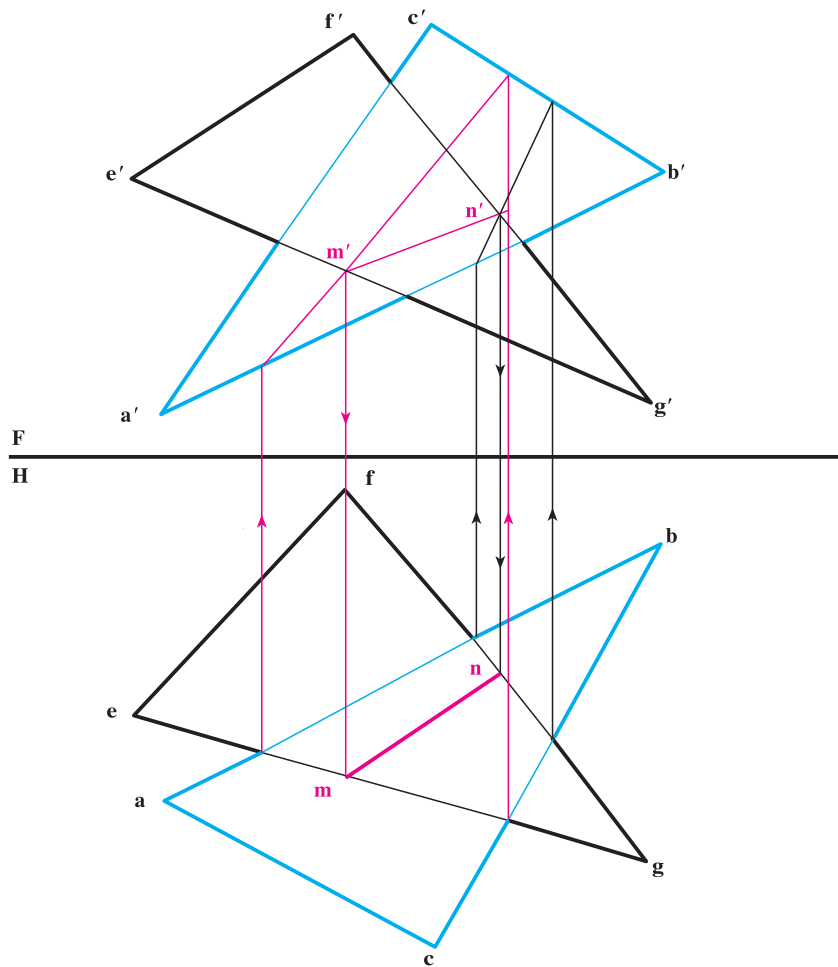


شکل ۱۰-۸

خلاصه عملیات انجام شده در شکل ۱۰-۸ به این شرح است :

- با فرض آن که eg در صفحه abc است، تصویر روبه‌رو را به دست می‌آوریم که در نتیجه m معین می‌شود؛
- با رابط از m' ، m را در تصویر افقی تعیین می‌کنیم.
- اینک خط fg را انتخاب و برخورد آن را با abc تحقیق می‌کنیم.
- ملاحظه می‌شود که fg در a' با abc برخورد دارد.
- بنابراین به کمک رابط n را معین می‌کنیم.
- چون دو خط از efg با abc برخورد دارند، دیگر کار را ادامه نمی‌دهیم زیرا مسلم است که ab با efg برخوردی نخواهد داشت. (البته در محدوده شکل موجود).
- اکنون m' را به n' و m را به n وصل می‌کنیم. پاره خط mn یا $m'n'$ پاسخ است.

۱- البته روشی هم وجود دارد که پیش از حل مسئله می‌توان تعیین کرد که کدام یک از خطوط با کدام یک از صفحات برخورد دارد که به آن نمی‌پردازیم.



شکل ۱۱-۸

ارزشیابی

- ۱- جملات زیر را کامل کنید :
- فصل مشترک دو صفحه نیمرخ و قائم خطی است چرا؟
- فصل مشترک دو صفحه نیمرخ و منتصب خطی است چرا؟
- فصل مشترک دو صفحه افقی و جبهی خطی است چرا؟
- فصل مشترک دو صفحه افقی و منتصب خطی است چرا؟
- فصل مشترک دو صفحه جبهی و قائم خطی است چرا؟
- فصل مشترک دو صفحه افقی و نیمرخ خطی است چرا؟
- فصل مشترک دو صفحه جبهی و نیمرخ خطی است چرا؟
- فصل مشترک دو صفحه افقی و غیرخاص خطی است چرا؟

- فصل مشترک دو صفحهٔ جبهی و غیرخاص خطی است چرا؟

- فصل مشترک دو صفحهٔ غیرخاص و نیمرخ خطی است چرا؟

- فصل مشترک دو صفحهٔ غیرخاص مواجه خطی است چرا؟

- فصل مشترک دو صفحهٔ غیرخاص خطی است چرا؟

- آیا می‌توانید تمام حالات ممکنه برای فصل مشترک

صفحات را بگویید، خطها چگونه‌اند؟

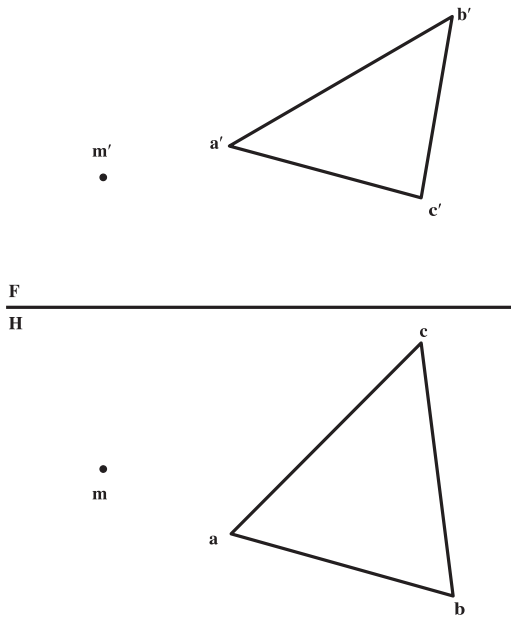
راهنمایی: بهتر است با تشکیل یک جدول پاسخ

را معین کنید.

