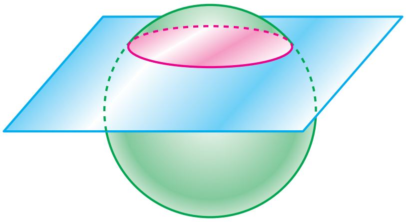
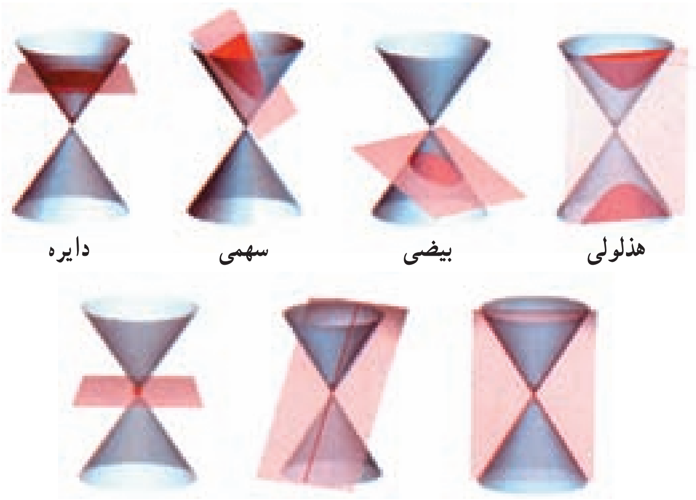
۳

مقاطع مخروطی


شکل ۱

اگر یک رویهٔ کروی مانند یک توپ را با یک صفحه قطع کنیم، در محل تقاطع صفحه و کره چه شکلی حاصل می‌شود؟ بله درست است. به هر ترتیب که این‌کار را انجام دهیم، یک دایره به‌دست می‌آید که اندازه‌های آن متفاوت است و اگر این دایره از مرکز کره بگذرد، بزرگترین دایرهٔ ممکن حاصل می‌شود (به شکل ۱ نگاه کنید). حال یک رویهٔ مخروطی را درنظر می‌گیریم. اگر این رویه را با یک صفحه قطع کنیم، فصل مشترک صفحه و رویه چه شکلی دارد؟ در اینجا دیگر همواره یک شکل نخواهیم داشت و بسته به وضعیت صفحه نسبت به مخروط چند شکل متفاوت حاصل می‌شود (به شکل‌های زیر نگاه کنید).



شکل ۲

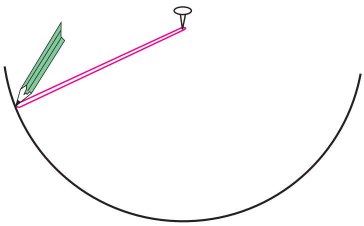
برای مشاهدهٔ این شکل‌ها یک برگ کاغذ را به‌صورت یک مخروط درآورید و با یک قیچی با ایجاد برشهای مختلف در آن (به‌صورت فصل مشترک یک صفحه با مخروط) این مقاطع را که به **مقاطع مخروطی** معروفند به دست آورید.

در این فصل می‌خواهیم با این مقاطع مخروطی آشنا شویم و ویژگی‌های آنها را مشخص کنیم.

۱.۳ دایره

تعریف. **دایره** مکان هندسی تمام نقاطی از یک صفحه است که فاصلهٔ آنها از یک نقطهٔ ثابتِ O درآن صفحه به‌نام **مرکز** مقدارِ مثبتِ ثابتی باشد.

برای رسم یک دایره کافی است یک مداد را به یک تکه نخ ببندیم. اکنون با ثابت نگاهداشتن یک سر نخ می‌توانیم دایره را رسم کنیم. طول نخ همان مقدار ثابتی است که در تعریف آمده است و **شعاع** دایره نامیده می‌شود.



