پیشگفتار

حکایتی دربارهٔ یکی از ریاضیدان‌های مشهور می‌گویند که خالی از لطف نیست : روزی قرار بود که این ریاضیدان در حضور جمع تحصیلکرده‌ای سخنرانی کند. او در شروع صحبت یک عبارت ریاضی روی تخته نوشت و گفت : «در واقع این عبارت بدیهی است». ریاضیدان دوباره به عبارت نوشته شده نگاه کرد و گفت : «حداقل من فکر می‌کنم که بدیهی است ». امّا همچنان‌که شکّ او قوی‌تر می‌شد گفت : «ببخشید » و کاغذ و مدادی برگرفت و سالن سخنرانی را ترک کرد. بعد از بیست دقیقه اوخندان به سالن بازگشت و پیروزمندانه گفت : «بله حضار محترم، این عبارت بدیهی است!»

به نظرمی‌رسدکه منظوراین ریاضیدان از بدیهی بودن عبارت آن بود که ما می‌توانیم به‌طور شهودی درستی آن را قبول کنیم. با این حال این پذیرش کافی نیست و در نهایت، تجزیه و تحلیل منطقی، آن‌را تأیید و یا رد می‌کند. بنا به گفتهٔ اسکمپ[1] (۱۹۷۱) «مطمئن بودن از چیزی یک قصّه است و دانستن این‌که **چرا** آن چیز درست است قصّه‌ای دیگر» و هدف ما نیز کمک به دانستن این **چراهاست.**

با درنظر گرفتن نقشی که ریاضیّات در تربیت هر شهروند می‌تواند ایفا کند، آشنایی با قسمت‌های مختلف این علم برای نوجوانان مستعد، متفکّر و توانای ما الزامی به نظر می‌رسد. نمونه‌های شهودی و تجربی زیبایی در رابطه با رشد و توسعهٔ مطالب مطرح شده در این کتاب وجود دارند که یادگیری و فهم آن‌ها را آسان می‌کنند. امّا برای بهتر فهمیدن و یادگرفتن موضوعات یاد شده، به دانش‌های پیش نیاز و ابزار مختلفی نیازمندیم. مهمترین آن‌ها **نحوهٔ استدلال کردن** و سپس تکمیل آنچه که دربارهٔ مجموعه‌ها و بالاخره حاصلضرب دکارتی و رابطه یاد گرفته‌ایم

۱ــ Skemp

می‌باشد.

نیاز به دانش‌های پیش نیاز ما را بر آن داشت که دو فصل اوّل کتاب را به مفاهیم فوق اختصاص دهیم تا علاوه‌بر تعمیق یادگیری‌های قبلی، زمینهٔ مناسب‌تری برای بهتر فهمیدن مطالب فصل‌های بعد فراهم آید.

هم‌چنین، توجه معلّمان گرامی و دانش‌آموزان عزیز را به این مهم جلب می‌کنیم که تجدید نظر کتاب پس از جمع‌آوری و تجزیه و تحلیل نتایج حاصل از ۴ سال تدریس آن صورت گرفته است.

از حضور شما و تمامی صاحبنظران گرامی خواهشمندیم که با پیشنهادها و انتقادهای سازندهٔ خویش ما را در تصحیح، توسعه و تکمیل آن یاری دهند.

مؤلفان

فصل ۱

استدلال ریاضی

۱ـ۱ـ درک شهودی[۱]

طی قرن‌های متمادی، مردم باور کرده بودند که زمین صاف است و ستاره‌ها به‌دور آن در گردش هستند. آن‌ها نظریهٔ گردبودن زمین و چرخش آن به دور خورشید را رد می‌کردند. اگر چه امروزه این نظریه حتّی برای خردسالان نیز امری کم و بیش واضح است، لیکن با شهودِ مردم آن زمان مطابقت نداشت.

شهود می‌تواند یک دانش غریزی یا احساس بدون استدلال باشد.

وقتی که از شهود خود استفاده می‌کنیم، هیچ‌گاه نمی‌توانیم با اطمینان صد درصد بگوییم که نتیجه‌گیری ما درست است. با این حال در بسیاری مواقع، درک شهودی به ما کمک می‌کند که مطالب ریاضی را بهتر بفهمیم و حدس‌های بهتری برای اثبات قسمت‌های مختلف بزنیم. چنین حدس‌هایی کم و بیش محتمل و به‌صورت استدلال موقّت، رضایتی در ما به وجود می‌آورند که با اشتیاق بیشتری برای دستیابی به یک استدلال حتمی تلاش کنیم. معمولاً استدلال موقّت بر مبنای تمثیل و استقرا می‌باشد که در قسمت‌های بعد با محدودیت‌های آن‌ها آشنا می‌شویم.

۱ـ۲ـ استدلال تمثیلی یا قیاسی[۲]

در اکثر کارهای روزمرّه ــ از نتیجه‌گیری‌های سطحی تا موفقیّت‌های عمدهٔ علمی و یا کارهای هنری ــ از تمثیل یا قیاس استفاده می‌کنیم. قیاس که در واقع همان یافتن نوعی مشابهت بین مفاهیم گوناگون می‌باشد، در تمام سطوح مختلف قابل استفاده است. انواع تمثیل با توجّه به محدودیّت‌هایی که دارند، می‌توانند در ایجاد یک زمینهٔ شهودی برای درک بسیاری از مفاهیم و اثبات‌های ریاضی

۱ــ Intuitive

۲ــ Analogy

کمک مؤثّری باشند و نباید اهمیّت آن‌ها را نادیده گرفت. به مثال زیر توجّه کنید :

مثال ۱ : از تمثیل برای درک بهتر این حقیقت که **حاصلضرب عدد منفی در عدد منفی، عددی مثبت است** استفاده می‌کنیم :

وارد شدن آب به مخزن را عملی مثبت (+) و خروج آب از آن را عملی منفی (–) درنظر می‌گیریم. در نمایش فیلم نیز، جلوبردن فیلم را عملی مثبت (+) و عقب بردن آن‌را عملی منفی (–) به حساب می‌آوریم. حال اگر فیلمی نمایش داده شود که در آن، آب در حال خروج از یک مخزن است (–) و فیلم را به عقب برگردانیم (–)، آب دوباره به مخزن باز می گردد (+)! یعنی حاصل دو عمل منفی (خروج آب و عقب بردن فیلم)، عمل مثبت بازگشت آب به مخزن شده است.

همان‌طور که می‌دانید، مثال بالا به هیچ عنوان یک اثبات ریاضی نیست، امّا تمثیل خوبی است تا ما را برای اثبات دقیق آماده کند.

تمرین ۱ــ با توجه به داستان زیر، توضیح دهید که طوطی چه تمثیلی به کار برد و علت خندهٔ مردم چه بود؟

بود بقالی و وی را طوطیی — خوش‌نوایی سبز گویا طوطیی
در دکان بودی نگهبان دکان — نکته گفتی با همه سوداگران
در خطاب آدمی ناطق بدی — در نوای طوطیان حاذق بدی
جست از سوی دکان سویی گریخت — شیشه‌های روغن گل را بریخت
از سوی خانه بیامد خواجه‌اش — بر دکان بنشست فارغ خواجه‌وش
دید پر روغن دکان و جامه چرب — بر سرش زد گشت طوطی کَل ز ضرب
روزکی چندی سخن کوتاه کرد — مرد بقال از ندامت آه کرد
ریش برمی‌کند و می‌گفت ای دریغ — کآفتاب نعمتم شد زیر میغ
دست من بشکسته بودی آن‌زمان — چون زدم من بر سر آن خوش‌زبان
هدیه‌ها می‌داد هر درویش را — تا بیابد نطق مرغ خویش را
بعد سه روز و سه شب حیران و زار — بر دکان بنشسته بُد نومیدوار
می‌نمود آن مرغ را هرگون شگفت — تا که باشد کاندر آید او بگفت
جولقی سر برهنه می‌گذشت — با سر بی مو چو پشت طاس و طشت
طوطی اندر گفت آمد در زمان — بانگ بر درویش زد که هی فلان
از چه‌ای کل با کلان آمیختی — تو مگر از شیشه روغن ریختی

از قیاسش خنده آمد خلق را　کو چو خود پنداشت صاحب دلق را
کار پاکان‌را قیاس از خود مگیر　گرچه ماند در نبشتن شیر و شیر
جمله عالم زین سبب گمراه شد　کم کسی ز ابدال حق آگاه شد

۱ــ۳ــ استدلال استقرایی[1]

اگر وارد قریه‌ای شوید و اوّلین فردی که به او برخورد می‌کنید دارای چشمانی آبی باشد چه می‌گویید؟ حال اگر به گردش در کوچه پس کوچه‌های قریه بپردازید و متوجّه شوید که رنگ چشمان تمام افرادی که با آن‌ها در آن قریه مواجه شده‌اید آبی است، ممکن است نتیجه بگیرید که **رنگ چشمان تمامی افراد قریه آبی است**.

در سفر به قریه، شواهد متعدّدی را جمع‌آوری کردیم، متوجّه یکسان بودن نتایج شدیم و براساس آن‌ها، نتیجه‌گیری کلّی را انجام دادیم. عالمان تجربی نیز با روشی مشابه مشاهدات خود را نظم داده و با توجه به نظم حاکم بر آن‌ها، قوانین عمومی طبیعت را کشف می‌کنند. در علوم تجربی به این نوع استدلال، **روش تجربی یا علمی** و در ریاضی به آن **استدلال استقرایی** گفته می‌شود.

استدلال استقرایی روش نتیجه‌گیری کلّی بر مبنای مجموعهٔ محدودی از مشاهدات است.

