

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

حساب دیفرانسیل و انتگرال

دورهٔ پیش‌دانشگاهی

رشتهٔ ریاضی - فیزیک

وزارت آموزش و پرورش سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی

نام کتاب : حساب دیفرانسیل و انتگرال دورهٔ پیش‌دانشگاهی - ۲۹۵/۱

اعضای شورای برنامه‌ریزی : بهمن اصلاح‌پذیر، دکتر علی ایرانمنش، امین باشی‌زاده، ناهید بریری،

دکتر محمدحسن بیژن‌زاده، دکتر محسن جمالی، سید اصغر جوادى، طیبه حمزه‌بیگی،

مینو رحیمی، حسین رودسری، دکتر احمد شاهورانی، سید جعفر شهاب‌زاده،

دکتر وحید عالمیان، سعید قریشی، سمیه السادات میرمعینی و دکتر محمد کاظم نائینی

مؤلفان : محمدحسن بیژن‌زاده، دکتر وحید عالمیان و غلامعلی فرشادی

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع : ادارهٔ کل چاپ و توزیع کتاب‌های درسی

تهران : خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن : ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار : ۰۹۲۶۶۰۸۸۳، کد پستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹،

وبسایت : www.chap.sch.ir

مدیر امور فنی و چاپ : سید احمد حسینی

طراح جلد : مریم کیوان

صفحه‌آرا : شهرزاد قنبری

حروفچین : کبری اجابتی، سیده فاطمه محسنی

مصصح : شاداب ارشادی، معصومه صابری

امور آماده‌سازی خیر : سپیده ملک‌ایزدی

امور فنی رایانه‌ای : حمید ثابت کلاچاهی، پیمان حبیب‌پور

ناشر : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران - تهران - کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروپخش)

تلفن : ۵-۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار : ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی : ۱۳۹-۳۷۵۱۵

چاپخانه : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»

سال انتشار و نوبت چاپ : چاپ اول ۱۳۹۱

حق چاپ محفوظ است.

شابک ۳-۲۰۰۹-۰۵-۹۶۴-۹۷۸-3 978-964-05-2009-3



جوان‌ها و کودکان ما در سرتاسر کشور، در هر مرکزی که اشتغال به تحصیل دارند باید توجّه داشته باشند تحصیل همراه تهذیب و همراه تعهد و همراه اخلاق فاضله‌ای انسانی است که می‌تواند ما را به حیات انسانی برساند و می‌تواند ما را از وابستگی نجات دهد.

امام خمینی (ره)

پیشگفتار

فصل ۰ - یادآوری مفاهیم پایه

- | | |
|----|----------------------------|
| ۱ | ۱-۰ اعداد حقیقی و خط حقیقی |
| ۱ | ۲-۰ اصل‌های جمعی |
| ۳ | ۳-۰ ضرب اعداد حقیقی |
| ۵ | ۴-۰ بسط اعشاری اعداد گویا |
| ۷ | ۵-۰ تقریب اعداد گنگ |
| ۸ | ۶-۰ ترتیب و نامساوی‌ها |
| ۱۲ | ۷-۰ بازه‌های اعداد |
| ۱۲ | ۸-۰ قدر مطلق |
| ۱۵ | |

مسائل

فصل ۱- دنباله‌ها

- | | |
|----|----------------------|
| ۱۶ | ۱-۱ مقدمه |
| ۱۸ | ۲-۱ دنباله‌های عددی |
| ۱۸ | ۳-۱ نمودار دنباله‌ها |
| ۱۹ | ۴-۱ انواع دنباله‌ها |
| ۲۳ | |
| ۲۴ | |