شکل ۱

حال یک دستگاه مختصات قائم را درنظر می‌گیریم. نقطهٔ (x,y) روی دایره‌ای به شعاع r و به مرکز مبدأ مختصات است اگر و فقط اگر فاصلهٔ آن نقطه از مرکز دایره برابر r باشد. پس نقطهٔ (x,y) روی دایرهٔ مذکور است اگر و فقط اگر

$$\sqrt{(x-۰)^۲+(y-۰)^۲}=r,$$

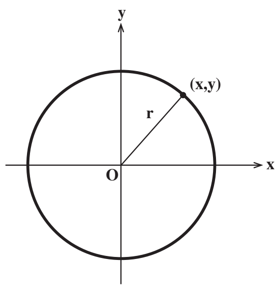
اگر و فقط اگر

$$x^۲+y^۲=r^۲.$$

در نتیجه می‌توانیم بگوییم

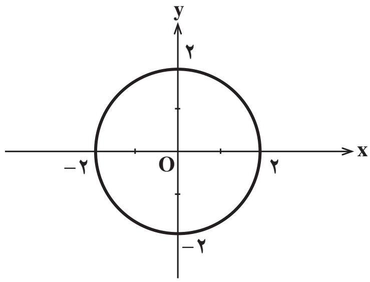
$$x^۲+y^۲=r^۲,$$

معادلهٔ دایره‌ای به شعاع r و به مرکزمبدأ مختصات است.



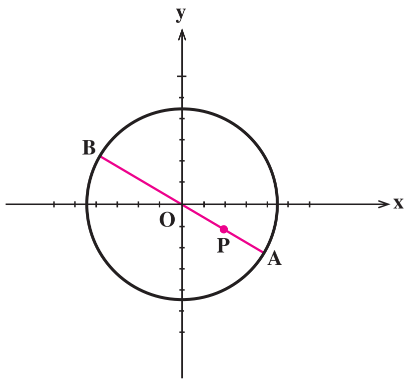
شکل ۲

مثال ۱. $x^۲ + y^۲ = ۴$ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲ می‌باشد. این دایره را در زیر رسم کرده‌ایم.



شکل ۳

مثال ۲. دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = ۲۰$ را درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم بررسی کنیم نقطهٔ $P = (۲,-۱)$ داخل دایره است یا خارج آن. توجه می‌کنیم که $(۲)^۲ + (-۱)^۲ = ۵ < ۲۰$. درنتیجه نقطهٔ P داخل دایره قرار دارد (چرا؟). اکنون کمترین و بیشترین فاصلهٔ P را از نقاط دایره پیدا می‌کنیم. واضح است نقاطی از دایره که کمترین و بیشترین فاصله را از نقطهٔ P دارند از برخورد قطر گذرا از P با دایره به‌دست می‌آیند (به شکل ۴ نگاه کنید).



شکل ۴

معادلهٔ قطر گذرا از P، $y = \frac{-۱}{۲}x$ می‌باشد. اکنون برای به‌دست آوردن مختصات نقاط A و B کافی است دستگاه معادلات صفحهٔ بعد را حل کنیم

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ = ۲۰ \\ y = \dfrac{-۱}{۲} x \end{cases}$$

درنتیجه مختصات A و B به‌صورت $A=(۴,-۲)$ و $B=(-۴,۲)$ به‌دست می‌آیند. لذا

$$|PA| = \sqrt{(۴-۲)^۲ + (-۲+۱)^۲} = \sqrt{۵} \ ,$$

$$|PB| = \sqrt{(-۴-۲)^۲ + (۲+۱)^۲} = ۳\sqrt{۵} \ ,$$

به‌ترتیب کمترین و بیشترین فاصلهٔ P از نقاط دایره است.

مثال ۳. می‌خواهیم مکان هندسی نقاطی از صفحه مانند $P=(x,y)$ را پیدا کنیم که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $A=(۲,۴)$، $\sqrt{۲}$ برابر فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $B=(۱,۲)$ باشد. برای این منظور توجه می‌کنیم که

$$|AP| = \sqrt{۲}|BP| \ ,$$

اگر و فقط اگر

$$\sqrt{(x-۲)^۲ + (y-۴)^۲} = \sqrt{۲}\sqrt{(x-۱)^۲ + (y-۲)^۲} \ ,$$

اگر و فقط اگر

$$(x-۲)^۲ + (y-۴)^۲ = ۲\left[(x-۱)^۲ + (y-۲)^۲\right] \ ,$$

اگر و فقط اگر

$$x^۲ + y^۲ = ۱۰۰ .$$

پس مکانِ مطلوب دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع $\sqrt{۱۰}$ است.

تمرین

۱. نمودار هر یک از دایره‌های زیر را رسم کنید.

