فصل صفر

یادآوری مفاهیم پایه

جبر اعداد حقیقی

در این فصل به مرور مهمّ‌ترین مطالبی می‌پردازیم در مباحث حساب دیفرانسیل و انتگرال بدان محتاج هستیم، این مطالب مشتمل بر مروری مجدّد بر خواص اعداد حقیقی است که دانش آموزان از دوره دبستان به بعد با آن آشنا شده‌اند، چنانچه شما در مطالعه حسابان و دروس پیش از آن به اندازه کافی با این مباحث آشنا شده باشید، می‌توانید آنها را به سرعت مرور کنید، با این حال باید یادآوری کنیم که تسلط بر این مفاهیم، به‌ویژه خواص ترتیبی اعداد لازمه و پیش‌شرط درک بهتر و مؤثر مفاهیم و مباحث این درس می‌باشد.

در واقع درک علمی این درس، که خود مقدمه دروس عالی‌تر ریاضیات نظیر آنالیز ریاضی است، بر دو مؤلفه مهمّ استوار است، یکی تسلط بر خواص نابرابری‌ها و دیگری آشنا شدن با شیوه‌های این درس که مبتنی بر روش‌های تجزیه و تحلیل و ترکیب منطق‌وار داده و نتایج آنها است.

۰ـ۱ـ اعداد حقیقی و خط حقیقی

می‌دانیم که حسابان بر خواص دستگاه اعداد حقیقی استوار است. منظورمان از دستگاه اعداد حقیقی، مجموعه اعداد حقیقی، اعمال جمع و ضرب این مجموعه و خواص جبری آن است. اعداد حقیقی اعدادی هستند که بتوان آنها را به صورت اعشاری بیان کرد. برای نمونه هریک از اعداد ذیل یک عدد حقیقی است.

$$۵ = ۵/۰۰۰۰\cdots \quad , \quad \frac{-۳}{۴} = -۰/۷۵۰۰۰۰\cdots$$

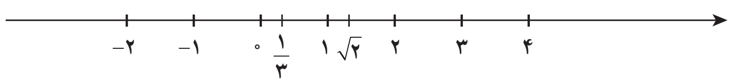
$$\frac{۱}{۳} = ۰/۳۳۳۳\cdots \quad , \quad \sqrt{۲} = ۱/۴۱۴۲\cdots \quad \pi = ۳/۱۴۱۵۹\cdots$$

در هر حالت، منظور از سه نقطه «...» آن است که دنباله ارقام همیشه ادامه دارد. البته وقتی دنباله ارقام تکراری و از جایی به بعد همیشه برابر صفر باشند از نوشتن آنها صرف نظر می‌گردد.

$$۵ = ۵ \qquad , \qquad \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵$$

امّا برای سه عدد بعدی چنین نیست. تفاوت اساسی در باب این اعداد وجود دارد، برای سه‌تای اولی الگوی تکرار ارقام بدیهی و روشن است و دنباله ارقام بر ما معلوم می‌باشد، لیکن برای $\sqrt{۲}$ و π هیچ الگوی شناخته شده‌ای برای روند تکرار ارقام وجود ندارد. سه عدد نخست را گویا و دوتای آخر یعنی $\sqrt{۲}$ و π را گنگ یا اصم می‌نامیم. بنابراین اعداد حقیقی به دو دسته بزرگ یعنی اعداد گویا و اعداد گنگ تقسیم می‌شوند. نکته جالب‌تر آن است که هردو دسته به گونه‌ای بسیار فشرده و در کنار هم باهم به نوعی تنیده شده‌اند.

به زبان هندسی، اعداد حقیقی را می‌توانیم به‌صورت نقاط یک خط مستقیم نشان دهیم. چنین خط مستقیمی را خط حقیقی یا محور حقیقی می‌نامیم. هر عدد حقیقی، چه گویا و چه گنگ، متناظر نقطه‌ای بر این خط است و برعکس هر نقطه این خط نظیر یک و تنها یک عدد حقیقی است. (شکل زیر)



خواص اعداد حقیقی را می‌توان در سه رده دسته‌بندی کرد، (۱) خواص جبری (۲) خواص ترتیب، (۳) خواص مربوط به پیوستاری اعداد حقیقی.

شما در طول تحصیلات خود، حتی از دوره ابتدایی با خواص جبری اعداد حقیقی آشنایی دارید. امّا باید گفت که این آشنایی شما بیشتر جنبه تجربی داشته تا صورت ریاضی! چرا؟

برای نمونه، شما می‌دانید که مثلاً جمع اعداد خاصیت جابه‌جایی دارد.

$$۲ + ۳ = ۳ + ۲$$

$$-۱ + ۴ = ۴ + (-۱) = ۴ - ۱$$

و یا آنکه

$$۲ + (\sqrt{۳} + \frac{۱}{۲}) = (۲ + \sqrt{۳}) + \frac{۱}{۲}$$

امّا برقراری این‌گونه تساوی‌ها از راه تجربه حاصل شده است. در واقع تساوی‌های موردی مانند تساوی‌های فوق نیاز به برهان و استدلال نداشته است. امّا وقتی این‌گونه خواص اعداد را بخواهیم در قالب یک کلیّت و به شکل یک حکم کلی ریاضی بیان کنیم دیگر با تجربه درستی آنها بر ما معلوم نخواهد شد. چرا؟

بهتر است صورت کلی چنین تساوی‌هایی را بیان داریم. به‌ناچار محتاج استفاده از حروف خواهیم شد.

