

$$10^n |U - r_n| = /U_{n+1} \dots U_{n+k} \dots < 1 \quad \text{در نتیجه}$$

$$0 < |U - r_n| < \frac{1}{10^n} \quad \text{و یا}$$

چون  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10^n} = 0$ ، به ازای عدد دلخواه  $\varepsilon > 0$ ،  $N$  می‌توانیم پیدا کنیم که برای هر  $n \geq N$ ،  $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = U \quad \text{یعنی } |U - r_n| < \frac{1}{10^n} < \varepsilon, n \geq N$$

یکی از کاربردهای این قضیه، استفاده از آن برای تعریف توان اعداد به نمای گنگ است. فرض کنیم  $a$  عددی مثبت و  $x$  عددی گنگ باشد. بنابر قضیه فوق دنباله‌ای مانند  $\{x_n\}$  از اعداد گویا هست که  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ، اینک توان  $a^x$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}$$

چون توان اعداد گویا تعریف شده است،  $a^x$  (به نمای عدد گنگ) تعریف شده است. قواعد آشنای توان که برای اعداد گویا برقرار است به توان‌های گنگ نیز منتقل می‌شود. فرض کنیم  $x$  و  $y$  دو عدد گنگ باشند، لذا دنباله‌ای از اعداد گویا مانند  $\{y_n\}$  هست که  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ ، بنابراین:

$$\begin{aligned} a^x \cdot a^y &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} \right) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a^{y_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{x_n} a^{y_n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n + y_n} \quad (\text{چون } x_n \text{ و } y_n \text{ گویا هستند}) \\ &= a^{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)} \\ &= a^{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \\ &= a^{x+y} \end{aligned}$$

## ۱-۸- یک دنباله مهم

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty} : 2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, \left(\frac{6}{5}\right)^5, \dots$$

این دنباله هم به لحاظ کاربردی و همچنین از جنبه نظری اهمیت فوق العاده دارد. چرا؟ ثابت می‌شود این دنباله همگراست و هرگاه حد آن را  $e$  بنامیم، یعنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

عدد حقیقی  $e$  به صورتی طبیعی، در بیشتر پدیده‌های خلقت ظاهر می‌شود. دو دسته از مهم‌ترین

پدیده‌ها فرآیندهای رشد و زوال هستند. در اولی کمیت مورد مطالعه (نسبت به زمان) رشد می‌کند و در پدیده دوم کمیت مورد بحث رو به زوال دارد. برای مثال: وقتی تعداد اندکی باکتری را در محیطی مناسب قرار می‌دهیم، به شدت رشد کرده و پس از زمان اندکی تعداد آنها ۲، ۳ و یا صد برابر می‌شود. در حالی که هرگاه مقداری ماده رادیواکتیویته مانند فلزهای اورانیوم، پلوتونیوم، یا ائستانیوم را داشته باشیم، پس از مدتی مقدار آن کاهش یافته، یعنی بخشی از ماده زوال یافته و به عناصر دیگری مبدل می‌گردد. عدد  $e$  در چنین پدیده‌هایی نقشی اساسی دارد، به گونه‌ای که در محاسبات مربوط به رشد و زوال به صورتی طبیعی بروز می‌کند.  $e$  در اقتصاد نیز مطرح می‌شود. از این بابت لگاریتمی که پایه آن عدد  $e$  باشد لگاریتم طبیعی نامیده می‌شود.

اثبات همگرایی دنباله  $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$  براساس اصل موضوع تمامیت امکان پذیر است ابتدا ثابت می‌کنیم که این دنباله صعودی است، سپس ثابت می‌کنیم که این دنباله از بالا کراندار است. مثلاً برای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 4$

ابتدا یک قضیه کمکی ثابت می‌کنیم

❖ **قضیه ۲:** دنباله  $\{b_n\}$  با ضابطه  $b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$  صعودی است.

❖ **برهان\*:** ثابت می‌کنیم برای هر  $n$ ،  $\frac{b_{n+1}}{b_n} > 1$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1}} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

داریم

$$= \left(\frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n-1}{n}}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\text{بنابراین مساوی برنولی: } \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} > 1 + \frac{n+1}{n^2-1}$$

\* برهان‌های ستاره‌دار (مربوط به قضایای ۲ و ۳ و ۴) برای مطالعه آزاد و اختیاری دانش‌آموزان است.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) > \left(1 + \frac{n+1}{n^2-1}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

بنابراین

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} > \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

❖ **قضیه ۳:** دنباله  $\{a_n\}$  با ضابطه  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  صعودی است

❖ **برهان \***: کافی است ثابت کنیم برای هر  $n$ ،  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  داریم

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n+1} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \left(1 - \frac{n+1}{(n+1)^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \quad (\text{بنابر نامساوی برنولی})$$

چون  $a_1 = 2$  و دنباله  $\{a_n\}$  صعودی است پس برای هر  $n \geq 2$ ،  $a_n > 2$ .

❖ **قضیه ۴:** دنباله  $\{a_n\}$  با ضابطه  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  از بالا کراندار است.

❖ **برهان \***: بنابر قضیه (۲) دنباله  $\{b_n\}$  با ضابطه  $b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$  صعودی است. چون  $b_2 = \frac{1}{4}$

پس برای هر  $n$ ،  $b_n > \frac{1}{4}$ ، از اینجا نتیجه می‌گیریم که برای هر  $n$ ،  $a_n b_n > a_n \times \frac{1}{4}$

$$a_n b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n < 1$$

در نتیجه  $a_n < 4$  یا  $a_n \times \frac{1}{4} < 1$

❖ **نتیجه ۱:** دنباله  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  صعودی و از بالا کراندار است پس طبق قضیه ۱

همگراست.

❖ نتیجه ۲: حد دنباله  $\{a_n\}$  را  $e$  می‌نامیم، یعنی  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

ضمناً برای هر  $n$ ،  $2 < a_n < 4$ ، لذا  $2 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq 4$  یعنی  $2 \leq e \leq 4$

و ثابت می‌شود که عدد ۳ نیز یک کران بالای دنباله  $\{a_n\}$  است و  $2 < e < 3$ .

❖ مثال: ثابت کنید که دنباله  $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right\}$  نزولی است

🚀 حل: کافی است ثابت کنیم که  $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$ ، داریم:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}$$

$$= \left( \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n+1}} \right)^{n+1} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}}$$

و اما طبق نامساوی برنولی داریم:

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n(n+2)} > 1 + \frac{n+1}{(n+1)^2} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \times \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = 1$$

بنابراین

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$$

و یا



۱- حد دنباله‌های زیر را حدس بزنید.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$$

$$c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$$

راهنمایی: از قاعده توان‌های مکرر استفاده کنید:  $[(a)^\alpha]^\beta = (a)^{\alpha\beta}$

۲- از ماشین حساب و یا رایانه خود استفاده کرده و عدد  $e$  را تا  $10^{\circ}$  رقم اعشار به دست آورید.

۳- حاصل  $(1 + 0/01)^{100}$  را به دست آورید و با عدد  $e$  مقایسه کنید.



لئونارد اویلر (Leonard Euler): ریاضیدان مشهور آلمانی که کارهای زیادی در زمینه‌های مختلف ریاضیات از جمله جبر، آنالیز، توپولوژی و هندسه انجام داده است. اویلر ریاضیدانی بسیار پرکار بوده است با بیش از ۵۷۰ کتاب و مقاله در عالم ریاضیات در زمان حیات خود به رشته تحریر درآورده است. برخی هم او را سودمندترین ریاضیدان همه قرون و اعصار دانسته‌اند.