مسائل

- | | |
|----|-----------------------|
| ۲۵ | ۵-۱ همگرایی دنباله‌ها |
| ۲۷ | |

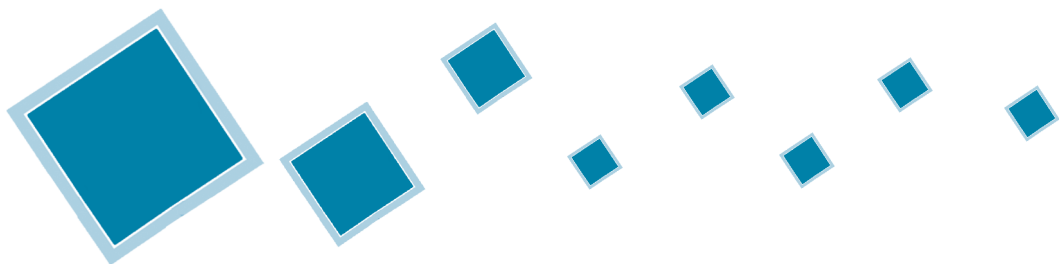
مسائل

- | | |
|----|-------------------------------------|
| ۳۸ | ۶-۱ دنباله‌های واگرا به $\pm\infty$ |
| ۳۸ | ۷-۱ اصل موضوع تمامیت |
| ۴۲ | ۸-۱ یک دنباله مهم |
| ۴۶ | ۹-۱ جبر دنباله‌ها |
| ۵۰ | |

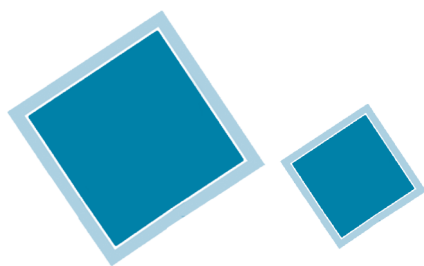
مسائل

فصل ۲ - حد و پیوستگی

- | | |
|----|-----------|
| ۵۲ | ۱-۲ مقدمه |
| ۵۴ | |
| ۵۴ | |



۵۵	۲-۲- خط‌های مماس و حد
۵۶	۲-۳- مفهوم حد - فرایند حد
۶۳	۲-۴- حد بی‌نهایت
۶۸	۲-۵- حد در بی‌نهایت
۷۲	۲-۶- مفهوم ریاضی حد
۷۸	۲-۷- قضیه فشردگی
۸۱	۲-۸- حدهای یک‌طرفه
۸۵	۲-۹- محاسبه یک حد مهم
۹۰	۲-۱۰- پیوستگی تابع
۹۵	۲-۱۱- مفهوم پیوستگی تابع f در یک نقطه بر اساس همگرایی دنباله‌ها
۹۸	۲-۱۲- پیوستگی توابع مثلثاتی
۱۰۳	۲-۱۳- ویژگی‌های مهم تابع‌های پیوسته
۱۰۵	۲-۱۴- پیوستگی تابع وارون یک تابع پیوسته
۱۰۷	۲-۱۵- حدهای نامتناهی (حد بی‌نهایت)
۱۱۰	۲-۱۶- حد توابع کسری و مجانب قائم
۱۱۳	۲-۱۷- حد در بی‌نهایت و مجانب افقی
۱۱۸	۲-۱۸- حد بی‌نهایت در بی‌نهایت و مجانب مایل
۱۲۳	مسائل
۱۲۴	فصل ۳ - مشتق و کاربرد آن
۱۲۴	۳-۱- آهنگ تغییر و خط مماس
۱۲۷	۳-۲- مشتق تابع
۱۲۹	۳-۳- آهنگ تغییر



- ۱۳۴ ۲-۴- تابع مشتق
۱۳۹ ۳-۵- نتایج اولیه مشتق پذیری
۱۴۳ ۳-۶- مشتق توابع مثلثاتی
۱۴۸ ۳-۷- مشتق‌های مرتبه‌های بالاتر
۱۵۴ ۳-۸- قاعده زنجیری
۱۵۷ ۳-۹- مشتق‌گیری ضمنی
۱۶۰ ۳-۱۰- مشتق تابع وارون
۱۶۲ ۳-۱۱- مشتق توابع نمایی و لگاریتمی طبیعی
۱۶۸ ۳-۱۲- مقدارهای اکسترمم سراسری و مسائل بهینه‌سازی
۱۸۳ ۳-۱۳- مشتق دوم و تعقر نمودار تابع
۱۸۷ ۳-۱۴- ماکزیمم و مینیمم موضعی (نسبی)
۱۹۵ ۳-۱۵- آهنگ‌های تغییر وابسته
۲۰۰ ۳-۱۶- رسم نمودار تابع