همواره $a + b = b + a$

یا آنکه بگوییم

برای هر دو عدد a و b ، $a + b = b + a$

به زبان عادی منظورمان این است که برای **هر دو عدد حقیقی a و b** ، حاصل جمع a با b با حاصل‌جمع b با a برابر است. به عبارت «برای هر دو عدد حقیقی a و b» توجه کنید. اگر ما برای یکصد زوج از اعداد حقیقی یا یک میلیون زوج از اعداد a و b، حاصل دوطرف را حساب کرده و متوجه درستی تساوی‌ها شویم، **درستی حکم کلی را محقق نساخته‌ایم**. دلیل آن نامتناهی بودن و یا به اصطلاح عامیانه بی‌پایان بودن مجموعه اعداد حقیقی است. یکصد سال، یک میلیون سال و یا چند میلیارد سال که وقت صرف کنیم و تجربه کنیم ادعایمان محقق نمی‌شود زیرا مجموعه اعداد حقیقی بی‌پایان و نامتناهی است. زیاد ناراحت نباشید! ظاهراً راه حل ساده‌ای وجود دارد و آن وضع تئوری‌وار مجموعه اعداد حقیقی به صورت سامان‌یافته می‌باشد که آن را دستگاه اعداد حقیقی می‌نامیم. این راه حل ساده از این قرار است که وقتی برای درستی یک حکم نتوانیم دلیلی مستدل و منطقی اقامه کنیم و یا آنکه به عللی اصولاً نخواهیم دلیلی بیاوریم، آن حکم را تحت عنوان **اصل موضوع** (اصل) مطرح می‌کنیم. بنابراین اصل موضوع حکم یا گزاره‌ای است که آن را بدون دلیل و برهان **می‌پذیریم**. البته شواهد تجربی برای بسیاری از موارد الهام‌بخش ریاضیدانان و واضح‌کننده تئوری‌ها در انتخاب اصل‌های آن تئوری است. خلاصه کلام آنکه شما تاکنون با خواص جبری اعداد حقیقی به صورت تجربی آشنا شده‌اید، چنین خواصی مدعی‌اند که اعداد حقیقی را می‌توان باهم جمع کرد و حاصل عددی حقیقی خواهد بود. اعداد حقیقی را می‌توان باهم ضرب کرد و حاصل عددی حقیقی است. همچنین قواعد معمول حساب، از جمله دو قاعده فوق‌الاشاره، برقرارند. اینک برخی از این احکام را در قالب اصل موضوع (اصل) بیان می‌داریم.

مجموعه اعداد حقیقی را در مابقی این کتاب به R نشان می‌دهیم.

۰ـ۲ـ اصل‌های جمعی

(ج ۱) در R یک عمل دوتایی وجود دارد که آن را جمع می‌نامیم. این عمل که در واقع یک تابع است با نماد + نشان داده می‌شود. مقدار این تابع را به ازای زوج مرتب (a , b) به $a + b$ نشان می‌دهیم که در آن a , b و $a + b$ اعداد حقیقی‌اند. لذا حاصل عمل جمع بر هر زوج از اعداد حقیقی خود یک

عدد حقیقی است.

(ج۲) برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم $x + y = y + x$

این اصل را خاصیت جابه‌جایی جمع می‌نامیم.

(ج۳) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم : $(x + y) + z = x + (y + z)$

این اصل را خاصیت شرکت‌پذیری R می‌نامیم.

(ج ۴) وجود عضو همانی جمع، R شامل عددی است به نام 0 (صفر)، به‌طوری که به ازای هر عدد حقیقی x، $x + 0 = x$

(ج ۵) وجود عضو قرینه، به ازای هر عدد حقیقی x، عضوی از R مانند y وجود دارد به‌طوری که $x + y = 0$

با استفاده از این پنج اصل، می‌توانیم خواص دیگری از مجموعه اعداد حقیقی را به‌دست آوریم، اکنون در واقع ما با یک دستگاه جبری سروکار داریم، یعنی **مجموعه اعداد حقیقی R به انضمام یک عمل دوتایی که در اصل‌های فوق صدق می‌کند**. این دستگاه جبری را همچنانکه قبلاً نیز گفته‌ایم **دستگاه اعداد حقیقی** می‌نامیم اینک به عنوان نمونه برخی نتایج منطقی را در باب R اثبات می‌کنیم.

مثال: ثابت کنید عضو صفر از R منحصر به فرد است.

حل: فرض کنیم O_1 و O_2 هردو نقش صفر یعنی عضو همانی جمع R را داشته باشند در این صورت

$O_1 = O_1 + O_2$ (با توجه به همانی بودن O_2)

$= O_2 + O_1$ (با توجه به خاصیت جابه‌جایی)

$= O_2$ (با توجه به همانی بودن O_1)

شما نیز می‌توانید برخی از خواص اعداد حقیقی را ثابت کنید.

مثال: ثابت کنید عضو قرینه هر عدد حقیقی منحصر به فرد است.

برهان: فرض کنیم y_1 و y_2 هردو قرینه عدد حقیقی x باشند. در این صورت

$y_2 = y_2 + 0$ (با توجه به ج ۴)

$= y_2 + (x + y_1)$ (با توجه به ج ۵)

$= (y_2 + x) + y_1$ (با توجه به ج ۳)

$= 0 + y_1$ (با توجه به ج ۵)

$= y_1$ (با توجه به ج ۲ و ج ۳)

معمولاً قرینه عدد حقیقی x را با نماد $-x$ و همچنین حاصل جمع $x + (-y)$ را به شکل ساده $x - y$ می‌نویسیم و آن را **تفاضل** x و y می‌نامیم.

