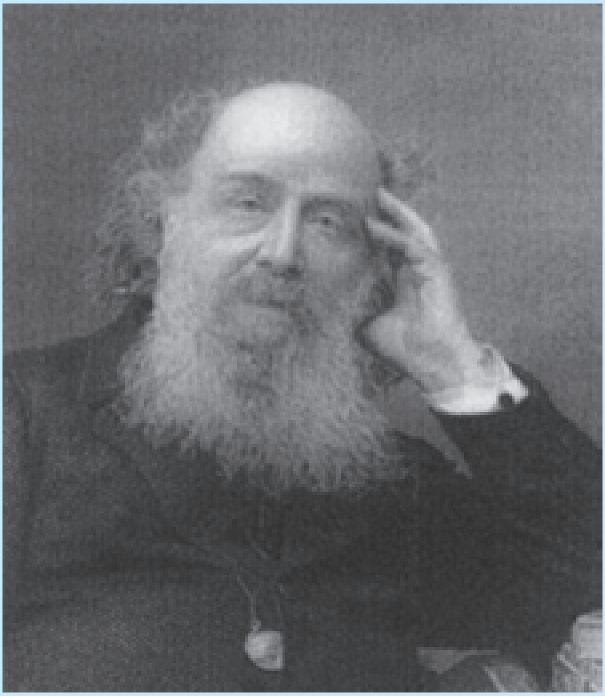
داستان ماتریس

می‌گویند مفهوم **ماتریس** قبل از این‌که ابداع شود تعمیق و گسترش یافته بود، چه مقدم بر آن مفهوم **دترمینان** در مطالعهٔ دستگاه‌های معادلات خطی در اوایل قرن هیجدهم میلادی مطرح شده بود. ولی واژهٔ ماتریس اوّلین بار در سال ۱۸۵۰ میلادی به‌وسیلهٔ **جیمز جوزف سیلوستر**، ریاضیدان انگلیسی، در واقع برای تمیزدادن ماتریس‌ها از دترمینان‌ها به‌کار گرفته شد.



سیلوستر

۴

ماتریس و دترمینان

۱.۴ ماتریس‌ها

ماتریس را به عنوان آرایه‌ای مستطیلی از اعداد حقیقی تعریف می‌کنیم :

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲n} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} & \cdots & a_{۳n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & a_{m۳} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

اعداد داخل آرایه را **درآیه‌های ماتریس** می‌نامیم. زیرنویس‌های i و j درآیهٔ a_{ij} ، برای مشخص‌کردن سطر و ستونی که a_{ij} در آنها قرار دارد، به‌کار می‌روند. برای مثال

$$\begin{bmatrix} -۳ & ۰ & ۱۳ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

یک ماتریس است. درآیهٔ $a_{۲۳}$ در سطر دوم و ستون سوم قرار دارد و در این مثال، این درآیه **۲** می‌باشد. در این مثال درآیهٔ $a_{۳۳}$ برابر صفر است.

ماتریسی را که دارای m سطر و n ستون باشد، ماتریس $m \times n$ (بخوانید ماتریس m در n)[۱] می‌نامیم. وقتی که $m = n$ ، ماتریس را **ماتریس مربعی** از مرتبهٔ n می‌نامیم. برای مثال $\begin{bmatrix} -۳ & ۲ \\ ۰ & ۱ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix}$

۱ــ هر ماتریس ۱×۱ مانند $[a_{۱۱}]$ را با عدد حقیقی $a_{۱۱}$ یکی می‌گیریم.

یک ماتریس ۲×۳ است، حال آنکه $\begin{bmatrix} ۳ & ۷ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ یک ماتریس ۳×۲ می‌باشد و $\begin{bmatrix} -۲ & ۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۲. در جدول‌بندی داده‌ها، وقتی که تعداد آنها زیاد است، موضوع استفاده از ماتریس‌ها به‌طور طبیعی پیش می‌آید. برای مثال فاصلهٔ بین شهرهای اصفهان، تهران و شیراز را می‌توان به‌صورت یک ماتریس جدول‌بندی کرد :

