یادداشت

۱. از سپیده‌دم تاریخ **عدد**، **شمارش** و **هندسه** راهگشای مسائل گوناگون در زندگی بشر بوده‌اند. با ادامهٔ این روند ریاضیات از یک سو به‌عنوان **ابزار حل مسأله** در خدمت عموم قرار گرفت و از سوی دیگر موجب پیدایش **ساختارهای منطقی** و **دستگاه‌های اصولی** شد که به‌عنوان ابزار تربیت فکر، خود به تولید فرآورده‌های جدیدی پرداخت که بعضاً در خدمت عموم قرار گرفت. این فرآیند موجب پیدایش شاخه‌های مختلفی در ریاضیات گردید.

از نظر تاریخی حساب و به دنبال آن جبر از یک سو و هندسه از سویی دیگر، از بررسی مسائل و پدیده‌های مختلفی نشأت می‌گیرند. با این حال حتی از دوران باستان، ایجاد ارتباط میان بینش هندسی و طرز تفکّر حسابی جبری، ثمرات چشمگیری برای ریاضیات به ارمغان آورده است. شاید نخستین مورد اسلوب‌مند از این ارتباط، نسبت دادن یک عدد (طول) به هر پاره خط است که می‌توان آن را سرآغاز هندسهٔ تحلیلی یک بعدی، یا حساب هندسی از دیدگاه دیگر، تلقی کرد. این اقدام به کشف اعداد ناگویا و پیدایش مفهوم عدد حقیقی منجر گردید. به دنبال پایه‌گذاری جبر توسط خوارزمی و موفقیّت این شاخه از ریاضیات در حل و رده‌بندی مسائل حساب، کوششهای گوناگونی برای استفاده از آن در بررسی مسائل هندسی نیز صورت گرفت که در قرن هفدهم میلادی توسط ریاضیدانان فرانسوی دکارت و فرما به‌صورتی منسجم در چارچوب هندسهٔ تحلیلی ظاهر گردید. هندسهٔ تحلیلی بستر پیدایش و تکوین‌بخش عظیمی از ریاضیات جدید است. بالاخص حساب دیفرانسیل و انتگرال در چارچوب هندسهٔ تحلیلی مطرح می‌شود و صورتهای جدید هندسه مانند هندسهٔ دیفرانسیل و هندسهٔ جبری از هندسهٔ تحلیلی آغاز شده‌اند. نیمی از این کتاب به مباحث هندسهٔ تحلیلی اختصاص دارد. در نیمهٔ دیگر، ماتریس به‌عنوان یک شئ ریاضی و سپس به‌عنوان یک تبدیل هندسی مطرح می‌شود که از جبر ماتریسی آغاز کرده و با کاربردهای متنوع ماتریس‌ها ادامه می‌دهیم. چه ماتریس‌ها به‌عنوان یک ابزار پردازشهای کامپیوتری در عصر فن‌آوری اطّلاعات هم‌چنان از اهمیت زیادی برخوردار است. و بالاخره در این کتاب کوشش بر

این نیز بوده است که حتی‌المقدور ثمرات ارتباط متقابل جبر و هندسه مورد تأکید قرار گیرد و دانش‌آموز با شمّه‌هایی از تجلّی وحدت ریاضیات در مقابل انشعابات اجتناب‌ناپذیر ناشی از رشد و گسترش این دانش آشنا گردد.

****

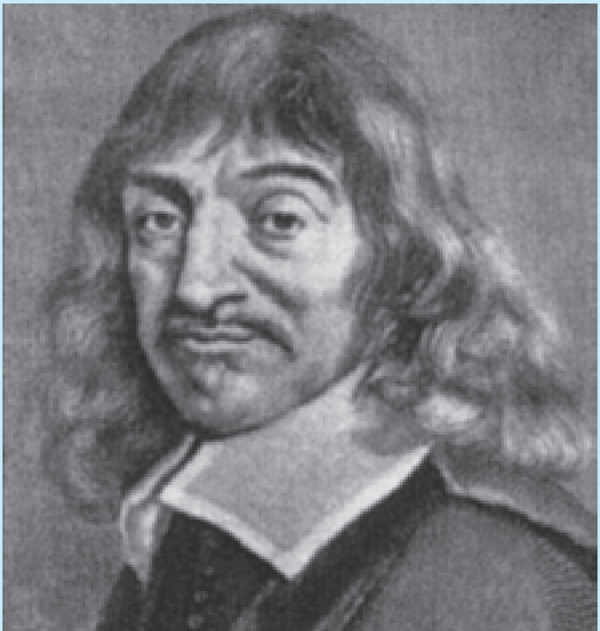
۲. نظام جدید آموزش متوسطه و به دنبال آن پیش‌دانشگاهی، نهضت نوسازی و نوگرایی در آموزش و پرورش کشورمان تلقی می‌شود که می‌توان ثمره‌های مثبت زیادی بر آن برشمرد. ولی هر تغییر و تحوّلی نیاز به بازنگری و تصحیح مسیر پیموده شده دارد. **کتاب هندسهٔ تحلیلی و جبرخطی** نیز از این مسیر طبیعی مستثنی نیست. کمیتهٔ برنامه‌ریزی دورهٔ پیش‌دانشگاهی، درس هندسهٔ تحلیلی و جبرخطی را با توجه به نظر کارشناسان، سنتهای آموزش کشور، و تجربه سایر کشورها و روند جهانی به‌عنوان یکی از مواد درسی دورهٔ پیش‌دانشگاهی تصویب کرد. سپس کمیتهٔ برنامه‌ریزیِ گروه ریاضیِ دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی با توجه به‌ضرورت پیشتاز بودن در آموزش ریاضی و با توجه به این‌که در برنامهٔ نظام جدید ابتدا قرار بود فقط عده‌ای از دانش‌آموزان (حداکثر دو برابر ظرفیت دانشگاهها) به دورهٔ پیش‌دانشگاهی راه یابند و بقیه جذب دوره‌های کاردانی و آموزشهای کاربردی شوند، برنامهٔ این درس را به گونه‌ای تنظیم و تصویب کرد که تألیف نخستین کتاب براساس آن تدوین شد. ولی با تحوّل برنامه و راه یافتن عموم دانش‌آموزان به دورهٔ پیش‌دانشگاهی عملاً اجرای برنامهٔ تصویب شده دچار مشکلاتی شد که منجر به حذف بخش‌های زیادی از کتاب قبلی گردید. با توجه به این تحوّلات و با توجه به اظهارنظرهای همکاران دبیر ریاضی در سرتاسر کشور، برنامهٔ جدید با حفظ اصول اوّلیه و با نگرشی کاربردی تدوین شد و ویرایش جدید کتاب به همهٔ دانش‌آموزان ایرانی تقدیم می‌شود. دانش‌آموزانی که در هزارهٔ میلادی جدید به چالشی جهانی فراخوانده شده‌اند که ...

حضوری گر همی خواهی از او غایب مشو حافظ.

ویرایش جدید کتاب هندسهٔ تحلیلی و جبرخطی برای بار اوّل در سال تحصیلی ۸۱ــ۱۳۸۰ منتشرشد. پس از آن دبیران محترم شرکت کننده در دورهٔ آموزش ضمن‌خدمت در تابستان ۱۳۸۰ و هم‌چنین بعضی از دبیران محترم از سرتاسر کشور نظر اصلاحی خود را برای مؤلفان ارسال داشتند. مؤلفان با سپاس از همکاری آنان، بعضی از این نظرها را درچاپ جدید سال ۱۳۸۱ مورد توجه قرار داده و در متن کتاب تغییرات لازم را اعمال کرده‌اند. دریافت هرگونه نظر سازنده از سوی دبیران محترم موجب مزیدتشکر مؤلفان خواهد بود.

پیدایش هندسهٔ تحلیلی

در سال ۱۶۳۷ میلادی **رنه دکارت** ریاضیدان و فیلسوف فرانسوی با ادغام جبر و هندسه، انقلابی در ریاضیات پدید آورد. دکارت، محل قرار گرفتن یک نقطه را در صفحه (یا فضا) با دوتایی (یا سه تایی) مرتبی از اعداد حقیقی بیان کرد و توانست اشکال هندسی را با معادلات جبری بیان نماید. امروزه این بخش از ریاضیات که توسط دکارت ابداع شد و توسعه یافت به **هندسهٔ تحلیلی** موسوم است.



دکارت

۱

بردارها

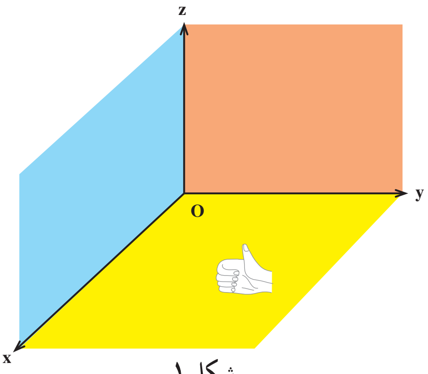
۱.۱ معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

قبلاً با فضای $\mathbb{R}^2$ به‌عنوان مجموعهٔ تمام زوج‌های مرتب (x,y) که x و y اعداد حقیقی‌اند آشنا شده‌ایم : $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) | x,y \in \mathbb{R}\}$. همچنین دیده‌ایم که می‌توان برای نمایش هندسی آن از یک دستگاه مختصات قائم، مرکب از دو خط جهت‌دار متعامد، به نام محورهای مختصات استفاده کرد. اکنون آماده‌ایم که فضای $\mathbb{R}^3$ را معرفی کنیم.