انتخاب حرف e برای عدد  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ ، که آن را عدد نپیر می‌نامند به افتخار اویلر از حرف اول اویلر (Euler) اقتباس شده است.

### ۹-۱- جبر دنباله‌ها

دنباله‌های عددی، را می‌توان همانند اعداد با هم جمع یا تفریق کرد و دنباله جدیدی به نام مجموع یا تفاضل (دو دنباله) به دست آورد. همچنین دو دنباله عددی را می‌توان در هم ضرب کرد و دنباله جدیدی به نام دنباله حاصلضرب به دست آورد. در مورد تقسیم نیز تحت شرایطی می‌توان دو دنباله را بر هم تقسیم کرد.

تعریف: فرض کنیم  $\{a_n\}$  و  $\{b_n\}$  دو دنباله باشند، در این صورت دنباله‌های  $\{a_n + b_n\}$  و  $\{a_n - b_n\}$  و  $\{a_n b_n\}$  را خواهیم داشت، جمله  $n$ ام دنباله  $\{a_n + b_n\}$  همان حاصل جمع عددی  $a_n$  و  $b_n$  است.

همگرایی دنباله‌های  $\{a_n\}$  و  $\{b_n\}$  به آسانی به همگرایی دنباله‌های به دست آمده منتقل می‌شود.

❖ **قضیه ۵:** فرض کنیم  $\{a_n\}$  و  $\{b_n\}$  دو دنباله همگرا باشند. در این صورت

الف) دنباله‌های  $\{a_n \pm b_n\}$ ،  $\{a_n \cdot b_n\}$ ،  $\{c \cdot a_n\}$  (c عددی ثابت) همگرا هستند، به علاوه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

ب) هرگاه  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ ، دنباله  $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$  نیز همگراست و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

❖ **قضیه ۶ (قضیه فشردگی):** فرض کنیم  $\{a_n\}$  و  $\{b_n\}$  دو دنباله و  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ ،

همچنین فرض کنیم  $\{c_n\}$  دنباله‌ای باشد به قسمی که برای هر  $n$ ،  $a_n \leq c_n \leq b_n$  در این صورت دنباله  $\{c_n\}$  نیز همگراست و  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ .

❖ **برهان:** فرض کنیم  $\varepsilon > 0$  عدد مفروض دلخواهی باشد. چون  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$  از شماره‌ای مانند  $N_1$  به بعد  $|b_n - L| < \varepsilon$  (۱)

همچنین چون  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  از شماره‌ای مانند  $N_2$  به بعد  $|a_n - L| < \varepsilon$  (۲)  
 حال فرض کنیم  $N = \text{Max}\{N_1, N_2\}$  و  $n$  عدد طبیعی دلخواهی باشد که  $n \geq N$ ، پس برای هر  $n \geq N_1$  و  $n \geq N_2$  روابط (۱)، (۲) با هم برقرارند و داریم  $b_n < L + \varepsilon$ .

$$L - \varepsilon < a_n \quad (\text{چرا؟})$$

اما برای هر  $n$ ،  $a_n \leq c_n \leq b_n$ ، لذا برای هر  $n$  که  $n \geq N$

$$L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon$$

یعنی  $|c_n - L| < \varepsilon$ ، در نتیجه  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$

❖ **مثال:** می‌دانیم  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$  که در آن  $k$  عددی طبیعی است در همگرایی دنباله‌های زیر بحث کنید.

$$\left\{ \frac{\cos n}{n} \right\} \quad (\text{ب}) \qquad \left\{ \frac{2n^2 - n - 1}{5n^2 + n - 3} \right\} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{2n^2 - n - 1}{5n^2 + n - 3} = \frac{2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}}$$

 **حل:** (الف) داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \qquad \text{اما}$$

$$= 2 - 0 - 0 = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 5 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 5 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}$$

$$= 5 + 0 - 0 = 5$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n - 1}{5n^2 + n - 3} = \frac{2}{5}$$

در نتیجه

(ب) می‌دانیم همواره  $-1 \leq \cos x \leq 1$  در نتیجه برای هر عدد طبیعی  $n$ ,

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

چون  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} = 0$  پس  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n} = 0$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

## مسائل

- در هر یک از تمرین‌های زیر مشخص کنید که آیا دنباله مورد نظر  
 الف) (از بالا یا پایین) کراندار است.  
 ب) جملات دنباله مثبت یا منفی اند.  
 ج) صعودی یا نزولی و یا نوسانی اند.  
 د) همگرا یا واگراست؛ و اگر واگراست به  $+\infty$  و یا واگرا به  $-\infty$  و یا هیچ‌یک.

$$\left\{ 4 + \frac{(-1)^n}{n} \right\} \quad -3 \quad \left\{ \frac{2n}{n^2+1} \right\} \quad -2 \quad \left\{ \frac{5n^2}{n^2+1} \right\} \quad -1$$

$$\left\{ \frac{\sin n}{n} \right\} \quad -6 \quad \left\{ \frac{n^2-1}{n} \right\} \quad -5 \quad \left\{ \sin \frac{1}{n} \right\} \quad -4$$

$$\left\{ n \cos \frac{(-1)^n}{n} \right\} \quad -9 \quad \left\{ n \sin \frac{n\pi}{2} \right\} \quad -8 \quad \left\{ n \cos \frac{n\pi}{2} \right\} \quad -7$$

۱۰- ثابت کنید  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$ . آیا از این می‌توان نتیجه گرفت که  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} = +\infty$ ؟

۱۱- همگرایی، واگرایی و واگرایی به  $+\infty$  یا  $-\infty$  دنباله‌های زیر را بررسی کنید.

$$\left\{ \frac{n}{\sqrt{n+1}} \right\} \quad \text{ج)} \quad \left\{ (-1)^n \frac{n+1}{n} \right\} \quad \text{ب)} \quad \left\{ \frac{n^2-1}{n} \right\} \quad \text{الف)}$$

۱۲- فرض کنیم  $\{a_n\}$  یک دنباله همگرا و برای هر  $n$  داشته باشیم  $a_n + 452 = a_{n+1}$ .  
 حد این دنباله را پیدا کنید.

۱۳- فرض کنیم دنباله  $\{p_n\}$  همگرا و  $a$  و  $b$  دو عدد ثابت باشند به قسمی که  $p_{n+1} = \frac{bp_n}{a+p_n}$ .

حد دنباله  $\{p_n\}$  را حساب کنید.

$$14- \text{ حد دنباله‌های روبه‌رو را به‌دست آورید. } \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} \right\}, \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \right\}$$

راهنمایی: از این قضیه که هرگاه  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$  (دنباله  $\{a_n\}$  با مقادیر مثبت همگرا

به عدد مثبت  $\alpha$  باشد) و  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$  یعنی  $\{a_n\}$  و  $\{b_n\}$  دو دنباله همگرا باشند،

دنباله  $\left\{ \begin{matrix} b_n \\ a_n \end{matrix} \right\}$  نیز همگراست و  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^{b_n}) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \alpha^\beta$  استفاده کنید

( $\alpha > 0$  و  $\beta$  دو عدد حقیقی اند.)