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{ccc} \text{اصفهان} & \text{تهران} & \text{شیراز} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{اصفهان} \\ \text{تهران} \\ \text{شیراز} \end{array} & \begin{bmatrix} ۰ & ۴۱۴ & ۴۸۱ \\ ۴۱۴ & ۰ & ۸۹۵ \\ ۴۸۱ & ۸۹۵ & ۰ \end{bmatrix}. \end{array}$$

اغلب نماد

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲n} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} & \cdots & a_{۳n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & a_{m۳} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

را به‌صورت $[a_{ij}]_{m\times n}$ خلاصه می‌کنیم. زیرنویس $m\times n$ اندازهٔ ماتریس را نشان می‌دهد و کل نماد به‌معنی یک ماتریس $m\times n$ است که درآیهٔ سطر iام و ستون jام آن a_{ij} است. برای مثال، با این نماد، $[ij]_{۲\times۳}$ یعنی ماتریس ۲×۳ ای که درآیهٔ سطر iام و ستون jام آن برابر ij می‌باشد :

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۴ & ۶ \end{bmatrix}.$$

همچنین $[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با تعریف $a_{ij} = \begin{cases} j-i & \text{اگر } i<j: \\ j+i & \text{اگر } i\geq j: \end{cases}$ یعنی ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۳ که به‌صورت زیر است :

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ & ۱ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}.$$

تذکر. از این پس، وقتی در این کتاب می‌نویسیم A یک ماتریس $m\times n$ است (یا ماتریس

$(A=[a_{ij}]_{m\times n})$، m و n را حداکثر ۳ فرض می‌کنیم.

فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n باشد. درآیه‌های a_{11}، a_{22}، ...، a_{nn} را درآیه‌های **قطر اصلی** ماتریس A می‌نامیم. اگر درآیه‌های خارج از قطر اصلی ماتریس A برابر صفر باشند، A را **ماتریس قطری** از مرتبهٔ n می‌نامیم. مثلاً $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری مرتبهٔ ۳ است. اگر درآیه‌های بالای قطر اصلی ماتریس A برابر صفر باشند، A را **ماتریس پایین مثلثی** از مرتبهٔ n می‌نامیم. مثلاً $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۲ & ۰ \\ ۵ & ۶ & ۳ \end{bmatrix}$ یک ماتریس پایین‌مثلثی از مرتبهٔ ۳ است. اگر درآیه‌های پایینی قطر اصلی ماتریس A برابر صفر باشند، A را **ماتریس بالامثلثی** از مرتبهٔ n می‌نامیم. مثلاً $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۴ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۶ \end{bmatrix}$ یک ماتریس بالامثلثی از مرتبهٔ ۳ است.

تعریف. دو ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times q}$ **مساوی‌اند** اگر دارای مرتبهٔ یکسان باشند، یعنی $m=p$ و $n=q$، و به‌ازای هر i و هر j، $a_{ij}=b_{ij}$. اگر A و B مساوی باشند، می‌نویسیم $A=B$.

جمع ماتریس‌ها و ضرب اعداد حقیقی در آنها

در بالا ماتریس‌ها را معرفی کردیم و این‌که چه موقع دو ماتریس مساوی‌اند را تعریف کردیم. اکنون می‌خواهیم ببینیم جمع دو ماتریس چه مواقعی امکان دارد و در این صورت حاصلجمع دو ماتریس چه خواهد بود. همچنین ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس را تعریف خواهیم کرد.

تعریف. فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ دو ماتریس هم‌مرتبه باشند. در این صورت **مجموع** آنها، یعنی $A+B$، یک ماتریس $m\times n$ است: $A+B=[c_{ij}]_{m\times n}$، و به‌صورت

زیر تعریف می‌شود

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\,.$$

همچنین برای عدد حقیقی دادهشدهٔ r، **حاصلضرب r در ماتریس A**، یعنی rA، نیز یک ماتریس $m \times n$ است : $rA = \left[d_{ij}\right]_{m\times n}$، که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$d_{ij} = ra_{ij}\,.$$

برای مثال دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۵ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix}$ را نمی‌توانیم جمع کنیم، زیرا هم مرتبه نمی‌باشند ولیکن مجموع دو ماتریس $C = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۵ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۵ \\ -۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ماتریس زیر است :

$$C + D = \begin{bmatrix} ۰ & ۳ & ۱۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}.$$

همچنین ضرب عدد حقیقی ۲ در ماتریس A نیز ماتریس زیر است :

$$۲A = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۶ \\ ۸ & ۱۰ & ۱۲ \end{bmatrix}.$$

این اعمال را با یک مثال ساده تشریح می‌کنیم.