منظور از **فضای $\mathbb{R}^3$**، مجموعهٔ تمام سه‌تایی‌های مرتب (x,y,z) است که در آنها x، y و z اعداد حقیقی‌اند :

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) | x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

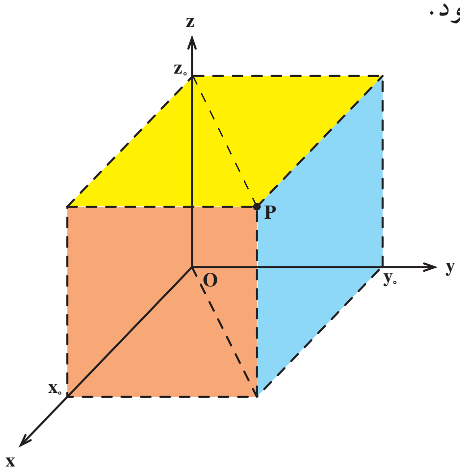
برای نمایش هندسی $\mathbb{R}^3$، یک **دستگاه مختصات قائم**، مرکب از سه خط جهت‌دار دوبه‌دو متعامد، به نام **محورهای مختصات** را معرفی می‌کنیم که در نقطه‌ای مانند O متقاطع‌اند و O مبدأ مشترکی است که از آن نقطه، فاصله در امتداد هر سه خط با یک واحد طول سنجیده می‌شود. خطوط Ox، Oy و Oz به ترتیب **محور xها**، **محور yها** و **محور zها** نامیده می‌شوند و خود نقطهٔ O **مبدأ مختصات** نام دارد. این محورها سه صفحهٔ مختصات دو به‌دو متعامد مشخص می‌کنند : **صفحهٔ xy** که شامل محور xها و yها، **صفحهٔ yz** که شامل محور yها و zها و **صفحهٔ xz** که شامل محور xها و zها است. برای مثال در شکل ۱، صفحهٔ yz صفحهٔ کاغذ است و جهت مثبت (جهت مثبت روی محورها با علامت پیکان مشخص شده است) محور xها به خارج صفحهٔ کاغذ و در زاویهٔ قائم با صفحهٔ yz اشاره دارد. این دستگاه یک دستگاه **راستگرد** نامیده می‌شود، زیرا که با انگشتان



شکل ۱

دست راست جهت‌های مثبت روی محورها، مطابق شکل ۱ مشخص می‌شوند.

با معلوم بودن سه تایی مرتب $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ از $\mathbb{R}^3$، نقطه به طول $x_\circ$ را بر محور xها، نقطه به‌طول $y_\circ$ را بر محور yها و نقطه به طول $z_\circ$ را بر محور zها رسم می‌کنیم. سپس صفحهٔ گذرا از $x_\circ$ و موازی صفحهٔ yz، صفحهٔ گذرا از $y_\circ$ و موازی صفحهٔ xz و صفحهٔ گذرا از $z_\circ$ و موازی با صفحهٔ xy را می‌کشیم. نقطهٔ منحصر به فرد P که در آن، سه صفحه متقاطع‌اند (به شکل ۲ نگاه کنید) نقطه به‌مختصات $x_\circ$ ، $y_\circ$ و $z_\circ$ یا دقیقتر، نقطه به طول $x_\circ$ ، عرض $y_\circ$ و ارتفاع $z_\circ$ نامیده می‌شود.



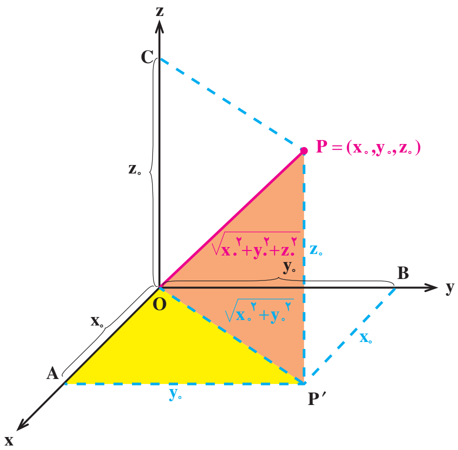
شکل ۲

برعکس اگر صفحات گذرا از نقطهٔ P در فضا به ترتیب موازی صفحات yz، xz و xy، محور xها، yها و zها را در نقاط به طول $x_\circ$ ، عرض $y_\circ$ و ارتفاع $z_\circ$ قطع کند، در این صورت P سه تایی مرتب $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ از $\mathbb{R}^3$ را مشخص می‌کند و این تناظر بین سه‌تایی‌های مرتب (x,y,z) از اعداد حقیقی و نقاط فضا دو سویی است. واضح است که در این تناظر O با $(\circ, \circ, \circ)$ متناظر می‌گردد.

توجه می‌کنیم که به خاطر نکاتی که در بالا به آن اشاره کردیم در صحبت از $\mathbb{R}^3$ ، **زبان هندسی** آزادانه بکار می‌رود. مثلاً معمولاً به جای «نقطه به طول x، عرض y و ارتفاع z» می‌گوییم نقطهٔ (x,y,z). بالاخص $P = (x, y, z)$ یعنی P نقطهٔ (x,y,z) است. همچنین $O = (\circ, \circ, \circ)$ را **نقطهٔ صفر** می‌نامیم.

واضح است که دو نقطهٔ $P=(x_0,y_0,z_0)$ و $Q=(x_1,y_1,z_1)$ **بر هم منطبق‌اند** اگر و فقط اگر مختصات آنها نظیر به نظیر مساوی باشند، یعنی $x_0=x_1$ ، $y_0=y_1$ و $z_0=z_1$. در این حالت می‌نویسیم $P=Q$.

اکنون می‌خواهیم فاصلهٔ بین یک نقطه از $\mathbb{R}^3$ را از مبدأ مختصات پیدا کنیم. برای این منظور فرض می‌کنیم P نقطه‌ای به مختصات (x_0,y_0,z_0) باشد و فاصلهٔ نقطهٔ P از مبدأ مختصات، یعنی نقطهٔ $O=(0,0,0)$ ، را با $|OP|$ نشان می‌دهیم (به شکل ۳ نگاه کنید).

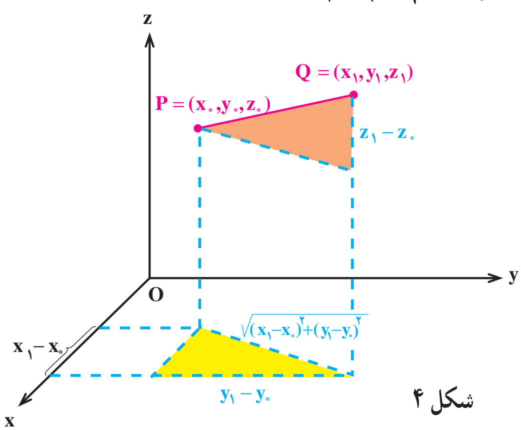


شکل ۳

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAP' ، طول وتر OP' برابر $\sqrt{x_0^2+y_0^2}$ است و در مثلث قائم‌الزاویه OPP' نیز طول وتر OP برابر $\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$ خواهد بود. پس

$$|OP|=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\,. \qquad (1)$$

حال، اگر P نقطه‌ای به مختصات (x_0,y_0,z_0) و Q نیز نقطه‌ای به مختصات (x_1,y_1,z_1) باشد، آنگاه طول PQ، یعنی $|PQ|$ ، را نیز می‌توانیم به کمک شکل ۴ به‌دست بیاوریم. با توجه



شکل ۴

به شکل ۴ داریم :

$$|PQ| = \sqrt{(x_۱ - x_۰)^۲ + (y_۱ - y_۰)^۲ + (z_۱ - z_۰)^۲} \,. \qquad (۲)$$

مثال ۱. اگر $P = (-۱, ۳, ۶)$ و $Q = (۴, ۰, ۵)$، مقادیر $|PQ|$، $|OP|$ و $|OQ|$ را در زیر محاسبه کرده‌ایم.

$$|PQ| = \sqrt{(۴-(-۱))^۲ + (۰-۳)^۲ + (۵-۶)^۲} = \sqrt{۳۵} \,,$$
$$|OP| = \sqrt{(-۱)^۲ + ۳^۲ + ۶^۲} = \sqrt{۴۶},$$
$$|OQ| = \sqrt{۴^۲ + ۰^۲ + ۵^۲} = \sqrt{۴۱} \,.$$

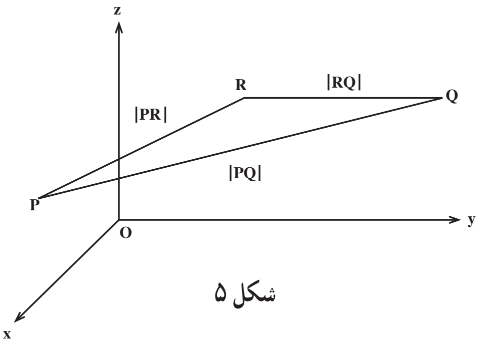
با توجه به حقایق هندسی، سه ویژگی زیر برای طول پاره‌خطِ بین دو نقطهٔ P و Q از $\mathbb{R}^۳$ برقرار است.

ویژگی ۱ طول. $|PQ| = ۰$ اگر و فقط اگر $P = Q$،

ویژگی ۲ طول. $|PQ| = |QP|$،

ویژگی ۳ طول. به‌ازای هر نقطهٔ دلخواه R از $\mathbb{R}^۳$، $|PQ| \le |PR| + |RQ|$ (نامساوی مثلث).

توجه می‌کنیم که برقراری ویژگی ۳ از آنجا است که در هر «مثلث»[۱]، طول هر ضلع کوچکتر از یا مساوی با مجموع طول‌های دو ضلع دیگر است (به شکل ۵ نگاه کنید).



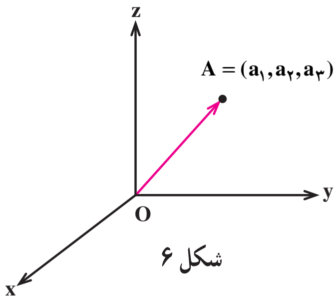
شکل ۵

بردارها در $\mathbb{R}^۳$

فرض کنیم $A = (a_۱, a_۲, a_۳)$ نقطه‌ای غیر صفر از $\mathbb{R}^۳$ باشد. می‌توانیم به نقطهٔ A یک پاره‌خط

۱ــ در اینجا منظور از «مثلث»، مثلث یا خط راست می‌باشد.

جهت‌دار نسبت دهیم. در واقع این پاره‌خط جهت‌دار را پاره‌خطی با نقطهٔ شروع $O=(۰,۰,۰)$ و نقطهٔ پایان $A=(a_۱,a_۲,a_۳)$ در نظر می‌گیریم (به شکل ۶ نگاه کنید).

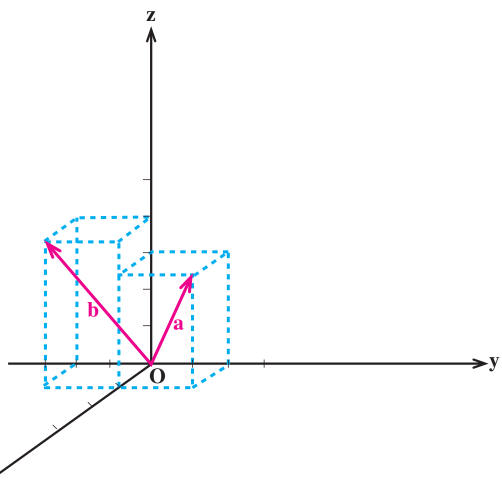


شکل ۶

برعکس اگر یک پاره‌خط جهت‌دار داشته باشیم که نقطهٔ شروع آن $O=(۰,۰,۰)$ باشد، آنگاه نقطهٔ پایان آن، نقطه‌ای غیر صفر مانند $A=(a_۱,a_۲,a_۳)$ را نمایش خواهد داد. در نتیجه یک تناظر دوسویی بین پاره‌خط‌های جهت‌دار با نقطهٔ شروع $O=(۰,۰,۰)$ و نقاط غیر صفرِ $\mathbb{R}^۳$ موجود است.