۲- از نقطهٔ m صفحه‌ای به موازات صفحهٔ

abc رسم کنید که با دو خط متقاطع نمایش داده شود

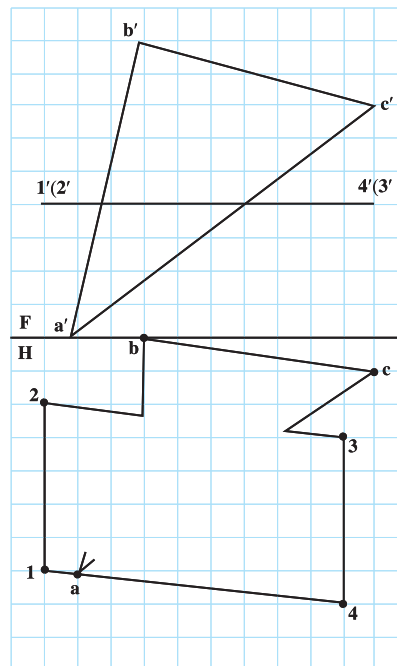
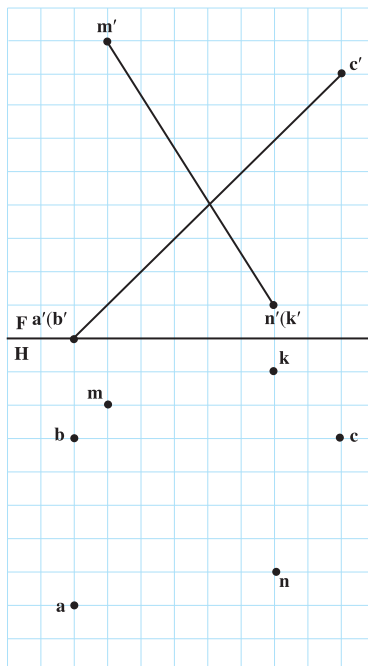
(شکل ۸-۱۲).

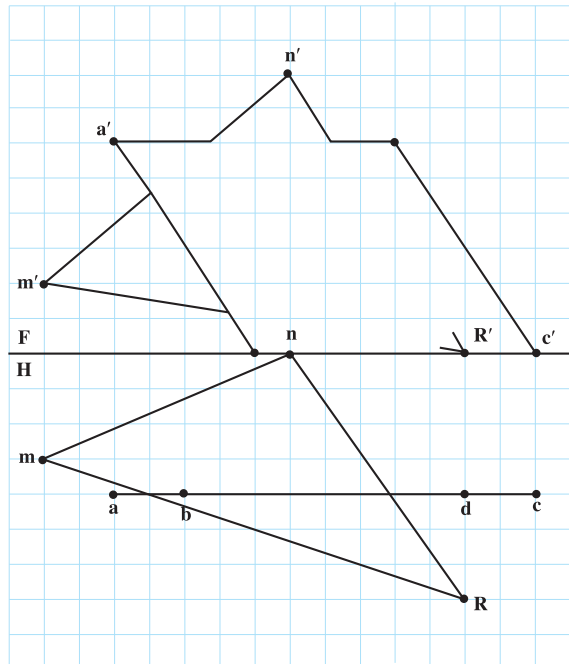
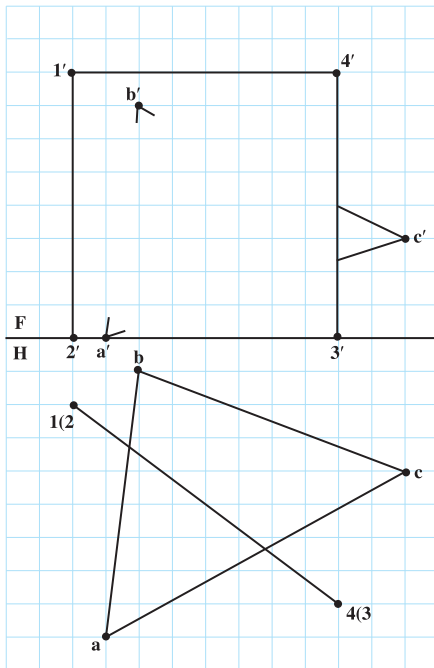


شکل ۸-۱۲

۳- برخورد صفحات زیر را تعیین کنید.

هر شکل با در نظر گرفتن هر مربع برابر 1° ، روی یک برگ کاغذ A_4 کشیده شود.





شکل ۱۳-۸

۴- سه نقطه $N(0^\circ, 5^\circ, 1^\circ)$ و $K(3^\circ, 8^\circ, h)$ و $M(8^\circ, 3^\circ, 0^\circ)$ معرف یک صفحه منتصب هستند. تقاطع این صفحه را با صفحه متوازی الاضلاع $ABCD$ به مشخصات $A(1^\circ, 0^\circ, 4^\circ)$ و $B(4^\circ, 0^\circ, 6^\circ)$ و $C(0^\circ, 3^\circ, 2^\circ)$ تعیین کنید. فصل مشترک چه نوع خطی است و طول حقیقی آن چیست؟

۵- صفحه متوازی الاضلاع پرسش بالا را دوباره رسم کنید و برخورد صفحه MNK را با آن معین کنید. در صورتی که داشته باشیم:

$$K(3^\circ, 3^\circ, 6^\circ) \text{ و } M(8^\circ, 3^\circ, 0^\circ) \text{ و } N(0^\circ, 3^\circ, 1^\circ)$$

۶- الف- ابتدا دوزنقه متساوی الساقین $ABCD$ را رسم کنید با شرایط $A(1^\circ, 1^\circ, 2^\circ)$ و $B(4^\circ, 4^\circ, 7^\circ)$ و $C(1^\circ, 1^\circ, 0^\circ)$ به گونه‌ای که AC قاعده بزرگ و AB یک ساق آن باشد.