مثال ۱. دو دبیرستان a و b را در نظر می‌گیریم. تعداد دانش‌آموزانی که در دبیرستان a مجاز به گرفتن درس «هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی» و «ریاضیات گسسته» می‌باشند ۱۰۰ نفر و در دبیرستان b برابر ۵۰ نفر می‌باشند. تعداد دانش‌آموزان این دو دبیرستان که در دروس «هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی» و «ریاضیات گسسته» قبول یا مردود شده‌اند در ماتریس‌های زیر جدول‌بندی شده‌اند (ماتریس A مربوط به دبیرستان a و ماتریس B مربوط به دبیرستان b است) :

$$A = \begin{array}{r} \\ \text{هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی} \\ \text{ریاضیات گسسته} \end{array} \begin{array}{c} \text{قبول} \quad \text{مردود} \\ \begin{bmatrix} ۹۰ & ۱۰ \\ ۸۹ & ۱۱ \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{r} \\ \text{هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی} \\ \text{ریاضیات گسسته} \end{array} \begin{array}{c} \text{قبول} \quad \text{مردود} \\ \begin{bmatrix} ۴۲ & ۸ \\ ۴۰ & ۱۰ \end{bmatrix} \end{array}.$$

لذا برای مثال، ۹۰ دانش‌آموز از دبیرستان a در درس «هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی» قبول شده‌اند، حال آنکه در دبیرستان b فقط ۴۲ نفر در این درس قبول شده‌اند.

مجموع دو ماتریس A و B، یعنی $A+B=\begin{bmatrix} ۱۸ & ۱۳۲ \\ ۲۱ & ۱۲۹ \end{bmatrix}$ ، تعداد کل دانش‌آموزان این دو دبیرستان را که در این دو درس قبول یا مردود شده‌اند نشان می‌دهد. بنابراین ۱۳۲ دانش‌آموز از این دو دبیرستان در درس «هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی» قبول و ۱۸ نفر در این درس مردود شده‌اند. همچنین ۱۲۹ دانش‌آموز از این دو دبیرستان در درس «ریاضیات گسسته» قبول و ۲۱ نفر آنها در این درس مردود شده‌اند. ماتریس $\begin{bmatrix} ۱۲ & ۸۸ \\ ۱۴ & ۸۶ \end{bmatrix}=\frac{۲}{۳}(A+B)=\frac{۱۰۰}{۱۵۰}(A+B)$ نیز درصد قبولی یا مردودی در این دو دبیرستان را نشان می‌دهد. مثلاً ۸۸٪ دانش‌آموزان این دو دبیرستان در درس «هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی» قبول شده‌اند (و ۱۲٪ مردود) و ۸۶٪ دانش‌آموزان این دو دبیرستان در درس «ریاضیات گسسته» قبول شده‌اند (و ۱۴٪ مردود).

تعریف. فرض کنیم A یک ماتریس $m\times n$ باشد. **قرینهٔ** A را ماتریسی $m\times n$ تعریف می‌کنیم که از حاصلضرب عدد ۱− در ماتریس A به وجود می‌آید. این ماتریس را با $-A$ نمایش می‌دهیم، یعنی $-A=(-۱)A$.

توجه می‌کنیم که درآیه‌های قرینهٔ ماتریس A، قرینهٔ درآیه‌های ماتریس A هستند و لذا بنابر تعریف جمع دو ماتریس، مجموع A و $-A$ ماتریس $m\times n$ است که تمام درآیه‌هایش برابر صفر است. چنین ماتریسی را **ماتریس صفر** می‌نامیم و آن را با O (اگر لازم به تأکید باشد با $O_{m\times n}$) نمایش می‌دهیم.

