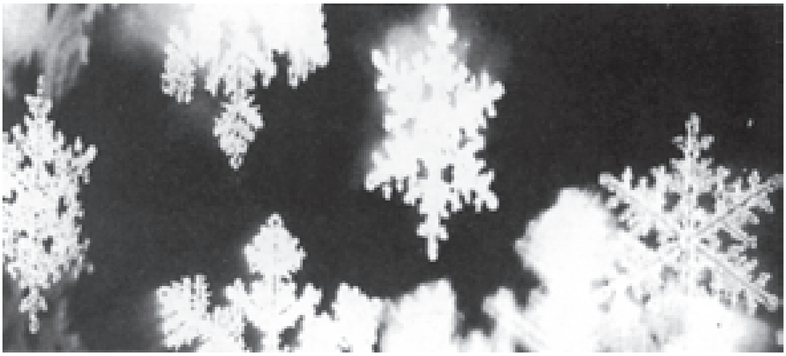
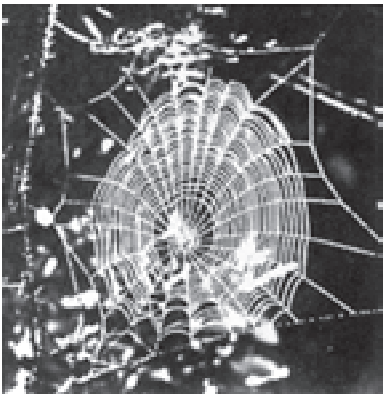
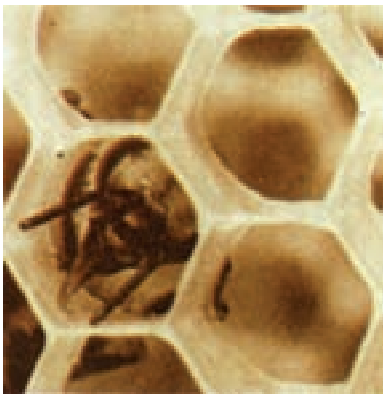
فصل ۱

هندسه و استدلال





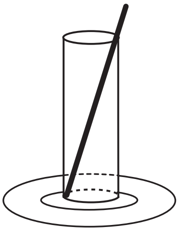


۱ــ۱ــ کشف اطلاعات از طریق مشاهده

تاکنون با بسیاری از مفاهیم هندسی از طریق مشاهده آشنا شده‌اید. گردی توپ‌ها، چرخ‌ها و سکه‌ها را دیده‌اید. کتاب‌های مستطیل شکل را خوانده‌اید. از قیف‌های مخروطی شکل بستنی خورده‌اید و احتمالاً شکل‌های زیبای دانه‌های برف و مارپیچ ظریف چندضلعی گونه‌ی تارعنکبوت و کندوی زنبور عسل شما را به شگفتی واداشته‌اند! این‌گونه مشاهدات، فرصت‌های مناسبی برای درک

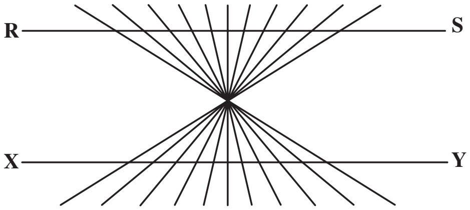
مفاهیم هندسی از قبیل شکل و اندازه را به‌وجود می‌آورند. با این حال، مشاهدات ما صددرصد قابل اطمینان نیستند و گاهی ما را به نتایج نادرست هدایت می‌کنند.

مثال ۱: در شکل ۱، قطر بشقاب بیشتر است یا بلندی لیوان؟



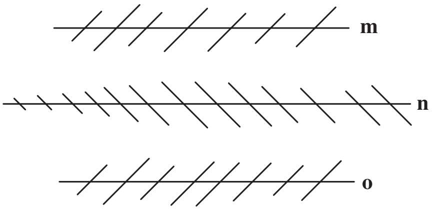
شکل ۱

مثال ۲: آیا RS و XY خط‌های راست هستند؟



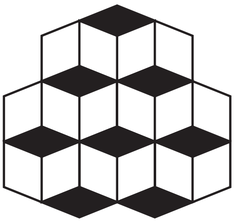
شکل ۲

مثال ۳: آیا خط‌های m ، n و o موازی هستند؟



شکل ۳

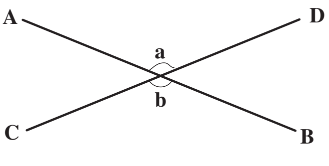
مثال ۴: شش بلوک در شکل وجود دارد یا هفت بلوک؟



شکل ۴

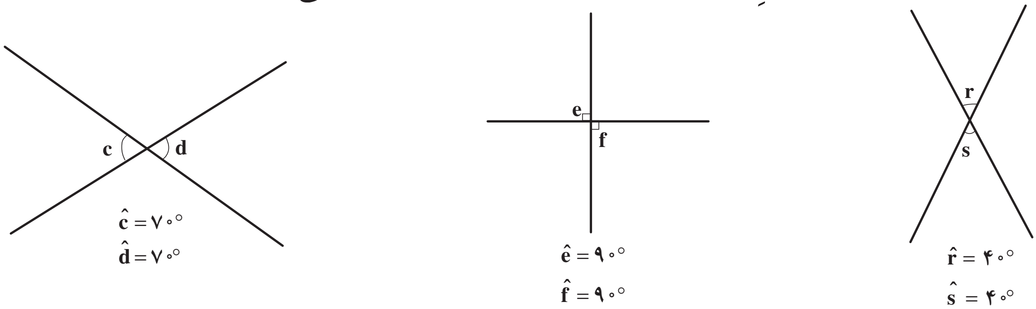
۱ــ۲ــ کشف اطلاعات از طریق تجربه

سارا هنگام نگاه کردن به خط‌های متقاطع شکل (۵)، به‌نظرش رسید که زاویه‌ی a با زاویه‌ی b برابر است. برای اطمینان، با استفاده از یک نقاله آن دو زاویه را اندازه‌گیری کرد و دریافت که هریک از آن‌ها تقریباً °۱۳۰ هستند. آن‌گاه در فکر فرورفت که آیا زاویه‌های متقابل به رأس همیشه مساوی



شکل ۵

هستند؟ او چند جفت خطوط متقاطع مانند شکل‌های صفحه‌ی بعد رسم کرد و مجدداً یک جفت از زاویه‌های متقابل به رأسِ هریک از آن‌ها را اندازه‌گیری کرد، سپس نتایج را یادداشت نمود.



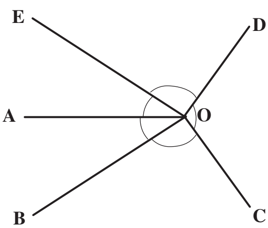
شکل ۶

او بعد از این که این آزمایش را چندین بار تکرار کرد، با توجه به نتایج به‌دست آمده پیش‌بینی کرد که وقتی دو خط یکدیگر را قطع کنند، احتمالاً زاویه‌های متقابل به رأس پدید آمده همیشه مساوی یکدیگر خواهند بود. او به عنوان یک دانش‌آموز خوش‌فکر، کلمه‌ی «احتمالاً» را به کار برد، زیرا می‌دانست در هر اندازه‌گیری به دلایل مختلف از جمله لرزش دست و نوع ابزار، خطا وجود دارد. در نتیجه با اندازه‌گیری‌های دقیق‌تر، ممکن است زاویه‌ها یک مقدار جزیی با یکدیگر تفاوت داشته باشند، همچنین می‌دانست که اگر زاویه‌های متقابل به رأسی پیدا شوند که مساوی یکدیگر نباشند، پیش‌بینی او رد خواهد شد (چرا؟).

به هر حال سارا آن‌قدر هوشیار بود که به نتایجی که هنوز تضمینی برای درستی آن‌ها وجود ندارد استناد نکند. اما احساس کرد که تجربه‌اش با ارزش است، زیرا ممکن است به کشف یک نتیجه‌ی مهم هندسی بیانجامد.

فعالیت ۱ـ۱ به شما این فرصت را می‌دهد تا فرآیند تجربه‌ی سارا، یعنی جمع‌آوری اطلاعات از طریق مشاهده و اندازه‌گیری را در موارد مختلف تکرار کنید.

فعالیت ۱ـ۱



شکل ۷

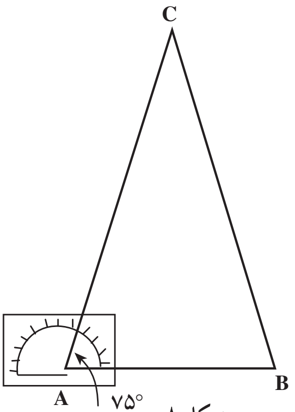
۱. الف) اندازه‌ی زاویه‌های $A\hat{O}B$ ، $B\hat{O}C$ ، $C\hat{O}D$ ، $D\hat{O}E$ و $E\hat{O}A$ را برحسب درجه به‌دست آورید. مجموع همه‌ی زاویه‌های بالا که دورتا دور O هستند، چند درجه است؟

ب) نقطه‌ی دیگری مانند O' در صفحه درنظر بگیرید و زاویه‌های $A\hat{O'}B$ ، $B\hat{O'}C$ ، $C\hat{O'}E$ و $E\hat{O'}A$ را با اندازه‌ای دلخواه به رأس O' رسم کنید. سپس زاویه‌ها را اندازه گرفته و نتایج را باهم جمع کنید.

پ) از قسمت‌های (الف) و (ب) چه نتیجه‌ای را می‌توانید پیش‌بینی کنید؟

۲. چند مثلث رسم کنید. مجموع زاویه‌های هریک از مثلث‌ها را بیابید. حدس شما در مورد مجموع زاویه‌های هر مثلث دیگری غیر از این مثلث‌ها چیست؟

۳. الف) با استفاده از نقاله، مثلثی رسم کنید که دو زاویه ۷۵° داشته باشد. طول ضلع‌های آن را اندازه بگیرید و نتیجه را یادداشت کنید.



شکل ۸

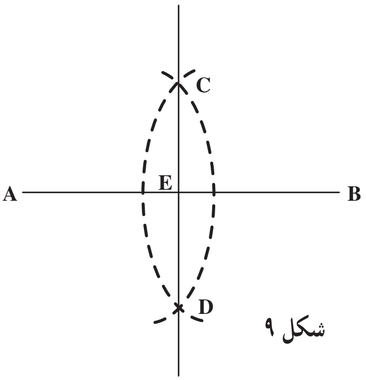
ب) مثلث دیگری رسم کنید که دو زاویه ۴۰° داشته باشد. ضلع‌های آن را اندازه بگیرید و بازهم نتیجه را یادداشت کنید.