## حد و پیوستگی

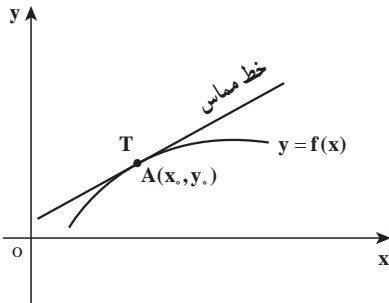
## ۲-۱- مقدمه

فرایند گذر از ریاضیات مقدماتی به حسابان

رشد و توسعه بخش وسیعی از حسابان ریشه در دو مسأله هندسی دارد:

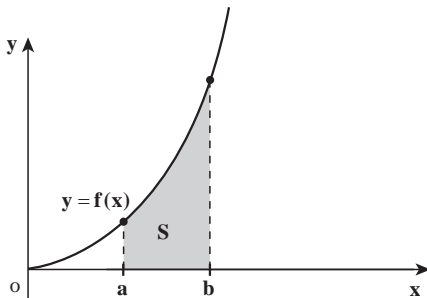
پیدا کردن مساحت‌هایی از ناحیه‌های یک سطح (صفحه) و پیدا کردن خط‌های مماس بر منحنی‌ها. در این بخش نشان می‌دهیم هر دو مسأله به‌طور تنگاتنگی براساس یک مفهوم بنیادی از حسابان که به عنوان «حد» شناخته شده قابل بیان می‌باشند.

مسأله خط مماس و مساحت: حسابان حول دو مسأله بنیادی زیر متمرکز است:



۱- مسأله مماس: تابع  $f$  و نقطه  $(x_0, y_0)$

روی نمودار آن داده شده است، معادله خط مماس بر نمودار  $f$  در نقطه  $A$  را پیدا کنید. (شکل روبه‌رو)



۲- مسأله مساحت: تابع  $f$  داده شده است.

مساحت ناحیه بین نمودار  $f$  و بازه  $[a, b]$  و محور  $x$  را پیدا کنید. (شکل روبه‌رو)

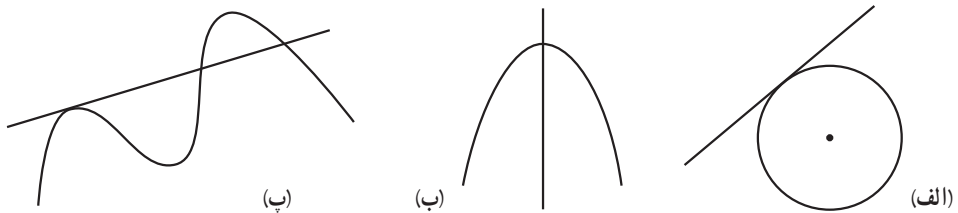
از منظر سنتی و تاریخی آن بخش از حساب که از مسألهٔ مماس برآمده است «حساب دیفرانسیل» نامیده می‌شود و آن بخش از حسابان که از مسألهٔ مساحت برآمده است «حساب انتگرال» نامیده می‌شود. کشف رابطه بین این دو حساب که تحت عنوان قضیه اساسی عرضه می‌گردد باعث شده است که تفکیک میان این دو، دشوار بوده و مطالعه هر دو مسأله تحت عنوان حساب دیفرانسیل و انتگرال انجام گیرد.

برای حل کردن مسأله‌های مماس و مساحت لازم است درک و فهم دقیق‌تری از مفاهیم «خط مماس» و «مساحت» داشته باشیم.

در این فصل به توضیح و تبیین خط مماس و مفهوم حد پرداخته، بررسی و مطالعه مسألهٔ مساحت را به فصل ۴ واگذار می‌کنیم.

## ۲-۲- خط‌های مماس و حد

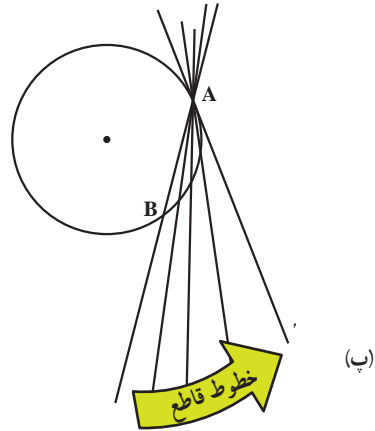
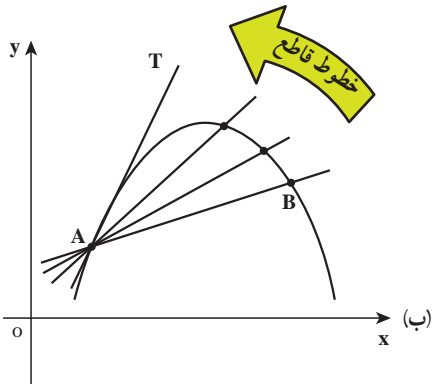
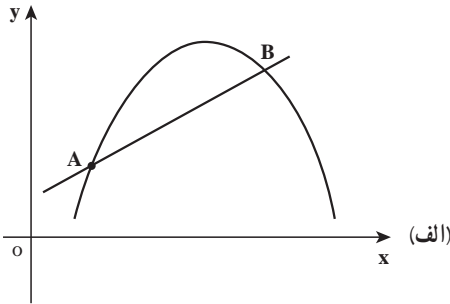
در هندسه مسطحه، یک خط بر دایره مماس است، هرگاه آن خط دایره را دقیقاً در یک نقطه قطع کند (شکل زیر قسمت الف). این تعریف برای انواع دیگر منحنی‌ها صادق نیست (شکل زیر قسمت ب). خطی که دقیقاً در یک نقطه منحنی را قطع می‌کند، مماس نیست. در شکل زیر قسمت (پ) این خط بر منحنی مماس است در حالی که منحنی را بیش از یک بار قطع کرده است.



برای اینکه تعریف مفهوم خط مماس را برای منحنی‌هایی غیر از دایره بیان کنیم، باید با روشی دیگر خط‌های مماس را در نظر بگیریم.

نقطهٔ  $A$  را روی یک منحنی در صفحه  $x-y$  در نظر می‌گیریم. اگر  $B$  نقطهٔ دلخواه و متمایز با  $A$  روی منحنی باشد، به خطی که از نقطهٔ  $A$  و  $B$  می‌گذرد، خط قاطع می‌گوییم (شکل صفحهٔ بعد قسمت الف). شهود ما پیشنهاد می‌کند که اگر نقطهٔ  $B$  را روی منحنی به سوی  $A$  حرکت دهیم، خط قاطع به سوی یک حالت «حدی» دوران می‌کند (شکل صفحهٔ بعد قسمت ب). خط  $T$  که این حالت (مکان) حدی را اشغال می‌کند، را به عنوان خط مماس در نقطه  $A$  در نظر می‌گیریم.

همان‌گونه که از شکل زیر قسمت (پ) معلوم است، این مفهوم جدید از یک خط مماس با مفهوم معمولی که برای دایره به کار می‌رود منطبق و سازگار است.



## ۲-۳- مفهوم حد - فرایند حد

مطالعه و بررسی مسأله خط مماس و مسأله مساحت یک ناحیه در صفحه، موجب پیدایش شهودی و تقریبی مفهوم ریاضی جدیدی به نام «حد» شد. تلاش‌های بعدی بر روی دقیق کردن مفهوم حد و رسمیت یافتن آن در ریاضیات متمرکز گردید. سپس مطالعه و بررسی نتایج حاصل از آن و کاربردهای آن در ریاضیات و در علوم دیگر در دستور کار قرار گرفت. خیلی زود مشخص گردید که مفهوم حد فراتر از حل مسأله خط مماس و مسأله مساحت باعث حل مسائل بسیار، پیدایش اندیشه‌های ریاضی بسیار و به‌طور کلی رشد و توسعه وسیع ریاضیات گردید.