تعریف. اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، **تفاضل** B از A را با $A-B$ نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A-B=A+(-B)\,.$$

جمع ماتریس‌ها و ضرب آنها در اعداد حقیقی از همان قوانین معمولی حساب تبعیت می‌کنند. در قضیهٔ صفحهٔ بعد این ویژگی‌های ابتدایی را به‌طور رسمی بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۱. فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ، $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ و $C=[c_{ij}]_{m\times n}$ سه ماتریس هم‌مرتبه باشند و r و s دو عدد حقیقی. در این صورت

۱) $A+B=B+A$ (خاصیت جابه‌جایی جمع)،

۲) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (خاصیت شرکت‌پذیری جمع)،

۳) $A+O=O+A=A$ ،

۴) $A+(-A)=(-A)+A=O$ ،

۵) $r(A+B)=rA+rB$ ،

۶) $(r+s)A=rA+sA$ ،

۷) $(rs)A=r(sA)$ ،

۸) $۱A=A$.

اثبات. اثبات ویژگی‌های بالا همه سر راست است و به کمک تعریف به‌سادگی انجام می‌شود. آنها را به‌عنوان تمرین رها می‌کنیم. ■

ضرب ماتریس‌ها

نحوه ضرب‌کردن ماتریس‌ها، که اکنون شرح خواهیم داد، در نگاه اوّل چندان آشنا نیست و بررسی منشأ این تعریف از برنامهٔ درسی این کتاب خارج است.

تعریف. فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ دو ماتریس باشند (توجه می‌کنیم که تعداد ستون‌های A برابر تعداد سطرهای B است). در این صورت **حاصلضرب** A در B (با همین ترتیب)، یعنی AB، یک ماتریس $m\times p$ است : $AB=[c_{ij}]_{m\times p}$ ، و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$c_{ij}=\sum_{k=۱}^{n} a_{ik}b_{kj}\,.$$

توجه می‌کنیم که بنابر تعریف بالا برای این که درآیهٔ سطر iام و ستون jام ماتریس AB، یعنی c_{ij} ، را پیدا کنیم باید حاصلضرب داخلی سطر iام از ماتریس A را (به‌عنوان یک بردار) در ستون jام

از ماتریس B (به‌عنوان برداری دیگر) محاسبه کنیم. برای مثال حاصلضرب

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix},$$

بدون معنی است ولیکن

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۷ & ۸ \\ ۹ & ۱۰ \\ ۱۱ & ۱۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵۸ & ۶۴ \\ ۱۳۹ & ۱۵۴ \end{bmatrix},$$

زیرا

$$(۱,۲,۳).(۷,۹,۱۱)=(۱\times ۷)+(۲\times ۹)+(۳\times ۱۱)=۵۸\,,$$

$$(۱,۲,۳).(۸,۱۰,۱۲)=(۱\times ۸)+(۲\times ۱۰)+(۳\times ۱۲)=۶۴\,,$$

$$(۴,۵,۶).(۷,۹,۱۱)=(۴\times ۷)+(۵\times ۹)+(۶\times ۱۱)=۱۳۹\,,$$

$$(۴,۵,۶).(۸,۱۰,۱۲)=(۴\times ۸)+(۵\times ۱۰)+(۶\times ۱۲)=۱۵۴\,.$$

تذکر. اگر A یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n باشد، آنگاه منظور از $A^۲$ یعنی AA، $A^۳$ یعنی $A^۲A$ و الی آخر.

مثال زیر نشان می‌دهد که چگونه ضرب ماتریس‌ها ممکن است در یک مبحث زیست‌شناسی پیش آید.

مثال ۲. در بخشی از یک جنگل، شیر و گرگ‌هایی زندگی می‌کنند که از خرگوش و آهوهای آن جنگل تغذیه می‌کنند. همچنین این خرگوش و آهوها از کلم، کاهو و علف موجود در آن جنگل تغذیه می‌کنند. ماتریس زیر مقدار کلم، کاهو و علفی را که هر یک از خرگوش و آهوها به‌طور متوسط در روز می‌خورند بر حسب گرم مشخص می‌کند

$$A=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{کلم} & \text{کاهو} & \text{علف} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{خرگوش} \\ \text{آهو} \end{array} & \begin{bmatrix} ۲۰۰ & ۳۵۰ & ۱۵۰ \\ ۳۰۰ & ۱۵۰ & ۲۰۰ \end{bmatrix} \end{array}.$$