مثال ۲: فرض کنید که اعداد متوالی فرد را با هم جمع می‌کنیم. برای این کار از ۱ شروع می‌کنیم:

$$۱+۳=۴$$

$$۱+۳+۵=۹$$

$$۱+۳+۵+۷=۱۶$$

با توجّه به مشاهدات بالا نتیجه می‌گیریم **تمام حاصل جمع‌ها مربع کامل هستند.**

حال با ادامهٔ الگوی بالا، نتیجهٔ به‌دست‌آمده را کنترل می‌کنیم.

از این یافته‌ها چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ آیا می‌توان ادّعا کرد که **همیشه** حاصل جمع اعداد فرد متوالی یک مربع کامل است؟

۱ــ Inductive reasoning

۱ــ۴ــ محدودیت استدلال استقرایی

مشاهدهٔ ۱ــ آب آنقدر می‌جوشد تا آن‌که چیزی از آن باقی نماند.

مشاهدهٔ ۲ــ برف آنقدر می‌جوشد تا آن‌که چیزی از آن باقی نماند.

مشاهدهٔ ۳ــ یخ آنقدر می‌جوشد تا آن‌که چیزی از آن باقی نماند.

نتیجه: هر چیزی آنقدر می‌جوشد تا آن‌که چیزی از آن باقی نماند.

در شکل بالا مرد غارنشین با مشاهده و جمع‌آوری اطّلاعات و دیدن الگویی که تکرار می‌شد نتیجه‌گیری کرد که «هر چیزی آنقدر می‌جوشد تا آن‌که چیزی از آن باقی نماند!»

همان‌طور که می‌بینید، شکل بالا ضعف اساسی چنین استدلالی را به ما نشان می‌دهد زیرا که همیشه این احتمال وجود دارد که شواهد بیشتری کشف بشوند تا نادرستی نتیجه‌گیری کلّی، بر مبنای مجموعهٔ محدودی از مشاهدات را نشان دهند.

تمرین ۲ــ محاسبات تعیین شده را انجام دهید تا اعدادی را که در معادلات زیر صدق می‌کنند پیدا کنید :

۱) $۱\times۸+۱=\boxed{}$

۲) $۱۲\times۸+۲=\boxed{}$

۳) $۱۲۳\times۸+۳=\boxed{}$

۴) $۱۲۳۴\times۸+۴=\boxed{}$

الف) آیا فکر می‌کنید این الگو تا بینهایت ادامه داشته باشد؟

ب) بدون محاسبه و با توجّه به الگوی بالا، اعدادی را که در معادلات زیر صدق می‌کنند حدس بزنید :

$$۵)\quad ۱۲۳۴۵ \times ۸ + ۵ = \boxed{}$$

$$۶)\quad ۱۲۳۴۵۶ \times ۸ + ۶ = \boxed{}$$

پ) نتایج قسمت (ب) را محاسبه کنید تا مشخّص شود که آیا حدس شما درست بوده است یا خیر؟

سعی کنید آنچه را شهودی به‌نظر می‌رسد، به‌طور رسمی و دقیق اثبات کنید و آنچه را که به طور رسمی و دقیق اثبات کرده‌اید به طور شهودی درک کنید. این یک ورزش مغزی جالب است.

جورج پولیا[۱]، ۱۹۴۵

۱ــ ۵ــ استقرای ریاضی[۲]

ممکن است به‌طور تصادفی مشاهده کرده باشید که: $۱+۸+۲۷+۶۴=۱۰۰$. با تشخیص مربع‌ها و مکعب‌های اعداد، شاید بتوانیم به مشاهدهٔ خود شکل جالب‌تری بدهیم :

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+۴^۳=۱۰^۲$$

چطور این اتّفاق افتاد؟ آیا همیشه مجموع مکعب‌های متوالی، مربع یک عدد است؟ برای پاسخ به کنجکاوی خود، می‌توانیم موارد مشخّص دیگری را نیز بررسی کنیم و برای تکامل و یگانگی حالت $n=۱$ ، یعنی حالتی که فقط یک عدد مکعب شده وجود دارد، را نیز اضافه می‌کنیم :

مربع مجموع	مجموع مکعب‌ها	مکعب‌های اعداد متوالی
$۱^۲$	۱	$۱^۳$
$۳^۲$	۹	$۱^۳+۲^۳$
$۶^۲$	۳۶	$۱^۳+۲^۳+۳^۳$
$۱۰^۲$	۱۰۰	$۱^۳+۲^۳+۳^۳+۴^۳$
$۱۵^۲$	۲۲۵	$۱^۳+۲^۳+۳^۳+۴^۳+۵^۳$

۱ــ George Polya

۲ــ برگرفته از کتاب ?How to solve it اثر جورج پولیا.

با جمع‌آوری مشاهدات فوق و استفاده از استدلال استقرایی می‌بینیم که :

مجموع مکعب‌های اعداد متوالی برابر است با مربع مجموع آن‌ها. امّا چنین نتیجه‌گیری‌ای کامل نیست. به همین دلیل است که در ریاضی استقرا را نه فقط با مشاهدات بلکه به‌کمک **اثبات دقیق** نیز محک می‌زنیم. حال برای اثبات دقیق به‌طریق زیر عمل می‌کنیم :

شاید بدانیم که $۱+۲+۳+...+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$. (اثبات کنید!) می‌خواهیم تحقیق کنیم و ببینیم که اگر مجموع مکعب‌های n عدد متوالی برابر با مربع مجموع آن‌ها باشد

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+...+n^۳=\left[\frac{n(n+۱)}{۲}\right]^۲ \qquad (۱)$$

آیا این ادّعا برای n+۱ عدد متوالی نیز درست است؟ یعنی آیا رابطهٔ

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+...+n^۳+(n+۱)^۳=\left[\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}\right]^۲ \qquad (۲)$$

نیز برقرار است؟

با یک کنترل ساده، رابطهٔ زیر را با کم کردن (۱) از (۲) به‌دست می‌آوریم :

$$(n+۱)^۳=\left[\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}\right]^۲-\left[\frac{n(n+۱)}{۲}\right]^۲ \qquad (۳)$$

از جملهٔ مشترک $\left(\frac{n+۱}{۲}\right)^۲$ فاکتور می‌گیریم :

$$(n+۱)^۳=\left(\frac{n+۱}{۲}\right)^۲\left[(n+۲)^۲-n^۲\right] \qquad (۴)$$

$$=\frac{(n+۱)^۲}{۴}\left[n^۲+۴n+۴-n^۲\right] \qquad (۵)$$

$$=\frac{(n+۱)^۲}{۴}[۴n+۴] \qquad (۶)$$

$$=\frac{(n+۱)^۲}{۴}(n+۱)\times۴ \qquad (۷)$$

$$=(n+۱)^۳ \qquad (۸)$$

رابطهٔ تجربی ما امتحان حیاتی را گذراند، یعنی درستی تساوی (۳) را نتیجه گرفتیم که معادل

تساوی (۲) است، یعنی

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+\ ...\ +n^۳+(n+۱)^۳=\left[\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}\right]^۲ \qquad (۹)$$

در بررسی این موضوع، درستی ادّعا را در حالت‌های خاص از $n=۱$ تا $n=۵$ مشاهده کردیم. سپس با فرضی که این ادّعا برای nاُمین حالت درست است، نشان دادیم که برای (n+۱) اُمین حالت نیز چنین ادّعایی درست است. حال با اطمینان خاطر می‌گوییم :

مجموع مکعب‌های n عدد متوالی، برابر با مربع مجموع آن‌هاست.

مطلب فوق نمونهٔ خوبی برای گذار از استدلال استقرایی (تجربی) به **استقرای ریاضی** است. برای بهتر فهمیدن استقرای ریاضی به مثال زیر توجّه کنید :

مثال ۳: برای هر عدد صحیح و مثبت n ثابت کنید که :

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\ ...\ +\frac{۱}{۲^n}=۱-\frac{۱}{۲^n} \qquad (۱)$$

حل: اگر $n=۱$ ، آنگاه :

$$\frac{۱}{۲^۱}=\frac{۱}{۲}=۱-\frac{۱}{۲^۱} \qquad (۲)$$

می‌بینیم که در این حالت، تساوی (۱) درست است.

اگر $n=۲$ ، آنگاه

$$\frac{۱}{۲^۱}+\frac{۱}{۲^۲}=\frac{۳}{۴}=۱-\frac{۱}{۲^۲} \qquad (۳)$$

که مجدداً تساوی (۱) را نشان می‌دهد. این تساوی را می‌توانیم با جمع (۲) و $\frac{۱}{۲^۲}$ به‌دست آوریم :

$$\left(۱-\frac{۱}{۲^۱}\right)+\frac{۱}{۲^۲}=\frac{۳}{۲^۲}=۱-\frac{۱}{۲^۲}$$

ادامهٔ این بررسی برای تمام اعداد عملی نیست، پس چه کار کنیم؟

یک قدم دیگر هم جلو می‌رویم و با استفاده از نتایج به‌دست‌آمده برای دو جملهٔ اوّل، حالت $n=۳$ را نیز بررسی می‌کنیم :

$$\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲}\right)+\frac{۱}{۲^۳}=\left(۱-\frac{۱}{۲^۲}\right)+\frac{۱}{۲^۳}=\frac{۷}{۲^۳}=۱-\frac{۱}{۲^۳} \qquad (۴)$$

درنتیجه درستی رابطه برای حالت $n=۳$ را نیز نتیجه گرفتیم.