مسائل

فصل ۴- انتگرال

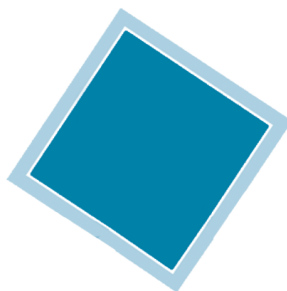
- ۲۱۳
۲۱۴
۲۱۴ ۴-۱- مسأله مساحت
۲۲۲ ۴-۲- مساحت به عنوان حد مجموع
۲۳۰ ۴-۳- انتگرال معین
۲۴۲ ۴-۴- ویژگی‌های انتگرال معین
۲۴۴ ۴-۵- قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

مسائل

مراجع

۲۵۱

۲۵۴



پیشگفتار

واژه ریاضیات که معادل کلمه لاتین (Mathematics) است. در زبان یونانی به مجموعه‌ای از دانستنی‌های عمومی اطلاق می‌شد که کسب آن برای همه افراد تحصیل کرده لازم و ضروری تلقی شده است. افلاطون فیلسوف مشهور یونانی را باور بر این بود که مطالعه ریاضیات عالی‌ترین زمینه را برای تعلیم ذهن فراهم می‌آورد. کاوش‌های باستان‌شناسی نشانگر آن است که حتی در تمدن‌های اولیه انسان‌ها با شمارش و مقدماتی از علم حساب آشنایی داشته و از آن بهره برده‌اند. امروزه با پیشرفت تمدن صنعتی هر شهروند می‌بایست با مقدماتی از ریاضیات مشتمل بر علم حساب و هندسه مقدماتی آشنایی داشته باشد.

در سطحی پیشرفته‌تر دانش‌آموزان و دانشجویان می‌بایست با مباحث دیگری از ریاضیات آشنا شده تا درک بهتری از سایر دروس خود داشته باشند. در این میان، درس حساب دیفرانسیل و انتگرال جایگاه ویژه‌ای دارد. حساب و هندسه ابزارهای مفیدی برای توصیف روابط بین کمیت‌های ایستا و استاتیک می‌باشند؛ لکن درگیر مفاهیمی که بتواند به توصیف تغییرات کمیت‌ها کمک کند نمی‌باشند. حساب دیفرانسیل و انتگرال، در واقع اعمالی هستند که برای سنجش راه‌های مرتبط با تغییرات کمیت‌ها ابداع شده‌اند. حساب دیفرانسیل و انتگرال که تحت نام حسابان نیز از آن یاد می‌شود، ابزارهای لازم را برای مطالعه و بررسی حرکت‌ها به صورت کمی فراهم می‌کنند. از منظر تاریخی نیز، کشف حسابان به دنبال مطالعه رصد حرکت سیاره‌ها توسط فیزیکدانان و منجمان اتفاق افتاده است.

یوهانس کپلر^۱ ریاضیدان آلمانی پژوهش‌ها و مطالعاتی را درخصوص یافته‌های فیزیکدان دانمارکی به نام تیخو براهه^۲ در قرن هفدهم میلادی انجام داد به دنبال این مطالعات، نیوتن و لایبنیتز همزمان توانستند با کشف حساب دیفرانسیل و انتگرال به تبیین حرکت سیارات نایل شوند. در واقع بخش اعظمی از ریاضیات به‌طور مستقیم یا غیرمستقیم در نتیجه مطالعه حرکت اجسام و اجرام سماوی رشد و توسعه یافته است. حرکت جزء ذاتی اشیاء به‌شمار می‌رود.