تعریف. به هر پاره‌خط جهت‌دار با نقطهٔ شروع $O=(۰,۰,۰)$ یک **بردار در $\mathbb{R}^۳$** یا به اختصار یک **بردار** می‌گوییم. اگر این بردار را با a نمایش دهیم و نقطهٔ پایان این بردار $(a_۱,a_۲,a_۳)$ باشد، می‌نویسیم «بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$». در هر بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$، $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ **مؤلفه‌های بردار a** نامیده می‌شوند.

مثال ۲. بردارهای $a=(۱,۲,۳)$ و $b=(۱,-۲,۴)$ را در شکل ۷ نمایش داده‌ایم.



شکل ۷

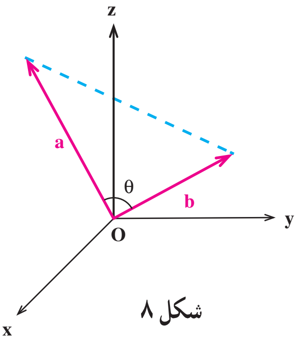
بنابر آنچه در بالا به آن اشاره کردیم یک تناظر دوسویی بین بردارهای $\mathbb{R}^۳$ و نقاط غیرصفرِ $\mathbb{R}^۳$ موجود است. قرارداد می‌کنیم که نقطهٔ صفرِ $\mathbb{R}^۳$ یعنی $O=(۰,۰,۰)$ را **بردار صفر** بنامیم. لذا یک تناظر دوسویی بین بردارهای $\mathbb{R}^۳$ و نقاط $\mathbb{R}^۳$ به‌وجود می‌آید. در این تناظر نقطهٔ $O=(۰,۰,۰)$ با بردار صفرِ $o=(۰,۰,۰)$ متناظر می‌شود.

بنابر تعریف، دو بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $b=(b_۱,b_۲,b_۳)$ **مساوی‌اند** اگر و فقط اگر مؤلفه‌های آنها نظیر به نظیر مساوی باشند، یعنی $a_۱=b_۱$ ، $a_۲=b_۲$ و $a_۳=b_۳$. در این حالت می‌نویسیم $a=b$.

همچنین بنابر (۱) **طول** یک بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ که با $|a|$ نشان داده می‌شود، برابر است با

$$|a|=\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲}\ .$$

زاویهٔ بین دو بردار غیرصفر a و b را زاویه‌ای مانند θ در نظر می‌گیریم که $۰\leq\theta\leq\pi$ (به شکل ۸ نگاه کنید).



شکل ۸

تعریف. فرض کنیم $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $b=(b_۱,b_۲,b_۳)$ دو بردار باشند. **حاصلجمع** این دو بردار را که با $a+b$ نشان می‌دهیم، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$a+b=(a_۱+b_۱,a_۲+b_۲,a_۳+b_۳)\ .$$

اگر r یک عدد حقیقی باشد، **حاصلضرب** r در a نیز چنین است

$$ra=(ra_۱,ra_۲,ra_۳)\ .$$

$-۱a$ را با $-a$ نشان می‌دهیم و به آن **قرینهٔ** a می‌گوییم، یعنی $-a=(-a_۱,-a_۲,-a_۳)$.

همچنین **تفاضل** b از a را که با $a-b$ نمایش می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$a-b=a+(-b)\ .$$

مثال ۳. برای بردارهای $a=(1,-3,2)$ و $b=(-4,-1,0)$، $a+b$ ، $a-b$ و $-\frac{1}{2}a$ را پیدا می‌کنیم.

$$a+b=(1+(-4),-3+(-1),2+0)=(-3,-4,2),$$

$$a-b=(1-(-4),-3-(-1),2-0)=(5,-2,2),$$

$$-\frac{1}{2}a=(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},-1).$$

قضیهٔ ۱. فرض کنیم a، b و c سه بردار دلخواه، $o=(0,0,0)$ بردار صفر و r و s دو عدد حقیقی باشند. در این صورت داریم

۱) $a+b=b+a$ (خاصیت جابه‌جایی جمع)،

۲) $a+(b+c)=(a+b)+c$ (خاصیت شرکت‌پذیری جمع)،

۳) $a+o=o+a=a$ ،

۴) $a+(-a)=(-a)+a=o$ ،

۵) $r(a+b)=ra+rb$ ،

۶) $(r+s)a=ra+sa$ ،

۷) $(rs)a=r(sa)$ ،

۸) $1a=a$ ،

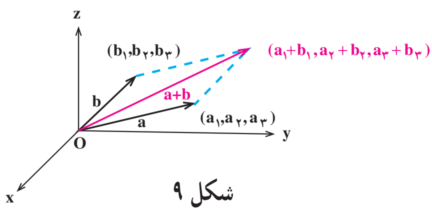
۹) $0a=o$ ،

۱۰) $ro=o$.

اثبات. درستی تمام این ویژگی‌ها به راحتی از تعریف نتیجه می‌شود که آن را به عنوان تمرین رها می‌کنیم. ■

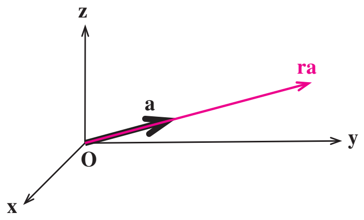
تعبیر هندسی

دیدیم که حاصلجمع دو بردار $a=(a_1,a_2,a_3)$ و $b=(b_1,b_2,b_3)$ برداری مانند $a+b$ است که $a+b=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$. شکل ۹ در زیر تعبیر هندسی از $a+b$ را نشان می‌دهد.



شکل ۹

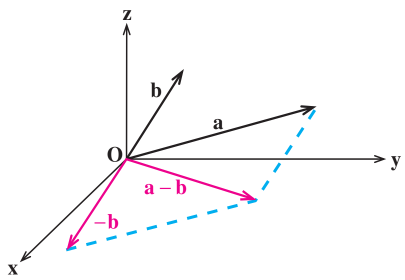
و در مورد حاصلضرب یک عدد حقیقی r در بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ که بردار $ra=(ra_۱,ra_۲,ra_۳)$ است نیز در حالت $r>۱$ تعبیر هندسی در شکل ۱۰ دیده می‌شود.



شکل ۱۰

دو بردار غیر صفرِ a و b را **هم‌راستا** می‌نامیم اگر یک عدد حقیقی غیر صفرِ r موجود باشد که $b=ra$. واضح است که $|b|=|r||a|$، که در آن $|r|$ قدرمطلق عدد حقیقی r را نمایش می‌دهد و $|a|$ و $|b|$ به ترتیب نمایانگر طول بردارهای a و b است.

در مورد تفاضل b از a، یعنی $a-b=a+(-b)$، و قرینهٔ b، یعنی $-b$، شکل ۱۱ تعبیر هندسی موردنظر را ارائه می‌دهد.



شکل ۱۱

بردارهای یکّه

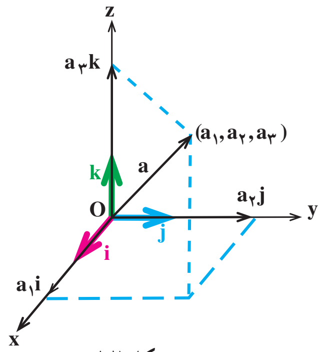
بردار یکّه برداری است با طول واحد. در بین بردارهای یکّه، سه بردار

$$i=(۱,۰,۰),\quad j=(۰,۱,۰),\quad k=(۰,۰,۱)$$

در بیان بردارها از اهمیت و کاربرد ویژه‌ای برخوردار هستند. به سادگی و با استفاده از ویژگی‌های جمع دو بردار و ضرب آنها در یک عدد حقیقی، هر بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ را می‌توانیم به‌صورت ترکیب بردارهای i، j و k بنویسیم

$$\begin{aligned} a &= (a_1, a_2, a_3) \\ &= (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) \\ &= a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) \\ &= a_1 i + a_2 j + a_3 k . \end{aligned}$$

پس بردار $a = (a_1, a_2, a_3)$ به صورت $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ قابل نمایش است (به شکل ۱۲ نگاه کنید).



شکل ۱۲

به ازای هر بردار غیر صفرِ a، **بردارجهت** a برداری با طول واحد است که هم راستا و هم‌جهت با a می‌باشد. اگر بردارِ جهت a را با e_a نمایش دهیم آنگاه

$$e_a = \frac{1}{|a|} a .$$

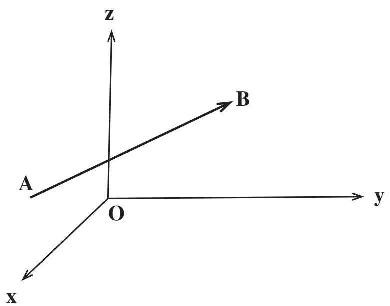
در واقع e_a جهت a را مستقل از طول آن مشخص می کند و

$$a = |a| e_a .$$

یعنی هر بردار با یک کمیّت عددی غیرمنفی $|a|$ که طول آن است، و یک جهت e_a مشخص می‌شود.

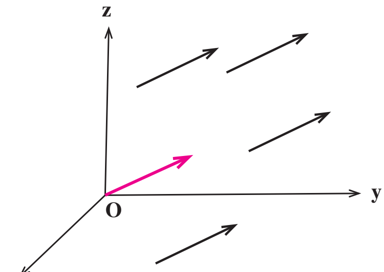
تذکر. هر پاره‌خط جهت‌دار در $\mathbb{R}^3$ نظیر AB در شکل ۱۳ را یک **پیکان** می‌نامیم. اگر A نقطهٔ ابتدای پیکان و B نقطهٔ انتهای آن باشد، پیکان را با نماد $\overrightarrow{AB}$ نمایش می‌دهیم. هر پیکان را می‌توانیم با مختصات نقاط ابتدایی و انتهایی آن مشخص کنیم.