پ) چند مثلث دیگر رسم کنید که هریک از آن‌ها دو زاویه‌ی مساوی داشته باشند. ضلع‌های آن‌ها را نیز اندازه بگیرید. با توجه به نتایجی که به‌دست آوردید، آیا می‌توانید یک نتیجه‌گیری کلی را پیش‌بینی کنید؟

۴. روی یک صفحه‌ی کاغذ، سه نقطه‌ی غیرواقع در یک امتداد قرار دهید و آن‌ها را به ترتیب A ، B و C بنامید. AB ، BC و AC را رسم کنید. طول سه پاره‌خط را اندازه گرفته، مجموع دو ضلع کوتاهتر را به‌دست آورید. آیا این مجموع بیشتر از طول پاره‌خط بزرگتر است؟ این آزمایش را برای نقطه‌های دیگری تکرار کنید و هربار نتایج به‌دست آمده را یادداشت کنید. اگر برای هزار مثلث به‌نتیجه مشابه برسید آیا می‌توانید با اطمینان بگویید که این نتیجه‌گیری کلی برای همه‌ی مثلث‌ها درست است؟

۵. الف) پاره‌خط AB را رسم کنید.

ب) سوزن پرگار خود را در نقطه‌ی A قرار دهید و کمانی به شعاع بیش از نصف طول AB، چنان‌که در شکل ۹ نشان داده شده رسم کنید.



شکل ۹

پ) به مرکز B و به همان شعاع کمان دیگری رسم کنید که کمان اول را در نقاط C و D قطع کند.

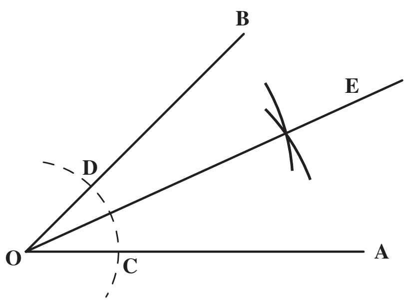
ت) با استفاده از خط‌کش خط CD را رسم کنید و محل برخورد CD و AB را E بنامید.

ث) طول‌های AE و BE را با خط‌کش اندازه بگیرید و نتیجه را یادداشت کنید.

ج) زاویه‌های AEC و BEC را با نقاله اندازه بگیرید و نتیجه را یادداشت کنید.

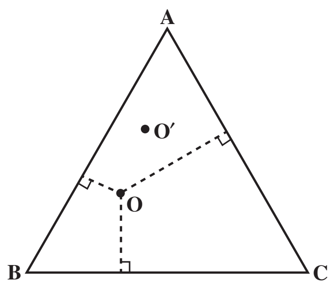
چ) پاره‌خط‌های دیگری رسم کنید و مراحل (ب) تا (ج) را در مورد آن‌ها انجام دهید. سپس نتایج به‌دست آمده در هر مورد رابا نتیجه‌ی قبلی مقایسه کنید. آیا نتایج به‌دست آمده دارای الگوی منظمی هستند؟

۶. زاویه‌ی AOB را مانند شکل ۱۰ رسم کنید. به مرکز O کمانی رسم کنید تا OB را در D و OA را در C قطع کند. به مراکز C و D کمان‌هایی با شعاع‌های مساوی رسم کنید تا یکدیگر را در E قطع کنند. OE را رسم کنید. چه مطلبی در مورد $A\hat{O}E$ و $E\hat{O}B$ درست به‌نظر می‌رسد؟ نتیجه خود را با اندازه‌گیری زاویه‌ها به‌وسیله‌ی نقاله امتحان کنید. این تجربه را با زاویه‌هایی با اندازه‌های مختلف تکرار کنید.



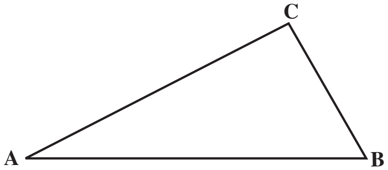
شکل ۱۰

۷. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را رسم کنید. نقطه‌ی دلخواه O را درون مثلث اختیار کنید. سپس فاصله‌ی نقطه‌ی O را تا سه ضلع مثلث به‌دست آورده، مجموع این فاصله‌ها را محاسبه کنید. سه نقطه‌ی دیگر درون مثلث انتخاب کنید و مجموع فاصله‌های آن‌ها را نیز تا سه ضلع مثلث حساب کنید. آیا الگوی منظمی در نتایج به‌دست آمده دیده می‌شود؟ راجع به آن فکر کنید.



شکل ۱۱

۸. مثلث ABC را چنان رسم کنید که در آن $\hat{A}$ کوچکتر از $\hat{B}$ باشد. اضلاع BC و AC را اندازه بگیرید. کدام یک بزرگتر است؟ مثلث دیگری رسم کنید که در آن $\hat{A}$ بزرگتر از $\hat{B}$ باشد و تعیین کنید در آن AC بزرگتر است یا BC . چند مثلث دیگر رسم کنید



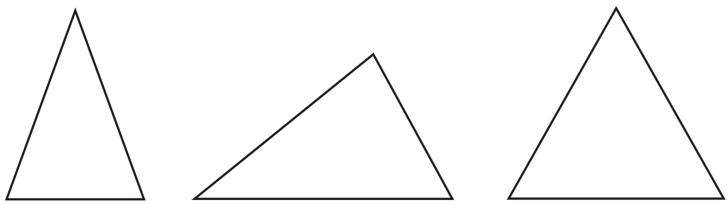
شکل ۱۲

که در آن‌ها $\hat{A}$ بزرگ‌تر از $\hat{B}$ و یا برعکس، $\hat{B}$ بزرگ‌تر از $\hat{A}$ باشد. چه رابطه‌ای بین ضلع‌ها و زاویه‌های مثلث پیش‌بینی می‌کنید؟

در فعالیت‌های بالا، با بررسی حالت‌های مختلف چند نتیجه کلی را پیش‌بینی کردیم. چنین استدلالی، **استدلال استقرایی** خوانده می‌شود. باید توجه داشته باشیم که این استدلال نتایجی را که از طریق آن به‌دست می‌آیند، اثبات نمی‌کند.

فعالیت ۱ــ۲

۱. به کمک خط‌کش و پرگار عمودمنصف ضلع‌های مثلث‌های زیر را رسم کنید (این رسم‌ها را در کتاب انجام دهید).



شکل ۱۳

۲. درهریک از موارد فوق مشخص کنید نقطه‌ی برخورد عمودمنصف‌ها نسبت به مثلث‌ها چه وضعی دارند؟

۳. مثلث دلخواه دیگری رسم کنید و بندهای ۱ و ۲ را در مورد آن تحقیق نمایید.

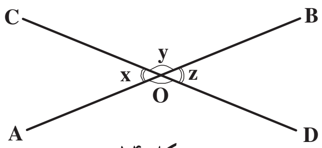
۴. با توجه به تجربیات فوق، به‌نظر شما محل برخورد عمودمنصف‌های ضلع‌های یک مثلث نسبت به آن چه وضعی دارد؟

۵. مثلث ABC را چنان رسم کنید که $AB = ۶cm$ ، $BC = ۳cm$ و $AC = ۴cm$. سپس بندهای ۱ و ۲ را در مورد آن تکرار کنید. آیا نتیجه‌ی به‌دست آمده از این بند، نظر شما در بند ۴ را تأیید می‌کند؟

همان‌طور که در فعالیت‌های قبل مشاهده کردید، نتیجه‌ی به‌دست آمده از بررسی چند مورد، ممکن است درهمه‌ی موارد برقرار نباشد. بنابراین از طریق استدلال استقرایی نمی‌توان نتایج قطعی به‌دست آورد. با این حال، فرآیند استدلال استقرایی با تقویت شهود و ارائه اطلاعات مفید ما را قادر می‌سازد حدس‌های احتمالاً درستی بزنیم، ولی برای اطمینان از درستی حدس‌ها به روش‌های دیگری از استدلال نیاز داریم.

مثال ۵: سارا با جمع‌آوری اطلاعات از طریق مشاهدات و اندازه‌گیری‌های خود، یعنی به‌کمک استدلال استقرایی پیش‌بینی کرد که هردو زاویه‌ی متقابل به رأس برابرند. اما او نمی‌توانست برای نشان دادن درستی پیش‌بینی خود هردو خط متقاطع ممکن را رسم کند و در نتیجه نمی‌توانست با اطمینان بگوید که پیش‌بینی او در همه‌ی موارد دیگر نیز درست است. پس او سعی کرد با استناد به حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته بود، نشان دهد که پیش‌بینی او همواره درست است. یعنی زاویه‌های متقابل به رأس در هر دو خط متقاطع باهم برابرند.

استدلال سارا: شکل ۱۴ دو خط متقاطع دلخواه را نشان می‌دهد.



شکل ۱۴

چون $\hat{AOB}$ یک زاویه‌ی نیم‌صفحه است.

(۱) $x+y=۱۸۰^\circ$

چون $\hat{COD}$ یک زاویه‌ی نیم‌صفحه است

(۲) $y+z=۱۸۰^\circ$

از مقایسه تساوی‌های (۱) و (۲) داریم

(۳) $x+y=y+z$

در نتیجه : $x=z$

بنابراین $\hat{DOB}=\hat{AOC}$. به طریق مشابه، $\hat{AOD}=\hat{COB}$.

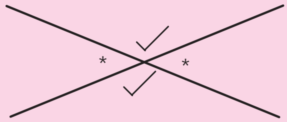
استدلال ارائه شده در مثال بالا، نمونه‌ای از **استدلال استنتاجی** است.

استدلال استنتاجی روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای حقایقی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.

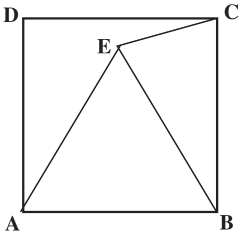
نتایج مهم و مفیدی که از استدلال استنتاجی به دست می‌آید **قضیه** نامیده می‌شوند.

قضیه‌ی ۱: زاویه‌های متقابل به رأس

زاویه‌های متقابل به رأس در هر دو خط متقاطع با یک‌دیگر مساویند.



مثال ۶: چهارضلعی ABCD یک مربع و ABE یک مثلث متساوی‌الاضلاع است (شکل ۱۵). نشان دهید که مثلث BCE متساوی‌الساقین است.