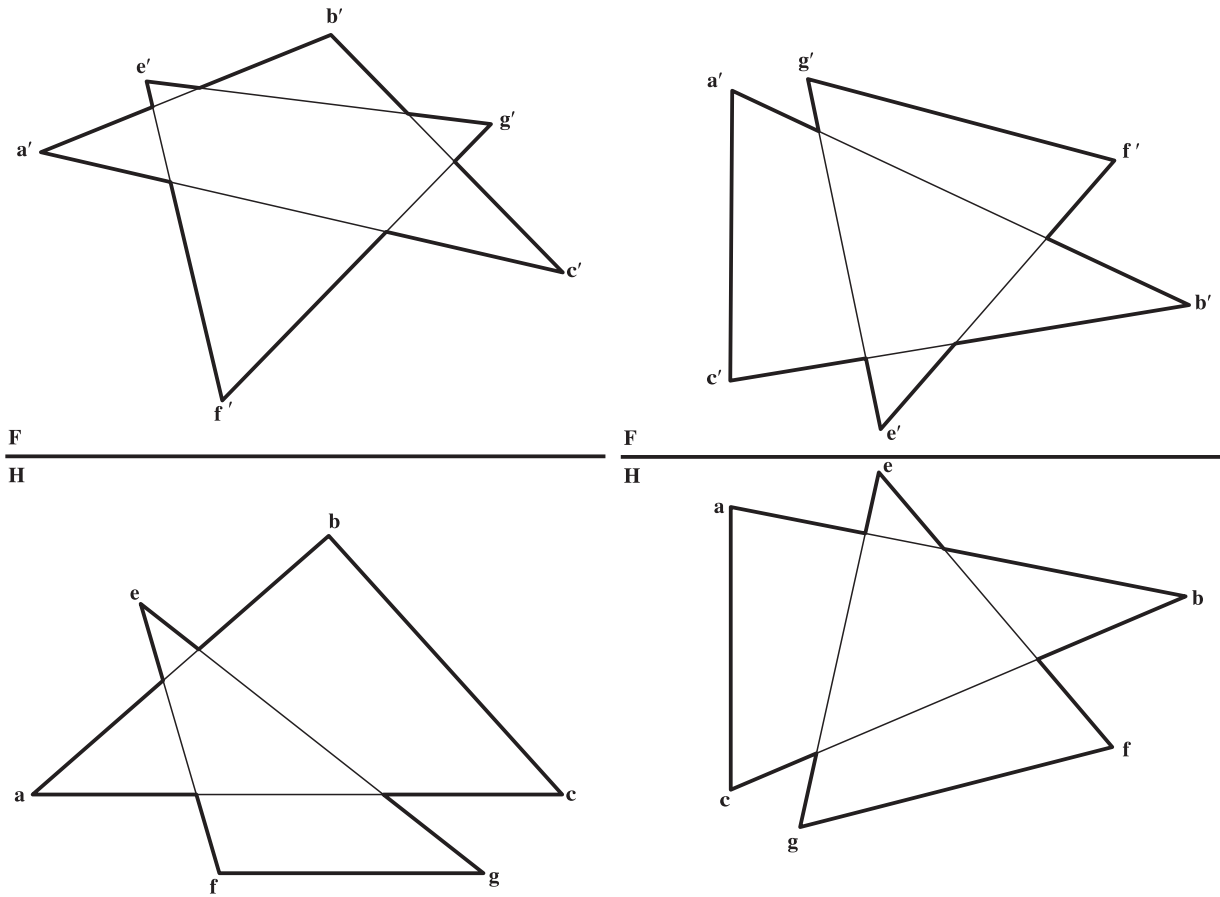
ب- برخورد این صفحه را با صفحه MNK با شرایط $M(1^\circ, 8^\circ, 0^\circ)$ و $N(7^\circ, 7^\circ, 0^\circ)$ و $K(1^\circ, 7^\circ, 1^\circ)$ تعیین کنید. طول حقیقی فصل مشترک چیست؟

پ- به دلایلی می‌خواهیم اندازه حقیقی سطوح $ABCD$ و MNK را برحسب میلی‌متر معین داشته باشیم، آیا می‌توانید راه‌حلی ارائه کنید؟

۷- با اندازه برداری از شکل ۱۰-۸ یک بار مسئله را با دقت حل کنید. (با مقیاس ۱:۲)

۱- می‌توان شکل‌ها را با اندازه دو برابر یکی کرد.

۸- فصل مشترک صفحات abc و efg را تعیین کنید. (مقیاس ۱:۲ با اندازه برداری از شکل ۸-۱۴)

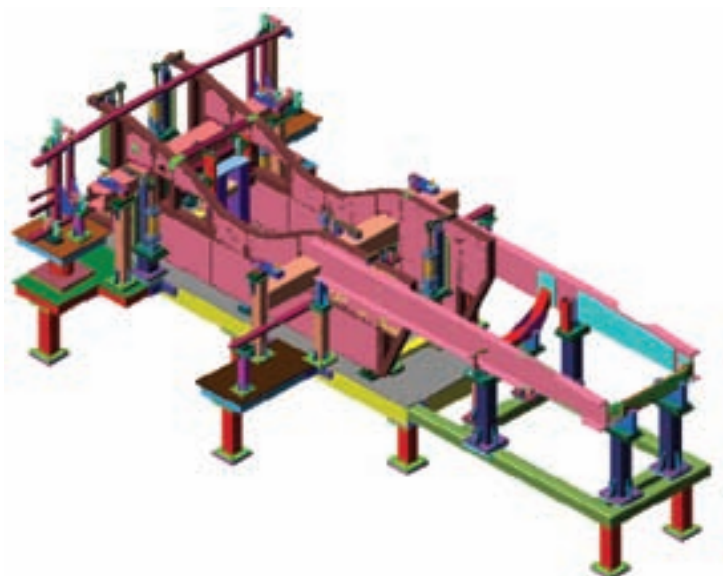
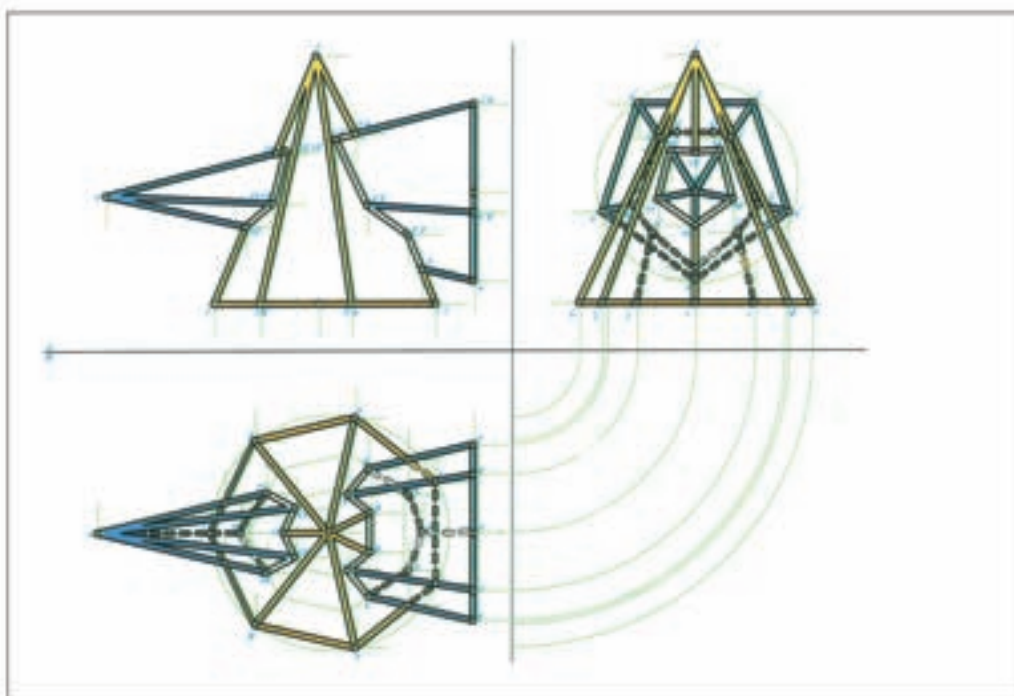