حال اگر درحالت کلّی، درستی رابطه را برای $n=k$ فرض کنیم، یعنی داشته باشیم

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۲^۳}+\ \dots\ +\frac{۱}{۲^k}=۱-\frac{۱}{۲^k}$$

و بتوانیم از این فرض، درستی رابطه را برای $n=k+۱$ یعنی

$$\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۲^۳}+\ \dots\ +\frac{۱}{۲^k}\right)+\frac{۱}{۲^{k+۱}}=۱-\frac{۱}{۲^{k+۱}} \qquad (۵)$$

نتیجه بگیریم، آنگاه می‌توانیم ادّعا کنیم که تساوی (۱) در هر حالتی درست است.

در طرف اوّل تساوی (۵) به جای مقدار داخل پرانتز، معادل آن یعنی $\left(۱-\frac{۱}{۲^k}\right)$ را از تساوی(۱) جایگزین می‌کنیم

$$\left(۱-\frac{۱}{۲^k}\right)+\frac{۱}{۲^{k+۱}} \qquad (۶)$$

$$=۱-\frac{۲}{۲^{k+۱}}+\frac{۱}{۲^{k+۱}} \qquad (۷)$$

$$=۱-\frac{۱}{۲^{k+۱}} \qquad (۸)$$

از درستی رابطه در حالت $n=k$ ، درستیِ آن در حالت $n=k+۱$ نیز ثابت شد. این‌گونه اثبات را، اثبات به‌وسیلهٔ **استقرای ریاضی** یا اثبات به‌وسیلهٔ **اصل استقرا** می‌نامیم که از اهمیّت ویژه‌ای در ریاضیّات برخوردار است. اصل استقرا برای اثبات رابطه‌هایی نظیر رابطهٔ بالا مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اصل استقرا

فرض کنید $P(n)$ حکمی دربارهٔ عددطبیعی n باشد. اگر $P(۱)$ درست باشد و از درستی $P(k)$ ، درستی $P(k+۱)$ نتیجه شود، در این صورت $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n نیز درست است.

درنتیجه بنابراصل استقرا، برای هر عدد طبیعی n، تساوی (۱) در مثال قبل، درست است.

برای استفاده از اصل استقرا گام‌های زیر را برداشتیم :

گام ۱: درستی حکم را برای $n=۱$ نشان دادیم.

گام ۲: ثابت کردیم که اگر حکم برای $n=k$ درست باشد، آنگاه برای $n=k+۱$ نیز درست است.

مثال ۴: با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n، $۴^{۲n}-۱$ بر ۵ بخش‌پذیر است.

حل: با دانستن این که $P_n=۴^{۲n}-۱$ بر ۵ بخش‌پذیر است، گام اوّل را برمی‌داریم.

گام ۱: درستی حکم را برای $n=۱$ نشان می‌دهیم :

$$P_۱=۴^{۲(۱)}-۱=۱۵=۵\times ۳ \qquad (۱)$$

که بر ۵ بخش‌پذیر است پس $P(۱)$ درست است.

گام ۲: می‌خواهیم ثابت کنیم که اگر حکم برای $P(k)$ درست باشد، درنتیجه برای $P(k+۱)$ نیز درست است.

فرض کنیم :

$$P_k=۴^{۲k}-۱=۵r \qquad (۲)$$

که بر ۵ بخش‌پذیر است. حال باید بخش‌پذیر بودن

$$P_{k+۱}=۴^{۲(k+۱)}-۱ \qquad (۳)$$

بر ۵ را نشان دهیم. برای این کار، طرفین تساوی (۲) را در $۴^۲$ ضرب می‌کنیم یعنی

$$۴^۲(۴^{۲k}-۱)=۴^۲(۵r)$$

از ساده‌کردن (۳)، تساوی (۴) به‌دست می‌آید :

$$۴^{۲k+۲}-۴^۲=۴^۲(۵r) \qquad (۴)$$

با اضافه‌کردن ۱۵ به طرفین تساوی خواهیم داشت :

$$۴^{۲(k+۱)}-۱=۱۵+۴^۲(۵r) \qquad (۵)$$

$$=۱۵+۱۶(۵r) \qquad (۶)$$

$$=۵(۳+۱۶r) \qquad (۷)$$

تساوی (۷) بخش‌پذیر بودن $P(k+۱)$ بر ۵ را نشان می‌دهد. یعنی از $P(k)$، درستی $P(k+۱)$ را نتیجه گرفتیم. در این صورت بنابر اصل استقرا، $P(n)$ برای هر عدد صحیح و مثبت n نیز درست است.

در حالت کلی، از گام‌های ۱ و ۲ نتایج زیر را به‌دست می‌آوریم :

$P(۱)$ ، $P(۲)$ را نتیجه می‌دهد.

$P(۲)$، $P(۳)$ را نتیجه می‌دهد.

$P(۳)$ ، $P(۴)$ را نتیجه می‌دهد.

و الی آخر که این توجیه کنندهٔ درست بودن حکم $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n است.

۱ـ۶ـ استقرای تعمیم‌یافته

در مثال‌هایی که تاکنون دیدیم، استقرای ریاضی را از $n=۱$ شروع کردیم، یعنی درستی حکم مورد نظر را برای $n=۱$ نشان دادیم. امّا گاهی لازم است که اوّلین مرحلهٔ استقرا را از یک عدد طبیعی $n>۱$ آغاز کنیم. به مثال زیر توجّه کنید:

مثال ۵: ثابت کنید عدد طبیعی مناسبی مانند $m>۱$ وجود دارد به طوری‌که برای هر عدد طبیعی n $(n \ge m)$ داریم

(۱) $$n! > ۳^n$$

حل: ابتدا با اندکی جستجو، تحقیق می‌کنیم که n چه اندازه باید بزرگ باشد؟

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
$n!$	۱	۲	۶	۲۴	۱۲۰	۷۲۰	۵۰۴۰	۴۰۳۲۰
۳^n	۳	۹	۲۷	۸۱	۲۴۳	۷۲۹	۲۱۸۷	۶۵۶۱

می‌بینیم که برای nهای طبیعی کوچکتر از ۷، اصلاً چنین حکمی درست نیست. امّا برای $n=۷$، رابطهٔ $n! > ۳^n$ درست است و به نظر می‌رسد که برای nهای بزرگتر از ۷ نیز حکم درست باشد. حال فرض می‌کنیم برای $k \ge ۷$ حکم درست باشد یعنی: $k! > ۳^k$. آنگاه درستی حکم زیر را تحقیق می‌کنیم:

(۲) $$(k+۱)! > ۳^{k+۱}$$

برای نشان‌دادن (۲) طرفین $k! > ۳^k$ را در $(k+۱)$ ضرب می‌کنیم:

(۳) $$(k+۱)k! > (k+۱)۳^k$$

و چون $k \ge ۷$ فرض شده است، پس:

(۴) $$(k+۱)k! > ۷ \times ۳^k$$

با این حال می‌بینیم که طرفین نامساوی (۴) چنین خاصیتی را دارد که:

(۵) $$۷ \times ۳^k > ۳ \times ۳^k = ۳^{k+۱}$$

پس:

(۶) $$۷ \times ۳^k > ۳^{k+۱}$$

درنتیجه طبق (۴) و (۶):

(۷) $$(k+۱)k! > ۳^{k+۱}$$

اما طبق تعریف:

(۸) $$(k+۱)k! = (k+۱)!$$

که معادل آن‌را در (۷) قرار می‌دهیم درنتیجه:

(۹) $$(k+۱)! > ۳^{k+۱}$$

بدین ترتیب برای $k \geq ۷$ ، نشان دادیم که اگر $k! > ۳^k$ ، آنگاه $(k+۱)! > ۳^{k+۱}$. حال با اطمینان می‌توانیم بگوییم که برای هر $n \geq ۷$ داریم $n! > ۳^n$.

در این مثال مشاهده شد m مناسب ۷ است که به روش جستجو آن‌را به دست آوردیم.

چنین شیوهٔ استدلالی را روش **استقرای تعمیم‌یافته** می‌گویند.

اصل استقرای تعمیم‌یافته

فرض کنید $P(n)$ حکمی دربارهٔ عدد طبیعی n باشد. اگر $P(m)$ برای $m > ۱$ درست باشد و از درستی $P(k)$ برای هر عدد طبیعی $k \geq m$ درستی $P(k+۱)$ نتیجه شود، آنگاه $P(n)$ برای هر عدد طبیعی $n \geq m$ درست است. (دقّت کنید که در هرمسأله‌ای باید m مناسب را پیدا کرد.)

برای استفاده از اصل استقرای تعمیم یافته، گام‌های زیر را برمی‌داریم :

گام ۱: m مناسب را به‌دست می‌آوریم،

گام ۲: درستی حکم را برای $n = m$ نشان می‌دهیم،

گام ۳: ثابت می‌کنیم که اگر حکم برای $n = k \geq m$ درست باشد، آنگاه حکم برای $n = k+۱$ نیز درست است.

آنگاه نتیجه می‌شود که حکم برای هر عدد طبیعی $n \geq m$ درست است.

تمرین

۱ــ برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید :

الف) $۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \ldots + n^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$

ب) $۲ + ۶ + ۱۰ + \ldots + (۴n-۲) = ۲n^۲$

پ) $۱ + ۳ + ۵ + \ldots + (۲n-۱) = n^۲$

ت) $۱ + ۲ + ۳ + \ldots + n < \frac{۱}{۸}(۲n+۱)^۲$

ث) $۱ \times ۲ + ۲ \times ۳ + ۳ \times ۴ + \ldots + n(n+۱) = \frac{n(n+۱)(n+۲)}{۳}$

۲ــ اگر $r \neq ۱$ ، برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید :

$$۱ + r + r^{۲} + \ldots + r^{n} = \frac{۱ - r^{n+۱}}{۱ - r}$$

۳ــ در هر یک از بندهای زیر ابتدا عدد طبیعی مناسب m را بیابید و سپس حکم را برای هر عدد طبیعی $n (n \geq m)$ ثابت کنید.