به عنوان مثال دیگری از خواص اعداد حقیقی به مثال زیر توجه می‌کنیم.

مثال: برای هردو عدد حقیقی x و y ثابت کنید . $-(x + y) = -x - y$

حل: منظور از $-(x + y)$ قرینه $x + y$ است. پس باید نشان دهیم که :

$$(x + y) + (-x -y) = 0$$

داریم :

$$x + y + (-x -y) = (y + x) + (-x -y) \quad \text{(جابه‌جایی جمع)}$$

$$= y + [(x - x) -y] \quad \text{(شرکت‌پذیری)}$$

$$= y + (0 - y)$$

$$= y + (-y)$$

$$= 0$$

تمرین در کلاس

۱ــ ثابت کنید برای هر عدد حقیقی $\mathbf{x}$ ، $-(-\mathbf{x}) = \mathbf{x}$

۲ــ برای هر سه عدد حقیقی $\mathbf{x, y, z}$ اگر $\mathbf{x + z = y + z}$ آنگاه $\mathbf{x = y}$ (قانون حذف)

۳ــ۰ ضرب اعداد حقیقی

از تجربیاتمان می‌دانیم که ضرب دو عدد حقیقی، عددی حقیقی است. این ویژگی را به عنوان یک **اصل** می‌پذیریم، به علاوه برخی از ویژگی‌های دیگر اعداد حقیقی را در رابطه با عمل ضرب نیز به عنوان اصل می‌پذیریم از آن جمله

برای هر دو عدد حقیقی x و y، $xy = yx$

برای هر سه عدد حقیقی x و y و z ، $x(yz) = (xy)z$

عددی به نام یک (با نِماد ۱) وجود دارد به قسمی که $0 \neq 1$ و برای هر عدد حقیقی x، برای هر عدد حقیقی غیرصفر مانند x، عددی حقیقی مانند y وجود دارد به قسمی که y را وارون x می‌نامیم.

$$xy = 1$$

در رابطه با عمل جمع، خاصیت زیر، به عنوان خاصیت توزیع‌پذیری ضرب روی جمع برقرار است

$$(*) \quad x(y + z) = xy + xz$$

البته منظورمان حکم کلی است وگرنه در باب اعداد خاص، بارها درستی (*) را تجربه کرده‌ایم. به‌طور کلی وقتی حکمی مانند (*) برحسب حروف بیان می‌شود منظور حکم کلی است. در واقع (*) صورت ساده‌تر حکم زیر است.

برای هر سه عدد حقیقی x و y و z، $x(y+z)=xy+xz$

اکنون، با داشتن این احکام می‌توانیم برخی دیگر از ویژگی‌های ضرب R را ثابت کنیم.

مثال: وارون هر عدد حقیقی (غیرصفر) منحصر به فرد است.

حل: فرض کنیم y_1 و y_2 هر دو وارون x باشند، پس

$$xy_1 = 1 \quad , \quad xy_2 = 1$$

می‌نویسیم:

$$y_1 = y_1 \times 1 = y_1\,(xy_2) = (y_1x)y_2 = (xy_1)y_2 = 1y_2 = y_2$$

بنابراین حق داریم وارون x را با نِماد x^{-1} نشان دهیم، گاهی وارون x را با $\frac{1}{x}$ نیز نشان می‌دهیم.

مثال: وارون وارون x برابر x است، به زبان نِمادی

$$(x^{-1})^{-1} = x$$

حل: باید نشان دهیم $(x^{-1})x = 1$ تا طبق تعریف، x نقش وارون x^{-1} را داشته باشد، امّا این تساوی خود طبق تعریف وارون برقرار است.

قرارداد: حاصل‌ضرب $x.\frac{1}{y}$ را به شکل ساده‌تر $\frac{x}{y}$ می‌نویسیم، $\frac{x}{y}$ در واقع حاصل تقسیم x بر y می‌باشد.

تذکر مهمّ: باید توجه داشت که عدد 0 وارون ندارد، بنابراین نوشتن عبارت‌هایی نظیر $\frac{1}{0}$، $\frac{2}{0}$، یا $\frac{x}{0}$ و **کلاً کسرهایی با مخرج صفر** بی‌معنی بوده و از آن باید مؤکداً احتراز گردد. تفسیرهای غلطی که درخصوص این‌گونه عبارت‌ها از قبیل اینکه $\frac{1}{0}=\infty$ می‌شود ناشی از عدم توجه کسانی است که با فرایند مفهوم‌سازی و صورت‌بندی تئوری ریاضی آشنایی کافی ندارند.

البته در بخش‌های بعد خواهید دید که مثلاً $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$ (به معنی حدی)، امّا باید گفت که این تساوی تنها به مفهوم حدی برقرار است تا آنکه در حدگیری $\frac{1}{x^2}$ را با $\frac{1}{0}$ جایگزین کرده و از این غلط فاحش استفاده کنیم و آن را برابر ∞ قلمداد نماییم!

تمرین در کلاس

۱ــ ثابت کنید برای هر سه عدد حقیقی x , y و z ، $x(y-z)=xy-xz$

۲ــ ثابت کنید هرگاه $xy=0$ آنگاه $x=0$ یا $y=0$ و عکس این حکم برقرار است.