پس یک آهو مقدار ۱۵۰ گرم کاهو را در یک روز مصرف می‌کند. ماتریس دیگری تعداد

خرگوش و آهوهایی را که شیر یا گرگ‌ها به‌طور متوسط در یک روز می‌خورند، مشخص می‌نماید

$$B = \begin{array}{c} \\ \text{شیر} \\ \text{گرگ} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{خرگوش} & \text{آهو} \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} \end{array}.$$

لذا یک گرگ به طور متوسط، چهار خرگوش و دو آهو را در یک روز می‌خورد. می‌خواهیم تعیین کنیم هر شیر و گرگ چند گرم کلم، کاهو و علف را به‌طور غیرمستقیم در یک روز مصرف می‌کند. برای مثال بررسی می‌کنیم که یک شیر، چند گرم کلم را به‌طور غیرمستقیم مصرف می‌کند. اولاً، یک شیر، سه خرگوش را می‌خورد و هر خرگوش، ۲۰۰ گرم کلم را می‌خورد. لذا، با خوردن خرگوش‌ها، یک شیر به‌طور غیرمستقیم ۲۰۰×۳ گرم کلم را مصرف می‌کند. همچنین یک شیر، یک آهو را می‌خورد و آهو ۳۰۰ گرم کلم را مصرف کرده است. در این صورت، یک شیر به‌طورغیرمستقیم ۳۰۰×۱ گرم کلم را مصرف می‌کند. پس روی هم رفته، یک شیر، $۳\times۲۰۰+۱\times۳۰۰$ گرم کلم را به‌طورغیرمستقیم مصرف می‌کند. ملاحظه می‌کنیم که این عدد همان درآیهٔ سطر اوّل و ستون اوّل از ماتریس BA است. همین‌طور، درآیه سطر اوّل و ستون دوم آن مقداری از کاهو برحسب گرم است که یک شیر به طور غیرمستقیم می‌خورد، و به همین ترتیب حاصلضرب BA را حساب می‌کنیم

$$BA = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲۰۰ & ۳۵۰ & ۱۵۰ \\ ۳۰۰ & ۱۵۰ & ۲۰۰ \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} ۹۰۰ & ۱۲۰۰ & ۶۵۰ \\ ۱۴۰۰ & ۱۷۰۰ & ۱۰۰۰ \end{bmatrix}.$$

از اینجا اطلاعات مطلوب را می‌توانیم بخوانیم. برای مثال، هر گرگ به‌طور غیرمستقیم ۱۰۰۰ گرم از علف را مصرف می‌کند.

تذکر. فرض کنیم A و B دو ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۲ باشند که به‌صورت زیر تعریف شده‌اند

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

در این صورت

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}.$$

پس $AB \neq BA$ و این نشان می‌دهد که حاصلضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی ندارد (به این دلیل در تعریف حاصلضرب دو ماتریس A و B نوشتیم حاصلضرب A در B (با همین ترتیب) ولیکن برای مجموع A و B چنین چیزی ننوشتیم). حتی

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

نشان می‌دهد که حاصلضرب دو ماتریس غیرصفر، ممکن است صفر شود!

در زیر چند ویژگی ابتدایی مربوط به حاصلضرب ماتریس‌ها را بیان می‌کنیم. ویژگی اوّل برقراری خاصیت شرکت‌پذیری برای ضرب ماتریس‌ها است.

قضیهٔ ۲. فرض کنیم $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ ، $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times p}$ و $C=\left[c_{ij}\right]_{p\times q}$ سه ماتریس باشند. در این صورت $A(BC)=(AB)C$.