الف) $۲^{n} > n^{۲}$

ب) $۲^{n} < n!$

پ) $۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۷} + \ldots + \frac{۱}{۲^{n} - ۱} < \frac{n}{۲}$

۴ــ مجموع جملات زیر را حدس بزنید و ادعای خود را با استقرای ریاضی ثابت کنید :

$$\frac{۱}{۱ \times ۲} + \frac{۱}{۲ \times ۳} + \frac{۱}{۳ \times ۴} + \ldots + \frac{۱}{n(n+۱)}$$

۵ــ با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید :

الف) تعداد قطرهای هر n ضلعی محدّب برابر است با $\frac{n(n-۳)}{۲}$.

ب) مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدّب برابر است با $(۲n - ۴) \times ۹۰^{\circ}$.

۶ــ ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n، $۸^{n} - ۱$ بر ۷ بخش‌پذیر است.

۷ــ اگر $a \geq -۱$ و $n \in \mathbb{N}$ ، آنگاه به کمک استقرای ریاضی درستی رابطهٔ زیر را ثابت کنید :

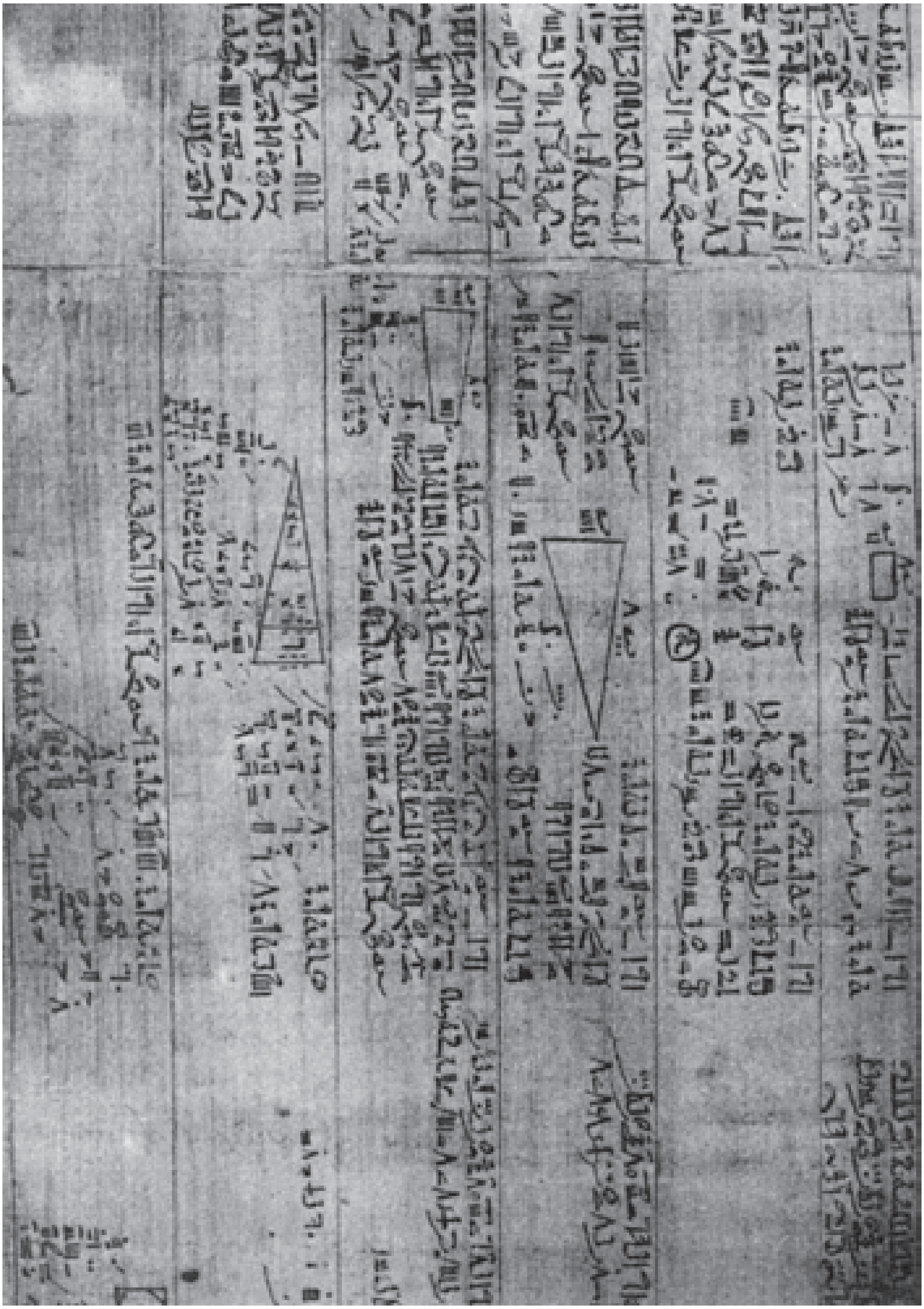
$$(۱ + a)^{n} \geq ۱ + na$$

۸ــ نامساوی مثلث برای هر دو عدد حقیقی a و b به‌صورت $|a + b| \leq |a| + |b|$ برقرار است. با استفاده از استقرا ثابت کنید که برای هر n عدد حقیقی $x_۱$ ، $x_۲$ ، . . . ، x_n داریم :

$$|x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n| \leq |x_۱| + |x_۲| + \ldots + |x_n|$$

مجلهٔ ریاضی

*از زمان‌های قدیم، ایده‌های استقرا وجود داشته، از آن استفاده می‌شده است. با این حال، اثبات به کمک استقرا از اوایل قرن شانزدهم میلادی متداول شده است و توسط بعضی از ریاضیدانان اروپایی مورد استفاده قرار گرفته است. در قرن هفدهم **فرما** ریاضیدان مشهور،استفاده از استقرا را با تنوع بیشتری مطرح ساخت. ولی اصطلاح «استقرای ریاضی» در اوایل قرن نوزدهم توسط **دِمُرگان**، ریاضیدان انگلیسی، به کار رفت و روش استقرا در اثبات‌های ریاضی به‌طور مدون مورد استفاده قرار گرفت.*



در طول تاریخ، مردم از علامت‌ها و نشانه‌های مختلفی برای نمایش اعداد استفاده کرده‌اند. بعضی از این نشانه‌ها در پاپیروس رایند دیده می‌شوند. ریاضیدان‌ها هنوز به مطالعه و یادگیری بیشتر در مورد اعداد مشغولند.

۱ــ۷ــ استدلال استنتاجی[1]

در مقدمهٔ پاپیروس رایند که شاید قدیمی‌ترین تاریخ موجود ریاضی باشد (۱۶۵۰ سال قبل از میلاد) چنین آمده است:
«به‌جرأت می‌توان گفت که بارزترین مشخّصهٔ شعور انسان که نشان‌دهندهٔ درجهٔ تمدن هر ملّت است، همان قدرت استدلال کردن است و به‌طور کلّی این قدرت به بهترین وجهی می‌تواند در مهارت‌های ریاضی افراد آن ملّت به نمایش گذاشته شود.»

یکی از مسایلی که در تاریخ ریاضی مصر ــ پاپیروس رایند ــ موجود است یک سرگرمی به‌صورت بازی با اعداد است. با توجّه به دستورالعمل‌های مسأله، عددی انتخاب می‌شود و سپس چندین کار دیگر روی آن انجام می‌شود. در پایان بدون درنظر گرفتن عدد انتخابی، نتیجه همیشه یکسان است!

مثال ۱: این مثال از نوع سرگرمی با اعداد است. هر مرحله از این بازی در سمت راست و نتایج هر مرحله برای ۴ عدد انتخابی و تصادفی در سمت چپ جدول زیر نشان داده شده‌است.

یک عدد انتخاب کنید	**۴**	**۷**	**۱۲**	**۳۵**
به آن ۵ را اضافه کنید	۹	۱۲	۱۷	۴۰
نتیجه را دوبرابر کنید	۱۸	۲۴	۳۴	۸۰
از آن ۴ را کم کنید	۱۴	۲۰	۳۰	۷۶
حاصل را بر ۲ تقسیم کنید	۷	۱۰	۱۵	۳۸
عددی را که ازابتدا انتخاب کرده بودید از این نتیجهٔ تقسیم کم کنید	۳	۳	۳	۳

بررسی بالا ما را مطمئن می‌سازد که نتیجه همیشه برابر با ۳ است.

اگرچه با استدلال استقرایی می‌توان استدلال کرد که این نتیجه **شاید** برای همهٔ اعداد درست باشد، امّا به هر حال برای اثبات کلّی این مطلب، یعنی، **تبدیل شاید به باید**، به استدلال استنتاجی نیازمندیم.

مثال ۲: همان مثال قبلی را با اندکی تغییر بررسی می‌کنیم و به جای انتخاب یک یا چند عدد

۱ــ Deductive reasoning

مشخص در موقع شروع از علامتگذاری استفاده می‌کنیم. در طول بازی، مربّع کوچک معرّف عدد انتخابی اولّیه است و برای هر بار افزودن یا کاستن اعداد جدید،از یک دایرهٔ کوچک استفاده می‌کنیم.