الف) $x^۲ + y^۲ = ۹$ ،

ب) $x^۲ + y^۲ = ۲۵$ ،

ج) $x^2 + y^2 = 100$،

د) $x^2 + y^2 = 50$

۲. معادلهٔ دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات بنویسید که از نقطهٔ $(-1,2)$ بگذرد.

۳. معادلهٔ دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات بنویسید که بر خط $4x + 3y = 10$ مماس باشد.

۴. معادلهٔ خطی را بنویسید که در نقطهٔ $(3,4)$ بر دایرهٔ $x^2 + y^2 = 25$ مماس باشد.

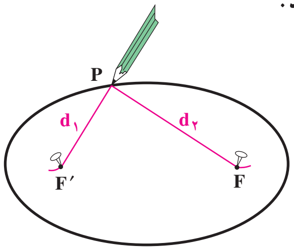
۵. از نقطهٔ $(3,0)$ دو مماس بر دایرهٔ $x^2 + y^2 = 3$ رسم می‌کنیم تا بر دایره در نقاط A و B مماس شوند. مختصات A و B را پیدا کنید.

۲.۳ بیضی

یکی دیگر از مقاطع مخروطی بیضی است که در این بخش به بررسی آن می‌پردازیم.

تعریف. **بیضی** مکان هندسی تمام نقاطی از یک صفحه است که مجموع فواصل آنها از دو نقطهٔ ثابت و متمایزِ F و F′ در آن صفحه به‌نام **کانون** مقدارِ مثبتِ ثابتی باشد.

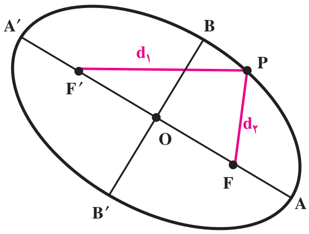
برای رسم بیضی یک تکه نخ به طول مقدار ثابت مورد نظر، درنظر گرفته و دو سر آن را در محل دو کانون ثابت می‌کنیم. حال یک مداد را داخل این نخ کرده و با گرداندن مداد داخل نخ، بیضی مورد نظر را رسم می‌کنیم.



$d_1 + d_2$ همیشه مقدار ثابت طول نخ است.

شکل ۱

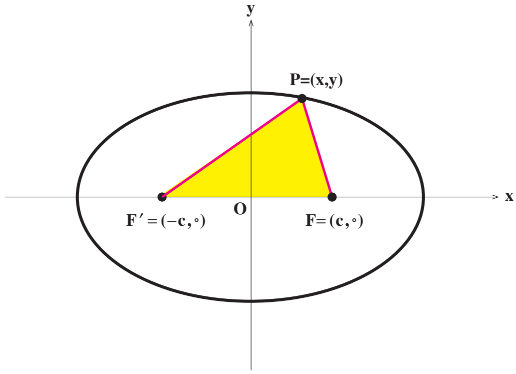
AA′ **قطر بزرگ** و BB′ **قطر کوچک** بیضی نامیده می‌شود. F و F′ کانونهای بیضی هستند و نقطهٔ O وسط FF′ را **مرکز** بیضی می‌نامیم.



$d_1 + d_2 =$ ثابت

شکل ۲

حال می‌خواهیم با استفاده از تعریف، معادلهٔ بیضی را در یک دستگاه مختصات قائم پیدا کنیم. مرکز بیضی را در مبدأ مختصات فرض می‌کنیم و کانونهای آن را دو نقطهٔ قرینهٔ $F=(c,0)$ و $F'=(-c,0)$ روی محور xها می‌گیریم (به شکل ۳ نگاه کنید).



شکل ۳

نقطهٔ دلخواه P را روی بیضی مذکور درنظر می‌گیریم. مجموع فواصل P از F و F′ مقدار ثابتی است که آن را برابر ۲a می‌گیریم که در آن a مثبت است (دلیل این انتخاب به‌خاطر ساده شدن محاسبات می‌باشد). ملاحظه می‌کنیم که

$$|PF'|+|PF|>|F'F|,$$

$$2a>2c,$$

$$a>c.$$

فرض کنیم نقطهٔ $P=(x,y)$ روی بیضی مذکور قرار داشته باشد. در این‌صورت

$$|PF'|+|PF|=2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+(x-c)^2+y^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$cx-a^2=-a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$c^2x^2+a^4-2ca^2x=a^2x^2+a^2c^2-2ca^2x+a^2y^2,$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2),$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