شکل ۱۵

حل : چون چهارضلعی ABCD ، مربع است

$AB = CB$ (۱)

چون مثلث ABE متساوی‌الاضلاع است

$AB = EB$ (۲)

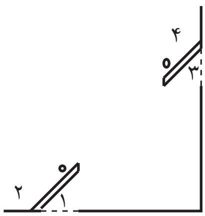
از مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$CB = EB$

بنابراین، مثلث BCE متساوی‌الساقین است.

مثال ۷: داخل اتاقی دو در وجود دارد که هردوی آن‌ها به یک اندازه باز شده‌اند (شکل ۱۶)، یعنی $\hat{۳} = \hat{۱}$.

می‌خواهیم با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهیم که $\hat{۴} = \hat{۲}$.



شکل ۱۶

حل: چون $\hat{۱}$ و $\hat{۲}$ مکمل یکدیگر هستند

$\hat{۱} + \hat{۲} = ۱۸۰^\circ$ (۱)

$\hat{۲} = ۱۸۰^\circ - \hat{۱}$

چون $\hat{۳}$ و $\hat{۴}$ مکمل یکدیگر هستند

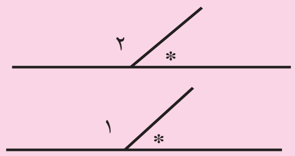
$$\hat{۳}+\hat{۴}=۱۸۰^\circ$$

$$\hat{۴}=۱۸۰^\circ-\hat{۳} \qquad (۲)$$

چون $\hat{۳}=\hat{۱}$، از مقایسه‌ی (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که عبارت‌های سمت راست مساوی یکدیگرند. بنابراین $\hat{۴}=\hat{۲}$.

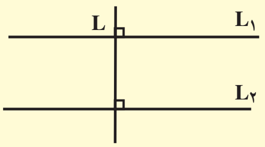
قضیه‌ی ۲: دو زاویه‌ی مکمل

اگر دو زاویه مساوی باشند، مکمل‌های آن‌ها نیز با یکدیگر مساویند. $\hat{۲}=\hat{۱}$



یکی از حقایقی که در ریاضیات دوره‌ی راهنمایی با آن آشنا شدیم. به‌صورت زیر است :

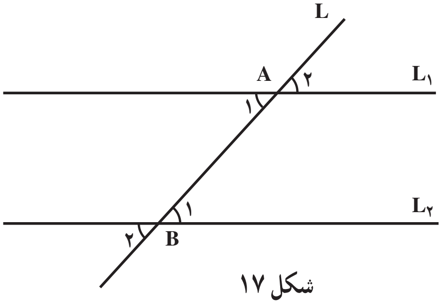
اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد، بر دیگری هم عمود است.



به عنوان مثال، اگر دو خط $L_۱$ و $L_۲$ باهم موازی باشند و خط L بر $L_۱$ عمود باشد، بر $L_۲$ هم عمود خواهد بود. در این حالت ۸ زاویه‌ی قائمه پدید می‌آید که همه‌با هم برابرند.

این یکی از حقایق است که درستی آن را پذیرفته‌ایم، اما اگر خطی دو خط موازی را طوری قطع کند که بر آن‌ها عمود نباشد، زاویه‌های پدید آمده چگونه‌اند؟

در شکل روبه‌رو دو خط $L_۱$ و $L_۲$، باهم موازی‌اند و خط L این دو خط را در نقطه‌های A و B قطع کرده است. در سال‌های قبل با استفاده از همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه و حقیقی که در بالا بدون اثبات پذیرفته‌ایم، ثابت کردیم که $\hat{A}_۱=\hat{B}_۱$ است.



شکل ۱۷

قضیه‌ی ۳: خطوط موازی

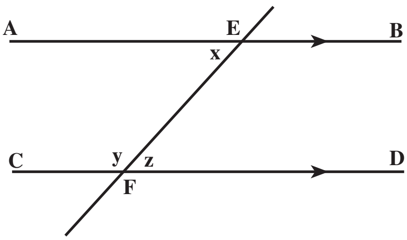
اگر خط L دو خط L_1 و L_2 را قطع کند و زاویه‌های $\hat{A}_1$ و $\hat{B}_1$ را پدید آورد (شکل ۱۷) :

الف) اگر L_1 و L_2 باهم موازی باشند، آن‌گاه $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ است.

ب) اگر $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ باشد، آن‌گاه L_1 و L_2 باهم موازی‌اند.

تمرین. اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، آیا دیگری را هم قطع خواهد کرد؟ چرا؟

مثال ۸: با توجه به قضیه فوق، نشان دهید که مجموع اندازه‌های دو زاویه‌ی AEF و CFE یعنی x و y برابر 180° است.



حل: چون $C\hat{F}D$ نیم‌صفحه است، پس

$$y + z = 180^\circ$$

هم‌چنین بنابر قضیه خطوط موازی،

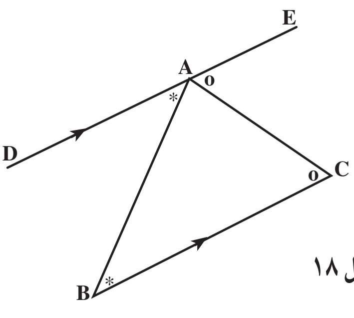
$$x = z$$

بنابراین :

$$y + x = 180^\circ$$

مثال ۹: با استفاده از قضیه‌ی خطوط موازی، نشان دهید که مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است.

حل: مثلث دلخواه ABC را درنظر می‌گیریم (شکل ۱۸). از A خطی به موازات BC رسم می‌کنیم و آن را DE می‌نامیم. چون DE موازی BC است.



شکل ۱۸

(۱) $$E\hat{A}C = \hat{C}$$

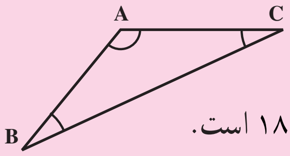
(۲) $$D\hat{A}B = \hat{B}$$

از طرف دیگر، چون $D\hat{A}E$ یک زاویه‌ی نیم‌صفحه است، بنابراین :

$$D\hat{A}B + B\hat{A}C + E\hat{A}C = 180^\circ$$

از روابط (۱) و (۲) مقدارهای مساوی $E\hat{A}C$ و $D\hat{A}B$ را جایگزین می‌کنیم، در نتیجه:

$$\hat{B}+B\hat{A}C+\hat{C}=۱۸۰^\circ$$



قضیه‌ی ۴: مجموع زاویه‌های داخلی مثلث

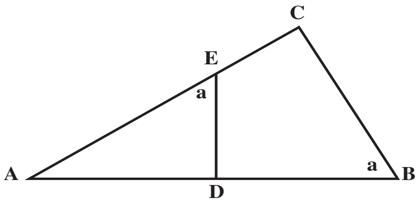
در هر مثلث مجموع زاویه‌های داخلی، ۱۸۰° است.

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$$

در این جا، با استفاده از قضیه‌ی خطوط موازی، نشان دادیم که مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث، صرف‌نظر از نوع آن ۱۸۰° است. چنان‌که در بند ۲، فعالیت ۱ــ۱، اندازه‌ی زاویه‌های داخلی مثلث‌های متعددی را به‌دست آوردیم و با توجه به یکسان بودن نتایج به‌دست آمده، این نتیجه‌گیری کلی را پیش‌بینی کردیم.

مثال ۱۰: در شکل ۱۹، $A\hat{E}D = A\hat{B}C = a$.

با استفاده از قضیه فوق نشان دهید که، $A\hat{D}E = A\hat{C}B$.



شکل ۱۹

حل: در مثلث ADE

$$\hat{A}+a+A\hat{D}E=۱۸۰^\circ \quad (۱)$$

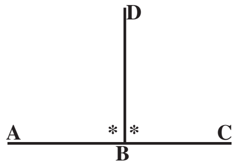
در مثلث ACB

$$\hat{A}+a+A\hat{C}B=۱۸۰^\circ \quad (۲)$$

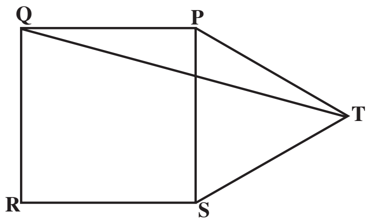
از مقایسه‌ی (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که

$$A\hat{D}E=A\hat{C}B$$

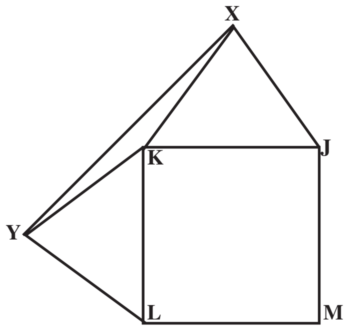
مسائل



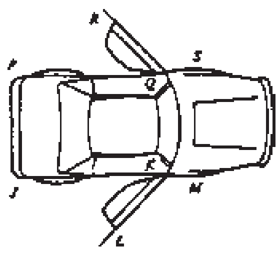
۱. از نقطه‌ی B روی خط AC پاره‌خط BD را طوری رسم کرده‌ایم که $A\hat{B}D = C\hat{B}D$. چرا $A\hat{B}D = 90^\circ$ ؟



۲. PQRS یک مربع و PST یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. نشان دهید مثلث PQT متساوی‌الساقین است؟



۳. JKLM یک مربع و مثلث‌های JXK و KYL هر دو متساوی‌الاضلاع هستند. نشان دهید مثلث KXY متساوی‌الساقین است.



۴. با توجه به تصویر ماشین $J\hat{K}L = P\hat{Q}R$ ، چرا $R\hat{Q}S = L\hat{K}M$ ؟ دلیل خود را بنویسید. (دوطرف ماشین را دو خط فرض کنید.)

۵. مجموع دو زاویه 90° است. مجموع مکمل‌های آن‌ها چنددرجه است؟

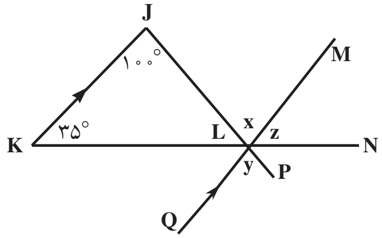
۶. دو زاویه مکمل یکدیگرند. در حالت‌های زیر، اندازه‌ی هریک را مشخص کنید.

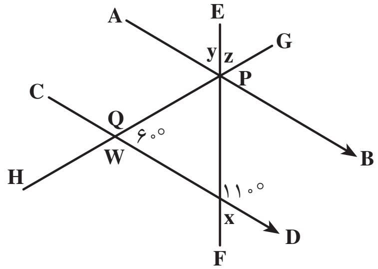
الف) دو زاویه مساوی باشند.

ب) یک زاویه دو برابر دیگری باشد.