یکی از نقش‌آفرینی‌های اساسی مفهوم حد که موجب کاربردهای وسیع و حل مسائل بسیاری در حوزه‌های علمی دیگر شد، بررسی رفتار تابع است. بسیاری از پدیده‌های طبیعی و فیزیکی، بسیاری از مسأله‌های واقعی پس از صورت‌بندی ریاضی به صورت یک تابع درمی‌آید.

بنابراین بررسی رفتار تابع، دربرگیرنده بسیاری از پدیده‌های طبیعی، فیزیکی، اقتصادی، زیستی و ... و حل مسائل واقعی مربوطه می‌باشد. در این بخش به بررسی و مطالعه مفهوم حد به صورت شهودی و تقریبی می‌پردازیم.

برای شروع تابع  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  و دو دنباله  $\{(0/1)^n\}$  و  $\{-(0/1)^n\}$  را در نظر می‌گیریم، (مقادیر  $x$  برحسب رادیان است).

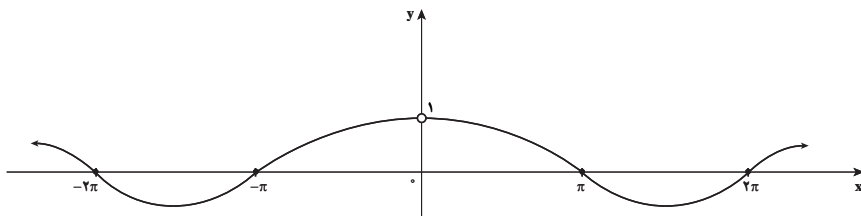
الف) سه جمله اول هر کدام از دنباله‌های بالا را بنویسید و حدس بزنید هر کدام از دو دنباله به چه عددی همگرا هستند؟  
 ب) جدول زیر را تکمیل کنید.

$x$  از راست به عدد ... نزدیک می‌شود       $x$  از چپ به عدد ... نزدیک می‌شود

$x$	-0/1	-0/0/1	-0/00/1	0			0/1
$f(x)$	0/9983	0/9999	0/99999	?			0/9983

$f(x)$  به عدد ... نزدیک می‌شود       $f(x)$  به عدد ... نزدیک می‌شود

در این فعالیت نمودار تابع  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  که در  $x=0$  تعریف نشده است به صورت شکل زیر است:



نتایج به دست آمده از جدول بالا را از روی نمودار تابع  $f$  بررسی نمایید.



تابع  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$  را در نظر می‌گیریم.

۱- پنج جمله اول هر کدام از دنباله‌های  $\{1 - (0/1)^{n-1}\}$  و  $\{1 + (0/1)^{n-1}\}$  را بنویسید و حدس بزنید هر کدام از دو دنباله به چه عددی همگرا هستند؟

۲- جدول زیر را تکمیل کنید.

x از راست به عدد ... نزدیک می شود ← x از چپ به عدد ... نزدیک می شود

x	۰	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۱	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	۱
f(x)	۱	۲/۹۷۱	۲/۹۷۰۱	۲/۹۹۷۰۰۱		?		۳/۰۰۳۰۰۱	۳/۰۳۰۱	۳/۳۱	۳

f(x) به عدد ... نزدیک می شود ← f(x) به عدد ... نزدیک می شود

۳- نمودار تابع f را در صفحهٔ مختصات رسم کنید و سپس به کمک نمودار تابع حدس بزنید که اگر x با مقادیر بزرگ تر از ۱ به ۱ نزدیک شود و همچنین x را با مقادیر کوچک تر از ۱ به ۱ نزدیک کنیم، f(x) به چه عددی نزدیک خواهد شد؟

در تمرین و فعالیت بالا با تابعی روبه‌رو بودیم که متغیر x (در دامنه تابع) به عددی مانند نزدیک می‌شد و این سؤال مطرح بود که آیا مقدارهای تابع به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟ این مفهوم را حدگیری از تابع در نقطه a می‌نامند (فرایند حد)

از فعالیت بالا نتیجه می‌گیریم، وقتی متغیر x (در دامنه f) بسیار بسیار به صفر نزدیک باشد (با مقادیر بزرگ تر از صفر و یا کوچک تر از صفر)، مقدارهای f(x) به ۱ نزدیک هستند. میزان نزدیک بودن آنها به ۱، بستگی به میزان نزدیک بودن x به صفر دارد. در حقیقت، به نظر می‌رسد که می‌توانیم مقدارهای f(x) را هر چقدر که بخواهیم به ۱ نزدیک کنیم، به شرطی که x را به اندازه کافی به صفر نزدیک کرده باشیم و این را چنین می‌گوییم «حد تابع f وقتی که x به صفر میل می‌کند برابر ۱ است» و می‌نویسیم:

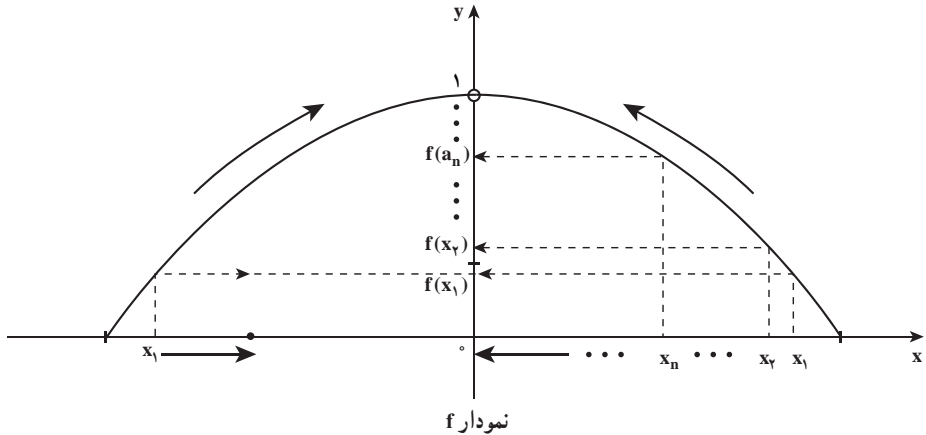
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

همچنین از تمرین در کلاس نتیجه می‌گیریم، وقتی متغیر x (در دامنه f) بسیار بسیار نزدیک به ۱ باشد (با مقادیر بزرگ تر از ۱ و یا کوچک تر از ۱)، مقدارهای f(x) به ۳ نزدیک هستند. میزان نزدیک بودن آنها به ۳، بستگی به میزان نزدیک بودن x به ۱ دارد. در حقیقت، به نظر می‌رسد که می‌توانیم مقدارهای f(x) را هر چقدر که بخواهیم به ۳ نزدیک کنیم، به شرطی که x را به اندازه کافی به ۱ نزدیک کرده باشیم و این را چنین می‌گوییم «حد تابع f وقتی که x به ۱ میل می‌کند برابر ۳ است» و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

در تمرین و فعالیت صفحات قبل مفهومی بررسی شد که می توان برای یک تابع دلخواه  $f$  به صورت زیر تشریح کرد.

فرض کنید نمودار تابع دلخواه  $f$  در حوالی  $x=0$  به شکل زیر باشد.