عدد انتخابی	□
عدد انتخابی به‌اضافهٔ ۵	□ ○○○○○
دوبرابر نتیجهٔ قبل	□ ○○○○○ □ ○○○○○
کم کردن ۴ واحد	□ ○○○ □ ○○○
نصف نتیجه قبل	□ ○○○
کم کردن عدد اولیّه	○○○

به این ترتیب ثابت کردیم که نتیجه همیشه ۳ است. حال به وضوح می‌بینیم که عدد انتخابی اولّیه هرچه که باشد، باز هم نتیجه ۳ است!

شاید مربع‌ها و دایره‌ها نمادهای جالبی برای استفادهٔ همیشگی نباشند. در ریاضیّات معمولاً از **حروف** برای نشان دادن اعداد دلخواه استفاده می‌کنیم.

مثال ۳: حال مثال قبلی را با نماد جبری، یعنی با استفاده از **حرف** برای عدد انتخابی اولّیه، دوباره بررسی می‌کنیم:

عدد انتخابی	n
عدد انتخابی به‌اضافه ۵	n+۵
دو برابر نتیجه قبل	۲n+۱۰
کم کردن ۴واحد	۲n+۶
نصف نتیجه قبل	n+۳
کم کردن عدد اولیه	۳

نکته‌ای که در هر سه مثال به چشم می‌خورد این است که نتایجی را بر مبنای عباراتی که درستی آن‌ها را قبول کرده‌ایم به‌دست آوردیم. یعنی از استدلال استنتاجی استفاده کردیم.

استدلال استنتاجی روش نتیجه‌گیری با استفاده از حقایقی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.

مثال‌های فراوانی از دنیای اطراف ما وجود دارند که نشان‌دهندهٔ استفاده از استدلال استنتاجی در زندگی روزمرّه هستند.

مثال ۴: رستورانی برای جلب مشتری و فروش بیشتر، اعلام کرده است که بین ساعت‌های ۱۲ ظهر تا ۲ بعدازظهر اگر کسی در آن رستوران غذایی سفارش داد و آماده شدن غذا بیش از ۱۰ دقیقه به طول انجامید، غذا را مجانی به مشتری بدهد. زمانی که خانوادهٔ بهارلو به این رستوران رفتند، عبارت‌های زیر درست بودند :

الف) ساعت بین ۱۲ ظهر و۲ بعدازظهر بود.

ب) آماده شدن غذا بیش از ۱۰ دقیقه به‌طول انجامید.

خانوادهٔ بهارلو نتیجه گرفتند که غذایشان مجانی خواهد بود که نتیجه‌گیری درستی بود!

این مثال نیز نمونه‌ای از استدلال استنتاجی است.

مثال ۵: فرض کنید که دو عدد فرد را با هم جمع می‌کنیم. توضیح دهید که چرا مجموع آن‌ها همیشه زوج است؟

حل: فرض کنید $2m+1$ و $2n+1$ نشان‌دهندهٔ دو عدد فرد باشند که m و n اعداد طبیعی هستند. درنتیجه مجموع آن‌ها چنین است :

$$(2m+1)+(2n+1)=2m+2n+2=2(m+n+1)$$

به دلیل وجود ضریب ۲ در این مجموع، نتیجه می‌گیریم که **مجموع دوعدد فرد همیشه زوج است.**

ثابت کردیم که مجموع دو عدد فرد همیشه یک عدد زوج است، حتّی برای اعدادی که آن‌ها را جمع نکرده‌ایم! این امر نشان‌دهندهٔ قدرت استدلال استنتاجی است.

وقتی از استدلال استنتاجی استفاده می‌کنیم، مطمئن هستیم که نتیجه همیشه درست است.

هدف از مثال‌های فوق، ایجاد زمینه‌ای مناسب برای آشنایی با مفهوم استدلال استنتاجی بود.

بیشتر این مثال‌ها نمونه‌هایی از **قضایای کلّی** هستند.

***قضایای کلّی** احکامی هستند که همیشه برقرار می‌باشند.*

اکثر قضیه‌های مهمّ ریاضی قضایای کلّی هستند. به عنوان مثال، اهمیّت قضیهٔ فیثاغورث در این نیست که در **یک** مثلث قائم‌الزاویه صدق می‌کند، بلکه این قضیه برای **همهٔ** مثلث‌های قائم‌الزاویه صحیح است، و یا اهمیّت اتّحاد $\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$ در این است که x **هر** زاویه‌ای که باشد، این تساوی برقرار است.

۱ـ۸ـ مثال نقض

استدلال استنتاجی به ما اطمینان می‌دهد که نتیجهٔ به‌دست آمده حتماً درست است. این جامعیّت، یکی از نشانه‌های اقتدار و زیبایی این نوع استدلال است. گاهی اتّفاق می‌افتد که با مثالی، عمومیّت نتیجه‌ای که حدس می‌زنیم نقض می‌شود.

مثال ۶: بسیاری از اعداد طبیعی را می‌توان به‌صورت حاصل جمع اعداد متوالی نوشت. به‌نمونه‌های زیر توجّه کنید :

$$۹ = ۲ + ۳ + ۴$$
$$۱۵ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵$$
$$۲۲ = ۴ + ۵ + ۶ + ۷$$
$$۳۹ = ۱۲ + ۱۳ + ۱۴$$
$$۷۴ = ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰$$

حال این سؤال مطرح می‌شود که آیا هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع اعداد متوالی نوشت؟

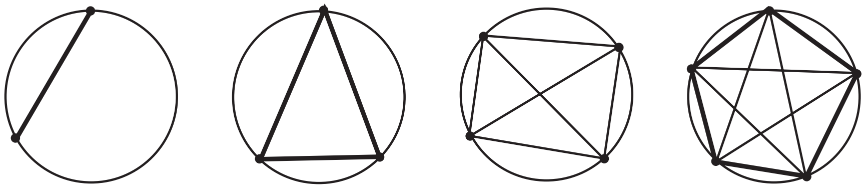
حل: برای درست فهمیدن مسأله، باید به دو سؤال اساسی پاسخ گوییم. اوّل آن‌که آیا مثال‌ها برای حل مسأله کافی هستند؟ و دوّم این‌که آیا امکان دارد که تمام اعداد طبیعی را برای بررسیِ داشتنِ چنین کیفیّتی کنترل کرد؟

یکی از راه‌های خوب آن است که سعی کنیم یک عدد طبیعی بیابیم که چنین کیفیّتی را نداشته باشد. از هر عددی که بخواهیم شروع می‌کنیم و به جستجو ادامه می‌دهیم.

الف) $۱۲ = ۳ + ۴ + ۵$
ب) $۱۷ = ۸ + ۹$
پ) $۲۶ = ۵ + ۶ + ۷ + ۸$
ت) $۳۰ = ۹ + ۱۰ + ۱۱$
ث) $۴۰ = ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$
ج) $۱۰۰ = ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ + ۲۱ + ۲۲$
چ) $۱۳۰ = ۳۱ + ۳۲ + ۳۳ + ۳۴$
ح) $۶ = ۱ + ۲ + ۳$
خ) $۷ = ۳ + ۴$
د) $۸ = ?$

می‌بینیم که عدد ۸ را نمی‌توان به‌صورت مجموع اعدادِ متوالی نوشت. عدد ۸ **مثال نقضی** است که نشان می‌دهد هر عدد طبیعی را نمی‌توان به صورت اعداد متوالی نوشت.

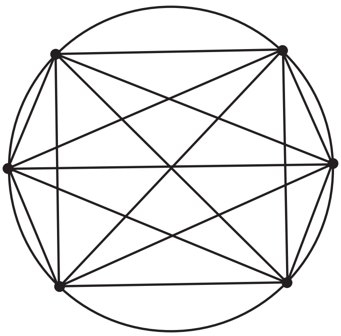
مثال ۷: اگر دو نقطهٔ اختیاری بر روی پیرامون دایره را به‌وسیلهٔ یک پاره‌خط به هم وصل کنیم، دایره به دو ناحیه تقسیم می‌شود. با اتّصال سه نقطهٔ اختیاری بر روی دایره، دایره به ۴ ناحیه تقسیم می‌شود. شکل زیر این موضوع را برای ۲، ۳، ۴ و ۵ نقطهٔ اختیاری بر روی دایره نشان می‌دهد :



تعداد نقطه‌ها	۲	۳	۴	۵
تعداد ناحیه‌ها	۲	۴	۸	۱۶

نتیجه احتمالی: اگر تعداد نقاط ۶ باشد، تعداد ناحیه‌ها ۳۲ است.

حل: ۶ نقطه بر روی دایره‌ای اختیار می‌کنیم و آن‌ها را به وسیلهٔ پاره‌خط‌هایی به هم وصل می‌کنیم. با توجّه به شکل روبرو، می‌بینیم که تعداد ناحیه‌ها به‌صورت ۲، ۴، ۸، ۱۶، ... افزایش می‌یابند. با استدلال استقرایی، به نظر می‌رسد که پاره‌خط‌هایی که ۶ نقطه را به هم متّصل می‌کنند، دایره را به ۳۲ ناحیه تقسیم می‌کنند. امّا با توجّه به شکل روبرو مشاهده می‌شود که این **نتیجهٔ احتمالی** نادرست است. با شمردن تعداد ناحیه‌ها، می‌بینیم که تعداد آن‌ها ۳۰ است.



این مثال، معرّف مراحلی است که نشان‌دهندهٔ نادرستی حدس ما است. اگرحتّی یک مثال پیدا شود که حدس ما را نادرست کند، گوییم که با **مثال نقض** نادرستی حدس ثابت شده است.

