

حرکت شناسی در دو بعد



فصل



حرکت شناسی در دو بعد

نگاهی به فصل : دربارهٔ حرکت‌هایی که در اطراف ما رخ می‌دهد، اغلب، پرسش‌های زیادی برای ما مطرح می‌شود؛ پرسش‌هایی چون : سیاره‌ها در چه مسیرهایی به دور خورشید حرکت می‌کنند؟ چرا هنگامی که فنری را می‌کشیم و رها می‌کنیم، نوسان می‌کند؟ ماهواره‌ها را چگونه در مدار زمین قرار می‌دهند؟ ... پاسخ این پرسش‌ها را باید در علم مکانیک جست‌وجو کرد. علمی که در آن حرکت اجسام مورد بررسی قرار می‌گیرد. هنگامی که چگونگی حرکت را توصیف می‌کنیم، با بخشی از علم مکانیک که حرکت‌شناسی نامیده می‌شود، سروکار داریم. بخش دیگری از علم مکانیک، دینامیک است که به بررسی رابطهٔ بین حرکت و نیرو می‌پردازد.

در فیزیک (۲) و آزمایشگاه تا اندازه‌ای حرکت‌شناسی در یک بعد را مورد بررسی قرار دادیم، با کمیت‌های مکان، جابه‌جایی سرعت متوسط و ... آشنا شدیم، و حرکت یکنواخت و حرکت با شتاب ثابت بر روی یک خط راست را نیز بررسی کردیم. ما در زندگی روزمره بیشتر با حرکت‌هایی که در دو بعد و سه بعد انجام می‌شوند سروکار داریم، و بررسی آنها اهمیت بیشتری دارد؛ از این رو، در این فصل، پس از یادآوری مطالبی که در کتاب فیزیک (۲) و آزمایشگاه خوانده‌اید، به بررسی حرکت در دو بعد می‌پردازیم.

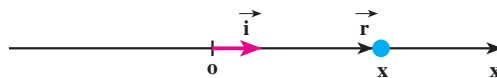
۱-۱- حرکت در یک بعد

در شکل ۱-۱ جسمی بر روی محور x نمایش داده شده است. مکان جسم در این شکل با بردار \vec{r} مشخص شده است. بردار \vec{r} را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\vec{r} = x \vec{i}$$

(۱-۱)

در این رابطه، \vec{i} بردار یکه در جهت محور x است.



شکل ۱-۱

هنگامی که جسم روی محور x حرکت می‌کند، در هر لحظه بردار مکان آن تغییر می‌کند. برای توصیف حرکت جسم، یعنی برای مشخص کردن بردار مکان جسم در لحظه t کافی است که x را به صورت تابعی از زمان داشته باشیم:

$$x=f(t) \quad (2-1)$$

این رابطه، معادله حرکت جسم نامیده می‌شود.

در کتاب فیزیک (۲) و آزمایشگاه دیدیم که حرکت جسم را می‌توان به صورت نموداری در دستگاه مختصات مکان-زمان نمایش داد؛ به عبارت دیگر، این نمودار با رسم تابع $x=f(t)$ در دستگاه مختصات $t-x$ به دست می‌آید.

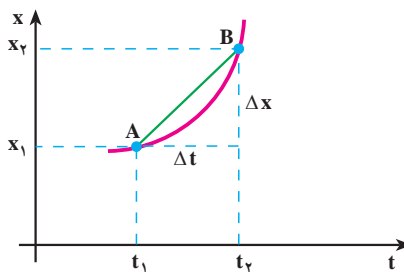
تمرین ۱-۱

معادله حرکت جسمی در یک بعد در SI با رابطه $x = -t^2 + 6t - 8$ بیان شده است. الف) نمودار مکان-زمان آن را رسم کنید. ب) بردار مکان جسم را در زمان‌های $t = 0, 1, 3$ (s) روی محور x نمایش دهید.

سرعت متوسط: نمودار مکان-زمان جسمی در شکل ۲-۱ الف نمایش داده شده است. همان‌طور که در شکل ۲-۱ ب نشان داده شده است، متحرک در لحظه t_1 در مکان x_1 (نقطه A) روی نمودار مکان-زمان و در لحظه t_2 در مکان x_2 (نقطه B) قرار دارد.



شکل ۲-۱ ب



شکل ۲-۱ الف

در این شکل، مقدار جابه‌جایی متحرک در بازه زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$ ، و نسبت $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ، که شیب خط AB در دستگاه مکان-زمان است، سرعت متوسط متحرک نامیده می‌شود. این کمیت را با \bar{v}_x نشان دادیم:

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (3-1)$$

زیرنویس x مشخص می‌کند که حرکت در راستای محور x انجام می‌شود.

مثال ۱-۱

معادله حرکت جسمی در SI با رابطه $x = 2t^2 + 1$ بیان شده است. سرعت متوسط آن را در بازه‌های زمانی (الف) ۱ تا ۲ ثانیه، (ب) ۱ تا ۱/۱ ثانیه، (پ) ۱ تا ۱/۰۱ ثانیه و (ت) ۱ تا ۱/۰۰۱ ثانیه به دست آورید.