با مشاهده نمودار  $f$  اگر مقدارهای  $x$  که همان مقدارهای دنباله دلخواه  $\{x_n\}$  هستند، همگرا به صفر باشند، دنباله  $\{f(x_n)\}$  به  $1$  همگراست و نیز اگر متغیر  $x$  (عضو دامنه  $f$ ) با مقدارهای بزرگ تر و کوچک تر از صفر به صفر میل کند  $f(x)$  به  $1$  میل می کند. در حالت کلی از نمادگذاری زیر استفاده می کنیم:

فرض می کنیم مجموعه  $D$  که زیر مجموعه ای است از مجموعه اعداد حقیقی، دامنه تابع  $f$  باشد. اگر مقدار  $f(x)$  میل کند به عدد  $L$ ، وقتی که  $x$  (عضو  $D$ ) به  $a$  میل کند.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{می نویسیم}$$

و می خوانیم «حد  $f(x)$  وقتی  $x$  به  $a$  میل می کند برابر  $L$  است».

تذکر: وقتی می گوئیم که « $x$  به  $a$  میل می کند»  $x \neq a$  می باشد و اختلاف  $x$  و  $a$  کوچک و کوچک تر می شود، فرض بر این است که تابع  $f$  در یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) نقطه  $a$  تعریف شده باشد.

ویژگی‌ها و وضعیت مقادیر تابع  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$  به ازای چهار جمله اول دنباله‌های  $\{(0/1)^n\}$  و  $\{-(0/1)^n\}$  را در نزدیکی  $x=0$  با تنظیم جدول و رسم نمودار تابع توصیف کنید و سپس  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  را تخمین بزنید.

حدودی که وجود ندارد.

تابع  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  دنباله‌های  $\{(0/1)^{n-1}\}$  و  $\{-(0/1)^{n-1}\}$  را در نظر می‌گیریم.  
الف) پنج جمله اول دنباله‌های داده شده را بنویسید.  
ب) جدول زیر را برای تابع  $f$  تکمیل کنید.

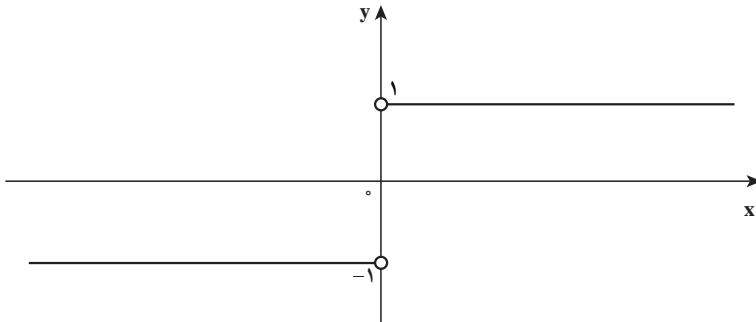
$x$  با مقادیر کوچک‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود   $x$  با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود

$x$	-1	-0/1	-0/01	-0/001	-0/0001	0	0/0001	0/001	0/01	0/1	1
$f(x) = \frac{ x }{x}$											

$f(x)$  به عدد ... نزدیک می‌شود

$f(x)$  به عدد ... نزدیک می‌شود

پ) نتایج به دست آمده خود را روی نمودار تابع  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  که در زیر آمده است توضیح دهید.



ت) آیا  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$  وجود دارد؟

در حالت کلی :

الف) در یک تابع  $f$  اگر متغیر  $x$  (در دامنه  $f$ ) با مقادیر بزرگتر از عددی مانند  $a$  به  $a$  نزدیک شود و مقادیر  $f(x)$  به عددی مانند  $L_1$  میل کند گفته می‌شود تابع  $f$  در نقطه  $a$  حد راست دارد و مقدار این حد  $L_1$  است و می‌نویسیم :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$$

$L_1$  را حد راست تابع  $f$  در  $a$  می‌نامیم.

بنابراین از این فعالیت نتیجه می‌گیریم :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

ب) در یک تابع  $f$  اگر متغیر  $x$  (در دامنه  $f$ ) با مقادیر کوچکتر از عددی مانند  $a$  به  $a$  نزدیک شود و مقادیر  $f(x)$  به عددی مانند  $L_2$  نزدیک شود گوئیم تابع  $f$  در نقطه  $a$  حد چپ دارد و مقدار این حد  $L_2$  است و می‌نویسیم :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_2$$

بنابراین از فعالیت نتیجه می‌گیریم :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$



ابتدا نمودار تابع  $f(x) = x + [x]$  را در بازه  $[0, 2]$  رسم کنید و سپس مقادیر  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  و

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  را تخمین بزنید. آیا  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  وجود دارد؟

### طرح یک مسأله

وجود حدهای  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{\pi}{x}$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin \frac{\pi}{x}$  را بررسی کنید. اصطلاحاً گوئیم رفتار تابع

$f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$  را در مجاورت  $x = 0$  بررسی می‌کنیم.

در مورد حد اول دنباله‌هایی در نظر می‌گیریم که با مقادیر بزرگتر از صفر به صفر میل

می‌کنند.

۱- می‌دانیم دنباله  $a_n = \frac{1}{n}$  همگرا به صفر است. مقادیر تابع را در ازای مقادیر این دنباله

محاسبه می‌کنیم. (جدول ۱)



(جدول ۱)

$a_n$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...
$f(a_n)$	$\sin\pi$	$\sin 2\pi$	$\sin 3\pi$	$\sin 4\pi$	...

سپس جملات دنباله  $\{f(a_n)\}$  همگی برابر صفر بوده و این دنباله به صفر همگرا است.

۲- دنباله  $\{b_n\}$  را با جمله عمومی  $b_n = \frac{2}{4n+1}$  در نظر می‌گیریم، جملات اولیه دنباله

$\left\{\frac{2}{5}, \frac{2}{9}, \frac{2}{13}, \frac{2}{17}, \dots\right\}$  بوده و می‌دانیم که این دنباله همگرا به صفر است. به ازای این مقادیر

جدول (۲) را تشکیل می‌دهیم:

(جدول ۲)

$b_n$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{17}$	...
$f(b_n)$	۱	۱	۱	۱	...

پس دنباله  $\{f(b_n)\}$  دنباله ثابت ۱ بوده و همگرا به عدد ۱ می‌باشد.

۳- دنباله  $\{c_n\}$  را با مقادیر  $\left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{7}, \frac{2}{11}, \frac{2}{15}, \dots\right\}$  که به صفر همگراست در نظر می‌گیریم.

مشابه جدول (۳) را برای مقادیر تابع به ازای این  $x$ ها محاسبه می‌کنیم:

(جدول ۳)

$c_n$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{15}$	...
$f(c_n)$	-۱	-۱	-۱	-۱	...

پس دنباله  $\{f(c_n)\}$  به عدد -۱ همگراست.

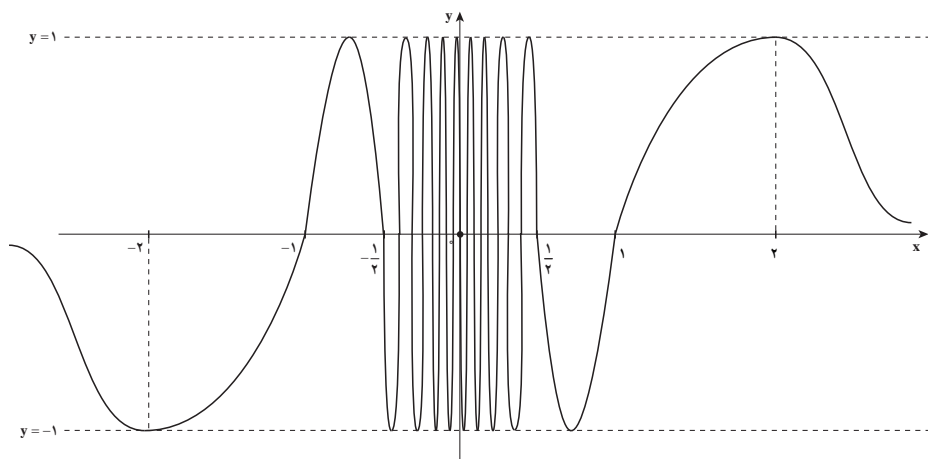
ملاحظه می‌کنیم که  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = 1$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) = -1$  در حالی که

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$  یعنی دنباله‌های به دست آمده برای مقادیر تابع به یک عدد ثابت و

مشخص همگرا نیستند در حالی که همه دنباله‌های عدد انتخاب شده به صفر همگرا بودند. مشابه وضعیت فوق با انتخاب دنباله‌هایی که با مقادیر کوچک‌تر از صفر به صفر همگرایند، وجود یا عدم وجود  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  را بررسی کنید.