برعکس، گیریم نقطهٔ $P=(x,y)$ این ویژگی را داشته باشد که

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

می‌توانیم بنویسیم

$$(a^۲-c^۲)x^۲+a^۲y^۲=a^۲(a^۲-c^۲)\ ,$$

$$x^۲+y^۲+c^۲=a^۲+\frac{c^۲}{a^۲}x^۲.$$

درنتیجه

$$\begin{aligned}|PF'|+|PF|&=\sqrt{(x+c)^۲+y^۲}+\sqrt{(x-c)^۲+y^۲}\\&=\sqrt{a^۲+\frac{c^۲}{a^۲}x^۲+۲cx}+\sqrt{a^۲+\frac{c^۲}{a^۲}x^۲-۲cx}\\&=\sqrt{(a+\frac{c}{a}x)^۲}+\sqrt{(a-\frac{c}{a}x)^۲}\\&=\left|a+\frac{c}{a}x\right|+\left|a-\frac{c}{a}x\right|.\end{aligned}$$

امّا $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{a^۲-c^۲}=۱$ با توجه به $a^۲-c^۲>۰$ نتیجه می‌دهد که $۱\le\frac{x^۲}{a^۲}\le۰$ و $۱\le\frac{y^۲}{a^۲-c^۲}\le۰$.

پس $-۱\le\frac{x}{a}\le۱$، یا $-c\le\frac{c}{a}x\le c$. لذا $۰<a-c\le a+\frac{c}{a}x\le a+c$ و $۰<a-c\le a-\frac{c}{a}x\le a+c$. درنتیجه $\left|a+\frac{c}{a}x\right|=a+\frac{c}{a}x$ و $\left|a-\frac{c}{a}x\right|=a-\frac{c}{a}x$.

لذا می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}|PF'|+|PF|&=\left|a+\frac{c}{a}x\right|+\left|a-\frac{c}{a}x\right|\\&=a+\frac{c}{a}x+a-\frac{c}{a}x\\&=۲a.\end{aligned}$$

درنتیجه P روی بیضی قرار دارد.

پس نقطهٔ $P=(x,y)$ روی بیضی مذکور قرار دارد اگر و فقط اگر

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{a^۲-c^۲}=۱.$$

توجه می‌کنیم که $a^{۲} - c^{۲} > ۰$. قرار می‌دهیم $b = \sqrt{a^{۲} - c^{۲}}$ و درنتیجه نقطهٔ $P = (x, y)$ روی بیضی مذکور قرار دارد اگر و فقط اگر

$$\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} = ۱ ,$$

که در آن $b^{۲} = a^{۲} - c^{۲}$.

از آنچه در بالا به آن اشاره کردیم می‌توانیم نتیجه بگیریم معادلهٔ بیضی به مرکز مبدأ مختصات که کانونهای آن $F = (c, ۰)$ و $F' = (-c, ۰)$ می‌باشند و مقدار ثابت آن برابر $۲a$ است عبارت از

$$\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} = ۱$$

می‌باشد که در آن $b^{۲} = a^{۲} - c^{۲}$.

نقاط تقاطع این بیضی با محور xها، نقاط $(a, ۰)$ و $(-a, ۰)$ و نقاط تقاطع آن با محور yها، نقاط $(۰, b)$ و $(۰, -b)$ است (چرا؟). بنابراین طول قطر بزرگ برابر $۲a$ و طول قطر کوچک برابر $۲b$ است.

حال می‌خواهیم نشان دهیم که طول قطر بزرگ واقعاً از طول قطر کوچک بزرگتر است :