۳ــ برای هر دو عدد حقیقی x و y

الف) $x(-y)=(-x)y=-(xy)$

ب) $(-x)(-y)=xy$

۰ـ۴ـ بسط اعشاری اعداد گویا

بسط اعشاری یک عدد گویا، یک عدد اعشاری پایان‌پذیر نظیر

$$\frac{۳}{۲}=۱/۵ \quad , \quad \frac{۳}{۴}=۰/۷۵$$

و یا یک بسط اعشاری پایان‌ناپذیر متناوب ساده یا مرکب است نظیر

بسط اعشاری متناوب ساده $\frac{۲}{۳}=۰/۶۶۶...=۰/\overline{۶}$

بسط اعشاری متناوب مرکب $\frac{۵}{۶}=۰/۸۳۳۳...=۰/۸\overline{۳}$

در بسط اعشاری متناوب ساده و یا مرکب، دسته ارقامی که مرتب تکرار می‌شوند را دوره گردش عدد نامند. و بالای ارقامی که دوره گردش‌اند خط کشیده شده است و تعدادی رقم که بین دوره گردش و ممیز قرار دارند ارقام غیرگردش نامیده می‌شوند.

$$\frac{۷}{۱۳}=۰/\overline{۵۳۸۴۶۱} \quad , \quad \frac{۱}{۵۶}=۰/۰۰۱۷\overline{۸۵۱۴۲}$$

نتیجه : اگر یک بسط اعشاری متناوب (ساده یا مرکب) داشته باشید، می‌توانید از فرمول زیر، کسر یا عدد گویای مساوی آن را به‌دست آورید.

فرض کنید $a_۱a_۲...a_m$ ارقام غیرگردش و $b_۱b_۲...b_n$ ارقام دورۀ گردش عدد باشند، در این صورت

$$۰/a_۱a_۱\cdots a_m\overline{b_۱b_۲\cdots b_n}=\frac{a_۱a_۲\cdots a_m b_۱b_۲\cdots b_n-a_۱a_۲\cdots a_m}{\underbrace{۹۹\cdots۹}_{\text{n تا نه}}\underbrace{۰۰\cdots۰}_{\text{m تا صفر}}} \qquad (۱)$$

مثال‌های زیر، نحوه استفاده از فرمول (۱) را نشان می‌دهند.

$$۰/\overline{۶}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳} \qquad ۰/۰۱\overline{۷۸۵}=\frac{۱۷۸۵-۱}{۹۹۹۰۰}=\frac{۴۴۶}{۲۴۹۷۵}$$

هر عدد حقیقی که بسط اعشاری آن، پایان‌ناپذیر ولی متناوب نباشد، گنگ یا اصم نامیده می‌شود. بنابراین اعداد گنگ، اعدادی هستند که بسط اعشاری آنها بی‌پایان است ولی متناوب نیستند مانند :

$$\sqrt{۲}=۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲...$$

عدد پی $\pi=۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳...$

عدد نپر $e=۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴...$

قضیه ۱: اگر a عددی گویا و غیرصفر باشد و b عددی گنگ، اعداد $a\pm b$ و ab و $\frac{a}{b}$ و $\frac{b}{a}$ گنگ هستند.

همان‌طور که می‌دانید در مجموعه اعداد گویا، هر دو عدد گویا را باهم جمع یا تفریق و یا درهم ضرب کنیم حاصل عددی است گویا (اصطلاحاً گوییم مجموعه اعداد گویا، نسبت به عمل جمع و ضرب و تفریق بسته است) و امّا مجموعهٔ اعداد گنگ نسبت به هیچ‌یک از اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم بسته نیست زیرا :

$\sqrt{۲}$ عددی گنگ است و بنابر قضیه ۱، اعداد $۳-\sqrt{۲}$ و $۳+\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۲}$ و $۳-\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}$ گنگ هستند ولی

$$(۳+\sqrt{۲})+(۳-\sqrt{۲})=۶\in Q$$

$$(۳+\sqrt{۲})(۳-\sqrt{۲})=۷\in Q$$

$$\frac{\sqrt{۱۸}}{\sqrt{۲}}=۳\in Q$$

ابوریحان بیرونی

اصم کَر بُوَد زیرا جواب ندهد، جوینده را الّا به تقریب مثل $\sqrt{۱۰}$ که برای آن هرگز نتوان عددی یافت که اگر آن را در خود زنی ۱۰ بُوَد.

۰ـ ۵ ـ تقریب اعداد گنگ

می‌دانیم که بسط اعشاری هر عدد گنگ به صورت کسری اعشاری با ارقام نامتناهی و بی‌پایان است که در آن این ارقام طبق هیچ ضابطه و نظم معینی رخ می‌دهند. به لحاظ تاریخی $\sqrt{۲}$ و π (عدد ارشمیدس) مشهورترین اعداد گنگ‌اند. $\sqrt{۲}$ در رابطه با محاسبه طول قطر یک مربع به ضلع واحد

پدیدار گشت و π توسط ارشمیدس به عنوان ثابت دایره کشف گردید. همه دوایر موجود در عالم، چه کوچک و چه بزرگ، درگیر عدد π هستند، بدین معنی که نسبت محیط هر دایره بر طول قطر آن عددی است که به π نشان داده می‌شود. قرار دادن حرف π برای چنین عددی خود مبین این واقعیت است که این عدد گویا نیست. در طول تاریخ ریاضی محاسبه جزء اعشاری π، یعنی شناخت ارقام اعشاری آن، یکی از جذاب‌ترین فعالیت‌های ریاضی به‌شمار رفته است، علت این امر را می‌توانیم درچند جهت مطرح کنیم. مثلاً استفاده از π در محاسبه مساحت و محیط دایره.

داشتن تقریبات بهتر π برای استفاده در محاسبات دقیق‌تر نجومی است، به‌هر حال ارقام اعشاری π بی‌هیچ نظمی ادامه دارد و بشر طالب آن است که تا آنجا که برایش مقدور است، این ارقام را شناسایی کند.