*به مثالی که نشان دهد نتیجه‌گیری کلّی غلط است، **مثال نقض** می‌گویند.*

مثال ۸: برای هر دو عدد گنگ x و y می‌خواهیم ببینیم آیا $x+y$ نیزگنگ است یا خیر؟

حل: کافی‌است نشان دهیم که x و yای پیدا می‌شوند که گنگ باشند امّا مجموع آن‌ها، یعنی $x+y$، گنگ نباشد. برای این کار اگر دو عدد گنگ $x=۲+\sqrt{۲}$ و $y=۲-\sqrt{۲}$ را انتخاب کنیم، می‌بینیم

$$x+y=(۲+\sqrt{۲})+(۲-\sqrt{۲})$$
$$=۲+۲=۴$$

که یک عدد گویا است. پس این مثال، نتیجه‌گیری کلّی را نقض کرد. یعنی مجموع دو عدد گنگ همیشه یک عدد گنگ نیست.

۱ــ۹ــ قضایای شرطی

بیشتر شما با ضرب المثل‌های فارسی که معمولاً هدفشان آگاه کردن مردم از پیامدهای کارهای بخصوصی است آشنا هستید. «نابرده رنج گنج میسّر نمی‌شود»، «کارها نیکو شود امّا به‌صبر» و «سحرخیز باش تا کامروا باشی» از این نوع ضرب المثل‌ها هستند، یعنی اگر به‌ترتیب شرط «رنج بردن»، «صبوری» و «سحرخیزی» وجود داشته باشد، آنگاه «رسیدن به گنج »، «نیکویی در کارها» و «کامروایی» میسّر می‌شود.

همان‌طور که دقّت کرده‌اید، در سرتاسر ریاضی که تا به حال یاد گرفته‌اید، به دفعات با جملات شرطی از قبیل «اگر $x>۵$ آنگاه $۲x>۱۰$» که به ازای **تمام** مقادیر حقیقی x برقرار **هستند** روبرو شده‌اید. این نوع جملات را **قضایای شرطی** می‌نامند.

قسمت شرطی چنین جمله‌هایی (در مثال بالا $x>۵$) را **فرض قضیه** و نتیجهٔ جمله را (در مثال بالا $۲x>۱۰$) **حکم قضیه** می‌نامند.

مثال ۹: «هر نقطهٔ دلخواه روی عمود منصّف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است» مثالی از یک قضیهٔ شرطی است که در آن M معرّف نقطهٔ دلخواه بر عمود منصّف پاره‌خط AB است و

فرض: نقطهٔ M بر عمودمنصّف پاره‌خط AB است.

حکم: $MA=MB$

حال به مثال زیر و ویژگی آن توجّه کنید :

مثال ۱۰: اگر نقطهٔ M از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله باشد یعنی : $MA=MB$، آنگاه M بر عمودمنصّف پاره‌خط AB قرار دارد.

دیده می‌شود که جای فرض و حکم در این مثال، با فرض و حکم مثال بالا عوض شده است.

جای فرض و حکم در عکس قضیهٔ شرطی با هم عوض می‌شوند.

نکته: باید توجّه داشت که همیشه عکس قضیه، یک قضیه نیست.

مثال ۱۱: اگر $x > 0$ ، آنگاه $x^2 > 0$

این مثال یک قضیه است که در آن :

فرض: $x > 0$

حکم: $x^2 > 0$

حال عکس این قضیه را در نظر بگیرید

«اگر $x^2 > 0$ ، آنگاه $x > 0$» که در اینجا

فرض: $x^2 > 0$

حکم: $x > 0$

امّا این یک قضیهٔ کلی نیست، زیرا به‌ازای xهای منفی ــ در حالی که فرض درست است ــ حکم درست نیست. مثلاً $x^2 = (-1)^2 = 1 > 0$ امّا $x = -1 < 0$.

۱ــ۱۰ــ اثبات بازگشتی

از دانش‌آموزان کلاسی خواسته شده بود که قضیهٔ زیر را اثبات کنند :

قضیه: ثابت کنید که به‌ازای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y، نابرابری زیر همیشه برقرار است.

$$\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy} \qquad (1)$$

نحوهٔ استدلال یکی از دانش‌آموزان چنین بود :

او طرفین (۱) را به توان ۲ رساند :

$$x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \qquad (2)$$

سپس $4xy$ را از طرفین (۲) کم کرد و آنرا بدین‌صورت نوشت :

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \qquad (3)$$

$$(x-y)^2 \geq 0 \qquad (4)$$

و نتیجه گرفت که چون همیشه $(x-y)^۲$ مثبت یا صفر است، پس (۴) برقرار و حکم ثابت است.

این‌گونه استدلال ویژهٔ این دانش‌آموز نیست و در بین سایر دانش‌آموزان نیز کم و بیش مرسوم است. آن‌ها به جای اثبات حکم، آن حکم را درست فرض کرده و به یک نتیجهٔ بدیهی یا دانسته شده ــ یعنی از حکم به فرض ــ می‌رسند. این شیوه،اثبات نیست بلکه ایدهٔ خوبی برای اثبات به دانش‌آموزان می‌دهد و همچنان‌که در ابتدای این فصل نیز گفته شد، استفاده از چنین روش‌های شهودی برای فهمیدن استدلال واقعی مفید است. با این حال باید دقّت داشته باشیم که استدلال شهودی ــ هرچند طبیعی و مفید ــ اگرچه می‌تواند مارا به‌طرف اثبات ریاضی راهبری کند امّا یک **اثبات ریاضی** نیست.

حال به بررسی مجدد اثبات فوق می‌پردازیم. می‌بینیم که درواقع این دانش‌آموز عکس قضیهٔ فوق را ثابت کرده بود، یعنی با فرض درستی

$$\frac{۱}{۲}(x+y)\geq\sqrt{xy} \qquad (۱)$$

به‌درستی (۴)، یعنی $(x-y)^۲\geq ۰$، رسیده بود. درحالی که فرض قضیه این بود که x و y اعداد حقیقی و مثبت هستند، پس در مورد آن‌ها (۴) برقرار است و هدف، اثبات حکم یعنی اثبات درستی نامساوی (۱) است:

$$\frac{۱}{۲}(x+y)\geq\sqrt{xy}$$

با این توضیحات، دوباره به اثبات ریاضی این قضیه می‌پردازیم.

اثبات: چون $(x-y)^۲$ همیشه بزرگتر و یا مساوی صفر است، نامساوی (۳) یعنی $x^۲-۲xy+y^۲\geq ۰$ از آن نتیجه می‌شود.

با افزودن $۴xy$ به طرفین نامساوی (۳)، نامساوی (۲) به‌دست می‌آید، یعنی:

$$x^۲+۲xy+y^۲\geq ۴xy \qquad (۲)$$

نامساوی (۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$(x+y)^۲\geq ۴xy$$

چون x و y هر دو مثبت هستند، درنتیجه:

$$\sqrt{(x+y)^۲}\geq\sqrt{۴xy}$$

و یا:

$$(x+y)\geq ۲\sqrt{xy}$$

که با تقسیم طرفین بر ۲ داریم :

$$\frac{۱}{۲}(x+y) \geq \sqrt{xy}$$

▨

*گاهی برای اثبات بعضی از قضیه‌ها ــ به خصوص در مورد تساوی‌ها، نامساوی‌ها و تساوی مجموعه‌ها ــ با استفاده از درستی حکم به یک رابطهٔ بدیهی و یا فرض قضیه می‌رسیم. در چنین حالتی، برای تکمیل اثبات می‌بایستی نشان دهیم که تمام مراحل انجام شده **بازگشت‌پذیر** هستند وگرنه درستی اثبات تأیید نمی‌شود.*

گاهی برای ارزیابی ذکاوت و دقت افراد، اثبات‌هایی ارائه می‌شود که در آن‌ها درستی تساوی‌های غیر ممکنی را با ایجاد شبهه در فرد نشان می‌دهند! و سپس از آن‌ها علت را جویا می‌شوند ؟! در واقع، در این‌گونه اثبات‌ها، حکم را فرض در نظر گرفته، روی آن عملیاتی انجام داده و ظاهراً گاهی (اکثر اشتباهات) در اثبات قضیه‌ها و حل مسائل ریاضی حکم را فرض در نظر گرفته ، روی آن عملیات انجام داده، ظاهراً به نتیجه می‌رسیم! به مثال زیر توجه کنید :

مثال ۱۲: ثابت کنید ۶ = ۲!

اثبات:

(۱) $۲=۶$

با توجه به خاصیت جابه‌جایی تساوی

(۲) $۶=۲$

سپس از جمع دو رابطهٔ (۱) و (۲) خواهیم داشت!

(۳) $۸=۸$

امّا با توجّه به مطالبی که یاد گرفتیم، می‌دانیم که تنها درصورتی این اثبات درست است که برگشت‌پذیر باشد، یعنی بتوانیم از (۳) به (۲) و سپس به (۱) برسیم. درحالی که با یک نگاه درمی‌یابیم که چنین امری محال است یعنی از (۳) که ۸=۸ است نمی‌توانیم به تساوی (۲) که ۲=۶ و سپس به تساوی (۱) که ۶ =۲ است برسیم. درنتیجه عدم برگشت‌پذیری ادّعای فوق نشان می‌دهد که اثبات مذکور نادرست و فقط ایجاد شبهه بوده است! در واقع در اثبات فوق، حکم را فرض در نظر گرفته، روی آن عملیاتی انجام داده و ظاهراً به نتیجه رسیدیم.