$$b^{۲} = a^{۲} - c^{۲} \quad , \quad (a, b, c > ۰),$$

$$b^{۲} - a^{۲} < ۰,$$

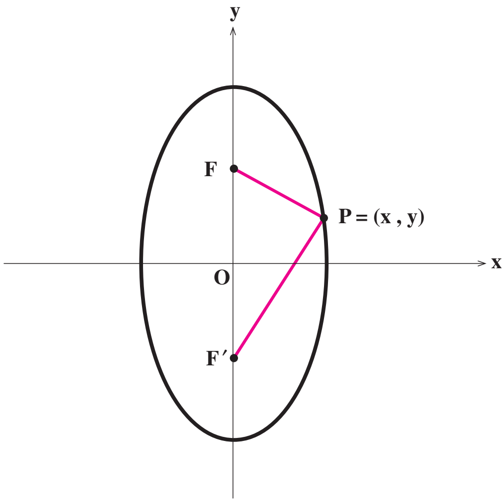
$$(b - a)(b + a) < ۰ ,$$

$$b - a < ۰, \qquad \text{چون } (b+a) \text{ مثبت است}$$

$$۲b < ۲a .$$

لذا طول قطر بزرگ، بزرگتر است از طول قطر کوچک.

ممکن است از ابتدا نقاط کانون را روی محور yها درنظر بگیریم. یعنی $F = (۰, c)$ و $F' = (۰, -c)$ را کانونهای بیضی بگیریم (به شکل ۴ نگاه کنید).



شکل ۴

در این صورت معادلهٔ بیضی عبارت است از :

$$\frac{x^۲}{b^۲}+\frac{y^۲}{a^۲}=۱,$$

که $a > b$ و رابطهٔ بین a، b و c همان رابطهٔ $b^۲ = a^۲ - c^۲$ است. مرکز هم‌چنان در مبدأ مختصات است ولی قطر بزرگ در امتداد محور yها و قطر کوچک در امتداد محور xها قرار می‌گیرد.

اکنون در زیر خلاصه‌ای از آنچه تاکنون به دست آورده‌ایم را می‌نویسیم.

معادلهٔ استاندارد بیضی

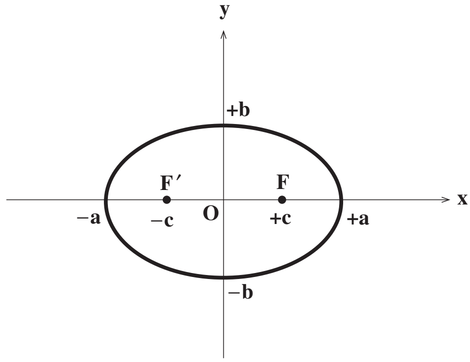
۱) $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ ، $a > b > ۰$.

نقاط تقاطع با محور xها : $(a,۰)$ و $(-a,۰)$.

نقاط تقاطع با محور yها : $(۰,b)$ و $(۰,-b)$.

کانونها : $F=(c,۰)$ و $F'=(-c,۰)$ که $c^۲=a^۲-b^۲$.

طول قطر بزرگ ۲a، و طول قطر کوچک ۲b.



شکل ۵

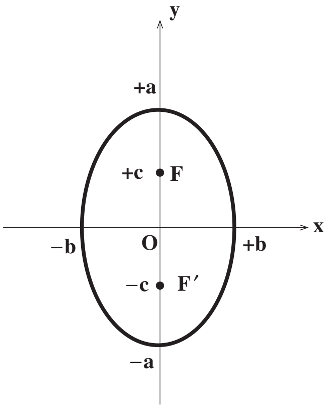
۲) $\frac{x^۲}{b^۲}+\frac{y^۲}{a^۲}=۱$ ، $a>b>۰$.

نقاط تقاطع با محور xها : $(b,۰)$ و $(-b,۰)$.

نقاط تقاطع با محور yها : $(۰,a)$ و $(۰,-a)$.

کانونها : $F=(۰,c)$ و $F'=(۰,-c)$ که $c^۲=a^۲-b^۲$.

طول قطر بزرگ ۲a، و طول قطر کوچک ۲b.

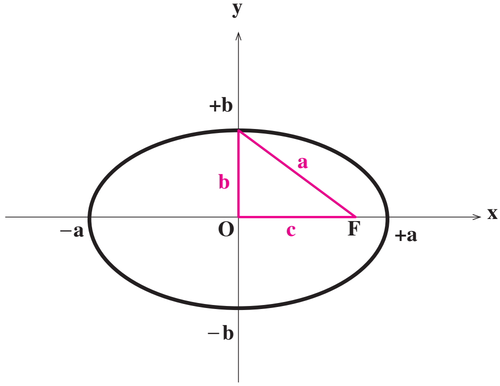


شکل ۶

در هر دو حالت بالا، محور xها و محور yها محورهای تقارن بیضی و مبدأ مختصات نیز مرکز تقارن بیضی است.