پاسخ

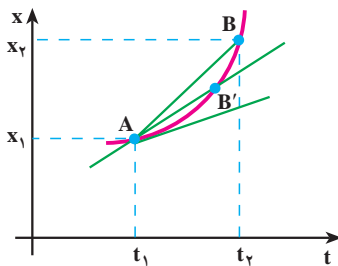
$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{(الف)}$$

$$\bar{v}_x = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{9 - 3}{2 - 1} = 6 \text{ m/s}$$

$$\bar{v}_x = \frac{3/42 - 3}{1/1 - 1} = 4/2 \text{ m/s} \quad \text{(ب)}$$

$$\bar{v}_x = \frac{3/0.402 - 3}{1/0.1 - 1} = 4/0.2 \text{ m/s} \quad \text{(پ)}$$

$$\bar{v}_x = \frac{3/0.04002 - 3}{1/0.01 - 1} = 4/0.02 \text{ m/s} \quad \text{(ت)}$$



شکل ۱-۳

سرعت لحظه‌ای: در فیزیک (۲) و آزمایشگاه دیدیم که اگر بازه زمانی Δt کوچک و کوچک‌تر شود، نقطه B به نقطه A نزدیک و نزدیک‌تر شده و سرانجام، خط AB در نقطه A بر نمودار مماس می‌شود (شکل ۱-۳). شیب خط مماس را در این حالت، سرعت لحظه‌ای جسم در لحظه t_1 می‌نامیم. به عبارت دیگر، هنگامی که t_2 به t_1 نزدیک می‌شود، یعنی

وقتی Δt به سمت صفر میل می‌کند، نسبت $\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ سرعت

لحظه‌ای جسم را در لحظه t_1 به دست می‌دهد. پس، سرعت لحظه‌ای حد سرعت متوسط است، هنگامی که Δt به سمت صفر میل می‌کند. سرعت لحظه‌ای را با v_x نمایش می‌دهیم؛ در نتیجه داریم:

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (4-1)$$

در درس ریاضی دیده‌اید که این حد برابر مشتق تابع x نسبت به زمان است که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad (5-1)$$

اگر $x = f(t)$ معلوم باشد، از رابطه ۵-۱ می‌توان v_x را به صورت تابعی از زمان به دست آورد؛ این تابع معادله سرعت نامیده می‌شود. در حالت حدی، وقتی که Δt به سمت صفر میل می‌کند، وتر AB در نقطه A بر نمودار مکان - زمان مماس می‌شود. این همان تعبیر هندسی مشتق است که در درس ریاضی خوانده‌اید. از این پس، سرعت لحظه‌ای را - برای اختصار - سرعت می‌نامیم.

مثال ۱-۲

در مثال ۱-۱، معادله حرکت متحرک به صورت $x = 2t^2 + 1$ است.

الف) معادله سرعت آن را به دست آورید.

ب) نمودار سرعت - زمان را برای آن رسم کنید.

پ) سرعت متحرک را در لحظه $t = 1$ s به دست آورید.

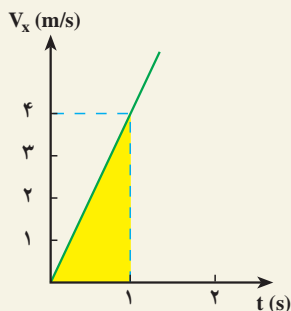
پاسخ

الف) با استفاده از رابطه ۵-۱ داریم:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 4t$$

ب) نمودار سرعت - زمان به صورت خط راستی

است که از مبدأ دستگاه $v-t$ می‌گذرد.



شکل ۱-۴

$$v_x = 4t \quad \text{پ)}$$

$$t = 1\text{ s} \Rightarrow v_x = 4\text{ m/s}$$

این نتیجه را می‌توانستیم از مثال ۱-۱ حدس بزنیم؛ زیرا در آن مثال با نزدیک شدن t_1 به t_2 ، سرعت متوسط جسم نیز به مقدار 4 m/s (سرعت جسم در لحظه $t = 1\text{ s}$) نزدیک می‌شود.

بردار سرعت متحرک را، در حرکت یک بعدی، می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} \quad (۶-۱)$$

هنگامی که جسم در جهت محور x حرکت می‌کند، v_x مثبت است (چرا؟) و در نتیجه، بردار سرعت جسم در جهت این محور قرار می‌گیرد. هنگامی که جسم در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، v_x منفی است و بردار سرعت در جهت عکس این محور قرار می‌گیرد.

مثال ۳-۱

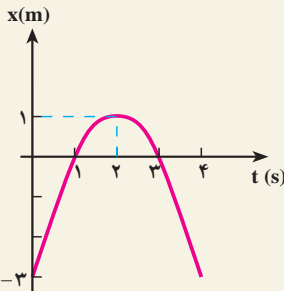
معادله حرکت جسمی در SI با رابطه $x = -t^2 + 4t - 3$ بیان شده است. الف) معادله سرعت آن را به دست آورید. ب) نمودارهای مکان - زمان و سرعت - زمان متحرک را در ۴ ثانیه اول رسم کنید. پ) نمودار مسیر حرکت جسم را رسم و چگونگی حرکت را توصیف کنید.

پاسخ

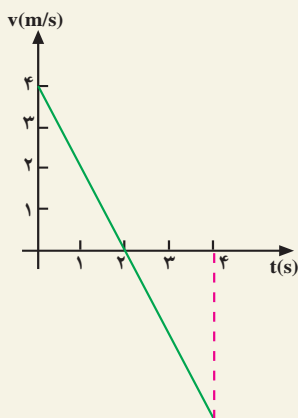
الف) با استفاده از رابطه ۵-۱ داریم:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -2t + 4$$

ب) نمودار مکان - زمان متحرک به صورت یک سهمی (شکل ۵-۱) است که بیشینه آن در لحظه $t = 2\text{ s}$ است (چرا؟). همچنین، جسم در لحظه‌های $t = 1\text{ s}$ و $t = 3\text{ s}$ در مبدأ و در لحظه $t = 0$ ، در نقطه $x = -3\text{ m}$ قرار دارد.