تمرین: اثبات مثال ۱۲ را با اثبات دانش‌آموز در بخش ۱ــ۱۰ مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

«همه می‌دانند که اگر کسی جواب معمّا[1] را به شما گفته باشد، حلّ آن ساده خواهد بود. به سادگی می‌توان گفت که این عمل یک آزمونِ حافظه است. فقط درصورتی می‌توانید ادّعا کنید یک ریاضیدان هستید که معمّاهایی را که قبلاً هرگز مطالعه نکرده‌اید حل کنید. این یک آزمونِ استدلال کردن است.»

سایر[2]

۱ــ با استفاده از استدلال استنتاجی، نتایج زیر را کامل کنید.

الف) اگر باران ببارد، زمین مرطوب می‌شود. الآن باران می‌بارد.

نتیجه: زمین $\boxed{}$ است.

ب) خطوط موازی هیچگاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند. خطوط L_1 و L_2 موازی هستند.

نتیجه: L_1 و L_2 $\boxed{}$

۲ــ آیا نتایج زیر از عبارات داده شده حاصل می‌شوند؟ جواب خود را توضیح دهید.

الف) تمام دانش‌آموزانی که ریاضی یاد می‌گیرند می‌توانند محاسبه کنند.

حمید دانش‌آموزی است که ریاضی یاد می‌گیرد.

نتیجه: حمید می‌تواند محاسبه کند.

ب) بعضی از دانش‌آموزان با طرز کار کامپیوتر آشنا هستند.

نرگس دانش‌آموز است.

نتیجه: نرگس با طرز کار کامپیوتر آشنا است.

پ) مثلث متساوی‌الساقین دارای حداقل دو ضلع مساوی است.

مثلث متساوی‌الاضلاع دارای سه ضلع مساوی است.

نتیجه: هر مثلث متساوی‌الاضلاع، یک مثلث متساوی‌الساقین است.

۳ــ نشان دهید که چرا مجموع دو عدد زوج همیشه زوج است؟

۴ــ علی، احمد، کامران، داوود و ابراهیم عضو تیم بسکتبال مدرسهٔ خود هستند.

۱ــ Puzzle

۲ــ W.W. Sawyer: Mathematician’s Delight

با توجّه به شرایط زیر، آن‌ها را برحسب افزایش قد مرتّب کنید :

الف) حداقل دو نفر از آن‌ها از علی کوتاهتر می‌باشند،

ب) داوود از کامران کوتاهتر است،

پ) احمد کوتاهترین پسر نیست،

ت) داوود از علی بلندتراست.

۵ــ کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک غلط (نادرست) است. در صورت غلط بودن یک مثال نقض پیدا کنید.

الف) اگر ۱ با هر عدد فردی جمع شود، نتیجه همیشه یک عدد زوج است.

ب) توان دوم یک عدد همیشه از آن بزرگتر است.

پ) مجموع دو زاویهٔ حادّه کمتر از ۱۸۰° است.

ت) همیشه ارتفاع یک مثلث داخل آن قرار می‌گیرد.

ث) هر مستطیلی یک مربع است.

ج) هر مربعی یک مستطیل است.

۶ــ نمونه‌های زیر را درنظر بگیرید :

$$۶ = ۱^۲ + ۱^۲ + ۲^۲$$
$$۱۴ = ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲$$
$$۲۴ = ۲^۲ + ۲^۲ + ۴^۲$$
$$۵۹ = ۱^۲ + ۳^۲ + ۷^۲$$
$$۶۱ = ۳^۲ + ۴^۲ + ۶^۲$$
$$۸۹ = ۲^۲ + ۲^۲ + ۹^۲$$

نتیجهٔ احتمالی آن است که : هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع سه مربع کامل نوشت. با ارائه یک مثال نقض نشان دهید که نتیجه‌گیری فوق غلط است.

۷ــ کدام‌یک از احکام زیر درست هستند؟

الف) اگر x گنگ و y گویا باشد، آنگاه (x+y) گویا است.

ب) اگر x وy هر دو گویا باشند، آنگاه x+y گویا است.

احکام درست را اثبات کنید و برای رد احکام نادرست مثال‌های نقض بیاورید.

۸ــ بعضی از احکام زیر قضایای کلّی هستند. قضایای کلّی را اثبات کرده و برای نادرستی باقی احکام مثال نقض بیاورید :

الف) حاصلضرب هر دو عدد حقیقی کوچکتر یا مساوی نصف مجموع مربع‌های آن‌هاست.
ب) مربع هیچ عدد صحیح صفر نیست.
پ) هر دو زاویهٔ مساوی، متقابل به‌رأس هستند.
ت) اگر $x > ۱$ ، آنگاه $x > ۲$.
ث) اگر $x > ۲$ ، آنگاه $x > ۱$.
ج) اگر $(x-۱)^۲ = ۰$ ، آنگاه $x=۱$.
چ) اگر $ab=۰$، آنگاه $a=۰$ و $b=۰$.

۱ــ۱۱ــ برهان خلف (اثبات غیرمستقیم)

گاهی اوقات برای اثبات یک قضیه، ابتدا فرض می‌کنیم که حکم قضیه درست نباشد. آنگاه با استفاده از روش استنتاج به یک تناقض می‌رسیم.

مثال ۱: نشان دهید که با فرض صحیح بودن n، اگر $n^۲$ زوج باشد، n نیز زوج است.

حل: به‌جای اثبات زوج بودن n، می‌توانیم نشان دهیم که n نمی‌تواند فرد باشد.

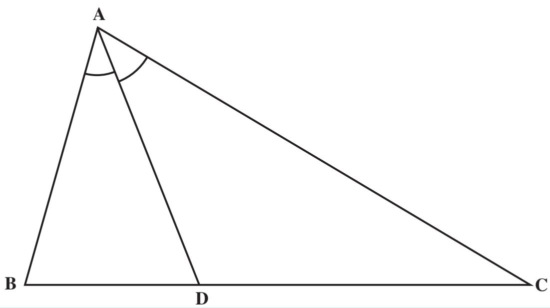
ابتدا فرض می‌کنیم n فرد باشد یعنی $n = ۲k + ۱$ که دراینجا k یک عدد صحیح است. درنتیجه داریم :

$$n^۲ = (۲k+۱)^۲ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ = ۴(k^۲ + k) + ۱$$

و این نشان‌دهندهٔ آن است که $n^۲$ فرد است.

می‌بینیم که این یک تناقض است. زیرا فرض مسأله بر این بود که $n^۲$ زوج باشد. یعنی $n^۲$ نمی‌تواند هم زوج (طبق فرض مسأله) و هم فرد (طبق نتیجه‌ای که به‌دست آورده‌ایم) باشد، بنابراین به‌یک تناقض می‌رسیم. تنها توجیه این تناقض آن است که فرض فرد بودن n نادرست است، پس n باید زوج باشد.

مثال ۲: فرض کنید AD نیمساز زاویه A در مثلث ABC باشد. اگر $BD \neq CD$ ثابت کنید $AB \neq AC$.



حل: اثبات را از طریق برهان خلف انجام می‌دهیم. فرض کنید نتیجه مطلوب یعنی $AB \neq AC$ درست نباشد یعنی AB=AC. بنابراین مثلث ABC متساوی‌الساقین است. می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین نیمساز AD میانه نیز هست. بنابراین $BD = DC$ که این با فرض مسأله یعنی $BD \neq CD$ در تضاد است. بنابراین فرض درست نبودن $AB \neq AC$ رد می‌شود. یعنی $AB \neq AC$.

روش استدلالی مورد استفاده در دو مثال قبل را **برهان خلف** یا اثبات غیرمستقیم می‌نامند که در تمام ریاضیّات کاربرد دارد.

برهان خلف

برای استفاده از برهان خلف (اثبات غیرمستقیم) گام‌های زیر را در نظر می‌گیریم :

گام ۱ : *فرض می‌کنیم نتیجهٔ مطلوب درست نباشد.*

گام ۲ : *نشان می‌دهیم که این فرض نتیجه‌ای به‌دست می‌دهد که حقایق دانسته شده را نقض می‌کند.*

گام ۳ : *حال که به یک تناقض رسیده‌ایم، معلوم می‌شود که فرضی که در گام اوّل کرده بودیم نادرست است. بنابراین نتیجهٔ مطلوب باید درست باشد.*

مثال ۳: نشان دهید که $\sqrt{۲}$ گنگ است.

اثبات: فرض کنیم نتیجهٔ مطلوب درست نباشد یعنی $\sqrt{۲}$ گنگ نبوده، گویا باشد (گام ۱). حال با توجّه به تعریف گویا بودن یک عدد، $\sqrt{۲}$ را به صورت کسر $\frac{p}{q}$ می‌نویسیم که در آن p و q اعداد صحیح (متعلّق به $\mathbb{Z}$) و کسر $\frac{p}{q}$ به ساده‌ترین صورت خود است. یعنی p و q نسبت به هم اوّل هستند یعنی $(p,q)=۱$ و

$$\sqrt{۲} = \frac{p}{q} \qquad (۱)$$

طرفین (۱) را به توان دو می‌رسانیم :

$$۲ = \frac{p^۲}{q^۲} \qquad (۲)$$

سپس با ضرب طرفین (۲) در $q^۲$ خواهیم داشت :

$$۲q^۲ = p^۲ \qquad (۳)$$

از (۳) نتیجه می‌شود که $p^۲$ عددی زوج است. حال طبق مثال ۱، می‌دانیم که با فرض صحیح بودن p، اگر $p^۲$ زوج باشد، p نیز زوج است یعنی :

$$p = ۲k \qquad (۴)$$

درنتیجه :

$$p^۲ = ۴k^۲ \qquad (۵)$$

در (۵) به‌جای $p^۲$ ، معادل آن را از (۳) که همان $۲q^۲$ باشد جایگزین می‌کنیم :

$$۲q^۲ = ۴k^۲ \qquad (۶)$$

پس از تقسیم طرفین بر ۲ داریم :

$$q^۲ = ۲k^۲ \qquad (۷)$$

از (۷) نتیجه می‌گیریم که $q^۲$ زوج بوده، باز طبق مثال۱، q نیز زوج است و این خلاف فرض است. زیرا در این صورت p و q هر دو مضارب ۲ هستند و نمی‌توانند نسبت به هم اول باشند (گام ۲). درنتیجه فرض گویا بودن $\sqrt{۲}$ نادرست بوده پس $\sqrt{۲}$ می‌بایستی گنگ باشد .