اثبات. ماتریس BC یک ماتریس $n\times q$ است و لذا $A(BC)$ ماتریس $m\times q$ خواهد بود. از طرفی AB ماتریس $m\times p$ است و درنتیجه $(AB)C$ نیز یک ماتریس $m\times q$ خواهد بود. پس $A(BC)$ و $(AB)C$ هم‌مرتبه هستند. اکنون قرار می‌دهیم $BC=\left[d_{ij}\right]_{n\times q}$ ، $A(BC)=\left[e_{ij}\right]_{m\times q}$ ، $AB=\left[f_{ij}\right]_{m\times p}$ و $(AB)C=\left[g_{ij}\right]_{m\times q}$ و ثابت می‌کنیم برای هر i و هر j، $e_{ij}=g_{ij}$:

$$\begin{aligned}
e_{ij} &= \sum_{k=۱}^{n} a_{ik}d_{kj} \\
&= \sum_{k=۱}^{n} a_{ik}\Big(\sum_{t=۱}^{p} b_{kt}c_{tj}\Big) \\
&= \sum_{k=۱}^{n}\sum_{t=۱}^{p} a_{ik}(b_{kt}c_{tj}) \\
&= \sum_{t=۱}^{p}\sum_{k=۱}^{n} a_{ik}(b_{kt}c_{tj}) \\
&= \sum_{t=۱}^{p}\sum_{k=۱}^{n} (a_{ik}b_{kt})c_{tj} \\
&= \sum_{t=۱}^{p}\Big(\sum_{k=۱}^{n} a_{ik}b_{kt}\Big)c_{tj}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{t=1}^{p} f_{it}c_{tj}$$

$$= g_{ij}\ .$$

درنتیجه $A(BC) = (AB)C$. ■

ویژگی دیگر حاکی از توزیع‌پذیری ضرب ماتریس‌ها نسبت به جمع آنها است.

قضیهٔ ۳. فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ، $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ و $C = [c_{ij}]_{n\times p}$ سه ماتریس باشند. در این صورت $A(B+C) = AB + AC$.

اثبات. ماتریس $B+C$ یک ماتریس $n\times p$ است و لذا $A(B+C)$ ماتریس $m\times p$ خواهد بود. از طرفی AB و AC هر دو ماتریس‌های $m\times p$ هستند و لذا $AB+AC$ نیز یک ماتریس $m\times p$ خواهد بود. پس $A(B+C)$ و $AB+AC$ هر دو ماتریس‌های $m\times p$ هستند. اکنون قرار می‌دهیم $B+C = [d_{ij}]_{n\times p}$ ، $A(B+C) = [e_{ij}]_{m\times p}$ ، $AB = [f_{ij}]_{m\times p}$ ، $AC = [g_{ij}]_{m\times p}$ و $AB+AC = [h_{ij}]_{m\times p}$ و ثابت می‌کنیم برای هر i و هر j، $e_{ij} = h_{ij}$:

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}d_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}$$

$$= f_{ij} + g_{ij}$$

$$= h_{ij}\ .$$

درنتیجه $A(B+C) = AB + AC$. ■

تذکر. برای ماتریس‌های A، B و C داریم $(A+B)C = AC + BC$ ، مشروط بر آنکه کلیّهٔ اعمال جمع و ضرب این دستورها امکان‌پذیر باشند. این مطلب را به‌صورت قضیه‌ای دقیق، مانند

قضیهٔ قبل، بیان کرده و آن‌را به‌عنوان تمرین ثابت کنید.

ویژگی (۳) از قضیهٔ ۱ حاکی از آن است که ماتریس صفر این خاصیت را دارد که با هر ماتریسی جمع شود، خود آن ماتریس را به ما می‌دهد، همانگونه که در میان اعداد وقتی عدد صفر با هر عددی جمع شود، حاصل همان عدد است. اکنون با توجه به این‌که عدد یک وقتی در عددی ضرب شود، خود آن عدد را به ما می‌دهد، سؤال طبیعی پیش می‌آید و آن این که «آیا در میان ماتریس‌ها، ماتریسی وجود دارد که در هر ماتریسی ضرب شود، خود آن ماتریس را بدهد یا خیر؟». جواب به این سؤال مثبت است. در زیر این ماتریس را تعریف می‌کنیم و سپس «خاصیت ویژهٔ» آن را ثابت می‌کنیم.

تعریف. **ماتریس همانی** از مرتبهٔ n که آن‌را با I (اگر لازم به تأکید باشد با I_n) نشان می‌دهیم را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$I=[\delta_{ij}]_{n\times n}$ که در آن $\delta_{ij}=\begin{cases}۱ & \text{اگر } i=j:\\ ۰ & \text{اگر } i\neq j:\end{cases}$.