شکل ۵-۱

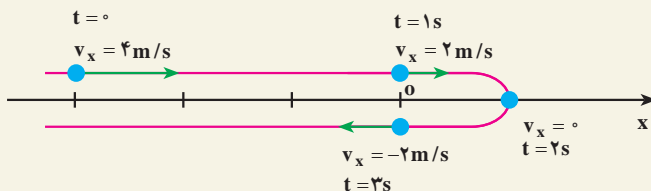


شکل ۶-۱

نمودار سرعت - زمان متحرک به صورت یک خط راست است (شکل ۶-۱) که در بند (الف) معادله آن را به دست آوردیم.

(پ) با توجه به این نمودارها ملاحظه می شود که متحرک در لحظه $t = 0$ در مکان $x = -3\text{m}$ قرار دارد و با سرعت 4m/s در جهت محور x حرکت می کند. سپس سرعت آن به تدریج کاهش می یابد (شیب مماس بر نمودار مکان - زمان در شکل ۵-۱ به تدریج کم می شود) تا در لحظه $t = 2\text{s}$ که سرعت آن صفر می شود. می توان گفت شیب مماس بر نمودار مکان - زمان در این لحظه صفر می شود.

از لحظه $t = 2\text{s}$ به بعد متحرک برمی گردد و در خلاف جهت محور x شروع به حرکت می کند و v_x منفی می شود. در برگشت، اندازه سرعت افزایش می یابد و در لحظه $t = 3\text{s}$ دوباره از مبدأ می گذرد. در این لحظه، سرعت آن -2m/s است. مسیر حرکت جسم در شکل ۷-۱ رسم شده و بردار سرعت آن نیز روی شکل نمایش داده شده است.



شکل ۷-۱

در شکل ۷-۱ باید مسیر روی محور x رسم شود ولی ما برای این که مسیر را بهتر مشخص کنیم، آن را در بالا و پایین این محور رسم کرده ایم. ملاحظه می شود که در تمام مسیر رفت و برگشت، معادله مکان و معادله سرعت جسم، به ترتیب به صورت زیر بیان می شود:

$$x = -t^2 + 4t - 3$$

$$v_x = -2t + 4$$

مثال ۴-۱

متحرکی با سرعت ثابت 5m/s ، در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. این متحرک در لحظه $t = 0$ از نقطه $x = 1\text{m}$ می‌گذرد. الف) معادله حرکت را بنویسید. ب) تعیین کنید که متحرک پس از چه زمانی به مبدأ مختصات می‌رسد.

پاسخ

الف) در فیزیک ۲ و آزمایشگاه دیدیم که معادله حرکت یکنواخت یک جسم روی خط راست با رابطه:

$$x = v_x t + x_0 \quad (7-1)$$

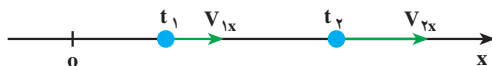
بیان می‌شود که در آن v_x سرعت (ثابت) جسم و x_0 مکان جسم در لحظه $t = 0$ است؛ در نتیجه، چون در این مثال $x_0 = +1\text{m}$ و $v_x = -5\text{m/s}$ است، معادله حرکت جسم به صورت زیر خواهد بود.

ب)

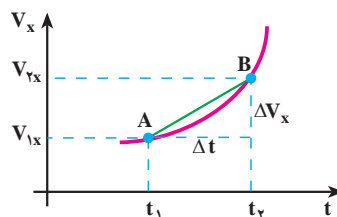
$$x = -5t + 1$$

$$x = 0 \Rightarrow -5t + 1 = 0 \Rightarrow t = 2\text{s}$$

شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای: می‌دانید هنگامی که سرعت جسم تغییر می‌کند، حرکت را شتابدار می‌نامند. در شکل ۸-۱ الف نمودار سرعت-زمان یک حرکت شتابدار و در شکل ۸-۱ ب بردار سرعت متحرک، در زمان‌های t_1 و t_2 ، نشان داده شده است.



شکل ۸-۱ ب



شکل ۸-۱ الف

همچنین، می‌دانید که $\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x}$ را تغییر سرعت متحرک در بازه زمانی Δt و نسبت $\frac{\Delta v_x}{\Delta t}$ را که شیب خط AB در نمودار سرعت-زمان است، شتاب متوسط متحرک در این بازه زمانی می‌نامند. این کمیت را با نماد \bar{a} نشان می‌دهیم؛ در نتیجه داریم:

$$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad (8-1)$$

در این جا هم هنگامی که Δt بسیار کوچک و کوچک‌تر می‌شود، نقطه B، در شکل 8-1 الف، به نقطه A نزدیک و نزدیک‌تر شده و سرانجام خط AB در نقطه A بر نمودار سرعت-زمان مماس می‌شود. شیب خط مماس بر نمودار در نقطه A را شتاب لحظه‌ای جسم در لحظه t_1 می‌نامیم. اکنون می‌توان شتاب لحظه‌ای را، مانند سرعت لحظه‌ای، به طور دقیق این‌گونه تعریف کرد: هنگامی که Δt به سمت صفر میل می‌کند، نسبت $\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$ شتاب لحظه‌ای جسم را در لحظه t_1 به دست می‌دهد؛ به عبارت دیگر، شتاب لحظه‌ای حد شتاب متوسط است، هنگامی که Δt به سمت صفر میل می‌کند. شتاب لحظه‌ای را با a_x نمایش می‌دهیم؛ در نتیجه داریم:

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \quad (9-1)$$

به بیان ریاضی، شتاب لحظه‌ای مشتق سرعت نسبت به زمان است؛ از این پس، شتاب لحظه‌ای را - برای اختصار - شتاب می‌نامیم. اکنون با استفاده از رابطه‌های 5-1 و 9-1 شتاب را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

مثال 5-1

معادله حرکت جسمی در SI به صورت $x = t^3 - 6t^2 + 9t$ بیان شده است. الف) شتاب متوسط آن را در بازه زمانی 1 تا 2 ثانیه به دست آورید. ب) شتاب آن را در لحظه‌های $t = 0$ و $t = 1$ ثانیه پیدا کنید.

پاسخ

الف) برای به دست آوردن شتاب متوسط در این بازه زمانی لازم است سرعت متحرک را در لحظه‌های $t = 1s$ و $t = 2s$ داشته باشیم. ابتدا معادله سرعت را به دست

می‌آوریم :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$$

از این معادله در لحظه‌های $t = 1s$ و $t = 2s$ به ترتیب مقادیر 0 (صفر) و $-3m/s$ برای سرعت به دست می‌آید.

$$\bar{a}_x = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{-3 - 0}{2 - 1} = -3 m/s^2$$

(ب) ابتدا معادله شتاب متحرک را می‌نویسیم :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 6t - 12$$

با استفاده از این رابطه، شتاب متحرک در لحظه‌های $t = 0$ و $t = 1s$ چنین به دست می‌آید :

$$t = 0s \rightarrow a_x = -12 m/s^2$$

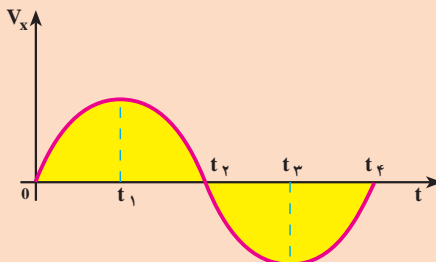
$$t = 1s \rightarrow a_x = -6 m/s^2$$

بردار شتاب را می‌توان به صورت زیر نمایش داد :

$$\vec{a} = a_x \vec{i} \quad (1-1)$$

در رابطه بالا اگر a_x مثبت باشد، \vec{a} در جهت محور X و اگر منفی باشد در خلاف جهت محور X قرار می‌گیرد.

تمرین ۲-۱



شکل ۱-۹

نمودار سرعت، زمان متحرکی در شکل ۱-۹ نشان داده شده است. تعیین کنید در چه بازه زمانی بردار شتاب در جهت محور X و در کدام بازه زمانی در خلاف جهت محور X است.

هنگامی که اندازه سرعت متحرکی زیاد می‌شود، حرکت را تندشونده و هنگامی که اندازه سرعت متحرکی کاهش می‌یابد، حرکت را کند شونده می‌نامند.

فعالیت ۱-۱

در تمرین ۱-۲، سرعت متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_2 مثبت است. a_x نیز مثبت است؛ زیرا شیب مماس بر نمودار در این بازه زمانی مثبت است و حرکت تندشونده است. حاصل ضرب $a_x v_x$ نیز مثبت است. اکنون جاهای خالی را در گزاره‌های زیر پر کنید.

الف) در بازه زمانی t_1 تا t_2 سرعت متحرک است. a_x است. حرکت است. حاصل ضرب $a_x v_x$ است.

ب) در بازه زمانی t_2 تا t_3 سرعت متحرک است. a_x است. حرکت است. حاصل ضرب $a_x v_x$ است.

پ) در زمان‌های بزرگ‌تر از t_3 ، سرعت متحرک است. a_x است. حرکت است. حاصل ضرب $a_x v_x$ است.

در فعالیت بالا می‌بینید که وقتی $a_x v_x > 0$ باشد، حرکت تندشونده و وقتی $a_x v_x < 0$ باشد، حرکت کندشونده است.

مثال ۱-۶

خودرویی با سرعت 1 m/s در حال حرکت است. راننده ترمز می‌کند و سرعت خودرو با شتاب 2 m/s^2 کاهش می‌یابد. الف) چه زمانی طول می‌کشد تا خودرو متوقف شود؟ ب) در این بازه زمانی خودرو چه مسافتی را می‌پیماید؟

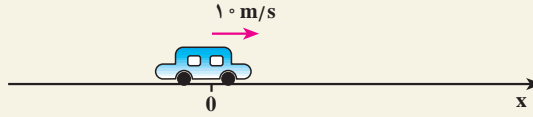
پاسخ

الف) در کتاب فیزیک ۲ و آزمایشگاه دیدیم که در حرکت با شتاب ثابت معادله سرعت به صورت زیر است:

$$v_x = a_x t + v_{0x} \quad (1-11)$$

که در آن a_x شتاب (ثابت) جسم و v_{0x} سرعت جسم در لحظه $t = 0$ است. در شکل

۱-۱ حرکت خودرو را در جهت محور x در نظر گرفته‌ایم.