شکل ۸-۱۴

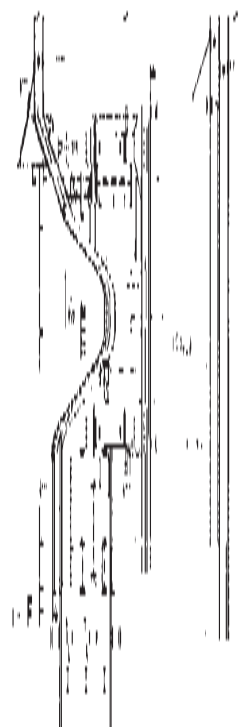
۹- برخورد دو صفحه ABCD (متوازی الاضلاع) را با EFG تعیین کنید و طول حقیقی آن را به دست آورید. مشخصات برای سه گوشه ABCD عبارت است از: $A(70^\circ, 10^\circ, 0^\circ)$, $B(110^\circ, 70^\circ, 60^\circ)$ و $C(170^\circ, 10^\circ, 0^\circ)$ و برای مثلث EFG، $E(30^\circ, 0^\circ, 70^\circ)$ ، $F(110^\circ, 0^\circ, 80^\circ)$ و $G(130^\circ, 70^\circ, 0^\circ)$ با فرض D در سمت راست A.

برای مطالعه

- ۱- بر خط AB ، صفحه‌ای موازی با خط CD رسم کنید و آن را با یک مثلث نشان دهید. جزئیاتی که در دست داریم عبارتند از: $A(0, 10, 20)$ ، $B(20, 50, 50)$ ، $C(30, 20, 20)$ و $D(80, 50, 30)$
- ۲- بر نقطه S صفحه‌ای بگذرانید که با صفحه MNK موازی باشد. نیاز به مشخص کردن این صفحه با یک مثلث با سه گوشه آن هست. جزئیاتی که داریم: $S(0, 60, 40)$ ، $M(90, 10, 10)$ ، $N(40, 60, 50)$ و $K(10, 20, 0)$.
- ۳- دو صفحه ABC و MNK نسبت به هم چگونه‌اند؟ داریم: $A(0, 90, 0)$ ، $B(60, 0, 90)$ ، $C(120, 75, 30)$ ، $M(120, 60, 60)$ ، $N(90, 0, 0)$ و $K(15, 75, 75)$.
- ۴- نقطه B و α' از نمای روبه‌روی خط AB را داریم. اگر این خط با صفحه MNK موازی باشد، نمای افقی خط را کامل کنید. داریم: $M(60, 10, 0)$ ، $N(110, 60, 70)$ ، $K(150, 40, 20)$ ، $B(10, 10, 10)$ و $A(60, 0, 30)$.
- ۵- از نقطه A خطی رسم کنید که با خط زمین و با خط نیمرخ BC برخورد کند. داریم: $A(10, 60, 50)$ ، $B(60, 60, 10)$ و $C(60, 10, 70)$.



قسمتی از اسکلت یک اتوبوس



در یک نقشه آنچه را که دیده می شود دید و آنچه را که دیده نمی شود، ندید می نامند.

دید و ندید

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل از فراگیر انتظار می‌رود:

- ۱- اصول دید و ندید کردن را بیان کند.
- ۲- نقطه، خط و صفحه را دید و ندید کند.

۹-۱- تعریف

دید و ندید کردن به این معنی است که در نقشه، نقاط، خطوط و صفحاتی را که دیده می‌شوند از آن‌ها که دیده نمی‌شوند جدا کنیم و بر طبق قواعد نقشه‌کشی آنها را با خط دید و یا ندید مشخص نماییم.

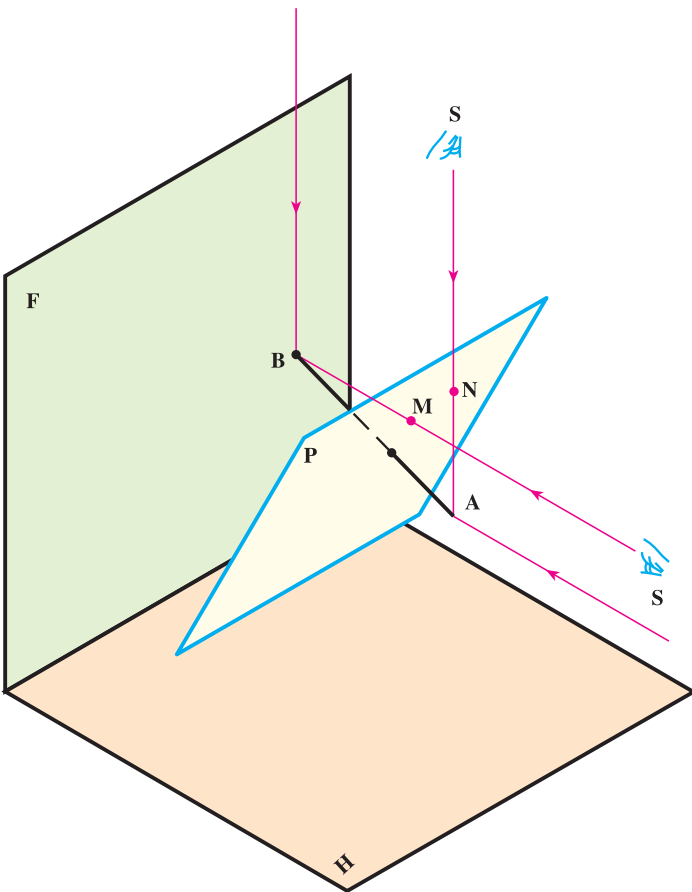
۹-۲- اصول دید و ندید کردن خطوط

به شکل ۹-۱ توجه کنید.

در این شکل ناظر S در دید از جلو به صفحه P و پاره خط AB می‌نگرد. بدیهی است که او نقطه A را می‌بیند، اما نقطه B را نمی‌بیند، زیرا قبل از آن نقطه‌ای مثل M از صفحه، جلوی دید او را می‌گیرد. در دید افقی ناظر نقطه B را می‌بیند، اما نقطه A را نمی‌بیند، چرا؟ با توجه به این نمونه ساده دو قاعده بسیار مهم را در دید و ندید کردن نقاط نتیجه‌گیری می‌کنیم:

اول: در تصویر رو به‌رو نقطه‌ای دیده می‌شود که دارای بعد بیشتر است، مانند M.