پیکان‌های موازی و هم جهت که از لحاظ هندسی

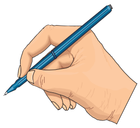


شکل ۱۳

هم طول هستند را با یکدیگر **هم‌ارز** می‌گیریم، زیرا برای این نوع پیکان‌ها طول و جهت اهمیت دارد. از این‌رو بین پیکان‌های هم‌ارز پیکانی که از مبدأ مختصات شروع می‌شود، یعنی همان بردار را در نظر می‌گیریم. لذا از این پس پیکان و بردار را یکی می‌گیریم و به جای پیکان‌ها، بردارهای متناظر آن را در نظر می‌گیریم (به شکل ۱۴ نگاه کنید). از نظر مختصاتی بردار متناظر با پیکانی که از $P=(x_۰,y_۰,z_۰)$ شروع می‌شود و به $Q=(x_۱,y_۱,z_۱)$ ختم می‌شود، عبارت است از $(x_۱-x_۰,y_۱-y_۰,z_۱-z_۰)$ و آن را بردار هم‌ارز با $\overrightarrow{PQ}$ می‌نامیم.



شکل ۱۴



تمرین

۱. نقاطی با مختصات $(۱,۱,۱)$، $(۲-,۰,۰)$، $(۱,-۲,۲)$ و $(-۱,-۲,-۳)$ را در یک دستگاه مختصات قائم نمایش دهید.

۲. رؤوس یک مکعب عبارتند از $(۰,۰,۰)$، $(۲,۰,۰)$، $(۰,۲,۰)$، $(۰,۰,۲)$، $(۲,۲,۰)$، $(۰,۲,۲)$، $(۲,۰,۲)$ و $(۲,۲,۲)$. این مکعب را در یک دستگاه مختصات قائم نمایش دهید.

۳. قرینهٔ مکعب تمرین ۲ را نسبت به هر یک از صفحات مختصات قائم با مشخص کردن مختصات رؤوس پیدا کنید.

۴. در هر یک از حالات زیر، فاصلهٔ P از Q را پیدا کنید.

الف) $P=(\sqrt{۲},۰,۰)$ ، $Q=(۰,۱,۱)$ ،

ب) $P=(۱,۰,-\frac{۱}{۲})$ ، $Q=(\frac{۱}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲},۰)$.

۵. محیط مثلث ABC را با فرض $A=(-۱,۰,۰)$ ، $B=(۲,۰,\sqrt{۷})$ و $C=(۳,\sqrt{۲},\sqrt{۷})$ پیدا کنید.

۶. مختصات نقطهٔ M وسط پاره‌خط PQ را که $P=(x_۰,y_۰,z_۰)$ و $Q=(x_۱,y_۱,z_۱)$ پیدا کنید.

۷. طول میانهٔ AM از مثلث ABC را که در تمرین ۵ ذکر شده است به‌دست آورید.

۸. قضیهٔ ۱ را ثابت کنید.

۹. در هر یک از حالات زیر، بردار هم‌ارز با پیکان $\overrightarrow{PQ}$ را به‌صورت $ai+bj+ck$ بنویسید.

الف) $P=(۳,-۴,۱۰)$ ، $Q=(۰,۰,۰)$ ،

ب) $P=(۳,-۱,۳)$ ، $Q=(۱,-۳,۲)$ ،

ج) $P=(۲,۱+\sqrt{۲},۱+\sqrt{۳})$ ، $Q=(۲,۱,۱)$.

۱۰. در هر یک از حالات زیر بردارهای $a+b$ ، $a-b$ و ra را پیدا کنید.

الف) $a=۲i-۵j+۱۰k$ ، $b=-i+۲j-۳k$ ، $r=۲$ ،

ب) $a=i+j-۳k$ ، $b=\frac{۱}{۲}i-\frac{۱}{۲}j-۳k$ ، $r=-۱$ ،

ج) $a=۲i$ ، $b=j+k$ ، $r=\frac{۱}{۳}$.

۱۱. در هر یک از حالات زیر طول بردار a را پیدا کنید.

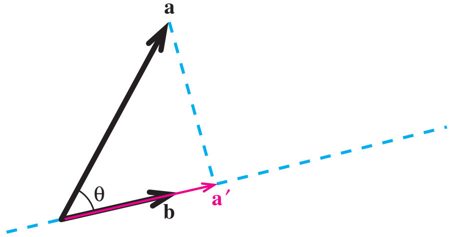
الف) $a=i-j+k$ ، ب) $a=-۳i+۴j-۱۲k$ ،

ج) $a=\sqrt{۲}\,i-j+k$ ، د) $a=۴i-۸j+۸k$.

۱۲. به ازای هر یک از بردارهای a که در تمرین ۱۱ ذکر شده‌اند، بردار e_a را پیدا کنید.

۲.۱ ضرب داخلی

دو بردار غیرصفر a و b را که زاویهٔ بین آنها θ است در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $۰<\theta<\frac{\pi}{۲}$ (به شکل ۱ نگاه کنید). می‌خواهیم تصویر قائم a را روی امتداد b پیدا کنیم. این تصویر قائم را بردار ′a می‌نامیم.



شکل ۱

واضح است که a' در امتداد b و هم جهت با آن است، پس $a' = rb$ و $r > 0$. در نتیجه $|a'| = |rb| = r|b|$ و لذا $r = \frac{|a'|}{|b|}$. امّا از آنجایی که $\cos\theta = \frac{|a'|}{|a|}$ پس $|a'| = |a|\cos\theta$ و در نتیجه $r = \frac{|a|\cos\theta}{|b|}$ و بدین ترتیب به‌دست می‌آوریم

$$a' = \frac{|a|\cos\theta}{|b|}b ,$$

یا

$$a' = \frac{|a||b|\cos\theta}{|b|^2}b . \qquad (۱)$$

به‌عنوان تمرین بررسی کنید که در حالت $\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$ و حالات خاص $\theta = 0$ ، $\theta = \frac{\pi}{2}$ و $\theta = \pi$ نیز تصویر قائم a روی امتداد b، یعنی a' ، از فرمول (۱) به‌دست می‌آید. عدد $|a||b|\cos\theta$ که در فرمول (۱) ظاهر شده است، عددی است وابسته به دو بردار غیرصفر a و b و زاویهٔ بین آنها θ . در ریاضیات این عدد وابسته به دو بردار غیرصفر بسیار ظاهر می‌شود و لذا شایستهٔ داشتن نامی است. این عدد وابسته به دو بردار غیرصفر را ضرب داخلی این دو بردار می‌نامند.

تعریف. فرض کنیم a و b دو بردار غیرصفر باشند و θ زاویهٔ بین آنها. در این صورت **ضرب داخلی** a در b را که با نماد $a.b$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم

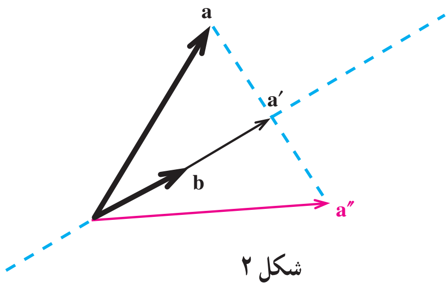
$$a.b = |a||b|\cos\theta .$$

اگر یکی از دو بردار a یا b و یا هر دو برابر صفر باشند، آنگاه زاویهٔ بین آنها قابل تعریف نیست. در این حالت قرارداد می‌کنیم که $a.b = 0$.

تذکر. ضرب داخلی به دلیل وجود نقطه در $a.b$ اغلب **ضرب‌نقطه‌ای** نیز نامیده می‌شود. همچنین، به خاطر این که حاصل $a.b$ یک عدد می‌باشد، به ضرب داخلی، **ضرب اسکالر** نیز می‌گویند.

اکنون با توجه به تعریف بالا می‌توانیم فرمول (۱) را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم.

$$a' = \text{تصویر قائم بردار غیرصفر } a \text{ روی امتداد بردار غیرصفر } b = \frac{a.b}{|b|^2}b . \qquad (۱')$$



شکل ۲

در زیر فرمولی نیز برای محاسبهٔ قرینهٔ یک بردار غیرصفر نسبت به امتداد بردار غیرصفر دیگر پیدا می‌کنیم. برای این منظور گیریم a و b دو بردار غیرصفر باشند و a'' را قرینهٔ a نسبت به امتداد b فرض می‌کنیم (به شکل ۲ نگاه کنید).

توجه می‌کنیم که

$$a'' = a + ۲(a' - a)$$
$$= ۲a' - a.$$

لذا بنابر فرمول $(۱')$ به‌دست می‌آوریم

$$a'' = \text{قرینهٔ بردار غیرصفر } a \text{ نسبت به امتداد بردار غیرصفر } b = \frac{۲a.b}{|b|^۲} b - a. \qquad (۲)$$

ویژگی‌های ضرب داخلی

در زیر بعضی از ویژگی‌های مهم ضرب داخلی را بیان خواهیم کرد.

ویژگی ۱ ضرب داخلی. برای هر دو بردار a و b، $a.b = b.a$.

برای بررسی درستی ویژگی ۱ ملاحظه می‌کنیم که اگر یکی از بردارهای a یا b و یا هر دو بردار صفر باشد، آنگاه a.b و b.a هر دو بنابر قرارداد برابر صفر می‌باشند و لذا تساوی برقرار است. پس فرض می‌کنیم a و b دو بردار غیرصفر باشند که زاویهٔ بین آنها θ است. در این حالت نیز داریم

$$a.b = |a||b|\cos\theta = |b||a|\cos\theta = b.a.$$

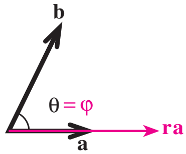
ویژگی ۲ ضرب داخلی. برای هر دو بردار a و b و هر عدد حقیقی r، $ra.b = r(a.b) = a.rb$.

در ویژگی ۲، فقط درستی تساوی اوّل را بررسی می‌کنیم. درستی تساوی دوم به عنوان تمرین رها می‌شود. اگر یکی از بردارهای a یا b و یا هر دو بردار صفر باشد و یا $r = ۰$، دو طرف تساوی اوّل برابر صفر است و لذا تساوی اوّل برقرار است. پس فرض می‌کنیم a و b هر دو بردارهای غیرصفر

هستند و $r \neq 0$. زاویهٔ بین a و b را θ و زاویهٔ بین ra و b را φ می‌گیریم. اکنون با توجه به این که

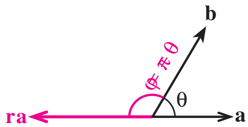
$$\varphi = \begin{cases} \theta & : \text{اگر } r > 0 \\ \pi - \theta & : \text{اگر } r < 0 \end{cases}$$

(به شکل ۳ و ۴ نگاه کنید) داریم



شکل ۳

$$\cos\varphi = \begin{cases} \cos\theta & : \text{اگر } r > 0 \\ -\cos\theta & : \text{اگر } r < 0 \end{cases} = \frac{r}{|r|}\cos\theta \,.$$



شکل ۴

لذا به‌دست می‌آوریم

$$ra.b = |ra||b|\cos\varphi = |r||a||b|\frac{r}{|r|}\cos\theta = r(|a||b|\cos\theta) = r(a.b)\,.$$

ویژگی ۳ ضرب داخلی. برای هر بردار a، $a.a = |a|^2$.