برای نمونه می‌توانید دنباله‌های  $a_n = -\frac{1}{n}$  و  $b_n = -\frac{2}{4n+1}$  را به کار گیرید.

با استفاده از ماشین حساب‌های علمی و یا رایانه ملاحظه می‌کنیم که نمودار تابع  $f$  به شکل زیر می‌باشد.



ملاحظه می‌کنیم که مقادیر تابع در مجاورت  $x=0$  بین دو عدد ثابت ۱ و -۱ کم و زیاد می‌شوند، در این صورت گفته می‌شود تابع در مجاورت  $x=0$  رفتاری نوسانی دارد و نیز نمودار تابع به صورت موج‌های فشرده‌تری به محور  $y$  گرایش دارند.

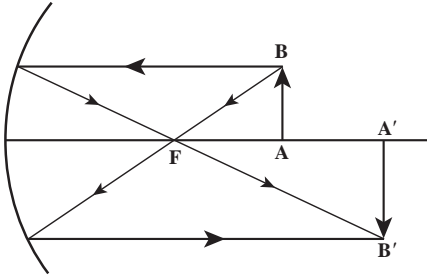
چون تابع  $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ ، تابعی فرد است نمودار  $f$  بر بازه  $(-\infty, 0)$  قرینه نمودار  $f$  بر بازه  $(0, +\infty)$  نسبت به محور  $y$  است.

پرسش: براساس اطلاعات به دست آمده در جدول‌های (۱) و (۲) و (۳) آیا  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x}$  وجود دارد؟

## ۴-۲- حد بی‌نهایت

❖ **مسئله:** تصویری از یک شیء که در مقابل آینه مقعر قرار گرفته روی پرده افتاده است، با این فرض که فاصله شیء از آینه بزرگ‌تر از فاصله کانونی ( $p > f$ )

- ۱- رابطه بزرگ‌نمایی آینه مقعر (m) را بر حسب p و f به دست آورید.
- ۲- وضعیت m را وقتی که p به f نزدیک می‌شود بررسی کنید.



در این فعالیت اگر f فاصله کانونی و p فاصله جسم تا آینه و q فاصله تصویر تا آینه فرض شود (شکل روبه‌رو)، بزرگ‌نمایی در آینه مقعر برابر است با :

$$m = \frac{q}{p} \quad \text{یا} \quad m = \frac{\text{طول تصویر } A'B'}{\text{طول شیء } AB}$$

۱- همان‌طور که در فیزیک یاد گرفته‌اید، داریم :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

در رابطه (۱) به جای q، mp را قرار می‌دهیم تا رابطه (۲) به دست آید.

$$m = \frac{f}{p-f} \quad (2)$$

۲- در رابطه (۲) فاصله کانونی (f) ثابت است و فاصله شیء تا آینه متغیر است و مقدار

بزرگ‌نمایی (m) مقدار تابعی است بر حسب متغیر p.

اکنون اگر p با مقدارهای بزرگ‌تر از f به f نزدیک و نزدیک‌تر شود، آنگاه m (بزرگ‌نمایی)

بزرگ و بزرگ‌تر خواهد شد.

در حقیقت از نزدیک کردن p

به مقادیر بزرگ‌تر از f به f، می‌توان

هرچقدر که بخواهیم m را بزرگ

انتخاب کنیم (مقدارهای m بی‌کران

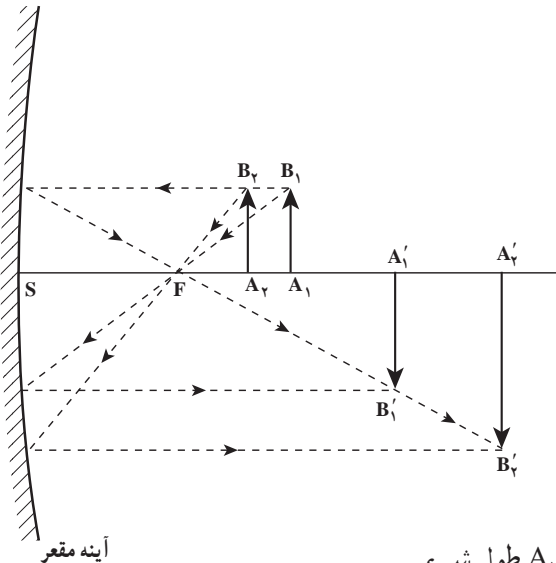
افزایش می‌یابند) و از نمادگذاری

$$\lim_{p \rightarrow f^+} \frac{f}{p-f} = +\infty$$

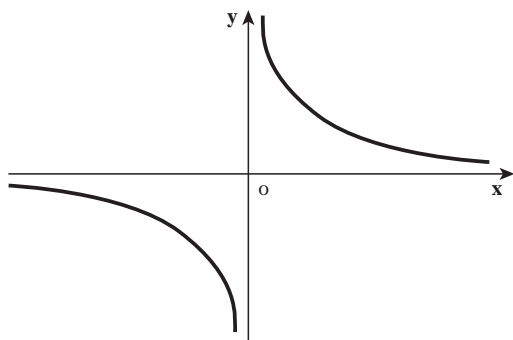
استفاده می‌کنیم.

پرسش : نمادگذاری بالا را به

کمک شکل روبه‌رو توصیف کنید.



$$A_1B_1 = A_2B_2 = \dots = A_nB_n = \dots$$



تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  را که دامنه آن  $R - \{0\}$  است، در نظر می‌گیریم. نمودار این تابع را در حسابان دیده‌اید (شکل روبه‌رو).

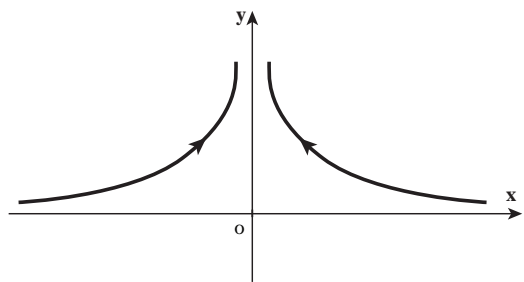
ملاحظه می‌کنیم که وقتی  $x$  با مقادیر بزرگ‌تر از صفر (از سمت راست صفر) به صفر نزدیک می‌شود مقادیر تابع به دلخواه بزرگ می‌شوند. به زبان دنباله‌ها هرگاه دنباله‌ای را در نظر بگیریم که به صفر میل کند مانند دنباله  $a_n = \frac{1}{n}$  دنباله  $f(a_n) = f\left(\frac{1}{n}\right) = n$  به دست می‌آید و می‌دانیم که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \infty \quad \text{پس} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

مشابهاً از روی نمودار می‌بینیم که وقتی  $x$  با مقادیر کوچک‌تر از صفر (از سمت چپ صفر) به صفر نزدیک می‌شود، مقادیر تابع که همگی منفی‌اند، از هر عددی کوچک‌تر می‌شوند. به زبان دنباله‌ها، هرگاه بخواهیم  $x$  از سمت چپ به صفر میل کند، باید دنباله‌هایی را در نظر بگیریم که با مقادیر منفی به صفر میل کنند، مانند دنباله  $a_n = -\frac{1}{n}$  و یا  $b_n = \frac{-1}{n}$ ، در این صورت مثلاً  $f(a_n) = -n$  به دست آمده و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = -\infty \quad \text{بنابراین:} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

از این بررسی نتیجه می‌گیریم که تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  در صفر حد ندارد.