توجه می‌کنیم که در واقع ماتریس همانی مرتبهٔ n، یعنی I_n ، ماتریسی قطری است که تمام درآیه‌های روی قطر اصلی آن برابر یک می‌باشد، مثلاً $I_۳=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$.

قضیهٔ ۴. فرض کنیم A یک ماتریس مربعی مرتبهٔ n باشد. در این صورت $AI_n=I_nA=A$.

اثبات. واضح است که AI_n و A هر دو $n\times n$ و لذا هم‌مرتبه هستند. قرار می‌دهیم $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ و $AI_n=[b_{ij}]_{n\times n}$ و ثابت می‌کنیم برای هر i و هر j، $b_{ij}=a_{ij}$:

$$\begin{aligned}b_{ij}&=\sum_{k=۱}^{n}a_{ik}\delta_{kj}\\ &=a_{ij}\delta_{jj}+\sum_{\substack{k=۱\\ k\neq j}}^{n}a_{ik}\delta_{kj}\\ &=a_{ij}(۱)+\sum_{\substack{k=۱\\ k\neq j}}^{n}a_{ik}(۰)\\ &=a_{ij}.\end{aligned}$$

درنتیجه $AI_n = A$. به همین شکل می‌توانیم ثابت کنیم $I_nA = A$. ■

تذکر. ویژگی (۴) از قضیهٔ ۱ حاکی از آن است که هر ماتریس $m\times n$ مانند A دارای قرینه است، یعنی ماتریسی $(-A)$ موجود است که مجموع آن با A برابر O می‌شود، همانند اعداد، که برای هر عدد a قرینه‌ای موجود است، یعنی عددی $(-a)$ که مجموع آن با a برابر صفر می‌گردد. اکنون با توجه به این که هر عدد مخالف صفر a دارای وارون است، یعنی این که عددی $(\frac{1}{a})$ موجود است که حاصلضرب آن در a برابر یک می‌شود، سؤالی طبیعی پیش می‌آید و آن این که «آیا برای هر ماتریس غیرصفر A، ماتریسی موجود است که وقتی در آن ضرب شود، حاصل برابر I شود؟». معادلاً «آیا هر ماتریس غیرصفر A، وارون دارد؟». جواب به این سؤال منفی است، زیرا مثلاً اگر برای $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریسی مانند B موجود باشد که $AB=I$ آنگاه $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}I=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}B\right)$. بنابر ویژگی‌های ذکرشده در بالا $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=B\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$ یا $O=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ که تناقض است. در بخش ۱ از فصل ۵ در مورد این موضوع بیشتر بحث خواهیم کرد.

ترانهادهٔ یک ماتریس

تعریف. فرض کنیم $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ یک ماتریس $m\times n$ باشد. در این صورت **ترانهادهٔ** A که آن را با A^t نمایش می‌دهیم یک ماتریس $n\times m$ است: $A^t=\left[b_{ij}\right]_{n\times m}$ ، و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$b_{ij}=a_{ji}\,.$$

توجه می‌کنیم که در واقع ترانهادهٔ یک ماتریس مانند A، ماتریسی است که از عوض کردن جای سطرها و ستون‌های ماتریس A به‌دست می‌آید. برای مثال اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ آنگاه $A^t=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. در زیر ویژگی‌های ابتدایی مربوط به ارتباط یک ماتریس و ترانهادهٔ آن را می‌آوریم.

قضیهٔ ۵. فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times n}$ دو ماتریس مربعی مرتبهٔ n باشند و r یک عدد حقیقی. در این صورت

۱) $(A+B)^t=A^t+B^t$،

۲) $(rA)^t=rA^t$،

۳) $(AB)^t=B^tA^t$،

۴) $(A^t)^t=A$.

اثبات. اثبات ویژگی‌های بالا همه سر راست است و به‌کمک تعریف به‌سادگی انجام می‌شود. فقط ویژگی (۳) را ثابت می‌کنیم و بقیه را به‌عنوان تمرین رها می‌کنیم.