اگر a بردار صفر باشد، طرفین تساوی برابر صفر است و لذا تساوی برقرار است. اگر a برداری غیرصفر باشد، با توجه به این که زاویهٔ بین a و خودش برابر صفر است به‌دست می‌آوریم

$$a.a = |a||a|\cos 0 = |a|^2 \,.$$

با توجه به ویژگی ۳ واضح است که $a.a \geq 0$. همچنین $a.a = 0$ اگر و فقط اگر $|a|^2 = 0$ اگر و فقط اگر $|a| = 0$ اگر و فقط اگر $a = 0$.

ویژگی ۴ ضرب داخلی. برای هر دو بردار غیرصفر a و b، a بر b عمود است اگر و فقط اگر $a.b = 0$.

برای بررسی درستی ویژگی ۴، گیریم θ زاویهٔ بین دو بردار غیرصفرِ a و b باشد. در این صورت

$$a.b = 0 \Leftrightarrow |a||b|\cos\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = 0$$ با توجه به غیرصفر بودن بردارهای a و b

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

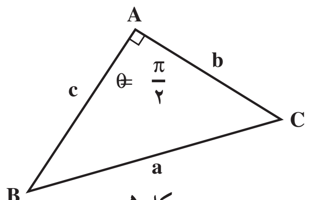
$\Leftrightarrow$ a و b بر هم عمود باشند .

مثال ۱. توجه می‌کنیم که بردارهای i، j و k دو به‌دو برهم عمودند، لذا بنابر ویژگی ۴ ضرب داخلی $i.j = j.i = j.k = k.j = k.i = i.k = ۰$. همچنین با توجه به این که $|i| = |j| = |k| = ۱$ ، بنابر ویژگی ۳ ضرب داخلی به‌دست می‌آوریم $i.i = j.j = k.k = ۱$.

اکنون فرمولی برای محاسبهٔ a.b برحسب مختصات a و b بیان می‌کنیم. برای این منظور به قضیه‌ای از هندسه نیازمندیم که ابتدا در زیر به آن اشاره می‌کنیم. به کمک این قضیه که به قضیهٔ کسینوسها معروف است قضیهٔ ۲ را ثابت خواهیم کرد که همان ارائه فرمولی برای محاسبهٔ a.b برحسب مختصات a و b است.

قضیهٔ ۱ (قضیهٔ کسینوسها). مثلث ABC را در نظر می‌گیریم. گیریم a، b و c طول اضلاع این مثلث باشد که به ترتیب روبه‌روی زوایای A، B و C هستند. اگر θ زاویهٔ بین AB و AC باشد، آنگاه

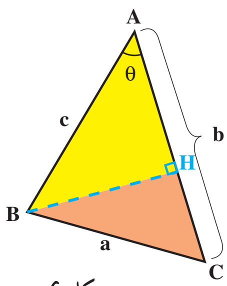
$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\theta .$$



شکل ۵

اثبات[1]. ابتدا فرض می‌کنیم $\theta = \frac{\pi}{۲}$ (به شکل ۵ نگاه کنید).
در این صورت $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{۲} = ۰$ و لذا حکم قضیه به‌صورت $a^۲ = b^۲ + c^۲$ تبدیل می‌شود که همان قضیهٔ فیثاغورس است و برقرار می‌باشد.

حال فرض می‌کنیم $۰ \neq \theta < \frac{\pi}{۲}$ (به شکل ۶ نگاه کنید).



شکل ۶

BH، ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم می‌کنیم. بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ BHC داریم

$$a^۲ = BH^۲ + HC^۲ . \qquad (۱)$$

همچنین در مثلث قائم‌الزاویه ABH داریم

$$c^۲ = BH^۲ + AH^۲ . \qquad (۲)$$

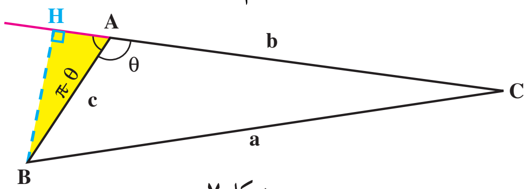
۱ــ در اثبات این قضیه، برای راحتی طول پاره‌خط X را به جای |X| با X نمایش داده‌ایم.

اکنون بنابر رابطهٔ (۱) می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} a^2 &= BH^2 + HC^2 \\ &= BH^2 + (b - AH)^2 \\ &= BH^2 + AH^2 + b^2 - 2bAH \\ &= c^2 + b^2 - 2bAH. \qquad \text{(2) بنابر رابطهٔ} \end{aligned}$$

امّا در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH، $\cos\theta = \frac{AH}{c}$ و لذا $AH = c\cos\theta$. در نتیجه $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$ که درستی حکم را در این حالت به‌دست می‌دهد.

اکنون آنچه باقی می‌ماند حالت $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ می‌باشد (به شکل ۷ نگاه کنید).



شکل ۷

BH، ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم می‌کنیم. بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ BHC داریم

$$a^2 = BH^2 + HC^2. \qquad (3)$$

همچنین در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH داریم

$$c^2 = BH^2 + AH^2. \qquad (4)$$

اکنون بنابر رابطهٔ (۳) می‌توانیم بنویسیم

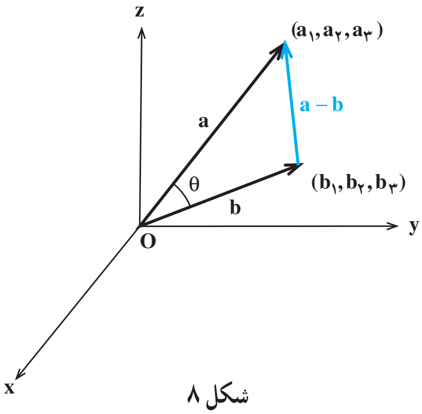
$$\begin{aligned} a^2 &= BH^2 + HC^2 \\ &= BH^2 + (b + AH)^2 \\ &= BH^2 + AH^2 + b^2 + 2bAH \\ &= c^2 + b^2 + 2bAH. \qquad \text{(4) بنابر رابطهٔ} \end{aligned}$$

امّا در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH، $\cos(\pi-\theta) = \frac{AH}{c}$ و چون $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$، لذا $AH = -c\cos\theta$. در نتیجه $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$ که درستی حکم را در این حالت نیز به‌دست می‌دهد. ■

قضیهٔ ۲. فرض کنیم $a=(a_1,a_2,a_3)$ و $b=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند. دراین صورت $a.b=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

اثبات. اگر یکی از a یا b و یا هر دو بردار صفر باشد آنگاه دو طرف تساوی صفر است و لذا تساوی برقرار می‌باشد. پس فرض می‌کنیم a و b هر دو بردارهای غیرصفر باشند و θ زاویهٔ بین آنها.

اگر $\theta \neq \circ$ و π، آنگاه بردارهای a، b و $a-b$ مثلثی تشکیل می‌دهند (به شکل ۸ نگاه کنید).



شکل ۸

در مثلث شکل ۸، با استفاده از قضیهٔ کسینوسها داریم

$$|a-b|^2=|a|^2+|b|^2-2|a||b|\cos\theta \cdot$$

در حالات $\theta=\circ$ یا $\theta=\pi$، از بردارهای a، b و $a-b$ مثلثی به‌وجود نمی‌آید، ولیکن در این دو حالت نیز تساوی بالا مجدداً برقرار است (چرا؟). لذا در هر صورت

$$|a-b|^2=|a|^2+|b|^2-2a.b\,,$$

پس

$$a.b=\frac{1}{2}\left(|a|^2+|b|^2-|a-b|^2\right).$$

اکنون با توجه به این که $a-b=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$ به‌دست می‌آوریم

$$a.b=\frac{1}{2}\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2-(a_1-b_1)^2-(a_2-b_2)^2-(a_3-b_3)^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}(2a_1b_1+2a_2b_2+2a_3b_3)$$

$$=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\,.\ \blacksquare$$

مثال ۲. می‌خواهیم تصویر قائم بردار $a=(۱,۲,-۲)$ را روی امتداد بردار $b=(۱,۲,۲)$ پیدا کنیم. توجه می‌کنیم که $a.b=(۱)(۱)+(۲)(۲)+(-۲)(۲)=۱$. چون $|b|^۲=۱^۲+۲^۲+۲^۲=۹$ لذا فرمول ($'۱$) نتیجه می‌دهد که

$$a' = \underset{\text{روی امتداد بردار غیرصفر b}}{\text{تصویر قائم بردار غیرصفر a}} = \frac{a.b}{|b|^۲}b=\frac{۱}{۹}(۱,۲,۲)=(\frac{۱}{۹},\frac{۲}{۹},\frac{۲}{۹}).$$

مثال ۳. برای بردارهای معرفی شده در مثال قبل، قرینهٔ بردار a نسبت به امتداد بردار b به‌کمک فرمول (۲) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$a' = \underset{\text{نسبت به امتداد بردار غیرصفر b}}{\text{قرینهٔ بردار غیرصفر a}} = \frac{۲a.b}{|b|^۲}b-a=\frac{۲}{۹}(۱,۲,۲)-(۱,۲,-۲)=(\frac{-۷}{۹},\frac{-۱۴}{۹},\frac{۲۲}{۹}).$$

مثال ۴. نشان می‌دهیم بردارهای $a=(-۴,۵,۷)$ و $b=(۱,-۲,۲)$ بر هم عمودند. بنابر قضیهٔ ۲ داریم

$$a.b=(-۴)(۱)+(۵)(-۲)+(۷)(۲)=۰,$$

و لذا بنابر ویژگی ۴ ضرب داخلی، a بر b عمود است.