اکنون تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  را در نظر می‌گیریم. نمودار این تابع یک منحنی است بالای محور  $x$  که در مجاورت صفرشاخه‌های آن به گونه‌ای مماس‌وار به محور  $y$  نزدیک می‌شوند (شکل روبه‌رو).

برای آنکه رفتار تابع را در مجاورت صفر بررسی کنیم، به عبارت دیگر در خصوص وجود یا عدم وجود حد تابع در صفر مطالعه کنیم، دنباله‌هایی را در نظر می‌گیریم که به صفر میل کنند (مقادیر دنباله عضو دامنه  $f$ )، مانند  $a_n = \frac{1}{n}$  و  $b_n = -\frac{1}{n}$ ، در این صورت:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$$

توجه داریم که مقادیر دنباله  $\{a_n\}$  از راست و مقادیر دنباله  $\{b_n\}$  از چپ به صفر میل می‌کنند.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

بنابراین:

در نتیجه اصطلاحاً می‌گوییم تابع  $f$  در نقطه  $a=0$  دارای حد نامتناهی و یا حد بی‌کران است.

وقتی  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ، باز هم چنین توصیف می‌کنیم که تابع  $f$  در نقطه  $a$  دارای حد نامتناهی است.

**حالت کلی:** وقتی از نماد  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  استفاده می‌کنیم، گوییم  $f$  در  $a$  دارای حد  $+\infty$  است و این بدان معنی است که مقادیر  $f(x)$  به دلخواه بزرگ و بزرگ‌تر می‌شوند، به شرط آن که متغیر  $x$  (عضو دامنه  $f$ ) به قدر کافی به  $a$  نزدیک شود. به زبان دنباله‌ها این وقتی اتفاق می‌افتد که برای هر دنباله

$$\{a_n\} \text{ با مقادیر عضو دامنه } f \text{ که } a_n \rightarrow a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = +\infty.$$

### تمرین در کلاس

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty \quad \text{نشان دهید که}$$

تابع  $f(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$  و دنباله‌های  $\{1 + (0/1)^{n-1}\}$  و  $\{1 - (0/1)^{n-1}\}$  را در نظر می‌گیریم:

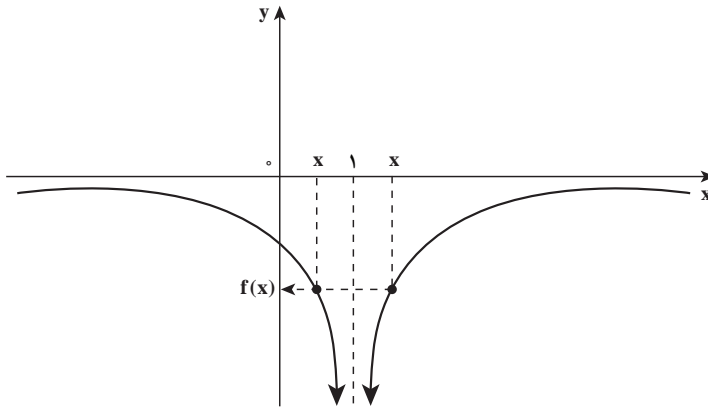
۱- پنج جمله اول دنباله‌های بالا را بنویسید.

۲- جدول زیر را برای تابع  $f$  تکمیل کنید.

x	-1/1	-1/0.1	-1/0.01	-1/0.001	-1/0.0001	-1/0.00001	1/0.00001	1/0.0001	1/0.001	1/0.01	1/0.1
f(x)	→?←										

۳- آیا مقدارهای  $f(x)$  وقتی  $x$  به ۱ نزدیک می‌شود، به عدد خاصی نزدیک

می‌شوند؟ جواب خود را از روی نمودار تابع  $f(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$  در شکل زیر توضیح دهید.



این فعالیت به ما نشان می‌دهد، وقتی  $x$  به  $1$  نزدیک می‌شود،  $(x-1)^2$  به صفر نزدیک خواهد شد و  $\frac{-1}{(x-1)^2}$  بسیار کوچک منفی می‌شود. در حقیقت به نظر می‌رسد که می‌توان با نزدیک کردن  $x$  به اندازه کافی به  $1$ ، مقادیرهای  $f(x)$  را به دلخواه با مقادیر منفی کوچک و کوچک‌تر کرد (مقادیرهای  $f(x)$  بی‌کران کاهش می‌یابند).

در نتیجه مقادیرهای  $f(x)$  به هیچ عدد میل نمی‌کند. بنابراین  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x-1)^2}$  وجود ندارد. برای نشان دادن وضعیتی که در این فعالیت پیش آمده از نمادگذاری  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$  استفاده می‌کنیم.

**حالت کلی:** وقتی از نماد  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  استفاده می‌کنیم، گوئیم  $f$  در  $a$  دارای حد  $-\infty$  است. و این بدان معنی است که مقادیر  $f(x)$  با مقادیرهای منفی کوچک و کوچک‌تر می‌شوند (مقادیر  $f(x)$  بی‌کران با مقادیر منفی کاهش می‌یابند) به شرط آن که متغیر  $x$  (عضو دامنه  $f$ ) به قدر کافی به  $a$  نزدیک شود. به زبان دنباله‌ها، این وقتی اتفاق می‌افتد که برای هر دنباله  $\{a_n\}$  با مقادیر عضو دامنه  $f$  که  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ،  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = -\infty$ .

تمرین در کلاس

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty \text{ نشان دهید که}$$

## ۲-۵- حد در بی نهایت

تا اینجا رفتار تابع را در حول و حوش عددی حقیقی مانند  $a$  مورد مطالعه قرار داده ایم، به عبارت دقیق تر وجود یا عدم وجود حد تابع را در نقطه مشخص  $a$  بررسی کرده ایم. در این بخش علاقه مندیم تا رفتار تابع را برای مقادیر بسیار بزرگ  $x$  و یا برای مقادیر بسیار کوچک ولی از حیث قدر مطلق بزرگ، مورد مطالعه قرار دهیم. رفتار تابع را برای  $x$  های بزرگ و بی کران مثبت، حد در  $+\infty$  و رفتار تابع را برای  $x$  های بزرگ و با علامت منفی (بی کران منفی) حد در  $-\infty$  نامیده می شود. به مثال تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  که نمودار آن نیز در صفحه ۶۵ کتاب ملاحظه گردید برمی گردیم. وقتی  $x$  مقادیر بزرگ و بزرگ تر را اختیار می کند، یعنی در جهت  $x$  های مثبت روی خط حقیقی به اصطلاح تغییر می کند، مقادیر تابع کوچک و کوچک تر شده و از هر عدد مشخصی کوچک تر می شوند. به لحاظ شهودی، همچنان که در شکل نمایان است نمودار این تابع در سمت راست و برای  $x$  های بزرگ رفته رفته به محور  $x$  نزدیک تر می شود یعنی فاصله نقاط این شاخه نمودار از محور  $x$ ، کوچک و کوچک تر می شود.