حسابان مشتمل بر دو عمل می‌باشد که یکی دیفرانسیل‌گیری (مشتق‌گیری) و دیگری

۱- Yohand Kepler

۲- Techo Brahe

انتگرال‌گیری نامیده می‌شوند. همانند جمع و تفریق که مغلوب یکدیگرند. کاری که مشتق‌گیری می‌کند انتگرال‌گیری برمی‌گردد. مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری برحسب عمل جدیدتری به نام حد تعریف می‌شوند. این درحالی است که واضعان این علم، یعنی اسحاق نیوتن^۱ و گتفریدلایبنیتز^۲ هیچ یک از آنان، از مفهوم حد در صورت بندی مشتق و انتگرال استفاده نکرده‌اند. در واقع مفهوم حد، بعد از کشف و ابداع حسابان معرفی و توسعه یافته است. این مفهوم به دنبال نابسامانی‌هایی که در برخی موارد در مسیر استفاده و توسعه حسابان پدید آمد توسط ریاضیدان آلمانی به نام کرال و ایراشتراس صورت‌بندی و تعریف گردید. وقتی و ایراشتراس مفاهیم حسابان را بر پایه مفهوم حد تعریف کرد همه بی‌دقتی‌ها و به هم ریختگی حسابان رخت بریست.

حساب دیفرانسیل و انتگرال تا آنجا مورد نیاز دانش‌آموزان و دانشجویان است که در فهرست دروس دانشگاهی از آن به عنوان ریاضی عمومی و یا ریاضیات پایه یاد می‌کنند: ریاضیاتی که نه تنها در رشته‌های علوم محض نظیر فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی مطالعه می‌شود بلکه تقریباً در همه حیطه‌های علمی دیگر نظیر آمار، رایانه، اقتصاد و امور مالی، کشاورزی و مهندسی پزشکی و همه رشته‌های علوم انسانی به عنوان یک درس پایه و اساسی تحصیل می‌گردد.

در کتاب حاضر مفاهیم حد، مشتق و انتگرال هسته اصلی و شالوده محتوایی این درس را تشکیل می‌دهند. محتوای درس براساس برنامه و محتوای مصوب شورای برنامه‌ریزی ریاضی دوره متوسطه تدوین گردیده است.

می‌دانیم به لحاظ روش‌شناسی و اصول تدریس فعال یادگیری بر آموزش ارجحیت دارد. بنابراین ارائه مطالب و مباحث درس به شیوه حل مسأله و با رویکرد فعالیت محور ساماندهی شده‌اند. آموزش به صورت ضعیف و ناکارآمد آن فرایندی است که به شکل یک طرفه و تحمیلی از سوی معلم به دانش‌آموزان انتقال می‌یابد. در حالی که یادگیری فعالیت محور فرایندی است که در بستر اموری هدایت شده با مشارکت دانش‌آموزان اتفاق می‌افتد و طی آن آنها ضمن کار و فعالیت کلاسی به درک بهتر مفاهیم نایل شده و بانحوه شکل‌گیری و صورت‌بندی موضوع علمی نایل می‌شوند. از همه همکاران و دبیران محترم ریاضی انتظار می‌رود تا سعی وافر نموده تا کلاس درس آنان به کلاسی فعال تبدیل گردد و از این طریق استعدادهای خدادادی دانش‌آموزان رشد و تعالی یافته و در نتیجه درک درستی از ریاضیات پیدا کرده و بتوانند از آن در سایر موارد علمی و کاربردی استفاده بهتری داشته باشند.

تهران — شهریور ۱۳۹۰

مؤلفین

معلمان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیای آنان می توانند نظرات اصلاحی خود را در باره مطالب

این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۳۶۳ ۱۵۸۵۵ - گروه دسی مربوطه یا پیام نگار (Email):

talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر نشر سوره یزیدی و تألیف کتاب های علمی