شکل ۱-۱

بنابراین، $v_{0x} = +10 \text{ m/s}$ و چون حرکت کندشونده است، علامت a_x مخالف علامت v_{0x} است؛ در نتیجه، $a_x = -2 \text{ m/s}^2$. با استفاده از معادلهٔ سرعت داریم:

$$v_x = -2t + 10$$

هنگامی که خودرو متوقف می‌شود، $v_x = 0$ است؛ در نتیجه:

$$0 = -2t + 10 \Rightarrow t = 5 \text{ s}$$

(ب) می‌دانیم که در حرکت با شتاب ثابت معادلهٔ حرکت به صورت زیر است

$$\Delta x = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0x} t \quad (12-1)$$

$$\Delta x = \frac{1}{2} (-2)(5)^2 + 10(5) + 0 = 25 \text{ m}$$

این نتیجه را می‌توانستیم از رابطهٔ مستقل از زمان زیر نیز به دست آوریم:

$$v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a_x(x - x_0) \quad (13-1)$$

$$0 - (10)^2 = 2(-2)(\Delta x) \Rightarrow \Delta x = 25 \text{ m}$$

حرکت سقوط آزاد: در فیزیک ۲ و آزمایشگاه دیدیم که سقوط آزاد اجسام در نزدیکی سطح زمین یکی از نمونه‌های مهم حرکت با شتاب ثابت بر روی مسیر مستقیم است. شتاب این حرکت در خلأ برابر شتاب گرانش (g) و جهت آن روبه پایین است.

مثال ۱-۲

سنگی را از بالای ساختمان بلندی به ارتفاع ۴۵m رها می‌کنیم، (الف) سنگ پس از چه زمانی به زمین می‌رسد؟ (ب) سرعت آن هنگام رسیدن به زمین چند متر بر ثانیه

و چند کیلومتر بر ساعت است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

پاسخ

الف) برای بررسی حرکت سقوط آزاد اجسام، محور y را در راستای قائم و رو به بالا و مبدأ آن را نقطه رها کردن جسم در نظر می‌گیریم. در این صورت، معادله حرکت با شتاب ثابت (۱۲-۱) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2$$

$$-45 = -\frac{1}{2}(10)t^2 \Rightarrow t = 3\text{s}$$

ب) با استفاده از معادله سرعت (۱۱-۱) داریم:

$$v = -gt$$

$$v = -10 \times 3 = -30 \text{ m/s} = -108 \text{ km/h}$$

فعالیت ۲-۱



شکل ۱۱-۱

از دوست خود بخواهید که مطابق شکل ۱۱-۱، خط‌کش مدرج بلندی را بین انگشتان شما نگه دارد و در یک لحظه، آن را رها کند. چگونه می‌توانید زمان واکنش خود را (یعنی زمانی که طول می‌کشد تا پس از مشاهده رها شدن خط‌کش، آن را بگیرید) اندازه‌گیری کنید.

اکنون، مسئله پرتاب جسمی را در راستای قائم به طرف بالا بررسی می‌کنیم. جهت محور y را به طرف بالا در نظر می‌گیریم. معادله‌های حرکت و سرعت با رابطه‌های زیر بیان می‌شود:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{y0}t + y_0 \quad (14-1)$$

$$v_y = -gt + v_{y0} \quad (15-1)$$

و معادله مستقل از زمان آن به صورت زیر است :

$$v_y^2 - v_{y0}^2 = -2g(y - y_0) \quad (16-1)$$

مثال ۸-۱

سنگی را با سرعت 20 m/s در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. (الف) چه زمانی طول می‌کشد تا سنگ به بالاترین ارتفاع برسد؟ (ب) سنگ تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟ (پ) چه زمانی طول می‌کشد تا سنگ به نقطه پرتاب برگردد؟ (ت) سرعت سنگ در این نقطه چه مقدار است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

پاسخ

(الف) محور y را روبه بالا و مبدأ آن را در نقطه پرتاب فرض می‌کنیم؛ در نتیجه، در لحظه پرتاب داریم: $v_{y0} = +20 \text{ m/s}$ و $y_0 = 0$. در شروع حرکت، جسم در جهت محور y حرکت می‌کند، با استفاده از رابطه‌های ۱۴-۱ و ۱۵-۱ داریم:

$$y = -5t^2 + 20t$$

$$v_y = -10t + 20$$

در بالاترین نقطه، $v_y = 0$ ؛ در نتیجه:

$$0 = -10t + 20 \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

$$t = 2 \text{ s}$$

(ب) بالاترین ارتفاعی که سنگ به آن می‌رسد، از معادله حرکت به دست می‌آید:

$$y = -5(2)^2 + 20(2) = 20 \text{ m}$$

(پ) در بازگشت سنگ به نقطه پرتاب، داریم: $y = 0$ ؛ در نتیجه:

$$-5t^2 + 20t = 0$$

$$t(-5t + 20) = 0$$

یا

پاسخ‌های این معادله $t = 0$ s و $t = 4$ s است. $t = 0$ s مربوط به لحظه پرتاب است و $t = 4$ s زمانی است که طول می‌کشد تا سنگ به نقطه پرتاب برگردد.