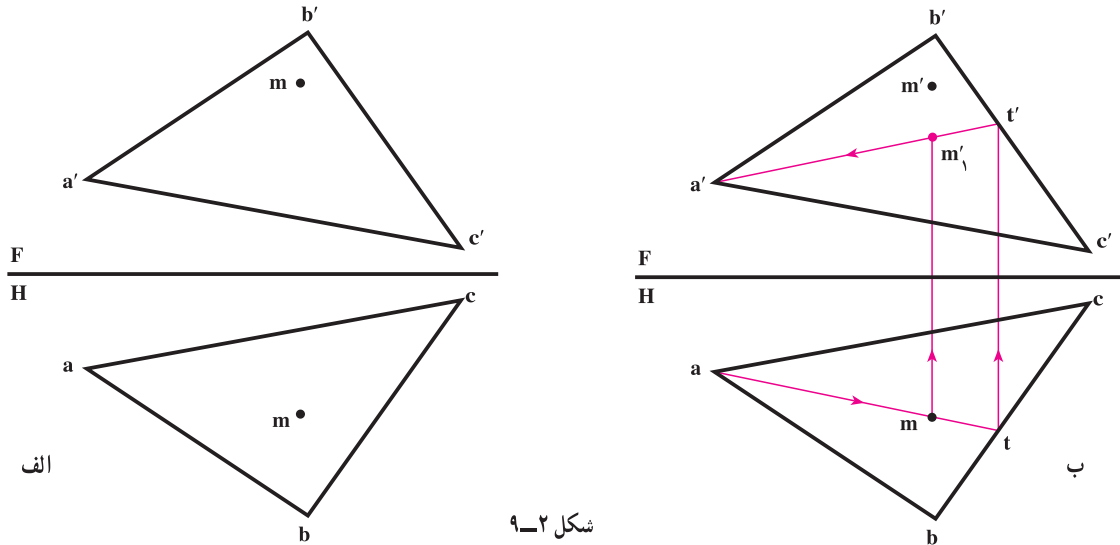
دوم: در تصویر افقی، نقطه‌ای دیده می‌شود که دارای ارتفاع بیشتری است؛ یعنی به چشم ناظر نزدیکتر می‌باشد، مانند نقطه N که به چشم ناظر نزدیکتر است.



شکل ۹-۱

۹-۳- نقطه و صفحه

صفحه $abca'b'c'$ و نقطه M مفروضند، می‌خواهیم تحقیق کنیم که در تصویر روبه‌رو و افقی نقطه M دیده می‌شود یا نه (شکل الف ۹-۲).



شکل ۹-۲

موضوع را در دو بخش بررسی می‌کنیم:

اول - اگر منظور تحقیق آن است که m در تصویر افقی دیده می‌شود یا خیر، کافی است که ابتدا:

- m را نقطه‌ای از صفحه فرض نماییم؛

- با استفاده از یک خط کمکی $m'1$ را مشخص کنیم؛

- اگر $m'1$ دارای ارتفاع کمتری نسبت به m' باشد، طبق قاعده دوم، m در تصویر افقی دیده خواهد شد (شکل ب ۹-۲) که در

اینجا نقطه m در تصویر افقی دید است.

دوم - اگر منظور تحقیق آن است که m' در تصویر روبه‌رو دید است یا نه باید:

- m' را نقطه‌ای از صفحه فرض و براساس آن $m'1$ را تعیین کنیم؛

- اگر $m'1$ دارای بُعد کمتری نسبت به m باشد، m' در تصویر روبه‌رو دید است و در غیر این صورت دید نیست «حل به عهده

هنرجویان است».

۹-۴- خط و صفحه

صفحه $abca'b'c'$ و خط DD' را در نظر می‌گیریم (شکل الف ۹-۳).

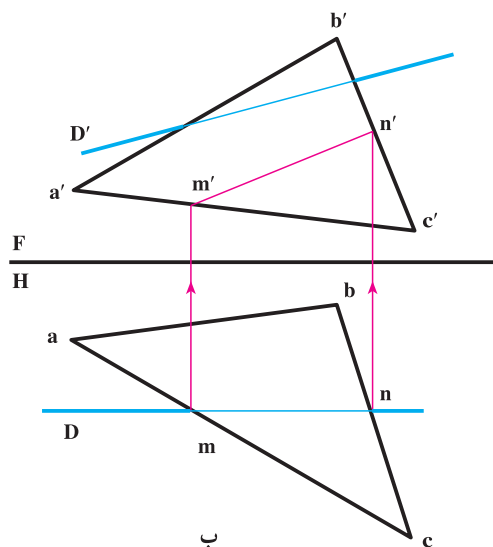
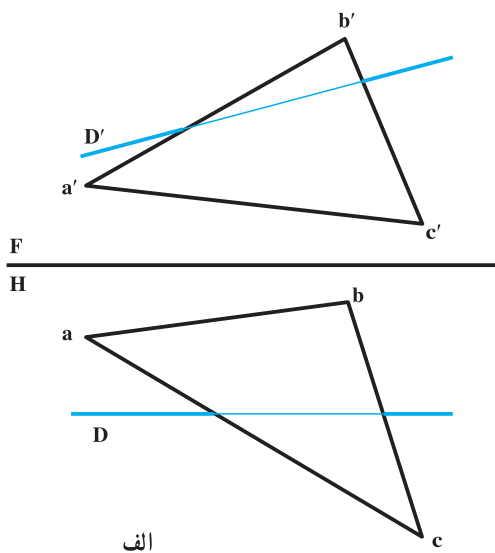
همانگونه که می‌دانید، خط DD' نسبت به صفحه محدود $abca'b'c'$ فقط دو حالت دارد: یا آن را قطع می‌کند و یا اینکه آن

را قطع نمی‌کند.

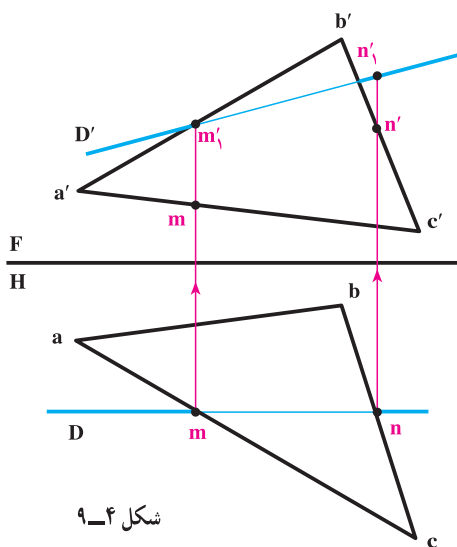
حالت اول: ابتدا با فرض اینکه D در صفحه ABC است، تصویر روبه‌روی خط را معین می‌کنیم (شکل ب ۹-۳).