تذکر. در بیضی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ $\left(\frac{x^۲}{b^۲}+\frac{y^۲}{a^۲}=۱\right)$ ، $a>b>۰$ ، فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع بیضی با

محور yها (با محور xها) از کانونها برابر a است (چرا؟).



شکل ۷

مثال ۱. می‌خواهیم بیضی‌های زیر را رسم کنیم :

الف) $۹x^۲ + ۱۶y^۲ = ۱۴۴$،   ب) $۲x^۲ + y^۲ = ۱۰$.

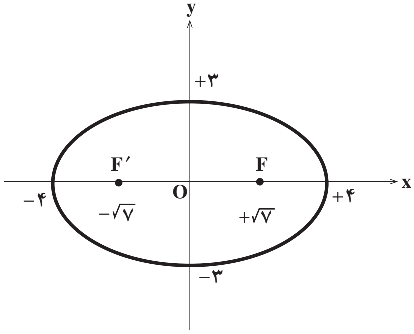
برای رسم الف توجه می‌کنیم که

$$۹x^۲ + ۱۶y^۲ = ۱۴۴,$$

$$\frac{۹x^۲}{۱۴۴} + \frac{۱۶y^۲}{۱۴۴} = ۱,$$

$$\frac{x^۲}{۱۶} + \frac{y^۲}{۹} = ۱.$$

$a^۲ = ۱۶$ و $b^۲ = ۹$. پس نقاط تقاطع با محور xها عبارت است از $(۴,۰)$ و $(−۴,۰)$. همچنین نقاط تقاطع با محور yها $(۰,۳)$ و $(۰,−۳)$ می‌باشد. چون $c^۲ = ۱۶ − ۹$ لذا $c^۲ = ۷$ ، $c = \sqrt{۷}$. پس کانونها عبارتند از $F = (\sqrt{۷},۰)$ و $F' = (−\sqrt{۷},۰)$. طول قطر بزرگ برابر است با $۲ \times ۴ = ۸$ و طول قطر کوچک $۲ \times ۳ = ۶$.



شکل ۸

برای رسم ب نیز به‌صورت زیر عمل می‌کنیم

$$2x^2+y^2=10,$$

$$\frac{2x^2}{10}+\frac{y^2}{10}=1,$$

$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{10}=1.$$

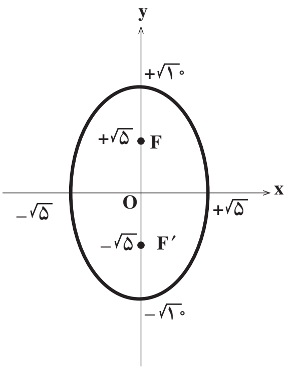
نقاط تقاطع با محور xها عبارتند از $(\sqrt{5},0)$ و $(-\sqrt{5},0)$. نقاط تقاطع با محور yها نیز $(0,\sqrt{10})$ و $(0,-\sqrt{10})$ می‌باشند. چون

$$c^2=a^2-b^2,$$

$$c^2=10-5,$$

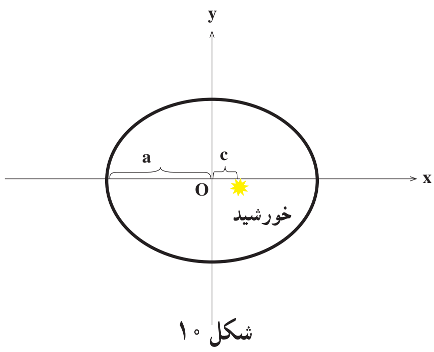
$$c=\sqrt{5},$$

پس $F=(0,\sqrt{5})$ و $F'=(0,-\sqrt{5})$ کانونها هستند. طول قطر بزرگ برابر $2\sqrt{10}$ و طول قطر کوچک برابر $2\sqrt{5}$ است.