(ت سرعت متحرک در این لحظه از معادله سرعت به دست می‌آید:

$$v_y = -10(4) + 20 = -20 \text{ m/s}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که در هنگام بازگشت سنگ به نقطه پرتاب، سوی سرعت آن رو به پایین است. ملاحظه می‌شود که با معادله‌های حرکت و سرعت، می‌توان چگونگی حرکت سنگ را، در هر لحظه از رفت و برگشت، توصیف کرد.

مثال ۹-۱

از بالای ساختمانی به ارتفاع 50 m سنگی را در راستای قائم با سرعت 15 m/s ، به بالا پرتاب می‌کنیم. چه مدت زمانی طول می‌کشد تا سنگ به زمین برسد؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
پاسخ

محور مختصات را رو به بالا و مبدأ آن را در بالای ساختمان در نظر می‌گیریم؛ در نتیجه، معادله حرکت سنگ به صورت زیر است:

$$y = -5t^2 + 15t$$

در پایین ساختمان، $y = -50 \text{ m}$ ؛ در نتیجه:

$$-50 = -5t^2 + 15t$$

با حل این معادله، دو مقدار $t = -2 \text{ s}$ و $t = 5 \text{ s}$ به دست می‌آید. چون حرکت از لحظه $t = 0$ شروع شده است، پاسخ اول قابل قبول نیست؛ در نتیجه، زمان رسیدن سنگ به زمین 5 s است.

۲-۱- حرکت در دو بُعد یا حرکت در صفحه

در بخش ۱-۱ حرکت در یک بعد را مرور کردیم. در این بخش به بررسی حرکت در صفحه که آن را حرکت دو بُعدی نیز می‌نامیم، می‌پردازیم. حرکت گلوله تویی که شلیک می‌شود یا حرکت یک سیاره به دور خورشید یا حرکت اتومبیل در پیچ جاده و ... مثال‌هایی از حرکت دو بُعدی‌اند.

در شکل ۱۳-۱ مسیر حرکت جسمی در صفحه xoy نشان داده شده است. در فیزیک (۲) و



شکل ۱۲-۱

آزمایشگاه دیدیم که مکان جسم در این صفحه، با بردار \vec{r} نمایش داده می‌شود. این بردار را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} \quad (17-1)$$

که در آن \vec{i} و \vec{j} به ترتیب بردارهای یکه در جهت‌های x و y اند.

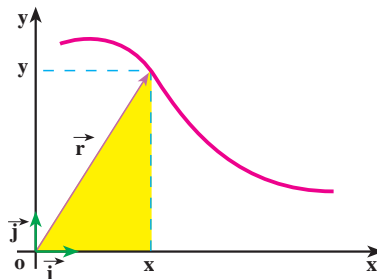
چون هنگام حرکت جسم، در هر لحظه بردار مکان آن تغییر می‌کند، برای مشخص کردن مکان جسم در حین حرکت، کافی است که مؤلفه‌های x و y را به صورت تابع‌هایی از زمان داشته باشیم:

$$x = f(t) \text{ و } y = g(t) \quad (18-1)$$

رابطه‌های ۱۸-۱ معادله‌های حرکت یک جسم را در دو بُعد نشان می‌دهند. واضح است که در حرکت دو بعدی، بردار مکان نیز تابعی از زمان است:

$$\vec{r} = f(t) \vec{i} + g(t) \vec{j} \quad (19-1)$$

بنابراین، می‌توان گفت که حرکت در صفحه، ترکیب دو حرکت یک بعدی در امتدادهای x و y است که با داشتن معادله‌های مربوط به آن، مکان جسم در هر لحظه معلوم و در نتیجه، مسیر حرکت آن مشخص می‌شود.



شکل ۱۳-۱

فعالیت ۳-۱

فرض کنید در یک مدت کوتاه، معادله‌های حرکت یک خرگوش در سطح زمین، برحسب یکاهای SI، به صورت $x = 1 \cdot t$ و $y = -5t^2$ است. مسیر حرکت این خرگوش را به کمک نقطه‌یابی، در بازه‌ی زمانی ۰ تا ۵ ثانیه، روی کاغذ شطرنجی رسم کنید.

باید دانست که مسیر را می‌توان، علاوه بر روش نقطه‌یابی، به کمک معادله‌ی مسیر هم مشخص کرد. برای یافتن معادله‌ی مسیر کافی است که با حذف زمان (t) بین معادله‌های حرکت برای x و y رابطه‌ای بین آنها، به دست آورد.

مثال ۱-۱

معادله‌ی مسیر را برای خرگوش در فعالیت ۳-۱ به دست آورید و آن را رسم کنید.

پاسخ

t را بین مؤلفه‌های بردار مکان حذف می‌کنیم:

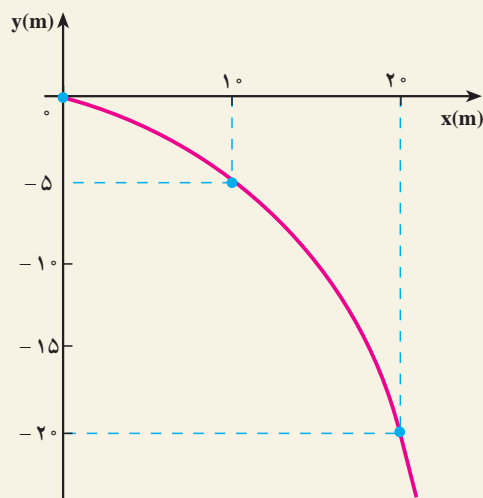
$$x = 1 \cdot t \rightarrow t = \frac{x}{1}$$

و

$$y = -5t^2 \rightarrow y = -5\left(\frac{x}{1}\right)^2$$

$$y = -\frac{x^2}{2}$$

معادله‌ی مسیر در این مثال، یک سهمی است که بیشینه‌ی آن در $x = 0$ است و از نقطه‌های $(1 \text{ m}, -5 \text{ m})$ و $(2 \text{ m}, -2 \text{ m})$ می‌گذرد (شکل ۱-۱۴).