طبق این شکل خط DD' با محدوده $abca'b'c'$ متقاطع نیست. اکنون لازم است که تحقیق شود که در نقشه D و D' دید

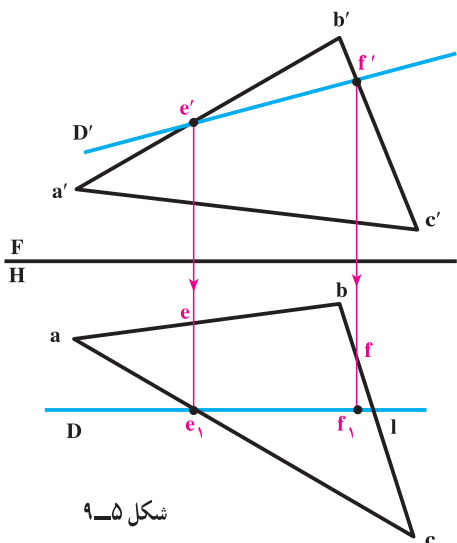
هستند یا نه.



شکل ۹-۳



شکل ۹-۴



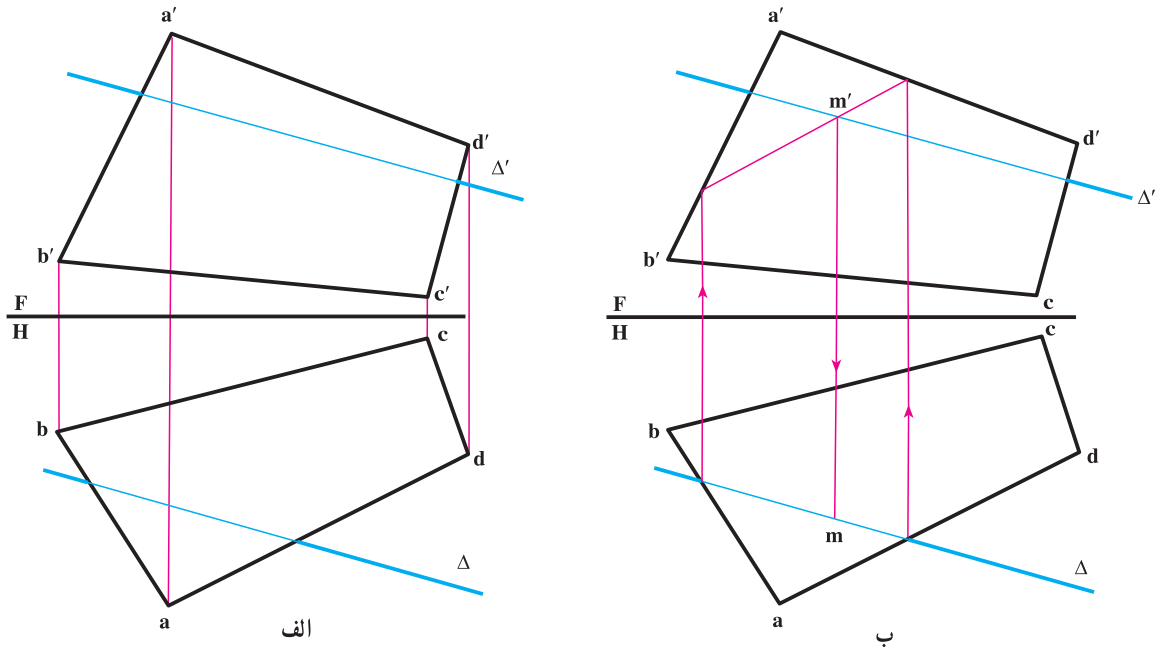
شکل ۹-۵

نخست در مورد تصویر افقی بررسی می‌کنیم.
 - محل برخورد ظاهری خط D را با اضلاع صفحه abc ، با m و n نامگذاری کردیم؛
 - به کمک رابط m' و n' ، تصاویر روبه‌روی m و n را «اگر در صفحه باشند» تعیین می‌کنیم (شکل ۹-۴).

- به همین ترتیب m'_1 و n'_1 مربوط به خط را هم مشخص می‌کنیم؛
 - اگر m'_1 و n'_1 دارای ارتفاع بیشتری نسبت به m' و n' باشند، m و n در تصویر افقی دید خواهند بود. در نتیجه تصویر افقی خط، یعنی D دید است.
 نظیر چنین تحقیقی را در مورد تصویر روبه‌رو انجام می‌دهیم (شکل ۹-۵).

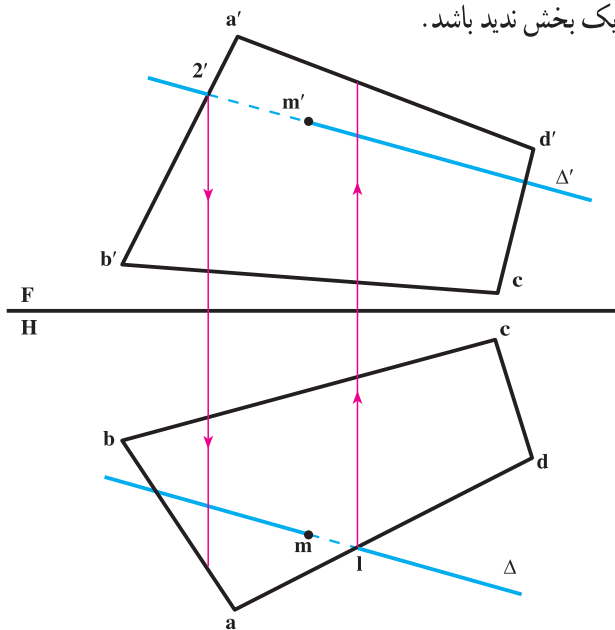
- ابتدا نقاط e' و f' را در نظر می‌گیریم؛
 - e و f و e_1 و f_1 را مشخص می‌کنیم (به کمک رابط)؛

نقاط e_1 و f_1 چون دارای بُعد بیشتری هستند، تصویر روبه‌روی آنها دید است. در نتیجه پاره‌خط $e'f'$ که در تصویر روبه‌رو جلوی صفحه $a'b'c'$ قرار گرفته است، دید خواهد بود که با خط دید ترسیم شده است.
حالت دوم: صفحه $abcd a'b'c'd'$ و خط $\Delta\Delta'$ را در نظر می‌گیریم (شکل الف ۹-۶).



شکل ۹-۶

در این مورد خط $\Delta\Delta'$ با صفحه برخورد دارد و mm' نقطه برخورد می‌باشد. بر اساس شکل ب ۹-۶ این موضوع تأیید شده است. در صورتی که یک بار دیگر به شکل ۹-۱ و با دقت بیشتر نگاه کنید خواهید دید که یک پاره‌خط به هر صورت که با یک صفحه برخورد کند، در تصاویر روبه‌رو و افقی، باید دارای یک قسمت دید و یک بخش ندید باشد. به شکل ۹-۷ نگاه کنید.