مثال ۵. می‌خواهیم زاویهٔ بین دو بردار $a=(۲,-۱,۲)$ و $b=(۱,-۱,۰)$ را پیدا کنیم. بنابر قضیهٔ ۲ داریم

$$a.b=(۲)(۱)+(-۱)(-۱)+(۲)(۰)=۳.$$

حال گیریم θ زاویهٔ بین a و b باشد، پس $a.b=|a||b|\cos\theta$ و یا

$$۳=\sqrt{(۲)^۲+(-۱)^۲+(۲)^۲}\sqrt{(۱)^۲+(-۱)^۲+(۰)^۲}\cos\theta.$$

در نتیجه $۳=۳\sqrt{۲}\cos\theta$، پس $\cos\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و لذا $\theta=\frac{\pi}{۴}$.

ویژگی ۵ ضرب داخلی. برای هر سه بردار a، b و c، $a.(b+c)=a.b+a.c$ و $(a+b).c=a.c+b.c$.

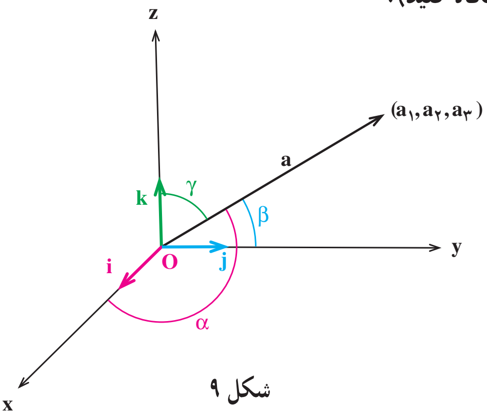
برای بررسی درستی ویژگی ۵ کافی است قرار دهیم $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$، $b=(b_۱,b_۲,b_۳)$ و

$c=(c_1,c_2,c_3)$. در این صورت $b+c=(b_1+c_1, b_2+c_2, b_3+c_3)$ و لذا بنابر قضیهٔ ۲ به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} a.(b+c) &= a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)+a_3(b_3+c_3) \\ &= (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)+(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3) \\ &= a.b+a.c\,. \end{aligned}$$

درستی تساوی دوم به‌عنوان تمرین رها می‌شود.

به کمک قضیهٔ ۲ می‌توانیم زوایایی که یک بردار غیرصفر با محورهای مختصات می‌سازد پیدا کنیم. گیریم بردار $a=(a_1,a_2,a_3)$ با محور xها، محور yها و محور zها به ترتیب زوایای α، β و γ بسازد (به شکل ۹ نگاه کنید).



شکل ۹

چون $i=(1,0,0)$، $j=(0,1,0)$ و $k=(0,0,1)$، لذا قضیهٔ ۲ نتیجه می‌دهد که $a.i=a_1$، $a.j=a_2$ و $a.k=a_3$. در نتیجه

$$\begin{aligned} a_1 &= a.i=|a||i|\cos\alpha=|a|\cos\alpha, \\ a_2 &= a.j=|a||j|\cos\beta=|a|\cos\beta, \\ a_3 &= a.k=|a||k|\cos\gamma=|a|\cos\gamma. \end{aligned}$$

پس α، β و γ از فرمول‌های زیر قابل محاسبه‌اند

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{|a|}\,,\ \cos\beta=\frac{a_2}{|a|}\,,\ \cos\gamma=\frac{a_3}{|a|}\,. \qquad (3)$$

α، β و γ را **زوایای هادی** بردار a می‌نامند. توجه می‌کنیم که

$$\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta+\cos^۲\gamma=\frac{a_۱^۲}{|a|^۲}+\frac{a_۲^۲}{|a|^۲}+\frac{a_۳^۲}{|a|^۲}=\frac{a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲}{|a|^۲}=\frac{|a|^۲}{|a|^۲}=۱\,,$$

و لذا برای کسینوس زوایای هادی بردار a، تساوی زیر برقرار است.

$$\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta+\cos^۲\gamma=۱. \qquad (۴)$$

مثال ۶. می‌خواهیم کسینوس زوایای هادی بردار $a=(۱۲,-۱۵,-۱۶)$ را پیدا کنیم. توجه می‌کنیم که $|a|=\sqrt{(۱۲)^۲+(-۱۵)^۲+(-۱۶)^۲}=۲۵$ و لذا بنابر تساوی‌های ظاهر شده در (۳)

$\cos\alpha=\frac{۱۲}{۲۵}$، $\cos\beta=\frac{-۱۵}{۲۵}$ و $\cos\gamma=\frac{-۱۶}{۲۵}$.

مثال ۷. در این مثال به کمک تساوی (۴) نشان می‌دهیم که برداری وجود ندارد که با محورهای مختصات زوایای $\alpha=\frac{\pi}{۴}$، $\beta=\frac{۳\pi}{۴}$ و $\gamma=\frac{\pi}{۳}$ بسازد. زیرا اگر چنین برداری موجود باشد زوایای هادی آن α، β و γ خواهد بود و لذا کسینوس زوایای هادی آن، یعنی $\cos\alpha=\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$، $\cos\beta=\cos\frac{۳\pi}{۴}=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$ و $\cos\gamma=\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}$، لزوماً باید در تساوی (۴) صدق کنند : $(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲+(\frac{-\sqrt{۲}}{۲})^۲+(\frac{۱}{۲})^۲=۱$. پس $\frac{۵}{۴}=۱$ و این تناقض است.

تمرین

۱. برای هر یک از بردارهای a و b که در زیر آمده است، زاویهٔ بین a و b را پیدا کنید.

الف) $a=(۱,۱,۰)$ ، $b=(۰,-۱,-۱)$ ،

ب) $a=(-۴,۲,-۵)$ ، $b=(\frac{۱}{۲},۶,۲)$ ،

ج) $a=(۱,۰,۰)$ ، $b=(\sqrt{۳},۱,۰)$ ،

د) $a=(۰,۰,۱)$ ، $b=(۰,\sqrt{۳},۱)$.

۲. نشان دهید بردارهای a، b و c که در زیر تعریف شده‌اند دوبه‌دو برهم عمودند.

$$a=(۲,۱,-۱)\ ,\ b=(۳,۷,۱۳)\ ,\ c=(۲۰,-۲۹,۱۱)\ .$$

۳. برای هر یک از بردارهای a و b که در زیر آمده است، تصویر قائم a را روی امتداد b و قرینهٔ a را نسبت به امتداد b پیدا کنید.

الف) $a=(۲,-۱,۲)$ ، $b=(۱,۰,۰)$ ،

ب) $a=(۱,۰,۰)$ ، $b=(-۲,۳,-۴)$ ،

ج) $a=(۱,۱,۰)$ ، $b=(-۱,۲,۴)$ ،

د) $a=(۲,۳,۱)$ ، $b=(۳,۲,۱)$.

۴. فرض کنید a، b و c بردارهایی باشند به ترتیب به طول‌های ۱، ۲ و ۳ با این خاصیت که $a+b+c=o$. مقدار $a.b+b.c+c.a$ را محاسبه کنید.

۵. فرض کنید a، b و c سه بردار غیرصفر باشند. اگر $a.b=a.c$ ، با مثالی نشان دهید که لزومی ندارد $b=c$.

۶. تصویر قائم بردار $a=(۴,-۳,۲)$ را برامتداد برداری که با قسمت مثبت محورهای مختصات زوایای حادهٔ مساوی می‌سازد به‌دست آورید.

۷. فرض کنید $a=(۳,-۶,-۱)$ ، $b=(۱,۴,-۵)$ و $c=(۳,-۴,۱۲)$. تصویر قائم $a+b$ را برامتداد c به‌دست آورید.

۸. فرض کنید $a=(۱,-۳,۴)$ ، $b=(۳,-۴,۲)$ و $c=(-۱,۱,۴)$. تصویر قائم a را بر امتداد $b+c$ به‌دست آورید.

۹. الف) فرض کنید a و b دو بردار دلخواه باشند. نامساوی $|a.b|\le|a||b|$ را ثابت کنید (این نامساوی به نامساوی کشی ــ شوارتس معروف است)،

ب) به کمک الف ثابت کنید برای اعداد حقیقی $a_۱$ ، $a_۲$ ، $a_۳$ ، $b_۱$ ، $b_۲$ و $b_۳$ داریم

$$|a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳|\le\left(a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}\left(b_۱^۲+b_۲^۲+b_۳^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}\text{،}$$

ج) به کمک ب ثابت کنید برای اعداد حقیقی $a_۱$ ، $a_۲$ و $a_۳$ داریم

$$\left(\frac{a_۱+a_۲+a_۳}{۳}\right)^۲\le\frac{a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲}{۳}\ .$$

۱۰. فرض کنید a و b دو بردار غیرصفر باشند. ثابت کنید a بر b عمود است اگر و فقط اگر $|a+b|^۲=|a|^۲+|b|^۲$ (با اثبات این تمرین، اثباتی جدید از کدام قضیهٔ معروف هندسه ارائه کرده‌اید؟).

۱۱. فرض کنید a و b دو بردار دلخواه باشند. نامساوی مثلث را ثابت کنید : $|a+b| \leq |a|+|b|$ (با اثبات این تمرین، اثباتی جدید از کدام قضیهٔ معروف هندسه ارائه کرده‌اید؟).

۱۲. فرض کنید a و b دو بردار دلخواه باشند. ثابت کنید $|a+b|^{۲}+|a-b|^{۲}=۲|a|^{۲}+۲|b|^{۲}$ (تعبیر هندسی رابطهٔ بالا چیست؟).

۱۳. فرض کنید a و b دو بردار باشند و $a+b$ و $a-b$ غیرصفر باشند. شرطی لازم و کافی برای عمود بودن $a+b$ بر $a-b$ را پیدا کنید (کدام مطلب هندسی را از حل این تمرین به‌دست آورده‌اید؟).

۳.۱ ضرب خارجی

در این بخش، برخلاف بخش قبل که به دو بردار یک عدد وابسته کردیم، می‌خواهیم به دو بردار یک بردار وابسته کنیم. این بردار را ضرب خارجی دو بردار مذکور می‌نامند.