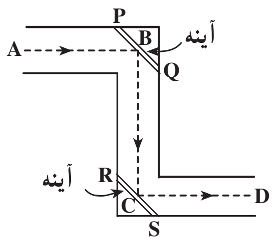
پ) یک زاویه n برابر دیگری باشد.

۷. اندازه‌ی زاویه‌هایی را که به وسیله‌ی حروف کوچک مشخص شده‌اند، پیدا کنید.

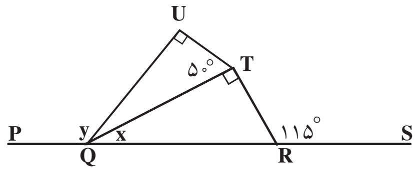


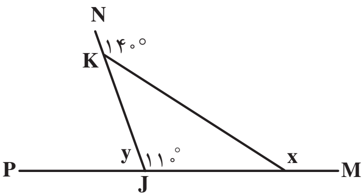


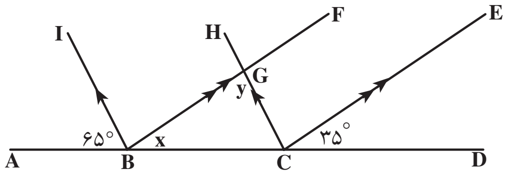
۸. در ساختمان پریسکوپ یک جفت آینه‌ی موازی وجود دارد. به این ترتیب شعاع‌های نور که در بالا وارد پریسکوپ می‌شوند، موازی شعاع‌های نوری هستند که در پایین از پریسکوپ خارج می‌شوند. زاویه‌های مساوی در شکل را نام ببرید.

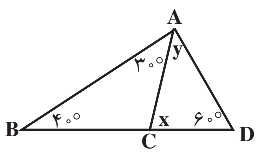


۹. در هریک از شکل‌های زیر، مقادیر x و y را پیدا کنید.



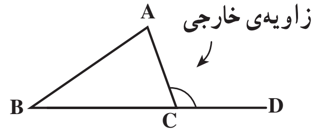






۱۰. نشان دهید که در مثلث دلخواه ABC ،

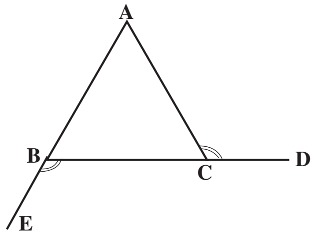
$$A\hat{C}D = \hat{A} + \hat{B}$$



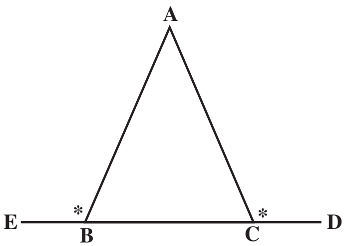
(زاویه‌ای که از امتداد دادن یک ضلع تشکیل می‌شود، زاویه‌ی خارجی نامیده می‌شود.)

۱۱. با توجه به تساوی زاویه‌های مشخص شده در شکل زیر، علت تساوی $A\hat{B}C = A\hat{C}B$ را توضیح دهید.

(الف)

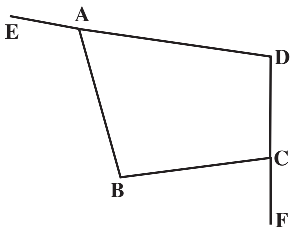


(ب)

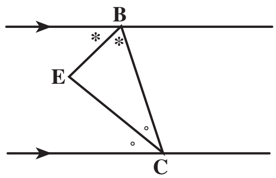


۱۲. با توجه به شکل مقابل درستی رابطه‌ی زیر را نشان دهید.

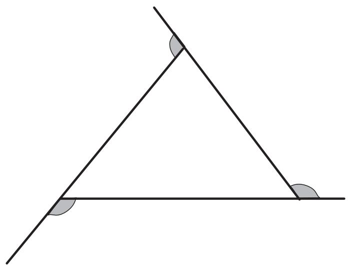
$$E\hat{A}B + B\hat{C}F = \hat{B} + \hat{D}$$



۱۳. در شکل مقابل، ثابت کنید : $\hat{E} = ۹۰^\circ$



۱۴. مجموع زاویه‌های خارجی مثلث روبه‌رو را بیابید. آیا این یافته در مورد مجموع زاویه‌های خارجی هر مثلث درست است؟ جواب خود را با ذکر دلیل بنویسید.



۱۵. تفاوت عمده میان استدلال استقرایی و استنتاجی را بنویسید و برای هریک، مثالی بیاورید.

۱ـ۳ـ استدلال در هندسه

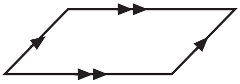
تعریف مربع را درنظر بگیرید، «مربع مستطیلی است که ضلع‌های آن با یکدیگر برابرند».

لازمه‌ی فهمیدن این تعریف، دانستن معنای دقیق واژه‌های «مستطیل» و «ضلع» است. به این ترتیب برای تعریف مربع به تعریف‌های دیگری نیازمندیم. به عنوان مثال،

مستطیل متوازی‌الاضلاعی با چهار زاویه‌ی مساوی است.

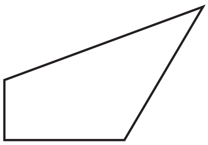
↓

متوازی‌الاضلاع چهارضلعیی است که ضلع‌های مقابل آن موازی یکدیگرند.



↓

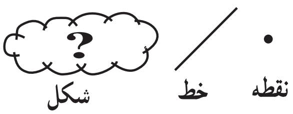
چهارضلعی شکلی با چهارضلع است.



↓

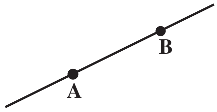
شکل یک …

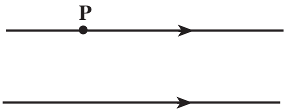
فرض کنید شکل را به عنوان مجموعه‌ی نقاط تعریف کنیم، چون هر تعریف شامل واژه‌هایی است که معنی آن‌ها باید دقیقاً روشن باشد، در نتیجه این سؤال پیش می‌آید که تعریف مجموعه و نقطه چیست؟ با ادامه‌ی این فرآیند به بن‌بست می‌رسیم! زیرا این عمل را نمی‌توان به‌طور نامحدود ادامه داد. علت این محدودیت آن است که همه‌ی واژه‌ها قابل تعریف نیستند. در نتیجه، برای رهایی از این بن‌بست، واژه‌ها و مفاهیمی چون شکل، مجموعه، نقطه و خط را با توجه به این که تعریف صریحی برای آن‌ها نداریم، به عنوان **تعریف نشده‌ها** می‌پذیریم.



همچنین در مثال‌های قبل، درستی بعضی از ویژگی[1] های هندسی را به‌وسیله‌ی استدلال استنتاجی نشان دادیم. در آن مثال‌ها، استنتاج‌های ما براساس حقایقی بود که درستی آن‌ها را پذیرفته بودیم. این حقایق یا عبارت‌های درست، **اصول**[2] نامیده می‌شوند. به عنوان مثال،

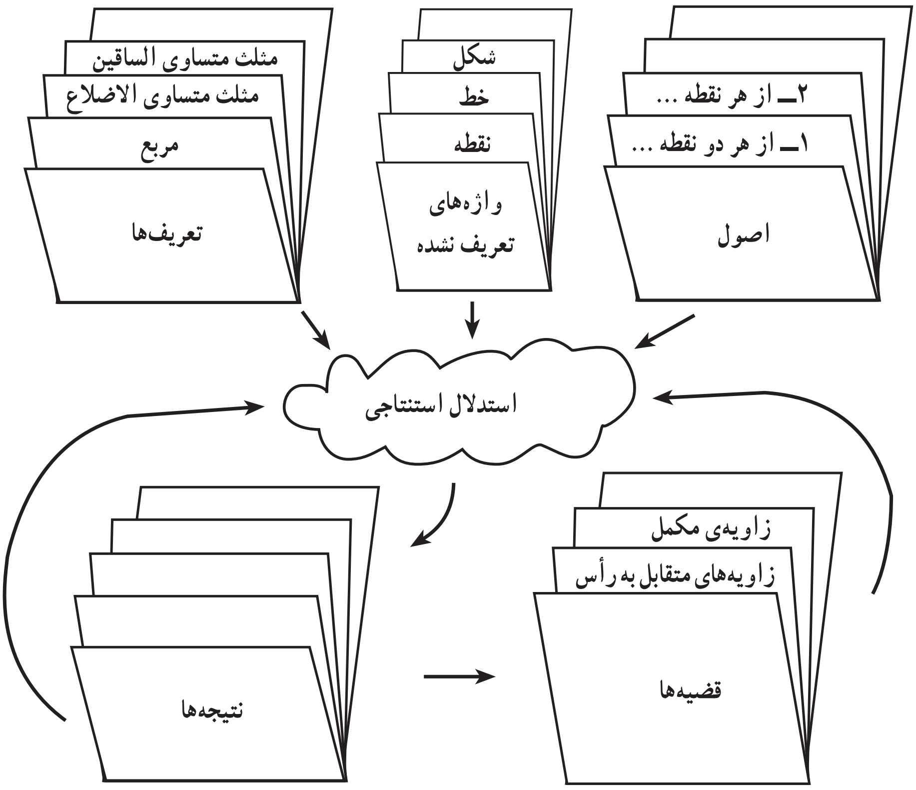
از دو نقطه‌ی متمایز فقط یک خط می‌گذرد.





از هر نقطه تنها یک خط می‌توان به موازات خط داده شده رسم کرد.

وقتی در هندسه استدلال استنتاجی به‌کار می‌بریم، می‌توانیم از تعریف‌ها، اصول، واژه‌های تعریف نشده و قضیه‌ها برای رسیدن به نتیجه استفاده کنیم.

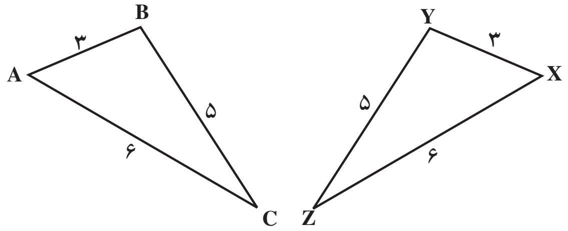


۱ــ Property ۲ــ Axioms

تمرین: با دقّت بیشتری به نمودار صفحه‌ی قبل نگاه کنید و با توجه به مطالب مطرح شده، استدلال استنتاجی را توضیح دهید.