تمرین

با استفاده از روش استدلالی برهان خلف، احکام زیر را ثابت کنید :

۱ــ اگر n عددی صحیح و $n^۲$ فرد باشد، نشان دهید n نیز فرد است.

۲ــ اگر $n^۲$ مضربی از ۳ باشد، نشان دهید که n نیز مضربی از ۳ است.

۳ــ اگر $n^۲$ مضربی از ۱۰ باشد، نشان دهید که n نیز مضربی از ۱۰ است.

۴ــ از یک نقطهٔ خارج یک خط نمی‌توان بیش از یک خط بر آن عمود کرد.

۵ــ ثابت کنید $\sqrt{۳}$ گنگ است.

۶ــ اگر سه خط راست d، ′d و ″d دوبه‌دو متمایز باشند و $d \| d'$ (بخوانید d موازی ′d) و $d' \| d''$ ، آنگاه $d \| d''$.

۷ــ ثابت کنید $(\sqrt{۲} - \sqrt{۳})$ گنگ است.

۸ــ ثابت کنید اگر x گویا و y گنگ باشد، آنگاه (x+y) گنگ است.

۹ــ اگر ۲,۳,۵,...,P تمام اعداد اول کوچکتر یا مساوی P باشند، ثابت کنید که $N = (۲ \times ۳ \times ۵ \times \ ....\times P) + ۱$ یا اول است و یا عامل اول بزرگتر از P دارد.

اگر مطالب یک موضوع درسی یکدیگر را نقض کنند، آن درس گیج‌کننده می‌شود. با این حال در استدلال استنتاجی ... گاهی وقت‌ها اگر سعی کنیم و عامدانه به تناقض برسیم مفید خواهد بود!

هارولد ژاکوبز، ۱۹۷۴[1]

۱ـ۱۲ـ اصل لانه کبوتر

بسیاری از بدیهیات دنیای اطراف و زندگی روزمرّهٔ ما، قانونمندی ریاضی دارند و درعین سادگی و ظرافت، دارای کاربردهای گوناگون و متنوّع هستند. به عنوان مثال، واضح است که اگر ۵ کبوتر به طرف ۴ لانه پرواز کنند و بخواهند داخل لانه‌ها بشوند، حداقل یکی از لانه‌ها شامل دو کبوتر خواهد بود! همچنین اگر ۹ نفر در یک میهمانی حضور داشته باشند،حداقل روز تولد دو و یا چند نفر از آن‌ها در یک روز هفته می‌باشد. مثال‌هایی از این قبیل برای همهٔ ما آشناست. **اصل لانه کبوتر** توجیه‌کنندهٔ دو مثال بالا و یکی از همین بدیهیات است که با این حال بعضی از مسایل پیچیدهٔ ریاضی را قابل حل می‌کند. این اصل، بخصوص در مواقعی که می‌خواهیم رخداد موقعیّت خاصّی را بررسی کنیم، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اصل لانه کبوتر

*اگر m کبوتر، n لانه کبوتر را اشغال کنند و تعداد کبوترها بیش از تعداد لانه کبوترها باشد $(m > n)$،آنگاه **طبق اصل لانه کبوتر** حداقل یک لانه کبوتر وجود خواهد داشت که دست کم دو و یا بیشتر از دو کبوتر در آن قرار داشته باشند.*

مثال۱: S یک زیرمجموعهٔ ۳۷ عضوی از اعداد طبیعی است. اگر اعضای S را بر عدد ۳۶ تقسیم کنیم، حداقل دو عضو از این مجموعه دارای باقیماندهٔ یکسانی بر ۳۶ هستند.

حل: می‌دانیم که تقسیم هر عدد طبیعی n بر ۳۶ به‌صورت $n = ۳۶q + r$ است که q خارج‌قسمت، r باقیمانده و $۰ \le r < ۳۶$ است. بنابراین مجموعهٔ باقیمانده‌ها، یعنی $\{۰,۱,۲,\dots,۳۵\}$ ،دارای ۳۶ عضو است. مشابهت این مثال با لانهٔ کبوتر چنین است که اگر اعضای S (۳۷ عضو) را تعداد کبوترها و تعداد باقیمانده‌ها (۳۶) را لانه کبوترها در نظر بگیریم، آن‌وقت درمی‌یابیم که حداقل یکی از لانه‌ها

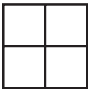
[1] H. Jacobs

پذیرای دو و یا تعداد بیشتری کبوتر می‌باشد! یعنی :

حداقل دو عضو از مجموعهٔ S دارای باقیماندهٔ یکسانی بر ۳۶ خواهند بود.

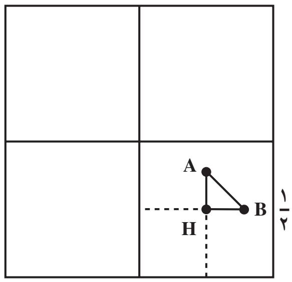
تمرین: S یک زیرمجموعهٔ ۷۰ عضوی از اعداد طبیعی است. اگر اعضای S را بر ۲۵ تقسیم کنیم، نشان دهید که دست کم سه عضو S دارای یک باقیمانده‌اند.

مثال ۲: پنج نقطه داخل مربعی به ضلع ۱ مفروض‌اند. ثابت کنید حداقل فاصلهٔ دو نقطه از این پنج نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است.



حل: با رسم محورهای تقارنی که موازی‌اضلاع هستند، سطح مربع را به ۴ مربع مساوی تقسیم می‌کنیم (مطابق شکل).

۴ مربع کوچکتر را ۴ لانه کبوتر و ۵ نقطهٔ مفروض را ۵ کبوتر درنظر می‌گیریم که می‌خواهند به داخل لانه‌ها برگردند در ضمن، نقاط روی مرز را متعلّق به هر دو مربع می‌گیریم. بنابراصل لانه کبوتر، حداقل دوتا از نقطه‌ها به یکی از مربع‌های کوچک تعلّق دارند ــ همان‌طوری که حداقل دو کبوتر، به لانهٔ مشترک می‌روند ــ و با استفاده از قضـیهٔ فیثاغورس درمی‌یابیم که فاصلهٔ آن دو نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است. با توجّه به شکل ، صحّت این ادّعا را نشان می‌دهیم



محاسبه: با توجّه به اینکه طول ضلع مربع بزرگ ۱ است، درنتیجه طول ضلع مربع‌های کوچک $\frac{۱}{۲}$ و فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آید :

$$(AB)^{۲} = (AH)^{۲} + (BH)^{۲}$$

امّا شکل معلوم می‌کند که طول‌های AH و BH از $\frac{۱}{۲}$ که طول ضلع مربع‌های کوچک است کمتر هستند. درنتیجه :

$$(AB)^{۲} < \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} + \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}$$

$$(AB)^{۲} < \frac{۲}{۴}$$

یعنی :

$$AB < \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

و حکم ثابت است.

تمرین

۱ــ ۱۳ نفر در یک میهمانی حضور دارند. نشان دهید حداقل ۲ نفر از آن‌ها در یک ماه متولّد شده‌اند.

۲ــ آمار نشان می‌دهد که تعداد تارهای موی سر افراد بیش از ۳۰۰۰۰۰ نیست. ثابت کنید در شهری که ۳۰۰۰۰۲ نفر جمعیّت دارد، حداقل دو نفر از شهروندان تعداد تارهای مویشان با هم مساوی است.

۳ــ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۱ مفروض است. پنج نقطه را در داخل مثلث درنظر می‌گیریم. نشان دهید حداقل دو نقطه وجود دارند که فاصلهٔ آن‌ها کمتر از $\frac{۱}{۲}$ است.

۴ــ نشان دهید هر زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $S = \{۱, ۲, ۳, ..., ۹\}$ که دارای ۶ عضو باشد حداقل دو عضو دارد که مجموع آن‌ها برابر ۱۰ است.

۵ــ با استفاده از **برهان خلف**، اصل لانه کبوتر را که تا حال به‌طور شهودی بدیهی فرض کرده بودیم اثبات کنید.

مجلهٔ ریاضی

نظریهٔ مجموعه‌ها *از اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم میلادی مطرح شد و پس از مدتی به‌عنوان مبانی ریاضیات جایگاه ویژه‌ای پیدا کرد.*

ریاضیدانان گوناگونی در تحکیم این نظریه فعالیت داشته‌اند ولی ریاضیدان آلمانی ***گ.کانتور*** *در این مورد نقشی اساسی داشت. کانتور در سن‌پترزبورگ (روسیه) متولد شد، خانواده‌اش در طفولیت وی به آلمان مهاجرت کرد و در سال‌های ۱۸۷۲ الی ۱۹۱۳ استاد دانشگاه* ***هالد*** *در آلمان بود و در این دوران آثار عمیق خود را در نظریه مجموعه‌ها تألیف کرد.*