شکل ۹

مثال ۲. مدار گردش زمین به دور خورشید، یک بیضی است که خورشید در یکی از کانونهای آن قرار دارد. اگر بیشترین فاصلهٔ زمین از خورشید ۱۵۲/۱ میلیون کیلومتر و نزدیکترین فاصلهٔ آن ۱۴۷/۱ میلیون کیلومتر باشد، طول قطرهای بزرگ و کوچک آن را پیدا می‌کنیم. برای این منظور همانطور که از روی شکل ۱۰ دیده می‌شود داریم



شکل ۱۰

$$\begin{cases} a+c=۱۵۲/۱ \\ a-c=۱۴۷/۱ \end{cases}$$

پس

$$\begin{cases} a=۱۴۹/۶ \\ c=۲/۵ \end{cases}$$

در نتیجه

$$b=\sqrt{(۱۴۹/۶)^۲-(۲/۵)^۲}\cong ۱۴۹/۵۷$$

پس طول قطر بزرگ تقریباً برابر $۲\times ۱۴۹/۶=۲۹۹/۲$ و طول قطر کوچک تقریباً برابر $۲\times ۱۴۹/۵۷=۲۹۹/۱۴$ میلیون کیلومتر است. همانطور که ملاحظه می‌کنیم قطرهای بزرگ و کوچک با هم اختلاف زیادی ندارند که از آن می‌توان نتیجه گرفت که مدار زمین به دایره خیلی نزدیک است.

یوهان کپلر (۱۶۳۰ــ۱۵۷۱) منجم آلمانی کشف کرد که مدار گردش زمین به دور خورشید بیضی است.

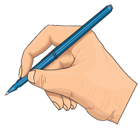
شکل ۱۱

تذکر. همانطورکه در مثال فوق دیدیم، بعضی از بیضی‌ها ممکن است به دایره نزدیک باشند ولی بعضی از بیضی‌ها نیز ممکن است کاملاً کشیده باشند. در بیضی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ $\left(\frac{x^۲}{b^۲}+\frac{y^۲}{a^۲}=۱\right)$ که $a>b>۰$ و $c^۲=a^۲-b^۲$ ، نسبت $\frac{c}{a}$ که با e نشان داده می‌شود را **خروج از مرکز** بیضی می‌نامیم.

درواقع خروج از مرکز شاخص کشیدگی بیضی است. هر چقدر خروج از مرکز کوچکتر باشد و به‌صفر نزدیکتر شود، بیضی به دایره نزدیکتر است و هر چقدر خروج از مرکز بزرگتر باشد، بیضی کشیده‌تر است. در مثال ۲ خروج از مرکز برابر است با

$$e=\frac{۲/۵}{۱۴۹/۶}\cong ۰/۰۱۷,$$

که کوچک بودن آن بیانگر این است که مدار گردش زمین به دور خورشید به دایره نزدیک است.



تمرین

۱. نمودار هر یک از بیضی‌های زیر را رسم کرده، خروج از مرکز آنها را نیز مشخص کنید.

الف) $\frac{x^۲}{۲۵}+\frac{y^۲}{۴}=۱$ ، ب) $\frac{x^۲}{۹}+\frac{y^۲}{۴}=۱$ ، ج) $\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۲۵}=۱$.

۲. نمودار هر یک از بیضی‌های زیر را رسم کرده و خروج از مرکز آنها را مشخص کنید.

الف) $x^۲+۹y^۲=۹$ ، ب) $۴x^۲+y^۲=۴$ ، ج) $۱۶x^۲+۲۵y^۲=۴۰۰$.

۳. نمودار هر یک از بیضی‌های زیر را رسم کرده و خروج از مرکز آنها را مشخص کنید.

الف) $۳x^۲+۲y^۲=۲۴$ ، ب) $۴x^۲+۷y^۲=۲۸$ ، ج) $۲x^۲+۳y^۲=۲۴$.

۴. مکان هندسی تمام نقاطی را در صفحه پیدا کنید که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $(۲,۰)$ برابر نصف فاصلهٔ آنها از خط $x=۸$ باشد.

۵. مکان هندسی تمام نقاطی را در صفحه پیدا کنید که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $(۰,۹)$ برابر $\frac{۳}{۴}$ فاصلهٔ آنها از خط $y=۱۶$ باشد.

۳.۳ سهمی

فصل مشترک یک صفحه با مخروط ممکن است یک سهمی باشد. در این بخش تعریف دقیق سهمی را ذکر کرده و ویژگی‌های آن را بررسی می‌کنیم.

تعریف. **سهمی** مکان هندسی تمام نقاطی از یک صفحه است که از یک