شکل ۱-۱۴

فعالیت ۴-۱

معادله‌های حرکت در SI برای خودروی A در صفحه افقی به صورت $x_A = 3t^2$ و $y_A = 8$ و برای خودروی B در همان صفحه به صورت $x_B = 6t$ و $y_B = 4t$ داده شده است. از طریق نقطه‌یابی تحقیق کنید که آیا مسیر این دو خودرو تلاقی دارند یا نه؟ چه شرطی باید برقرار باشد تا بین خودروها برخورد رخ دهد؟

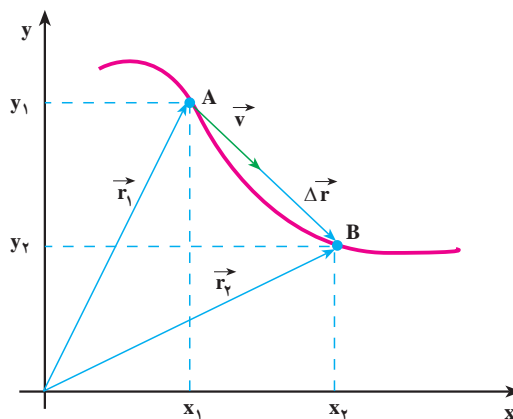
جابه‌جایی و سرعت متوسط: برای بررسی حرکت جسم روی مسیری مطابق شکل ۱۵-۱،

فرض کنید متحرکی در لحظه t_1 در نقطه A (مکان \vec{r}_1) و در لحظه t_2 در نقطه B (مکان \vec{r}_2) باشد. در فیزیک (۲) و آزمایشگاه دیدیم، برداری که از A به B رسم می‌شود جابه‌جایی (تغییر مکان) جسم را در بازه زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$ نمایش می‌دهد. این بردار که در شکل ۱۵-۱ رسم شده است، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (۲۰-۱)$$

$$\Delta \vec{r} = (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}) - (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j})$$

$$\Delta \vec{r} = (\Delta x) \vec{i} + (\Delta y) \vec{j} \quad (۲۱-۱)$$



شکل ۱۵-۱- بردار سرعت متوسط و بردار تغییر مکان هم‌جهت‌اند.

سرعت متوسط جسم در یک بازه زمانی معین، همانند حالت یک بعدی، به این صورت تعریف

می‌شود:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (22-1)$$

و با استفاده از رابطه ۲۱-۱ داریم:

$$\vec{v} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) \vec{i} + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right) \vec{j} \quad (23-1)$$

اگر $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ را با \bar{v}_x و $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ را با \bar{v}_y نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$\vec{v} = (\bar{v}_x) \vec{i} + (\bar{v}_y) \vec{j} \quad (24-1)$$

پرسش ۱-۱

رابطه ۲۲-۱ نشان می‌دهد که سرعت متوسط، کمیتی برداری است و \vec{v} با $\Delta \vec{r}$ هم جهت است. علت را توضیح دهید.

مثال ۱۱-۱

معادله‌های حرکت جسمی در دو بُعد، به صورت زیر است:

$$x = 2t \text{ و } y = -t^2 + 4t \quad (\text{SI})$$

الف) بردار مکان جسم را در لحظه‌های $t_1 = 1\text{s}$ و $t_2 = 2\text{s}$ به دست آورید.

ب) سرعت متوسط آن را در بازه زمانی ۱ تا ۲ ثانیه تعیین و بزرگی آن را حساب

کنید.

پاسخ

الف) در $t_1 = 1\text{s}$:

$$x_1 = 2\text{m} \text{ و } y_1 = +3\text{m}$$

$$\vec{r}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$x_1 = 2\text{m} \text{ و } y_1 = 3\text{m}$$

به همین ترتیب در $t_2 = 2\text{s}$:

$$\vec{r}_2 = 4\vec{i} + 4\vec{j}$$

(ب) در بازه زمانی ۱ تا ۲ ثانیه :

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 4 - 2 = 2\text{m}$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 4 - 3 = 1\text{m}$$

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2}{1} = 2\text{m/s}$$

$$\bar{v}_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{1}{1} = 1\text{m/s}$$

$$\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$$

$$(\bar{v})^2 = (\bar{v}_x)^2 + (\bar{v}_y)^2 = 2^2 + 1^2 = 5$$

$$\bar{v} = \sqrt{5} \approx 2.23\text{m/s}$$

تمرین ۳-۱

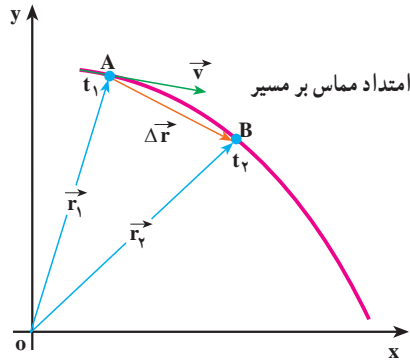
در فعالیت ۳-۱ سرعت متوسط خرگوش را در بازه زمانی ۰ تا ۲ ثانیه به دست

آورید.