۱ــ۴ــ مثلث‌های همنهشت[۱]

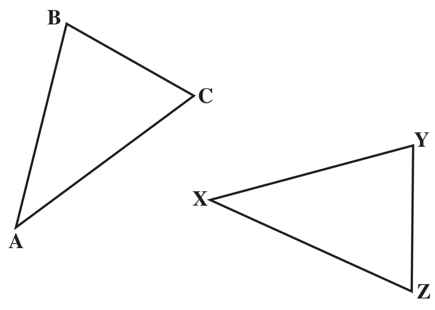
مثلث‌های ABC و XYZ دارای ضلع‌های متناظر مساوی هستند (شکل ۲۰). در نتیجه محیط آن‌ها باهم برابر است. همچنین زاویه‌ها نظیر به نظیر و مساحت‌های آن‌ها نیز باهم برابر هستند.



شکل ۲۰

در واقع هریک از آن‌ها را می‌توانیم کاملاً روی دیگری قرار دهیم. به‌طوری که دقیقاً برهم منطبق شوند و یکدیگر را بپوشانند. این ویژگی انطباق کامل شکل‌ها، **همنهشتی** نامیده می‌شود. برای آنکه نشان دهیم دو مثلث ABC و XYZ همنهشت هستند، می‌نویسیم : $ABC \cong XYZ$ و منظور آن است که این دو مثلث با انطباق رأس A روی رأس X ، رأس B روی رأس Y و رأس C روی رأس Z کاملاً برهم منطبق می‌شوند.

فرض کنید دو مثلث ABC و XYZ همنهشت باشند (شکل ۲۱).



شکل ۲۱

۱ــ Congruent triangles

بنابراین می‌توانیم مثلث ABC را طوری روی مثلث XYZ قرار دهیم که A روی X ، B روی Y و C روی Z قرار گیرد. در نتیجه،

$$\hat{A} = \hat{X} \qquad AB = XY$$

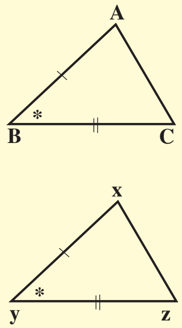
$$\hat{B} = \hat{Y} \qquad BC = YZ \qquad ABC \cong XYZ$$

$$\hat{C} = \hat{Z} \qquad AC = XZ$$

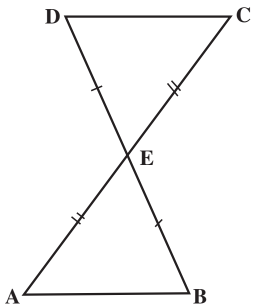
برای نشان دادن همنهشت بودن دو مثلث، همان‌طور که قبلاً دیده‌اید، کافی است نشان دهیم که یکی از سه حالت زیر برقرار است.

حالت (ض‌زض)

هرگاه دو ضلع و زاویه بین آن‌ها از یک مثلث، با دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها از مثلث دیگر مساوی باشند، آن‌گاه دو مثلث همنهشت هستند.



مثال ۱۱: در شکل ۲۲، E وسط AC و BD است. چرا AB = CD ؟ (جواب خود را با ذکر دلیل بنویسید.)



شکل ۲۲

حل: بنا به قضیه‌ی زاویه‌های متقابل به رأس، زاویه‌های CED و AEB باهم برابرند. در مثلث‌های ABE و CED

$AE = CE$

$A\hat{E}B = C\hat{E}D$

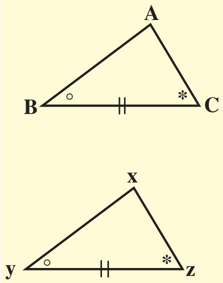
$EB = DE$

بنابراین، بنابه حالت (ض‌زض)، $ABE \cong CDE$.

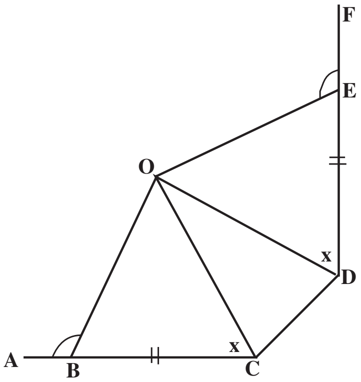
چون مثلث‌ها همنهشت هستند، در نتیجه $AB = CD$.

حالت (زض‌ز)

هرگاه دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از یک مثلث با دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلث دیگر مساوی باشند، آن‌گاه دو مثلث همنهشت هستند.



مثال ۱۲: در شکل ۲۳، $BC = ED$ ، $O\hat{B}A = O\hat{E}F$ و $O\hat{C}B = O\hat{D}E$. نشان دهید



شکل ۲۳

حل: بنابه قضیه‌ی زاویه‌ی مکمل

$O\hat{B}C = O\hat{E}D$

در مثلث‌های OBC و OED

$O\hat{B}C = O\hat{E}D$

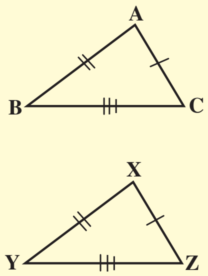
$BC = ED$

$O\hat{C}B = O\hat{D}E$

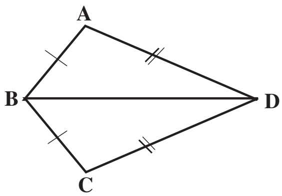
بنابراین، بنابه حالت (زض‌ز)، $OBC \cong OED$ چون مثلث‌ها همنهشت هستند، $B\hat{O}C = E\hat{O}D$.

حالت (ض‌ض‌ض)

هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر مساوی باشند، آن‌گاه دو مثلث همنهشت هستند.



مثال ۱۳: در شکل ۲۴، $AB = BC$ و $AD = DC$. نشان دهید $\hat{A} = \hat{C}$.



شکل ۲۴

حل: در دو مثلث ABD و BDC داریم

$AB = BC$

$AD = DC$

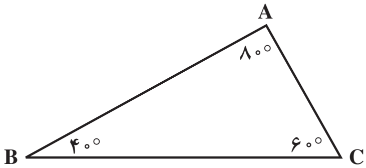
$BD = BD$

بنابراین، بنا به حالت (ض‌ض‌ض)، $ABD \cong CBD$

چون مثلث‌های CBD و ABD همنهشت هستند، بنابراین اجزای نظیر آن‌ها قابل انطباق برهم خواهند بود یعنی $\hat{A} = \hat{C}$.

سه حالت همنهشتی دو مثلث از حقایق پذیرفته شده هستند، با این حال می‌توان دو حالت (زض‌ز) و (ض‌ض‌ض) را از حالت اول نتیجه گرفت.

فعالیت ۱ــ۳

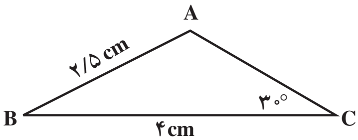


شکل ۲۵

۱. الف) مثلث DEF را چنان رسم کنید که $\hat{D}=\hat{A}$ ، $\hat{E}=\hat{B}$ و $\hat{F}=\hat{C}$ ، اما با مثلث ABC (شکل ۲۵) همنهشت نباشد.

ب) چند مثلث دیگر با شرایط مثلث DEF می‌توانید رسم کنید؟ چرا؟

پ) از دو بند فوق چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

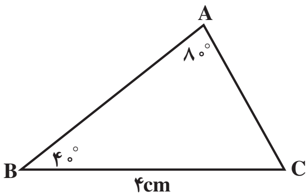


شکل ۲۶

۲. الف) مثلث DEF را چنان رسم کنید که در آن $DE=AB$ ، $EF=BC$ و $\hat{F}=\hat{C}$ ، اما با مثلث ABC (شکل ۲۶) همنهشت نباشد.

ب) آیا تنها مثلثی که می‌توانید با شرایط فوق رسم کنید، همان DEF است؟ چرا؟

پ) از دو بند فوق چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



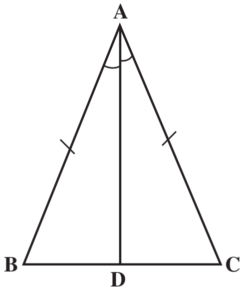
شکل ۲۷

۳. الف) آیا می‌توانید مثلث DEF را چنان رسم کنید که $\hat{D}=\hat{A}$ ، $\hat{E}=\hat{B}$ و $EF=BC$ ، اما با مثلث ABC (شکل ۲۷) همنهشت نباشد؟ جواب خود را با ذکر دلیل توضیح دهید.

ب) از بند فوق چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۱ــ۵ــ مثلث متساوی‌الساقین

در هر مثلث متساوی‌الساقین دو ضلع برابر وجود دارد که ساق نامیده می‌شوند، به همین دلیل این‌گونه مثلث‌ها متساوی‌الساقین نامیده می‌شوند. در شکل ۲۸، مثلث ABC متساوی‌الساقین است $(AB=AC)$. در بخش قبل از طریق استدلال استقرایی مشاهده کردید که اگر در مثلثی دو زاویه‌ی



شکل ۲۸

برابر وجود داشته باشد آن مثلث متساوی‌الساقین است. اکنون نشان می‌دهیم در هر مثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های مقابل به اضلاع مساوی، با یکدیگر برابرند $(\hat{B}=\hat{C})$. درستی این نتیجه‌گیری کلی را، با استفاده از استدلال استنتاجی نشان می‌دهیم. برای این منظور، از رأس A خطی چنان رسم می‌کنیم که $\hat{A}$ را نصف کرده و BC را در D قطع کند (AD نیمساز زاویه‌ی A است). در مثلث‌های ABD و ACD.

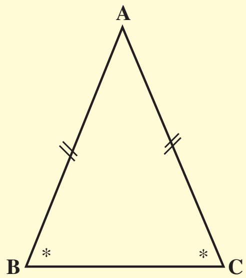
$$AB = AC$$

$$B\hat{A}D = C\hat{A}D$$

$$AD = AD$$

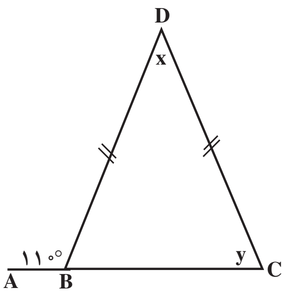
بنابراین، بنابه حالت (ض‌زض)، $ABD \cong ACD$. چون مثلث‌ها همنهشت هستند، در نتیجه $\hat{B}=\hat{C}$.

با توجه به این‌که درستی مطلب را برای یک مثلث متساوی‌الساقین دلخواه نشان دادیم، بنابراین نتیجه‌ی به‌دست آمده برای تمام مثلث‌های متساوی‌الساقین درست است.



قضیه‌ی ۵: مثلث متساوی‌الساقین

در هر مثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های روبه‌رو به اضلاع مساوی، با یکدیگر مساویند.