در ریاضیات عالی به‌صورتی تئوریک ثابت می‌شود که π گنگ است.

محاسبات ارقام اعشاری π طی چندین قرن گذشته مؤید این نتیجه مهم است و لذا می‌توان ادعا کرد که قدرت تئوری‌پردازی ریاضی مبتنی بر پیش‌بینی پدیده‌های ریاضی با تجربیات پیچیده محاسباتی سازگاری تام و تمام دارد و این یکی از زیبایی‌های علوم ریاضی است. ذیلاً به اختصار محاسبه و تولید ارقام اعشاری π را به لحاظ تاریخی **جهت آشنایی** مرور می‌کنیم : ارشمیدس، که در قرن سوم قبل از میلاد می‌زیسته، نشان داد که :

$$\frac{۲۲۳}{۷} < \pi < \frac{۲۲}{۷}$$

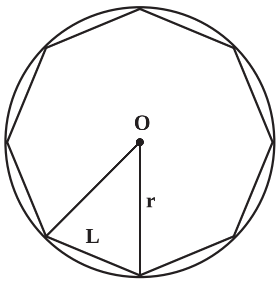
وی این امر را با استفاده از ۹۶ ضلعی‌های منتظم ثابت کرد که درون دایره به شعاع واحد محاط می‌شدند.

سپس پتولمی[1] در قرن سوّم بعد از میلاد، با استفاده از ۳۶۰ضلعی منتظم مقدار ۳/۱۴۱۶۶۶... را برای π به‌دست آورد که تا سه رقم اعشار صحیح می‌باشد در سال ۲۶۳ بعد از میلاد لیوهوی[2] با استفاده از ۹۶ ضلعی منتظم و یک ۱۹۲ ضلعی منتظم و محاسبه میانگین مقادیر به‌دست آمده عدد ۳/۱۴۱۸۶۴ را برای π به‌دست آورد که خطای این تقریب کمتر از ۰/۰۱ می‌باشد.

۱ـ Ptolemy

۲ ـ Liu Hui

غیاث‌الدین جمشید کاشانی



کاشانی ریاضیدان مسلمان ایرانی، به‌جای محاسبه π به محاسبه ۲π پرداخته است. روش کاشانی درج چندضلعی‌های منتظم و محاسبه تقریبی محیط آنها و سپس استخراج نسبت این محیط به شعاع دایره مربوطه بوده است برای مثال هرگاه یک هشت‌ضلعی منتظم را درون دایره به شعاع r محاط کنیم و طول ضلع این هشت‌ضلعی را L بنامیم، نسبت مربوطه برابر $۲\pi \approx \frac{۸L}{r}$ خواهد بود.

کاشانی ارقام ۲π را تا ۱۶ رقم دقیقاً محاسبه کرده است و این محاسبه بسیار بسیار دقیقتر از محاسبه ارقام π بوده است که قبل از او به‌دست آمده است. دقت محاسبات کاشانی به‌گونه‌ای است که تا ۲۰۰ سال بعد از او توسط هیچ‌کس از او پیشی نگرفته بود و فقط لودوف[۱] توانست ۲۰۰ سال بعد از او عدد π را تا ۲۰۰ رقم اعشار محاسبه کند. ماکزیمم خطای کاشانی در محاسبه کمتر از $\frac{۱}{۶۰^{۹}}$ است، به عبارت دیگر

حداکثر خطای محاسبه $۲\pi < ۹/۹۲\times ۱۰^{-۱۷} < ۱۰^{-۶۶}$

و این بدان معنی است که کاشانی عدد ۲π را تا ۱۶ رقم اعشار بعد از ممیز دقیقاً به دست آورده است که با محاسبات رایانه‌های امروزی تطابق دارد!

کاشانی این مقدار دقت را با محاسبه محیط یک $۳\times۲\times۱۰^{۱۸}$ ضلعی منتظم به‌دست آورده است و در دوره بعد، که با پیشرفت حسابان پیشرفته (آنالیز ریاضی) اتفاق افتاد محاسبه ارقام اعشاری π با استفاده از فرمول‌های آنالیزی میسر گردید، همچنین لئونارداویلر فرمول $\pi = ۲\tan^{-۱}(\frac{۱}{۷}) + ۸\tan^{-۱}(\frac{۳}{۷۹})$ را به‌دست آورد.

روش‌های محاسبه π با استفاده از رایانه از سال ۱۹۶۱ شروع گردید. این روش‌ها مؤثرترین و کارآمدترین روش‌های محاسبه π را با استفاده از تئوری‌های ریاضی و حساب‌گرهای فوق مدرن عرضه می‌کنند.

۱ــ Ludolph van culen

در اولین پروژه تحقیقاتی تحت نام پروژه گوتنبرگ اعشار π را تا یک میلیون رقم محاسبه کردند. سپس یاساما کانادا از دانشگاه توکیو توانست تعداد ۱۲۴۱۱۰۰۰۰۰۰۰۰ رقم اعشار از π را با دقت به‌دست آورد. این محاسبه در سال ۲۰۰۲ توسط یک سوپر رایانه هیتاچی، که ۲ تریلیون عمل را در هر ثانیه انجام می‌داد، صورت پذیرفت. در دسامبر ۲۰۰۹ یک سوپر کامپیوتر ژاپنی به نام T2kopen Supercomputer ادعا کرده است که عدد π را تا ۲۶۰۰ میلیارد رقم اعشار طی ۷۳ ساعت و ۳۶ دقیقه به‌دست آورده است. باز هم در این ارقام هیچ‌گونه نظم و قاعده‌ای حاکم نیست[1].