تعریف. فرض کنیم $a=(a_{۱},a_{۲},a_{۳})$ و $b=(b_{۱},b_{۲},b_{۳})$ دو بردار باشند. **ضرب خارجی** a در b را که با نماد $a\times b$ نمایش می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$a\times b=(a_{۲}b_{۳}-a_{۳}b_{۲}\ ,\ a_{۳}b_{۱}-a_{۱}b_{۳}\ ,\ a_{۱}b_{۲}-a_{۲}b_{۱}).$$

مثال ۱. فرض کنیم $a=(۲,-۱,۳)$ و $b=(-۱,-۲,۴)$. در این صورت

$$\begin{aligned} a\times b&=(۲,-۱,۳)\times(-۱,-۲,۴)\\ &=\big((-۱)(۴)-(۳)(-۲)\ ,\ (۳)(-۱)-(۲)(۴)\ ,(۲)(-۲)-(-۱)(-۱)\big)\\ &=(۲,-۱۱,-۵),\\ b\times a&=(-۱,-۲,۴)\times(۲,-۱,۳)\\ &=\big((-۲)(۳)-(۴)(-۱)\ ,\ (۴)(۲)-(-۱)(۳)\ ,(-۱)(-۱)-(-۲)(۲)\big)\\ &=(-۲,۱۱,۵). \end{aligned}$$

توجه می‌کنیم که برای دو بردار a و b که در این مثال معرفی شده‌اند داریم $a\times b=-(b\times a)$. این موضوع تصادفی نمی‌باشد و می‌توان این مطلب را برای هر دو بردار a و b در حالت کلی ثابت کرد (به ویژگی ۱ضرب خارجی نگاه کنید).

مثال ۲. بردارهای i، j و k را در نظر می‌گیریم. بنابر تعریف بالا

$$i\times j=(۱,۰,۰)\times(۰,۱,۰)=((۰)(۰)-(۰)(۱)\ ,\ (۰)(۰)-(۱)(۰)\ ,\ (۱)(۱)-(۰)(۰))=(۰,۰,۱)=k\,.$$

به همین ترتیب به‌عنوان تمرین می‌توانید بررسی کنید $j\times k=i$ و $k\times i=j$.

ویژگی‌های ضرب خارجی

در زیر بعضی از ویژگی‌های مهم ضرب خارجی را بیان خواهیم کرد.

ویژگی ۱ ضرب خارجی. برای هر دو بردار a و b، $a\times b=-(b\times a)$.

برای بررسی درستی ویژگی ۱ قرار می‌دهیم $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $b=(b_۱,b_۲,b_۳)$. توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}a\times b&=(a_۱,a_۲,a_۳)\times(b_۱,b_۲,b_۳)\\&=(a_۲b_۳-a_۳b_۲\ ,\ a_۳b_۱-a_۱b_۳\ ,\ a_۱b_۲-a_۲b_۱),\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}b\times a&=(b_۱,b_۲,b_۳)\times(a_۱,a_۲,a_۳)\\&=(b_۲a_۳-b_۳a_۲\ ,\ b_۳a_۱-b_۱a_۳\ ,\ b_۱a_۲-b_۲a_۱).\end{aligned}$$

لذا به راحتی ملاحظه می‌شود که $a\times b=-(b\times a)$.

ویژگی ۲ ضرب خارجی. برای هر بردار a، $a\times a=o$.

برای بررسی درستی ویژگی ۲ توجه می‌کنیم که بنابر ویژگی ۱، $a\times a=-(a\times a)$ و لذا $۲(a\times a)=o$ ، یا $a\times a=o$.

ویژگی ۳ ضرب خارجی. برای هر دو بردار a و b و هر عدد حقیقی r، $ra\times b=r(a\times b)=a\times rb$.

در ویژگی ۳، فقط درستی تساوی اوّل را بررسی می‌کنیم. درستی تساوی دوم به‌عنوان تمرین رها می‌شود. برای این منظور قرار می‌دهیم $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $b=(b_۱,b_۲,b_۳)$. در نتیجه

$$
\begin{aligned}
ra\times b&=(ra_1,ra_2,ra_3)\times(b_1,b_2,b_3)\\
&=(ra_2b_3-ra_3b_2\ ,\ ra_3b_1-ra_1b_3\ ,\ ra_1b_2-ra_2b_1)\\
&=r(a_2b_3-a_3b_2\ ,\ a_3b_1-a_1b_3\ ,\ a_1b_2-a_2b_1)\\
&=r(a\times b)\,.
\end{aligned}
$$

ویژگی ۴ ضرب خارجی. برای هر سه بردار a، b و c، $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ و $(a+b)\times c=(a\times c)+(b\times c)$.

در ویژگی ۴ فقط درستی تساوی اوّل را ثابت می‌کنیم. بررسی درستی تساوی دوم به صورت تمرین رها می‌شود. برای این منظور قرار می‌دهیم $a=(a_1,a_2,a_3)$، $b=(b_1,b_2,b_3)$ و $c=(c_1,c_2,c_3)$. لذا

$$
\begin{aligned}
a\times(b+c)&=(a_1,a_2,a_3)\times(b_1+c_1,b_2+c_2,b_3+c_3)\\
&=\big(a_2(b_3+c_3)-a_3(b_2+c_2)\ ,\ a_3(b_1+c_1)-a_1(b_3+c_3)\ ,\\
&\qquad a_1(b_2+c_2)-a_2(b_1+c_1)\big)\\
&=\big((a_2b_3-a_3b_2)+(a_2c_3-a_3c_2)\ ,\ (a_3b_1-a_1b_3)+\\
&\qquad (a_3c_1-a_1c_3)\ ,\ (a_1b_2-a_2b_1)+(a_1c_2-a_2c_1)\big)\\
&=(a_2b_3-a_3b_2\ ,\ a_3b_1-a_1b_3\ ,\ a_1b_2-a_2b_1)+\\
&\qquad (a_2c_3-a_3c_2\ ,\ a_3c_1-a_1c_3\ ,\ a_1c_2-a_2c_1)\\
&=a\times b+a\times c\,.
\end{aligned}
$$

مثال ۳. به کمک مثال ۲ و ویژگی‌های بالا می‌توانیم بنویسیم

$$i\times(i\times k)=i\times[-(k\times i)]=i\times(-j)=-(i\times j)=-k\,,$$

و

$$(i\times i)\times k=0\times k=0\,.$$

در نتیجه $i\times(i\times k)\neq(i\times i)\times k$ و این مثال نشان می‌دهد که ضرب خارجی خاصیت شرکتپذیری ندارد. یعنی این که در حالت کلی برای سه بردار a، b و c، $a\times(b\times c)\neq(a\times b)\times c$ و لذا نوشتن $a\times b\times c$، بدون درج پرانتز، بی‌معنی است.

قضیهٔ ۱. فرض کنیم a و b دو بردار دلخواه باشند. در این صورت

$$a.(a\times b)=0 \ , \ \ b.(a\times b)=0 .$$

اثبات. قرار می‌دهیم $a=(a_1,a_2,a_3)$ و $b=(b_1,b_2,b_3)$، درنتیجه

$$a.(a\times b)=a_1(a_2b_3-a_3b_2)+a_2(a_3b_1-a_1b_3)+a_3(a_1b_2-a_2b_1)=0,$$

و

$$b.(a\times b)=b_1(a_2b_3-a_3b_2)+b_2(a_3b_1-a_1b_3)+b_3(a_1b_2-a_2b_1)=0. \ \blacksquare$$

نتیجه. اگر a و b دو بردار غیرصفر باشند طوری که $a\times b$ نیز غیرصفر گردد، آنگاه $a\times b$ هم بر a و هم بر b عمود است.

مثال ۴. می‌خواهیم برداری پیدا کنیم که بر هر دو بردار $a=(4,-1,3)$ و $b=(2,3,-1)$ عمود باشد. بنابر نتیجهٔ بالا، بردار مطلوب برابر است با $a\times b=(-8,10,14)$.

قضیهٔ ۲. برای هر دو بردار غیرصفر a و b که زاویهٔ بین آنها θ است داریم

$$|a\times b|=|a||b|\sin\theta .$$

اثبات. به کمک تعریف وبا فرض $a=(a_1,a_2,a_3)$ و $b=(b_1,b_2,b_3)$ می‌توانیم بنویسیم

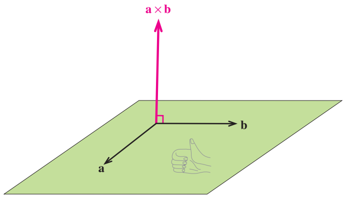
$$\begin{aligned}
|a\times b|^2 &= (a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\\
&= a_2^2b_3^2-2a_2a_3b_2b_3+a_3^2b_2^2+a_3^2b_1^2-2a_1a_3b_1b_3+a_1^2b_3^2\\
&\quad +a_1^2b_2^2-2a_1a_2b_1b_2+a_2^2b_1^2\\
&= (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\
&= |a|^2|b|^2-(a.b)^2\\
&= |a|^2|b|^2-|a|^2|b|^2\cos^2\theta\\
&= |a|^2|b|^2(1-\cos^2\theta)\\
&= |a|^2|b|^2\sin^2\theta\\
&= \left(|a||b|\sin\theta\right)^2 .
\end{aligned}$$

در نتیجه $|a\times b|^۲ = (|a||b|\sin\theta)^۲$. چون $\circ \le \theta \le \pi$، لذا $\sin\theta \ge \circ$. در نتیجه $|a\times b|$ و $|a||b|\sin\theta$ نامنفی می‌باشند و لذا $|a\times b| = |a||b|\sin\theta$. ■

ویژگی ۵ ضرب خارجی. برای هر دو بردار غیرصفر a و b، a با b موازی است اگر و فقط اگر $a\times b = o$.

برای بررسی درستی ویژگی ۵، گیریم θ زاویهٔ بین دو بردار a و b باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}
a\times b = o &\Leftrightarrow |a\times b| = \circ \\
&\Leftrightarrow |a||b|\sin\theta = \circ \\
&\Leftrightarrow \sin\theta = \circ \qquad \text{با توجه به غیرصفر بودن بردارهای a و b} \\
&\Leftrightarrow \theta = \circ \ \text{یا}\ \theta = \pi \\
&\Leftrightarrow \text{a و b با هم موازی باشند.}
\end{aligned}$$



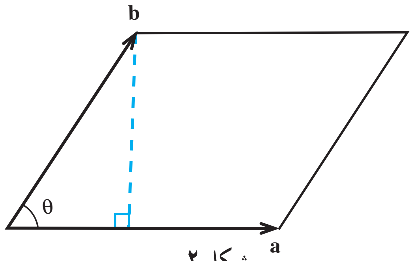
شکل ۱

تذکر. قضیهٔ ۲ و نتیجهٔ قبل ازآن، یک تعبیر هندسی از ضرب خارجی دو بردار به‌دست می‌دهد. در واقع اگر a و b دو بردار غیرصفر باشند و $a\times b$ نیز غیرصفر باشد، آنگاه از نظر هندسی، $a\times b$ برداری عمود بر صفحهٔ گذرا از a و b می‌باشد که طول آن $|a||b|\sin\theta$ است که در آن θ زاویهٔ بین a و b است. می‌توان ثابت کرد که جهت $a\times b$ نیز به سمت جهت انگشت شست دست راست است وقتی که انگشتان از طرف a به b باشند. بررسی دلیل این موضوع از برنامه درسی این کتاب خارج است (به شکل ۱ نگاه کنید).