شکل ۹-۷

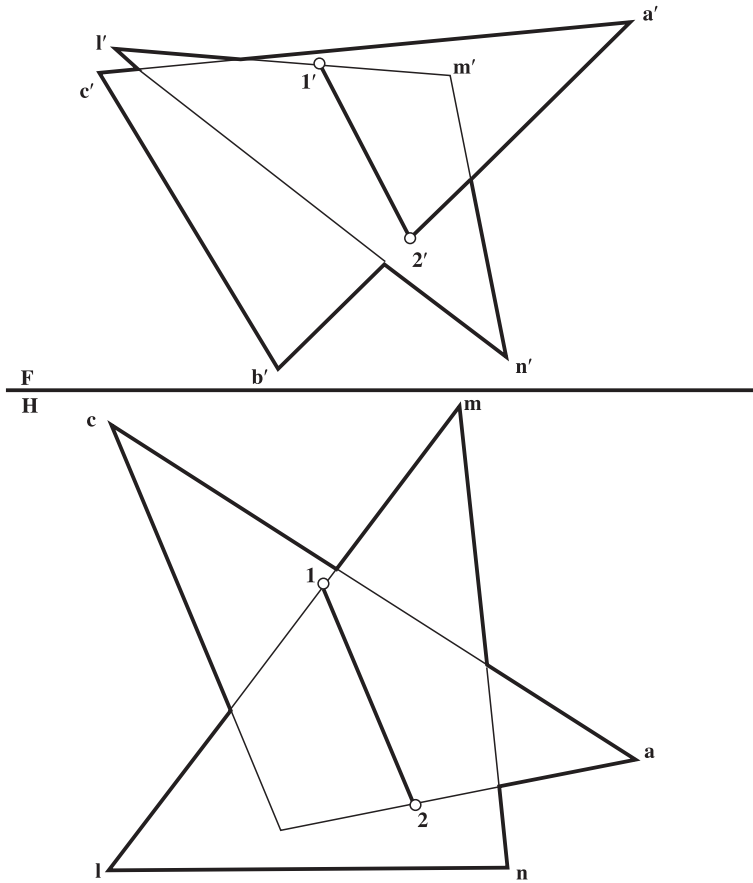
در این شکل یک نقطه از تصویر افقی خط به نام ۱ و یک نقطه از تصویر روبه‌روی خط به نام ۲ را انتخاب و دید یا ندید بودن آنها را تحقیق کرده‌ایم. برای توضیح بیشتر، برای نمونه در مورد نقطه انتخابی ۱ می‌گوییم:

با ترسیم رابط در تصویر روبه‌رو مشخص می‌شود که ارتفاع این نقطه از Δ' بیشتر است یا از $a'd'$.

البته در این شکل چون نقطه واقع بر خط Δ' ارتفاع کمتری دارد، قسمت سمت راست m از خط Δ ندید خواهد بود (که با خط‌چین رسم شده است). «نیمه دیگر خط در تصویر افقی هم دید است. همچنین به کمک رابط از ۲، مشخص می‌شود که نیمه سمت چپ Δ' در تصویر روبه‌رو، ندید است. «چرا؟»

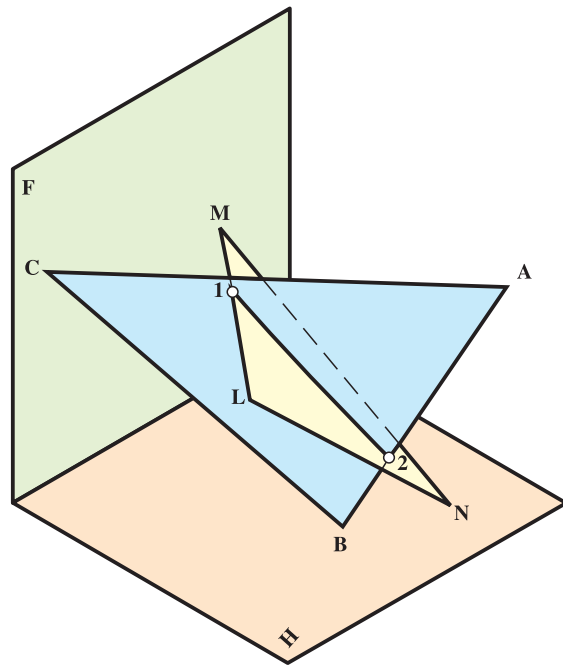
۵-۹- صفحه و صفحه

دو صفحه $abca'b'c'$ و $lmnl'm'n'$ را در نظر می‌گیریم و فصل مشترک آنها را معین می‌کنیم. روشن است که پاره خط $۱'۲'$ ، در هر حالت دیده می‌شود (شکل ۸-۹). آیا می‌توانید بگویید چرا؟