این نکته را باید متذکر شویم که تا هر تعداد از ارقام π که محاسبه شود و بقیه ارقام را نادیده بگیریم در واقع با تقریبی از π به شکل یک عدد گویا دست یافته‌ایم. البته با مقدار واقعی π به شکل همه ارقام اعشاری آن هرگز کار نخواهیم کرد که این امری غیرممکن است. این رویه برای کار عملی با سایر اعداد گنگ نیز مرسوم است. در واقع با تقریبات اعداد گنگ در عمل کار خواهد شد.

کاشانی معتقد بود که مقدار واقعی عدد π را فقط خدا می‌داند. در واقع کاشانی با شهودی الهام‌گونه دریافته بود که π عددی گنگ است. امّا اثبات گنگ بودن π قرن‌ها بعد انجام گرفت[2].

غیاث‌الدین جمشید کاشانی، ریاضیدان و منجم ایرانی

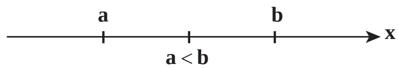
۱ ــ در مدّت نگارش این کتاب ارقام اعشاری π با استفاده از سوپر رایانه‌ها تا بیش از ۳۰۰۰ میلیارد رقم توسط محققین ژاپنی محاسبه شده است.

۲ ــ داستان محاسبه ارقام π را صرفاً جهت آشنایی شما آورده‌ایم تا متوجه شوید که چگونه محاسبات تکنولوژی پیشرفته با نظریه‌های ریاضی همخوانی دارد و این یکی از قوّت‌های بارز نظریه‌پردازی ریاضیات است که در حالی با استفاده از تئوری‌های جبری و آنالیز ثابت می‌کنند π گنگ است، محاسبه ارقام آن با استفاده از سوپر رایانه‌ها نیز مؤید این حقیقت ریاضی است.

۰ـ۶ـ ترتیب و نامساوی‌ها

یکی از خواص مهمّ اعداد حقیقی مرتب بودن آنها است.

تعریف ترتیب خط حقیقی : هرگاه a و b اعداد حقیقی باشند، آنگاه a کوچکتر از b است اگر $b-a$ مثبت باشد. این ترتیب را با نامساوی $a<b$ (یا $b>a$) نشان می‌دهیم. علامت $a\le b$ یعنی a کوچکتر یا مساوی b



عبارت b بزرگتر از a است. هم‌ارز a کوچکتر از b است. خواص زیرا اغلب در نامساوی‌ها به کار می‌روند. اگر $<$ را با $\le$ و $>$ را با $\ge$ عوض کنیم، خواص مشابهی به‌دست می‌آیند.

خواص نامساوی‌ها

۱) هرگاه $a<b$ و $b<c$، آنگاه $a<c$.

۲) هرگاه $a<b$ و $c<d$ ، آنگاه $a+c<b+d$.

۳) هرگاه $a<b$ و c عددی حقیقی باشد، آنگاه $a+c<b+c$.

۴) هرگاه $a<b$ و $c>0$، آنگاه $ac<bc$.

۵) هرگاه $a<b$ و $c<0$، آنگاه $ac>bc$.

۶) (اگر a و b مثبت باشند) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b} \Leftrightarrow a<b$. [$\Leftrightarrow$ به معنی هم‌ارزی است.]

۷) (اگر a و b مثبت باشند) $a^2<b^2 \Leftrightarrow a<b$.

تبصره: توجه کنید که نامساوی‌ها با ضرب در عددی منفی تغییر جهت می‌دهد. مثلاً، هرگاه $x<5$، آنگاه $-3x>-15$. این ویژگی در تقسیم بر عددی منفی نیز صادق است. مثلاً، هرگاه $-3x>9$، آنگاه $x<-3$.

اگر سه عدد حقیقی a ، b، c چنان باشند که $a<b$ و $b<c$، می‌گوییم b بین a و c است و می‌نویسیم $a<b<c$.

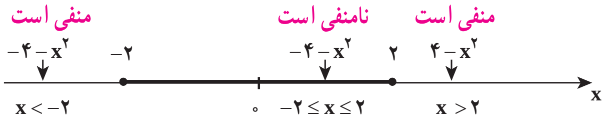
۰ ـ ۷ ـ بازه‌های اعداد

در حساب دیفرانسیل و انتگرال اغلب تعیین مثبت، صفر یا منفی بودن عبارات اهمیت دارد مثلاً برای معادله $y=\sqrt{4-x^2}$ که متغیر y را برحسب متغیر x بیان می‌کند، چون جذر یک عدد منفی در $\mathbb{R}$ بی‌معنی است، باید برای حقیقی بودن y شرط ($4-x^2$ نامنفی است) $4-x^2\ge 0$ اعمال شود. این

شرط معادل عبارت زیر است.

$-۲ \le x \le ۲$ (x بین ۲– و ۲ است)

در نتیجه، مجموعهٔ اعداد نموده شده با x بازه‌ای است با نقاط انتهایی ۲± بر خط حقیقی (شکل زیر)



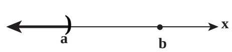
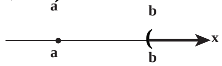
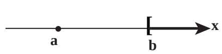
نظیر شکل فوق اغلب زیرمجموعه‌های خط حقیقی یعنی مجموعهٔ اعدادی که یک متغیر را نمایش می‌دهند بازه یا اجتماعی از بازه‌ها می‌باشند.

بازه‌ها چند نوع‌اند، که هریک نمادی خاص خود دارد.