سرعت لحظه‌ای : در شکل ۱-۱۶ نمودار حرکت جسمی روی یک مسیر خمیده در صفحه xOy نشان داده شده است. مکان جسم در دو لحظه t_1 و t_2 مشخص شده است. پیش‌تر گفتیم که بردار سرعت متوسط در یک بازه زمانی معین، با بردار جابه‌جایی مربوط به آن، هم‌جهت است. همچنین می‌دانید هنگامی که بازه زمانی Δt ، کوچک و کوچک‌تر شود، سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود؛ یعنی، بردار سرعت لحظه‌ای حد بردار سرعت متوسط است، وقتی Δt به

سمت صفر میل می کند :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (25-1)$$



شکل ۱-۱۶- سرعت لحظه‌ای در امتداد مماس بر مسیر حرکت است.

به عبارت دیگر می‌توان گفت که «سرعت لحظه‌ای، مشتق بردار مکان جسم، نسبت به زمان است»:

$$\vec{v} = \frac{d \vec{r}}{dt} \quad (26-1)$$

در حدی که Δt به سمت صفر میل کند، با استفاده از رابطه ۱-۲۱ می‌توان سرعت لحظه‌ای جسم را برحسب مؤلفه‌های آن در دو امتداد x و y به دست آورد :

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}\right) \vec{i} + \left(\frac{dy}{dt}\right) \vec{j}$$

$$\vec{v} = (v_x) \vec{i} + (v_y) \vec{j} \quad (27-1)$$

در شکل ۱-۱۶ می‌بینید که وقتی t_2 به سمت t_1 میل کند، راستای بردار جابه‌جایی $\Delta \vec{r}$ ، به سمت راستای مماس بر منحنی مسیر، در نقطه A میل خواهد کرد؛ بنابراین، چون بردار سرعت

متوسط همواره هم جهت با جابه‌جایی است، در حدّی که Δt به سمت صفر میل می‌کند، بردار سرعت لحظه‌ای بر مسیر حرکت در نقطه A مماس خواهد شد؛ بدین ترتیب می‌توان گفت، هنگامی که جسم روی یک مسیر خمیده حرکت می‌کند، جهت بردار سرعت آن که همواره بر مسیر حرکت مماس است، در هر لحظه تغییر می‌کند. از این پس، برای اختصار، بردار سرعت لحظه‌ای را سرعت می‌نامیم.

مثال ۱-۱۲

خودرویی در صفحه xoy حرکت می‌کند. معادله‌های حرکت آن در SI به صورت

زیر است:

$$x = 6t + 5 \text{ و } y = 4t^2$$

بزرگی سرعت خودرو را در $t = 1 \text{ s}$ به دست آورید.

پاسخ

با استفاده از رابطه ۱-۲۷ مؤلفه‌های سرعت به دست می‌آید:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 6 \text{ m/s}$$

ملاحظه می‌شود که مؤلفه افقی سرعت مقدار ثابتی دارد و تابع زمان نیست؛ به همین

ترتیب، برای مؤلفه قائم سرعت داریم:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 8t$$

همان‌طور که می‌بینید، این مؤلفه تابع زمان است و بزرگی آن در $t = 1 \text{ s}$ برابر است

با:

$$v_y = 8 \text{ m/s}$$

پس، بزرگی سرعت در $t = 1 \text{ s}$ برابر است با:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ m/s}$$

تمرین ۴-۱

در مثال ۱۲-۱ معادله مسیر را بنویسید و آن را رسم کنید. بردار سرعت متحرک را در $t = 1s$ روی مسیر، نمایش دهید.

شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای

می‌دانید وقتی که سرعت جسم در حال حرکت تغییر می‌کند، حرکت را شتاب‌دار می‌گویند. البته این تغییر سرعت می‌تواند به معنای تغییر در بزرگی سرعت، تغییر در جهت سرعت یا هر دو باشد. دیدیم که وقتی مسیر حرکت جسم خمیده است، جهت سرعت آن الزاماً تغییر می‌کند؛ بنابراین، حرکت بر روی مسیر منحنی، حرکتی شتاب‌دار است حتی اگر بزرگی سرعت ثابت باشد.

فعالیت ۵-۱

دو حرکت شتاب‌دار مثال بزنید که در آنها، بزرگی سرعت تغییر نکند.

در شکل ۱۷-۱ الف، بردارهای سرعت در دو لحظه t_1 و t_2 روی مسیر نشان داده شده است. برای محاسبه تغییر در بازه زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$ از نقطه O' بردارهای مساوی \vec{v}_1 و \vec{v}_2 را رسم می‌کنیم و $\Delta \vec{v}$ را به دست می‌آوریم (شکل ۱۷-۱ ب). در اینجا نیز، مشابه حرکت یک بعدی، بردار شتاب متوسط را در بازه زمانی Δt به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (28-1)$$

با استفاده از رابطه ۲۷-۱ داریم:

$$\vec{a} = \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\right) \vec{i} + \left(\frac{\Delta v_y}{\Delta t}\right) \vec{j}$$

که آن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{a} = (\bar{a}_x) \vec{i} + (\bar{a}_y) \vec{j} \quad (29-1)$$