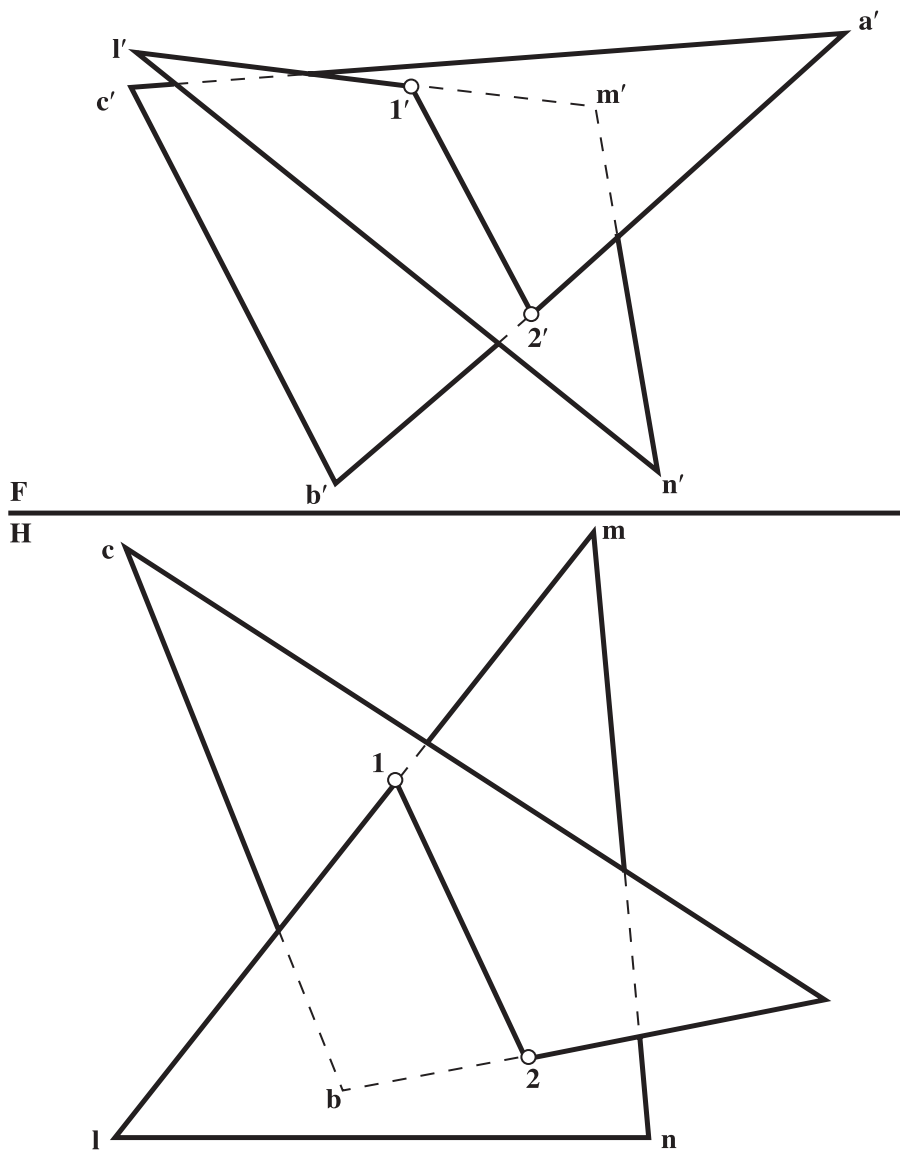
الف

ج



شکل ۸-۹

هدف از بررسی این مسئله، تعیین بخش‌های دید و ندید هر صفحه در محدوده مشترک در تصویر روبه‌رو و افقی است. روش ساده آن است که قسمت‌های دید و ندید خطوط AB ، ML ، MN و AC را تشخیص دهیم و ترسیم کنیم. پس بخش‌های دید و ندید هر خط را به طور جداگانه و در هر دو تصویر معین می‌کنیم که در این صورت، شکل ۹-۹ به دست می‌آید.^۱



شکل ۹-۹

۱- البته می‌توان هر تصویر را با تشخیص وضعیت تنها یک نقطه از آن و یا استدلال دید و ندید کرد. در این مورد اساتید محترم می‌توانند در صورت نیاز توضیح

بیشتری بدهند.

۱- منظور از دید و ندید کردن چیست؟ آیا به جای دید و ندید، اصطلاح دیگری می‌شناسید؟

۲- اصول دید و ندید کردن را بیان کنید (با رسم شکل دستی).

۳- با رسم شکل دستی چگونگی تشخیص دید یا ندید بودن نقطه را شرح دهید. b'

۴- با رسم شکل دستی چگونگی دید و ندید کردن

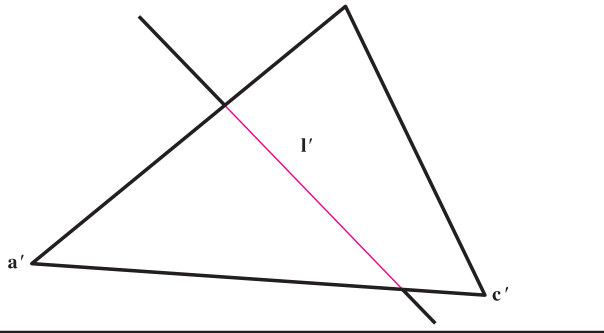
خط و صفحه را بگویید.

۵- شکل ۸-۹ الف را با مقیاس ۱:۲ رسم و

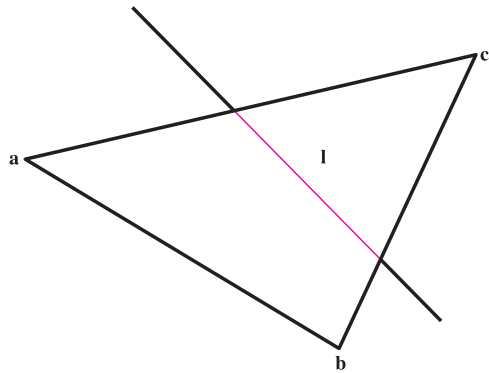
پس از تعیین فصل مشترک، دید و ندید کنید.

۶- در شکل ۱۰-۹ پس از تعیین برخورد خط

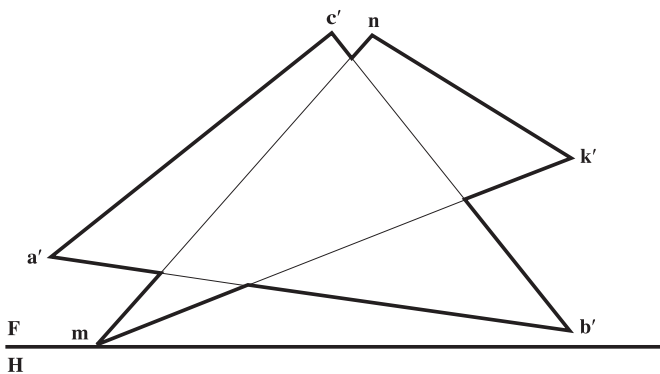
و صفحه، شکل را دید و ندید کنید.



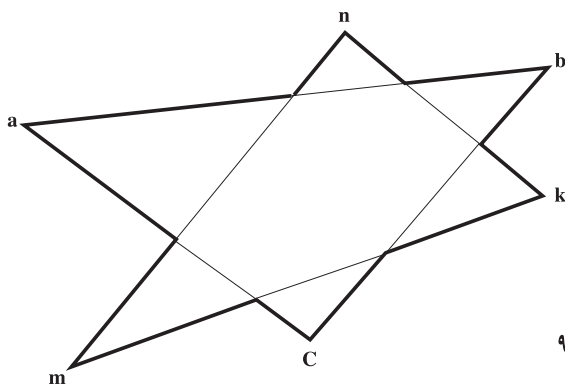
F
H



شکل ۱۰-۹



F
H



شکل ۱۱-۹

۷- در شکل ۱۱-۹ پس از تعیین فصل

مشترک دید و ندید را انجام دهید «مقیاس ترسیم

۱:۲».

۸- دو صفحه‌ی ABCD و MNLK را

که هر دو متوازی‌الاضلاع هستند نمایش دهید به

شرطی که داشته باشیم:

$B(80^\circ \text{ و } 60^\circ \text{ و } 70^\circ)$ و $C(0^\circ \text{ و } 60^\circ \text{ و } 70^\circ)$

$M(70^\circ \text{ و } 0^\circ \text{ و } 0^\circ)$ و $N(30^\circ \text{ و } 0^\circ \text{ و } 0^\circ)$ و $A(10^\circ \text{ و } 10^\circ \text{ و } 10^\circ)$

و $K(0^\circ \text{ و } 70^\circ \text{ و } 80^\circ)$

آنگاه، پس از تعیین برخورد، دید و ندید

کنید.

برای مطالعه

به دست آوردن برخورد و دید و ندید. هر مربع برابر 1°