مثلاً، بازهٔ باز $(a,b) = \{x:\ a < x < b\}$ مجموعهٔ تمام اعدادحقیقی بزرگتر از a و کوچکتر از b است، که در آن a و b **نقاط انتهایی** بازه نام دارند و این نقاط انتهایی در بازهٔ باز قرار ندارند.

بازه‌هایی که شامل نقاط انتهایی خود باشند بازه بسته نام داشته و با نماد $[a,b] = \{x:\ a \le x \le b\}$ نموده می‌شوند. در جدول (۱) نه بازهٔ اصلی روی خط حقیقی نموده شده‌اند. که چهارتای اوّل را بازه‌های کراندار و پنج‌تای دیگر را بازه‌های بی‌کران می‌نامند.

جدول (۱)

نام	نماد بازه	نماد مجموعه	نمودار روی خط
بازهٔ باز	(a, b)	$\{x:\ a < x < b\}$	
بازهٔ بسته	$[a, b]$	$\{x:\ a \le x \le b\}$	
بازه‌های نیم‌باز	$[a, b)$	$\{x:\ a \le x < b$	
	$(a, b]$	$\{x:\ a < x \le b\}$	
بازه‌های نامتناهی	$(-\infty, a]$	$\{x:\ x \le a\}$	
	$(-\infty, a)$	$\{x:\ x < a\}$	
	$(b, +\infty)$	$\{x:\ b < x\}$	
	$[b, +\infty)$	$\{x:\ b \le x\}$	
	$(-\infty\ , +\infty)$	{x : عددی حقیقی است x}	

تبصره: علائم $+\infty$ و $-\infty$ نمایش اعدادی حقیقی نبوده و فقط با آنها می‌توان شرایط بی‌کران را خلاصه‌تر بیان کرد.

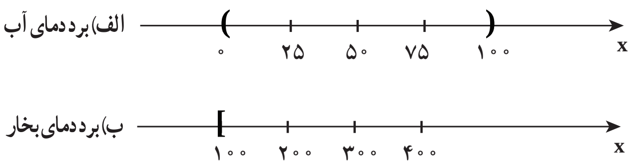
مثلاً بازه $[b, +\infty)$ از راست بی‌کران است. زیرا شامل همهٔ اعداد حقیقی بزرگتر یا مساوی b است.

مثال: با فرض اینکه فشار هوا یک آتمسفر است بازه‌هایی از خط حقیقی را توصیف کنید که نظیر بُرد دمای (به درجهٔ سلسیوس) آب در دو حالت زیر باشند.

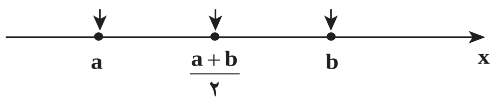
حل: الف) مایع ب) بخار

الف) چون آب در شرایط مایع دمایی بیش از ۰° و کمتر از ۱۰۰° دارد بازهٔ $(۰,۱۰۰)=\{x:\ ۰<x<۱۰۰\}$ را مثل شکل زیر قسمت (الف)، خواهیم داشت.

ب) چون آب در شرایط گاز (بخار) دمایی بزرگتر یا مساوی ۱۰۰° دارد بازه $[۱۰۰,+\infty)=\{x:\ ۱۰۰\leq x\}$ را مثل شکل زیر قسمت (ب) خواهیم داشت.

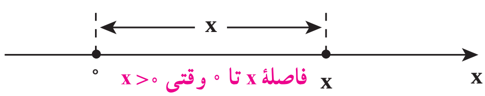


بازه متقارن: فرض کنیم (a, b) یک بازه باشد. معلوم است که عدد $\frac{a+b}{۲}$ به این بازه تعلق دارد (چرا؟) این نقطه را نقطه میانی بازه می‌نامیم زیرا فاصله آن تا نقاط انتهایی a و b یکسان است.

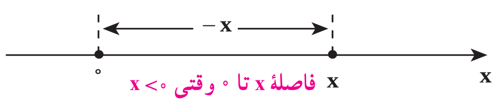


هرگاه $\delta > ۰$، بازه $(x_۰ - \delta , x_۰ + \delta)$ بازه‌ای با نقطه میانی $x_۰$ و شعاع δ است. چنین بازه‌هایی را بازه متقارن نیز می‌نامیم.

اغلب دانستن اینکه نقطهٔ x از خط حقیقی چقدر تا مبدأ فاصله دارد مهم است. همان‌طور که شکل زیر نشان داده، اوّلین حدس ممکن است x باشد.



امّا اگر $x < ۰$، فاصله x نیست بلکه $-x$ است (شکل زیر) مثلاً اگر $x = -۵$، فاصله $۵ = -(-۵) = -x$ می‌باشد. توضیح اینکه فاصله همیشه عددی نامنفی است.



برای بیان مقدار $\sqrt{x^۲}$ می‌توان برحسب حالات، چنین نوشت :

$$\sqrt{x^۲}=\begin{cases} x & , \quad x\geq ۰ \quad \text{اگر} \\ -x & , \quad x<۰ \quad \text{اگر} \end{cases}$$

علامت دیگر استفاده از $|x|$ است که در تعریف زیر دقیقاً عرضه شده است.

۰ ـ ۸ ـ قدر مطلق

هرگاه $x\in\mathbb{R}$، قدر مطلق x عبارت است از :

$$|x|=\sqrt{x^۲}=\begin{cases} x & , \quad x\geq ۰ \quad \text{اگر} \\ -x & , \quad x<۰ \quad \text{اگر} \end{cases}$$

مثال: با استفاده از دو قسمت تعریف، قدر مطلق -۵ را بیابید.

حل:

$$|-۵|=\sqrt{(-۵)^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$$

قضایای زیر چند خاصیت مفید قدر مطلق را بیان می‌دارند.