شکل ۲۹

مثال ۱۴: در شکل ۲۹، مقادیر x و y را پیدا کنید.

حل: چون $A\hat{B}C$ یک زاویه‌ی نیم‌صفحه است

$$D\hat{B}C + ۱۱۰^\circ = ۱۸۰^\circ$$

$$D\hat{B}C = ۷۰^\circ$$

با توجه به قضیه‌ی مثلث متساوی‌الساقین، زاویه‌های DBC و DCB باید باهم برابر باشند.

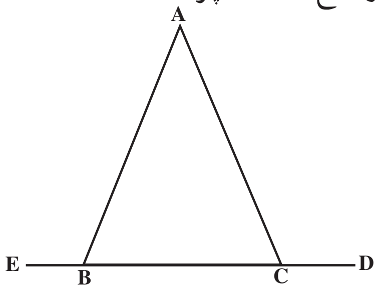
پس : $y = ۷۰^{\circ}$

چون مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰° است، در نتیجه

$$x + ۷۰^{\circ} + ۷۰^{\circ} = ۱۸۰^{\circ}$$

$$x = ۴۰^{\circ}$$

مثال ۱۵: در شکل ۳۰، $AB = AC$. توضیح دهید که چرا $A\hat{B}E = A\hat{C}D$.



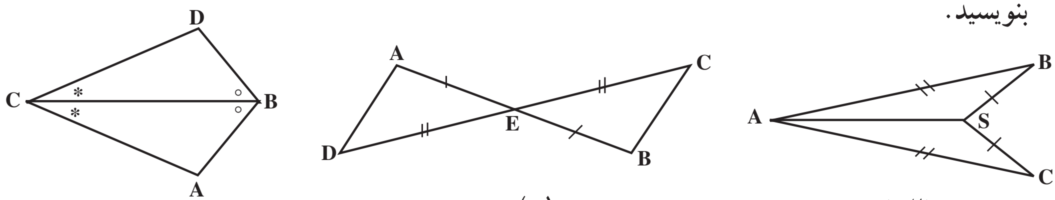
شکل ۳۰

حل: بنابه قضیه‌ی مثلث متساوی‌الساقین، $A\hat{B}C = A\hat{C}B$

و بنا به قضیه‌ی دو زاویه‌ی مکمل، $A\hat{B}E = A\hat{C}D$

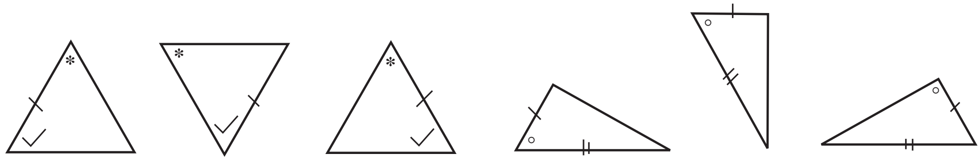
مسائل

۱. ابتدا دلیل همنهشت بودن مثلث‌ها را بگویید، سپس تساوی ضلع‌ها و زاویه‌های متناظر را بنویسید.



(پ) (ب) (الف)

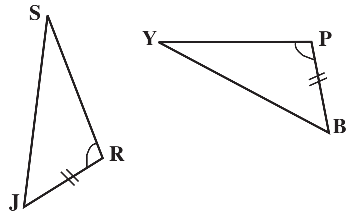
۲. مثلث‌های همنهشت را مشخص کنید وحالت همنهشتی آن‌ها را بیان نمایید.



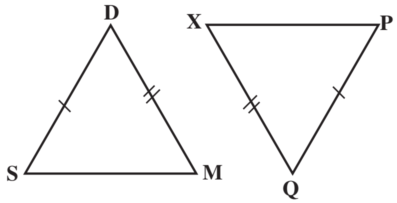
۱ ۲ ۳ ۱ ۲ ۳

(ب) (الف)

۳. با توجّه به شکل‌های زیر، تساوی کدام‌یک از اجزا، همنهشتی مثلث‌ها را در (الف) و (ب) نتیجه می‌دهد؟

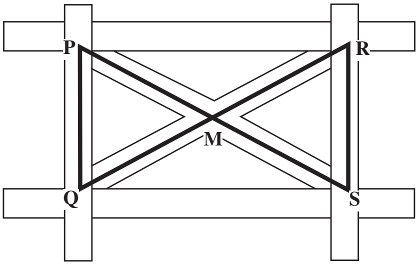


(الف)

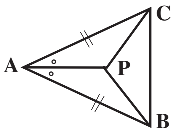


(ب)

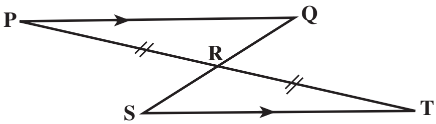
۴. نقطه‌ی M وسط قطعات متقاطع است.
چرا $MPQ \cong MSR$ ؟



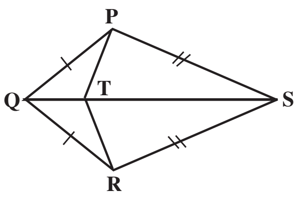
۵. دلیل متساوی‌الساقین بودن مثلث PBC را بنویسید.



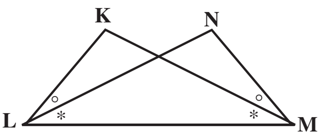
۶. اگر $PQ \parallel ST$ و R وسط PT باشد، ثابت کنید R وسط QS نیز هست.



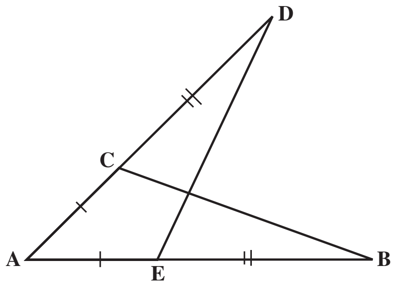
۷. در چهارضلعی PQRS ، $PQ = RQ$ و $PS = RS$. اگر T نقطه‌ی دلخواهی روی قطر QS باشد، ثابت کنید $PT = RT$.



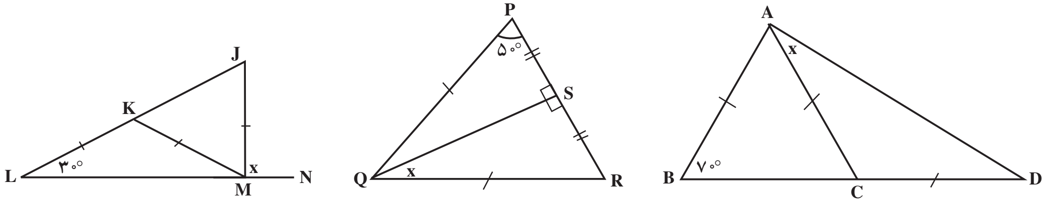
۸. در شکل مقابل ثابت کنید $KL = NM$.



۹. در شکل روبه‌رو ثابت کنید $BC = DE$.



۱۰. در هریک از شکل‌های زیر، مقدار x را تعیین کنید.



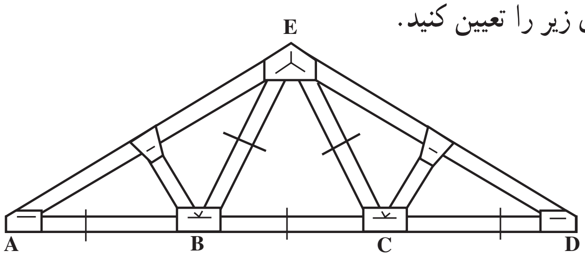
(پ) (ب) (الف)

۱۱. مقدار هریک از زاویه‌های زیر را تعیین کنید.

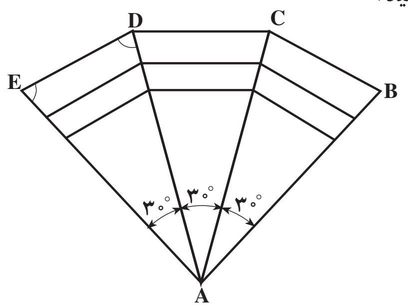
الف) $B\hat{E}C$

ب) $A\hat{B}E$

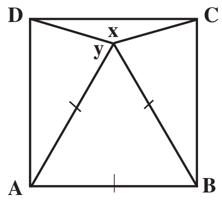
پ) $E\hat{A}B$



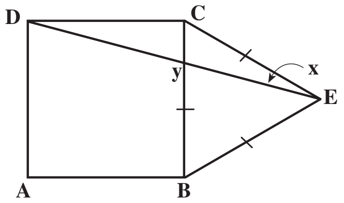
۱۲. شکل زیر طرح یک تالار را نشان می‌دهد. اگر هرسه بخش مثلثی شکل همنهشت باشند، اندازه‌ی $B\hat{C}D$ را تعیین کنید.



۱۳. در هریک از شکل‌های زیر، ABCD یک مربع است. اندازه‌های x و y را به‌دست آورید.

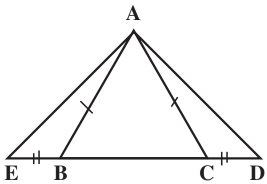


(الف)

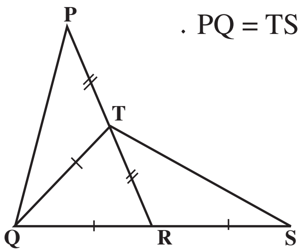


(ب)

۱۴. با توجه به شکل، ثابت کنید که $AD = AE$.



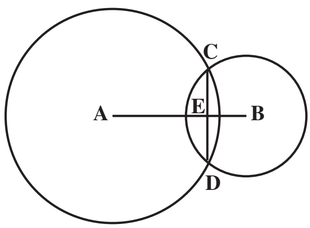
۱۵. در شکل روبه‌رو، ثابت کنید $P\hat{T}Q = T\hat{R}S$ و $PQ = TS$.



۱۶. دو دایره به مرکزهای A و B یکدیگر را در C و D قطع کرده‌اند.

الف) ثابت کنید $A\hat{C}B = A\hat{D}B$.

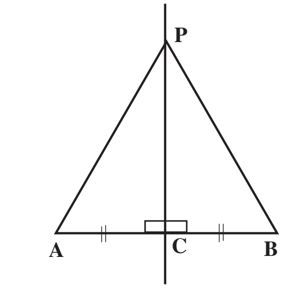
ب) ثابت کنید که AB ، عمودمنصف CD است.