در انتهای این بخش نشان می‌دهیم که مساحت متوازی‌الاضلاعی که توسط دو بردار a و b ساخته می‌شود و حجم متوازی‌السطوحی که توسط سه بردار a، b و c به‌وجود می‌آید را می‌توان برحسب ضرب خارجی بردارهای تولیدکننده آن متوازی‌الاضلاع یا متوازی‌السطوح بیان کرد. این موضوع تعبیر هندسی دیگری را از ضرب خارجی به‌دست می‌دهد.

مساحت متوازی‌الاضلاع

گیریم a و b دو بردار غیرصفر باشند که زاویهٔ بین آنها θ است و فرض می‌کنیم $\theta \neq 0$ و π. متوازی‌الاضلاعی که روی این دو بردار بنا می‌شود را در نظر می‌گیریم (به شکل ۲ نگاه کنید).



شکل ۲

واضح است که $\sin\theta = \dfrac{\text{اندازهٔ ارتفاع متوازی‌الاضلاع}}{|b|}$ و لذا $|b|\sin\theta =$ اندازهٔ ارتفاع متوازی‌الاضلاع.

در نتیجه مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با

$$\text{اندازهٔ قاعده} \times \text{اندازهٔ ارتفاع} = |a||b|\sin\theta = |a \times b| .$$

توجه می‌کنیم که اگر $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ و یا این که یکی از دو بردار a و b و یا هر دو برابر صفر باشد، آنگاه متوازی‌الاضلاع شکل ۲ به یک خط و یا یک نقطه تبدیل می‌گردد و لذا مساحت متوازی‌الاضلاع در این حالت برابر صفر است. از طرفی در این حالت $|a \times b|$ نیز صفر خواهد بود و در نتیجه در این حالات نیز مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با $|a \times b|$. پس در هر صورت داریم

$$\text{مساحت متوازی‌الاضلاع تولید شده توسط دو بردار a و b} = |a \times b| . \qquad (۱)$$

نتیجه. مساحت مثلثی که با دو بردار a و b تولید می‌شود برابر است با $\frac{1}{2}|a \times b|$.

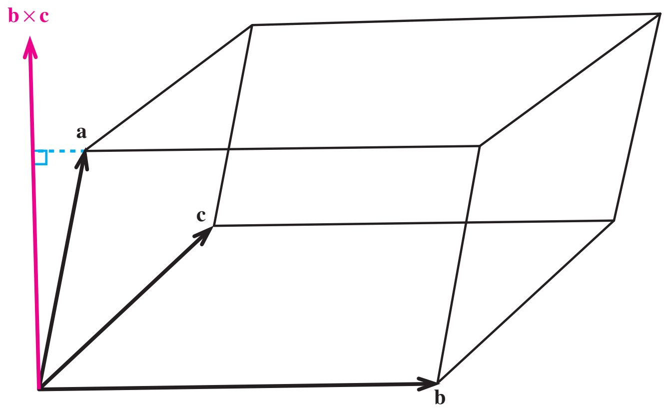
مثال ۵. می‌خواهیم مساحت مثلث ABC به رؤوس $A = (1,2,0)$، $B = (3,0,-3)$ و $C = (5,2,6)$ را پیدا کنیم. واضح است که مساحت این مثلث با مساحت مثلثی که توسط بردارهای $a = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2,-2,-3)$ و $b = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (4,0,6)$ تولید می‌شود برابر است و لذا بنابر نتیجهٔ بالا، $\frac{1}{2}|a \times b| =$ مساحت مثلث ABC. امّا بنابر تعریف ضرب خارجی،

$a\times b=(-۱۲,-۲۴,۸)$ و لذا مساحت مثلث ABC برابر است با

$$\frac{۱}{۲}|a\times b|=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۱۲)^۲+(-۲۴)^۲+(۸)^۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۷۸۴}=\frac{۲۸}{۲}=۱۴.$$

حجم متوازی السطوح

گیریم a، b و c سه بردار باشند که در یک صفحه واقع نباشند. متوازی السطوحی که روی این سه بردار بنا می‌شود را در نظر می‌گیریم (به شکل ۳ نگاه کنید).



شکل ۳

واضح است که ارتفاع این متوازی‌السطوح برابر است با تصویر قائم بردار a روی بردار $b\times c$، یعنی $\frac{a.(b\times c)}{|b\times c|^۲}(b\times c)$. لذا اندازهٔ این ارتفاع برابر است با $\left|\frac{a.(b\times c)}{|b\times c|^۲}(b\times c)\right|=\frac{|a.(b\times c)|}{|b\times c|^۲}|b\times c|=\frac{|a.(b\times c)|}{|b\times c|}$. درنتیجه بنابر (۱) حجم متوازی‌السطوح برابر است با

$$\text{مساحت قاعده}\times\text{اندازهٔ ارتفاع}=|b\times c|\frac{|a.(b\times c)|}{|b\times c|}=|a.(b\times c)|.$$

در حالت خاصی که a، b و c در یک صفحه قرار بگیرند، متوازی‌السطوح به یک متوازی‌الاضلاع یا یک خط و یا یک نقطه تبدیل می‌شود (چرا؟) و لذا حجم متوازی‌السطوح دراین حالت برابر صفر است. از طرفی در این حالت خاص $|a.(b\times c)|$ نیز صفر خواهد بود (چرا؟) و در نتیجه در این حالت خاص نیز حجم متوازی‌السطوح برابر است با $|a.(b\times c)|$. توجه می‌کنیم که در

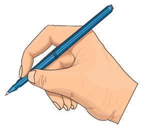
محاسبهٔ حجم متوازی‌السطوح می‌توانستیم هر یک از وجوه را به‌عنوان قاعده درنظر بگیریم، لذا

حجم متوازی‌السطوحی که روی سه بردار a، b و c بنا می‌شود $= |a.(b\times c)| = |b.(c\times a)| = |c.(a\times b)|$. (۲)

مثال ۶. می‌خواهیم حجم متوازی‌السطوحی را که توسط بردارهای $a=(۱,۱,۰)$ ، $b=(۰,۱,۱)$ و $c=(۱,۰,۱)$ تولید می‌شود پیدا کنیم. چون $b\times c=(۱,۱,-۱)$ ، لذا بنابر (۲)

$$\text{حجم متوازی‌السطوح} = |a.(b\times c)| = |(۱,۱,۰).(۱,۱,-۱)| = |۱+۱+۰| = ۲ .$$

مثال ۷. می‌خواهیم بررسی کنیم که بردارهای $a=(۲,۳,-۱)$ ، $b=(۱,-۱,۳)$ و $c=(۱,۹,-۱۱)$ هم صفحه‌اند یانه. برای این منظور کافی است $a.(b\times c)$ را محاسبه کنیم (چرا؟). چون $b\times c=(-۱۶,۱۴,۱۰)$ پس $a.(b\times c) = -۳۲+۴۲-۱۰ = ۰$. یعنی این که حجم متوازی‌السطوح تولید شده توسط بردارهای a، b و c برابر صفر است که این نشان می‌دهد متوازی‌السطوح تولید شده در این جا یک متوازی‌الاضلاع یا خط است و لذا a، b و c در یک صفحه قرار می‌گیرند.



تمرین

۱. برای هر یک از بردارهای a، b و c که در زیر آمده است، $b\times c$ و $a.(b\times c)$ را محاسبه کنید. $|b\times c|$ و $|a.(b\times c)|$ نمایانگر چه هستند؟

الف) $a=(۱,۱,۰)$ ، $b=(۰,۱,۱)$ و $c=(-۱,-۳,۴)$ ،

ب) $a=(-۳,۱,۱)$ ، $b=(۱,۰,-۱)$ و $c=(۱,۱,-۱)$.

۲. برداری عمود بر دو بردار $a=(۱,-۳,۲)$ و $b=(-۲,۱,-۵)$ پیدا کنید.

۳. فرض کنید a، b و c سه بردار غیرصفر باشند. اگر $a\times b = a\times c$ ، با مثالی نشان دهید که لزومی ندارد $b=c$.

۴. فرض کنید a و b بردارهایی به طول ۵ هستند که با یکدیگر زاویهٔ $\frac{\pi}{۴}$ می‌سازند. مساحت مثلثی را که توسط بردارهای $a-۲b$ و $۳a+۲b$ تولید می‌شود پیدا کنید.

۵. بردارهای a و b مفروض‌اند با این خاصیت که $|a|=۳$ ، $|b|=۲۶$ و $|a\times b|=۷۲$. مقدار

$a.b$ را محاسبه کنید.

۶. فرض کنید a، b و c بردارهایی دلخواه و i، j و k بردارهای یکّه باشند. عبارات زیر را ساده کنید.

الف) $i\times(j+k)-j\times(i+k)+k\times(i+j+k)$،

ب) $(a+b+c)\times c+(a+b+c)\times b+(b-c)\times a$،

ج) $(2a+b)\times(c-a)+(b+c)\times(a+b)$،

د) $2i.(j\times k)+3j.(i\times k)+4k.(i\times j)$.

۷. فرض کنید a، b و c سه بردار باشند با این خاصیت که $a+b+c=o$. ثابت کنید $a\times b=b\times c=c\times a$.

۸. فرض کنید a، b، c و d بردارهایی باشند با این خاصیت که $a\times b=c\times d$ و $a\times c=b\times d$. ثابت کنید اگر بردارهای $a-d$ و $b-c$ غیر صفر باشند، آنگاه با هم موازیند.

۹. فرض کنید a، b و c بردارهایی باشند با این خاصیت که $(a\times b)+(b\times c)+(c\times a)=o$. ثابت کنید بردارهای a، b و c در یک صفحه قرار می‌گیرند.

۱۰. فرض کنید a، b و c بردارهایی دلخواه باشند. ثابت کنید

$$a\times(b\times c)=(a.c)b-(a.b)c.$$

۱۱. فرض کنید a، b و c بردارهایی دلخواه باشند. ثابت کنید

$$a\times(b\times c)+b\times(c\times a)+c\times(a\times b)=o.$$

۱۲. فرض کنید p، q، r و s بردارهایی دلخواه باشند. ثابت کنید بردارهای $a=p\times s$، $b=q\times s$ و $c=r\times s$ در یک صفحه قرار می‌گیرند.