قضیه (اَعمال با قدر مطلق) : هرگاه a و b اعداد حقیقی بوده و n عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه خواص زیر برقرار می‌باشند.

۱) $|a.b|=|a||b|$

۲) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}\ , b\neq ۰$

۳) $|a^n|=|a|^n$

اثبات به عهده دانش‌آموز.

قضیه (نامساوی‌ها و قدرمطلق) : هرگاه a و b اعدادی حقیقی بوده و k مثبت باشد، خواص زیر برقرار می‌باشند.

۱) $-|a|\leq a\leq |a|$

۲) $|a|\leq k$ اگر و فقط اگر $-k\leq a\leq k$.

۳) $|a|\geq k$ اگر و فقط اگر $a\geq k$ یا $a\leq -k$.

۴) نامساوی مثلثی : $|a+b|\leq |a|+|b|$

خواص ۲ و ۳ در صورت تعویض $\leq$ با $<$ نیز درست‌اند. این احکام را برحسب $<$ بنویسید.

برهان: خاصیت‌های ۲ و ۴ را ثابت کرده و اثبات دو خاصیت دیگر را به عنوان تمرین به عهده دانش‌آموز می‌گذاریم.

برای برهان خاصیت ۲، فرض کنید $|a|\leq k$، چون $-|a|\leq a\leq |a|$ نتیجه می‌شود

$$-k\leq -|a|\leq a\leq |a|\leq k$$

یعنی

$$-k\leq a\leq k$$

حال فرض کنید $-k \leq a \leq k$، اگر $a \geq ۰$، $|a| = a \leq a$ و اگر $a \leq ۰$، $|a| = -a \leq a$ از این‌رو در هر حالت $|a| \leq k$.

اثبات ۴) چون $-|a| \leq a \leq |a|$ و $-|b| \leq b \leq |b|$ بنابراین $-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$

و بنابر قضیه $|a + b| \leq |a| + |b|$

مثال: نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی a و b

$$|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$$

حل: طبق نامساوی مثلثی

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$$

پس

$$|a| - |b| \leq |a - b| \qquad (۱)$$

از طرف دیگر طبق نامساوی مثلثی

$$|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b| \qquad (۲)$$

و از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$$

تمرین در کلاس

نامساوی مثلثی را برای سه عدد $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ بیان و اثبات کنید. آیا صورت کلی‌تری (برای n عدد) از این نامساوی می‌توانید بیان کنید؟

مسائل

۱ــ نامعادله $-\frac{۲}{x} < \frac{۵}{x-۱}$ را حل کرده و مجموعه جواب آن را روی خط حقیقی نشان دهید.

۲ــ جواب نامعادله‌های زیر را به‌صورت بازه و یا اجتماعی از بازه‌ها پیدا کنید.

الف) $۳x + ۵ \leq ۸$ ب) $۵x - ۳ \leq ۷ - ۳x$

ج) $x^۲ < ۹$ د) $\frac{۱}{۲-x} < ۳$

۳ــ هریک از نامساوی‌های زیر یک بازه را مشخص می‌سازد. این بازه را بنویسید.

الف) $|x - ۲| \leq ۲$ ب) $|۲x + ۵| < ۱$ پ) $\left|۲ - \frac{x}{۲}\right| < \frac{۱}{۲}$

ت) $|۳x - ۷| < ۲$ ث) $|۲x + ۵| < ۱$

۴ــ جواب‌هایی از نابرابری $|x^{۲}-۴|<۱$ را به‌دست آورید که در بازه متقارن $(۲-\frac{۱}{۱۰}\,,\,۲+\frac{۱}{۱۰})$ قرار داشته باشند.

۵ــ جواب‌هایی از نابرابری $|x^{۲}-۹|<\frac{۱}{۱۰۰۰}$ را به‌دست آورید که در بازه متقارن (۲،۴) قرار داشته باشند.

۶ــ جواب‌هایی از نابرابری $\frac{۱}{x^{۲}}<\frac{۱}{۱۰^{۴}}$ را به‌دست آورید که در بازه $(۳\,,\,+\infty)$ قرار دارند.

۷ــ جواب‌هایی از نابرابری $\sqrt{x^{۲}-۹}<\frac{۱}{۱۰۰}$ را به‌دست آورید که در بازه متقارن $(۳-\frac{۱}{۱۰},۳+\frac{۱}{۱۰})$ قرار دارند.

۸ــ فرض کنیم $a<x<b$، ثابت کنید $|x|<\text{Max}\ \{|a|,|b|\}$

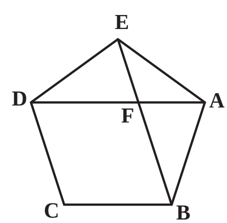
(منظور از Max، ماکسیمم مقدار مجموعه است)

آیا عکس این حکم درست است؟

۹ــ فرض کنیم برای هر عدد مثبت h ، $۰\le a<h$ ثابت کنید $a=۰$

۱۰ــ ثابت کنید در هر پنج ضلعی منتظم با طول ضلع a، نسبت طول قطر به طول ضلع، عددی گنگ است. (قضیه هیپاسوس)

راهنمایی : ابتدا نشان دهید دو مثلث ABE و FEA در شکل زیر متشابه‌اند.



۱۱ــ ثابت کنید $\sqrt{۳}$ عددی گنگ است.

۱۲ــ ثابت کنید log۳ گویا نیست.

۱۳ــ اعداد $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ را روی محور اعداد نشان دهید (به کمک رسم مثلث قائم الزاویه).