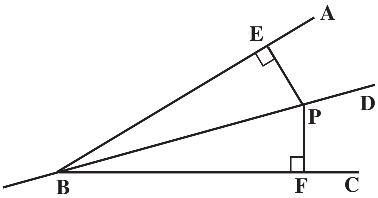
۱۷. درچهارضلعی PQRS ، $PQ = QR$ و قطر QS ، زاویه‌ی Q را نصف می‌کند. ثابت کنید $PS = RS$.

۱۸. اگر XY و WZ قطرهایی از یک دایره باشند، ثابت کنید $XW = YZ$.

۱۹. ثابت کنید هر نقطه مانند P روی عمودمنصف پاره‌خط AB از نقاط A و B به یک فاصله است.



۲۰. نشان دهید که هر نقطه مانند P روی نیمساز زاویه‌ی ABC ، از ضلع‌های AB و BC به یک فاصله است.

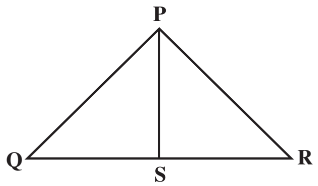


۲۱. در مثلث PQR ، $PQ = PR$ و PS میانه‌ی وارد بر ضلع QR است. ثابت کنید :

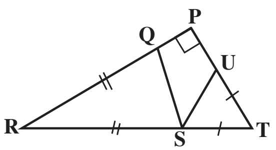
الف) PS نیمساز زاویه‌ی QPR است.

ب) $PS \perp QR$ (PS و QR عمود است).

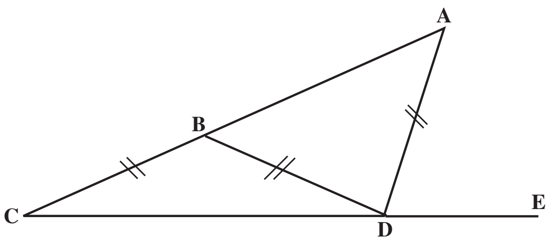
پ) از دو قسمت (الف) و (ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



۲۲. با توجه به شکل، توضیح دهید که چرا $Q\hat{S}U = ۴۵^\circ$



۲۳. با توجه به شکل زیر، توضیح دهید چرا $A\hat{D}E = ۳A\hat{C}E$

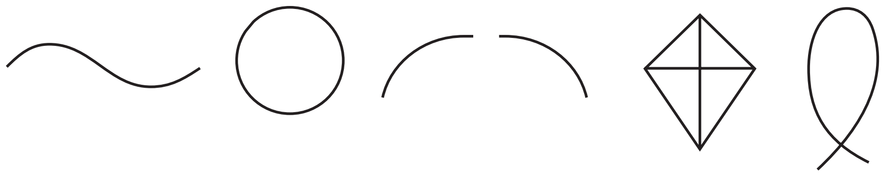


۲۴. از طریق استدلال استنتاجی ثابت کنید مثلثی که دو زاویه‌ی مساوی داشته باشد، متساوی‌الساقین است.

۱ــ۶ــ از «خَم ساده» تا «چندضلعی»

آیا تا به حال با یک قطعه نخ، شکلی روی سطح میز ساخته‌اید؟ این‌گونه شکل‌ها می‌توانند تصور خم مسطح را برای شما به‌وجود آورند. به‌طور شهودی، یک **خم مسطح** مجموعه‌ای از نقطه‌ها است که بتوانیم آن را بدون بلند کردن قلم از روی کاغذ رسم کنیم. پس از این، در این کتاب، همه‌ی خم‌ها را مسطح درنظر می‌گیریم.

از این تعریف می‌توان نتیجه گرفت که خط‌ها، نیم‌خط‌ها، پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها همه خم‌های مسطح هستند. در شکل ۳۱، نمونه‌های (الف)، (ب)، (ت) و (ث) هرکدام یک خم هستند ولی نمونه (پ) یک خم نیست، زیرا نمی‌توان بدون بلند کردن قلم از روی کاغذ آن را رسم کرد.



(الف) (ب) (پ) (ت) (ث)

شکل ۳۱

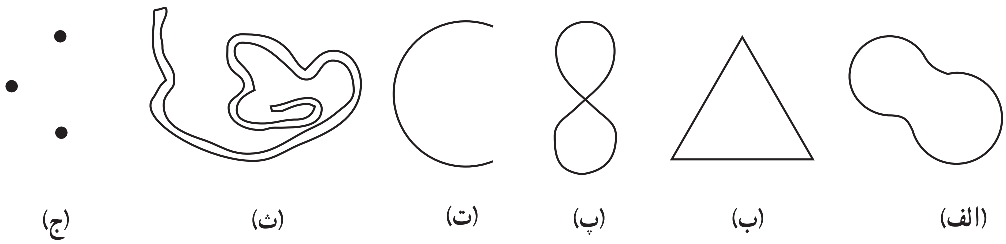
یک خم ساده، یک خم مسطح است که هیچ‌یک از نقطه‌های خود را قطع نکند مگر در حالتی که نقطه‌های انتهایی به هم می‌رسند. در شکل ۳۱، (ت) و (ث) خم‌های ساده هستند، ولی (الف) و (ب) خم‌های ساده نیستند. اگر نقطه‌های انتهایی یک خم بر هم منطبق باشند، آن خم **بسته** نامیده می‌شود.

مثال ۱: در شکل ۳۲ مورد (الف)، خم ساده است ولی بسته نیست، مورد (ب) یک خم ساده‌ی بسته است، موردهای (پ) و (ت) خم‌های ساده‌ی بسته نیستند. چرا؟

(الف) (ب) (پ) (ت)

شکل ۳۲

مثال ۲: کدام یک از شکل‌های زیر نمایش‌دهنده‌ی خم، خم ساده، خم بسته یا خم ساده‌ی بسته هستند؟



شکل ۳۳

حل:

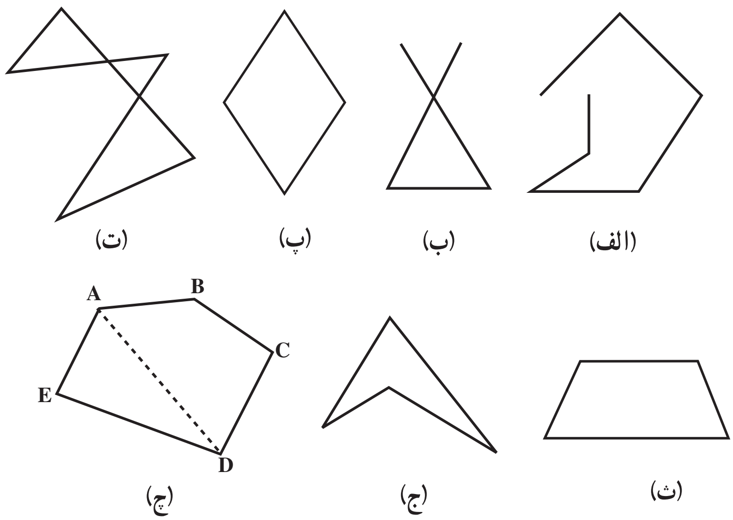
ــ شکل‌های (الف)، (ب)، (پ)، (ت) و (ث) خم هستند.

ــ شکل‌های (الف)، (ب)، (ت) و (ث) خم‌های ساده هستند.

ــ شکل‌های (الف)، (ب)، (پ) و (ث) خم‌های بسته هستند.

ــ شکل‌های (الف)، (ب) و (ث) خم‌های ساده‌ی بسته هستند.

تمرین: با توجه به تعریف‌های خم، خم ساده، خم بسته و خم ساده‌ی بسته، حروف الفبای فارسی را دسته‌بندی کنید.



شکل ۳۴

همه‌ی خم‌های ساده‌ی بسته دارای یک ویژگی مشترک هستند. آیا می‌توانید آن را کشف کنید؟

توجه کنید که این ویژگی هیچ ارتباطی به اندازه، شکل و همنهشتی آن‌ها ندارد. در واقع این ویژگی آن‌قدر بدیهی به‌نظر می‌رسد که ممکن است آن را نادیده گرفته باشید.

هر خم ساده‌ی بسته دارای درون و بیرون است. هر خم ساده‌ی بسته، مجموعه نقطه‌های صفحه را به سه زیرمجموعه‌ی جدا از هم تقسیم می‌کند، این زیرمجموعه‌ها شامل نقطه‌های درون، بیرون و روی خم هستند.[1]

قضیه خم جُردن

هر خم ساده‌ی بسته‌ی C ، صفحه را به سه زیرمجموعه‌ی جدا از **هم درون**، **بیرون** و روی **خم** تقسیم می‌کند.

چرا نمونه‌های (الف)، (ب) و (ت) خم ساده‌ی بسته نیستند؟ توضیح دهید. نمونه‌های (پ)، (ث)، (ج) و (چ)، خم‌های ساده‌ی بسته‌ای هستند که چندضلعی نامیده می‌شوند.

چندضلعی یک خم ساده‌ی بسته است که از اجتماع حداقل سه پاره‌خط تشکیل شده باشد به‌طوری که نقطه‌های انتهایی آن پاره‌خط‌ها روی یک صفحه بوده و هیچ سه نقطه‌ی متوالی از آن‌ها روی یک خط قرار نگرفته باشند.

در شکل ۳۴ (ج)، پاره‌خط‌های AB ، BC ، CD، DE و EA ضلع‌های چندضلعی ABCDE و نقطه‌های A ، B ، C ، D و E رأس‌های چندضلعی خوانده می‌شوند. رأس‌های مجاور، نقطه‌های انتهایی یک ضلع هستند و قطرهای یک چندضلعی پاره‌خط‌هایی هستند که رأس‌های غیرمجاور را به‌هم وصل می‌کنند، مانند AD در شکل ۳۴ (چ).

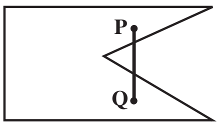
چندضلعی‌ها براساس تعداد ضلع‌هایشان نامگذاری می‌شوند. به عنوان مثال، یک چندضلعی با سه‌ضلع، سه‌ضلعی یا مثلث، با چهارضلع، چهارضلعی و با پنج‌ضلع، پنج‌ضلعی خوانده می‌شود.

۱ــ اگر چه این ویژگی واضح به نظر می‌رسد، ولی قضیه‌ی خم جردن دارای اثبات بسیار مشکلی است که در سطح ریاضی پیشرفته مطرح می‌شود زیرا به ابزار قوی‌تری از جمله توپولوژی جبری نیازمند است.