با ابزار دنباله نیز می توانیم مسأله را بهتر بررسی کنیم، منتهی چون مرادمان حد در  $+\infty$  است، باید دنباله ها را چنان اختیار کنیم که به  $+\infty$  واگرا باشند. برای نمونه فرض کنیم دنباله  $\{a_n\}$  با ضابطه  $a_n = n$  یک چنین دنباله ای باشد پس  $f(a_n) = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n}$  و می دانیم  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  پس می گوئیم  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  مشابهاً وقتی  $x$  ها به  $-\infty$  میل می کنند، یعنی  $x$  ها علامت منفی دارند ولی از لحاظ قدر مطلق بزرگ و بزرگ تر می شوند. بنابراین دنباله ها را طوری باید اختیار کنیم که به  $-\infty$  واگرا باشند. برای نمونه هرگاه با دنباله  $a_n = 1 - n^2$  کار کنیم،  $f(a_n) = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{1 - n^2}$  و می دانیم که  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0$  پس  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ ، و این واقعیتی است که از نمودار نیز به خوبی مشهود است.

**حالت کلی:** وقتی می نویسیم  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ، منظورمان آن است که مقادیر  $f(x)$  را هر چقدر که بخواهیم به  $L$  نزدیک کنیم به شرط آنکه  $x$  های عضو دامنه  $f$  به قدر کافی بزرگ باشند.



دبیر:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1}$  را حدس بزنید.

محسن این گونه مسأله را بررسی کرده است:

در رابطه با حدسیه‌سازی  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1}$  با مقادیر بزرگ و بزرگ‌تر  $x$  سرو کار داریم. پس عدد ۱ و یا هر عدد ثابت دیگری، در مقابل  $x$  ناچیز است. پس اگر  $x+1$  مخرج کسر را با  $x$  تقریب کنیم، مقادیر تابع با  $\frac{x}{x} = 1$  تقریب می‌گردند، بنابراین مقادیر این تابع برای  $x$  های بزرگ، عددهایی نزدیک ۱ هستند. در نتیجه حدس می‌زنیم که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

آیا استدلال و تفکر شهودی محسن درست است؟

می‌توانید دنباله‌های  $\{a_n\}$  و  $\{b_n\}$  با ضابطه‌های  $a_n = n$  و  $b_n = n^2 + 1$  را که هر دو به  $+\infty$  واگرا هستند، محک بزنید.

در مورد مقدار  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+1}$  چگونه فکر می‌کنید؟

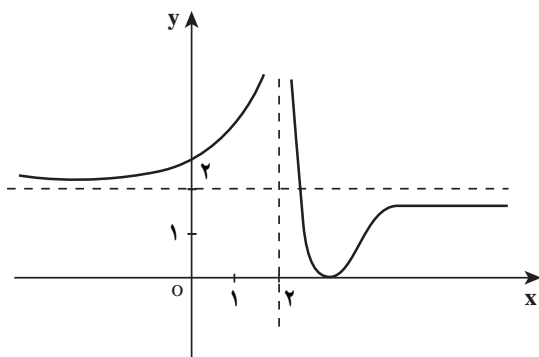
**حالت کلی:** هرگاه  $x$  با مقادیر منفی کوچک و کوچک‌تر شود، آنگاه  $f(x)$  به  $L$  نزدیک و

نزدیک‌تر می‌شود، می‌نویسیم  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  و گوییم حد تابع  $f$  در  $-\infty$  برابر  $L$  است. توجه داشته باشید که وقتی  $x$  مقادیر منفی را اختیار کند، برای آن که مرتب کوچک‌تر شود باید قدرمطلق آن بزرگ‌تر گردد.



۱- مقدارهای  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$  را در صورت وجود، حدس بزنید.

۲- نمودار تابع  $f$  در شکل زیر نشان داده شده است:  
 حدهای زیر را حدس بزنید.



الف)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

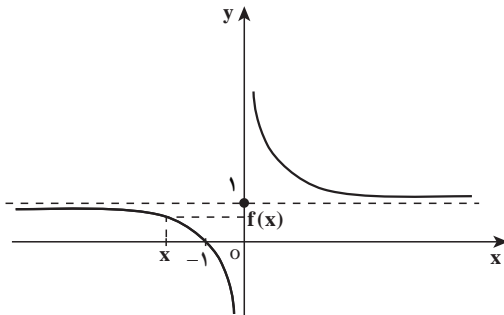
پ)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ت)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$



۳- تابع  $f(x) = \frac{x+1}{x}$  و دنباله  $\{a_n\}$  با ضابطه  $a_n = -1 \cdot 10^n$  را در نظر بگیرید.  
الف) وقتی  $x$  مقادیر این دنباله را طبق جدول زیر اختیار کند  $f(x)$  را محاسبه کنید.

$a_n$	$-10$	$-100$	$-1000$	$-10000$
$f(a_n)$				



ب) آیا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  وجود دارد؟

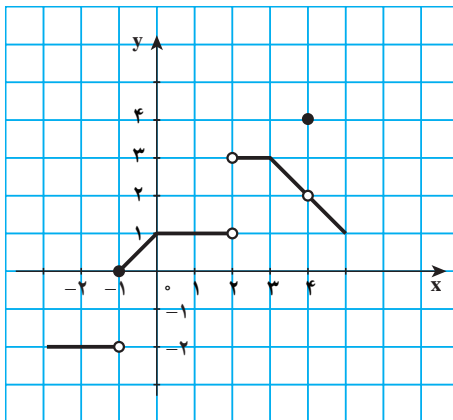
جواب خود را با توجه به نمودار

که در شکل روبه‌رو آمده  $f(x) = \frac{x+1}{x}$

نیز توجیه کنید.  $f(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$

## مسائل

۱- با استفاده از نمودار  $f$  که در زیر داده شده است، مقدار هر یک از عبارتهای زیر را، در صورت وجود، مشخص کنید. اگر این مقدار وجود ندارد توضیح دهید که چرا وجود ندارد.



الف)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

پ)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

ت)  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

۲- تابع هوی ساید (Heaviside) به صورت زیر تعریف می شود :

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

از این تابع در مدارهای الکتریکی برای نشان دادن هجوم ناگهانی جریان الکتریکی، یا ولتاژ، در لحظه زدن کلید استفاده می شود.

الف) نمودار تابع هوی ساید را رسم کنید.

ب) مقدار عبارتهای  $\lim_{t \rightarrow 0^+} H(t)$  و  $\lim_{t \rightarrow 0^-} H(t)$  را مشخص کنید.

۳- تابع علامت (یا تابع signum) به صورت زیر تعریف می شود :

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \\ \text{تعریف نشده}, & x = 0 \end{cases}$$

الف) نمودار تابع علامت را رسم کنید.

ب) مقدار عبارتهای  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn}(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn}(x)$  را مشخص کنید.

۴- نمودار تابع  $f(x) = [x] + [-x]$  را رسم نموده و حدهای زیر را مشخص کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

پ)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

آیا می توان نوشت :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -1$  ، (به ازای هر  $a \in \mathbb{R}$ )؟

۵- با رسم نمودار تابع  $f(x) = \frac{x}{[x]}$  در بازه  $[-1, 1]$ ، مقدار هریک از عبارتهای زیر را، در صورت وجود، مشخص کنید.

ب)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{[x]}$

الف)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{[x]}$

( [ ] علامت جزء صحیح است. )

۶- مقدار  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin x}{x} \right]$  را پیدا کنید.