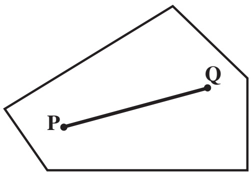
اجتماع نقاط یک خم ساده‌ی بسته با نقاط درون آن یک **ناحیه** نامیده می‌شود. ناحیه‌های یک صفحه در دو دسته‌ی **محدب** و **غیرمحدب** طبقه‌بندی می‌شوند.

یک ناحیه (یا مجموعه‌ای از نقطه‌ها) **محدب** است، اگر پاره‌خطی که هر دو نقطه‌ی دلخواه آن را به‌هم وصل می‌کند، کاملاً در آن ناحیه قرار گیرد.

در غیراین‌صورت اگرحداقل دو نقطه در ناحیه وجود داشته باشند به‌طوری که پاره‌خطی که آن‌ها را به هم وصل می‌کند کاملاً درون ناحیه قرار نگیرد، آن ناحیه غیرمحدب خوانده می‌شود. به‌عنوان مثال در شکل ۳۵، ناحیه‌ی محدود شده به خم بسته‌ی (الف) محدب و ناحیه‌ی محدود شده به خم بسته‌ی (ب) غیرمحدب است.



(ب)



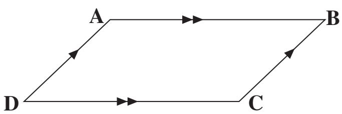
(الف)

شکل ۳۵

دایره نیز نمونه‌ای از یک خم ساده‌ی بسته است که درون آن یک ناحیه‌ی محدب می‌باشد.

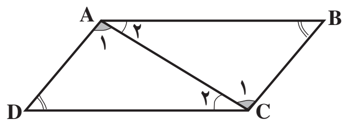
۱ــ۷ــ متوازی الاضلاع

متوازی الاضلاع یک چهارضلعی است که ضلع‌های آن دوبه‌دو باهم موازی هستند. از موازی بودن ضلع‌های روبه‌رو، مساوی بودن آن‌ها نیز نتیجه می‌شود. برای نشان دادن این خاصیّت، از استدلال استنتاجی کمک می‌گیریم. متوازی‌الاضلاع ABCD را درنظر بگیرید (شکل ۳۶).



شکل ۳۶

قطر AC ، متوازی‌الاضلاع را به دو مثلث ADC و ABC تقسیم می‌کند (شکل ۳۷).



شکل ۳۷

طبق قضیه‌ی خطوط موازی، در این دو مثلث داریم

$$\hat{A}_۱ = \hat{C}_۱ \quad , \quad \hat{A}_۲ = \hat{C}_۲$$

ضلع AC نیز در هر دو مثلث مشترک است. پس دو مثلث ADC و ABC به حالت (زض‌ز) همنهشت هستند. در نتیجه ضلع‌های نظیر برابر هستند. یعنی

$$AD = BC \quad , \quad AB = DC$$

همچنین در دو مثلث ABC و ADC زاویه‌های نظیر نیز برابر خواهند بود.

$$\hat{B} = \hat{D}$$

و چون $\hat{A}_۱ = \hat{C}_۱$ و $\hat{A}_۲ = \hat{C}_۲$ در نتیجه :

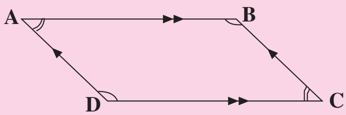
$$\hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = \hat{C}_۱ + \hat{C}_۲$$

یعنی

$$\hat{A} = \hat{C}$$

قضیه‌ی ۶:

در هر متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های موازی با هم مساوی‌اند و زاویه‌های روبه‌رو نیز دوبه‌دو باهم مساوی هستند. یعنی در متوازی‌الاضلاع ABCD ،



$$AD = BC \quad , \quad AB = DC$$

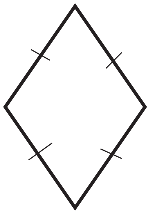
$$\hat{A} = \hat{C} \quad , \quad \hat{D} = \hat{B}$$

یادآوری: در هر متوازی‌الاضلاع، پاره‌خطی که از یک رأس بر ضلع روبه‌روی آن عمود می‌شود **ارتفاع** و ضلعی که ارتفاع بر آن عمود شده است، **قاعده‌ی** نظیر آن ارتفاع نامیده می‌شود.

شکل ۳۸

ارتفاع را با h [1] و قاعده را با b [2] نمایش می‌دهند.

یادآوری: متوازی الاضلاعی که چهار ضلع مساوی داشته باشد لوزی خوانده می‌شود.



شکل ۳۹

تمرین ۱: به‌وسیله‌ی استدلال استنتاجی، یعنی با تکیه بر حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته بودیم، مساوی بودن ضلع‌های روبه‌روی هم در هر متوازی‌الاضلاع را نشان دادیم. آن حقایق کدام‌ها هستند؟

تمرین ۲: با استفاده از استدلال استنتاجی، نشان دهید که در هر متوازی‌الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

تمرین ۳: نشان دهید که در هر مستطیل، قطرها باهم مساوی هستند و یکدیگر را نصف می‌کنند.

تمرین ۴: نشان دهید که در هر لوزی، قطرها بر یکدیگر عمودند و یکدیگر را نصف می‌کنند.

۱ـ height　　　۲ـ base

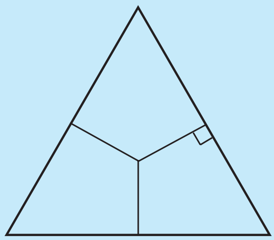
تحقیق

این مثلث متساوی‌الاضلاع به سه شکل همنهشت تقسیم شده است. نشان دهید که یک مثلث متساوی‌الاضلاع چگونه به

الف) ۲ مثلث همنهشت ب) ۳ مثلث همنهشت

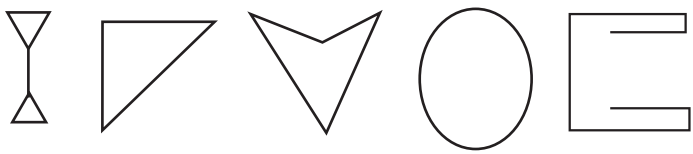
پ) ۴ مثلث همنهشت ت) ۶ مثلث همنهشت

تقسیم می‌شود.

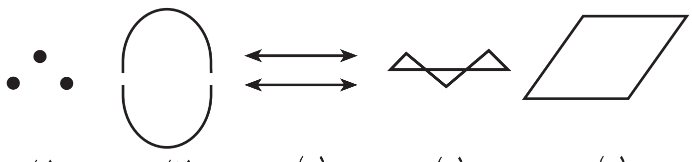


مسائل

۱. خم‌های مسطح را در شکل‌های زیر مشخص کنید. کدام‌یک از شکل‌ها خم ساده هستند؟ کدام‌یک از خم‌های ساده، بسته هستند؟

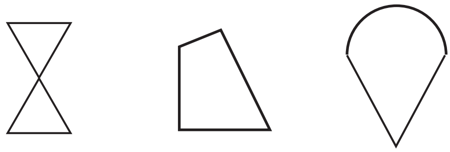


(الف) (ب) (پ) (ت) (ث)

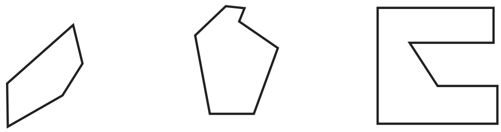


(ج) (چ) (ح) (خ) (د)

۲. کدام‌یک از شکل‌های زیر چندضلعی هستند؟ چندضلعی‌ها را از نظر محدب بودن دسته‌بندی کنید.



(الف) (ب) (پ)



(ت) (ث) (ج)

۳. الفبای انگلیسی را باحروف بزرگ نوشته، سپس آن‌ها را با توجه به تعریف‌های خم ساده، خم بسته، خم ساده‌ی بسته و چندضلعی دسته‌بندی کنید.

۴. با استفاده از چندپاره‌خط خمی رسم کنید که :

الف) ساده باشد اما بسته نباشد. ب) ساده و بسته باشد.

۵. هریک از چندضلعی‌های زیر چند قطر دارند؟

الف) مثلث ب) شش‌ضلعی پ) هشت‌ضلعی

۶. ثابت کنید :

الف) یک چهارضلعی که قطرهای آن یکدیگر را نصف کنند، متوازی‌الاضلاع است.

ب) اگر در یک چهارضلعی دو ضلع مقابل متوازی و متساوی باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

پ) اگر در یک چهارضلعی زاویه‌های مقابل دوبه‌دو متساوی باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

ت) اگر در یک چهارضلعی هر دو زاویه مجاور به یک ضلع مکمل یکدیگر باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

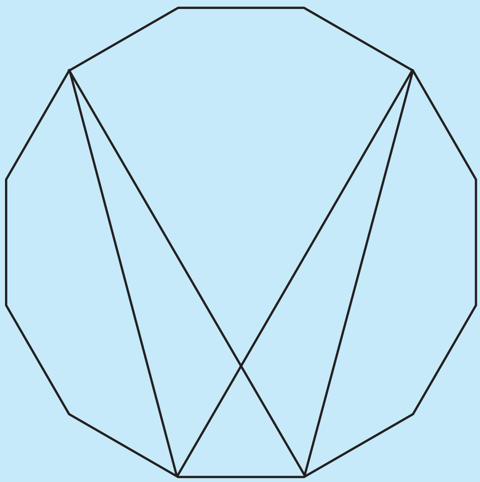
ث) اگر در یک چهارضلعی اضلاع روبه‌رو دوبه‌دو متساوی باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

ج) هرگاه هر قطر یک چهارضلعی، آن چهارضلعی را به دو مثلث همنهشت تقسیم کند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مجله‌ی ریاضی

ابوالوفابوزجانی ریاضیدان نامی ایرانی کتابی درباره‌ی معماهای ریاضی دارد معمّاهای این کتاب به صورت شکل‌هایی هستند که به قسمت‌های مختلف تقسیم شده‌اند و باید شکل‌ها بریده شوند و طوری کنار هم قرار بگیرند تا شکل جدیدی حاصل شود و معمّا حل گردد. معمّای زیر یکی از کارهای ابوالوفابوزجانی است.

به معمّای زیر نگاه کنید. این دوازده ضلعی منتظم به شش قسمت تقسیم شده است. آن قسمت‌ها را ببرید[1] و طوری آن‌ها را کنار هم بگذارید تا یک مربع تشکیل شود. دقّت کنید که یکی از قسمت‌ها یک مثلث متساوی‌الاضلاع است.



قطعه‌های مربع تشکیل شده را به هم بچسبانید و ثابت کنید که شکل تشکیل شده در واقع یک مربع است.

۱ــ می‌توانید شکل را از روی کتاب به دفتر خود برگردان کنید.