واضح است که $(AB)^t$ و B^tA^t هر دو ماتریس‌های $n\times n$ و لذا هم‌مرتبه هستند. اکنون قرار می‌دهیم $AB=[c_{ij}]_{n\times n}$، $(AB)^t=[d_{ij}]_{n\times n}$، $A^t=[e_{ij}]_{n\times n}$، $B^t=[f_{ij}]_{n\times n}$ و $B^tA^t=[g_{ij}]_{n\times n}$ و ثابت می‌کنیم برای هر i و هر j، $d_{ij}=g_{ij}$:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= c_{ji} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^{n} f_{ik}e_{kj} \\ &= g_{ij}. \end{aligned}$$

درنتیجه $(AB)^t=B^tA^t$. ■

تعریف. فرض کنیم A یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n باشد. A را **متقارن** می‌نامیم هرگاه $A^t=A$ و آن‌را **پاد متقارن** می‌نامیم هرگاه $A^t=-A$.

برای مثال ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix}$ یک ماتریس متقارن است، زیرا $A^t=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix}=A$، و $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ پاد متقارن زیرا $B^t=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=-B$، حال آنکه $C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ نه متقارن است

و نه پاد متقارن.

تذکر. فرض کنیم A یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n باشد. با توجه به ویژگی‌های ذکرشده در قضیهٔ بالا داریم

$$\left[\frac{1}{2}(A+A^t)\right]^t=\frac{1}{2}(A+A^t)^t=\frac{1}{2}(A^t+(A^t)^t)=\frac{1}{2}(A^t+A)=\frac{1}{2}(A+A^t),$$

$$\left[\frac{1}{2}(A-A^t)\right]^t=\frac{1}{2}(A-A^t)^t=\frac{1}{2}(A^t-(A^t)^t)=\frac{1}{2}(A^t-A)=-\frac{1}{2}(A-A^t).$$

درنتیجه $\frac{1}{2}(A+A^t)$ ماتریس متقارن و $\frac{1}{2}(A-A^t)$ ماتریس پاد متقارن است. اکنون با توجه به

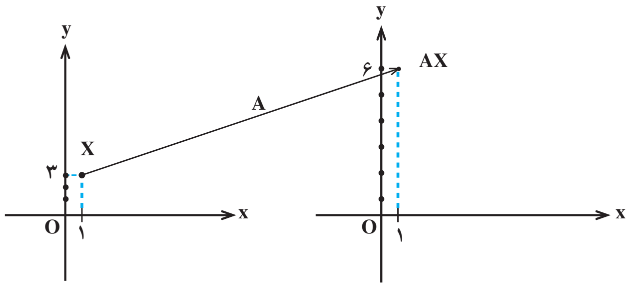
$$A=\frac{1}{2}(A+A^t)+\frac{1}{2}(A-A^t)$$

نتیجه می‌گیریم که هر ماتریس مربعی را می‌توان به‌صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن نوشت.

ماتریس‌ها و تبدیلات هندسی در صفحه

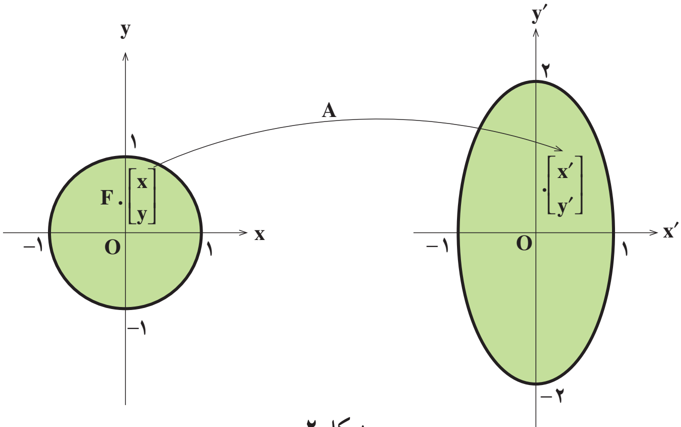
در اینجا نقاط $\mathbb{R}^2$ را به جای (x,y) با ماتریس $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ که یک ماتریس ۱×۲ است نمایش می‌دهیم. گیریم A یک ماتریس ۲×۲ باشد. برای هر نقطهٔ $X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ از $\mathbb{R}^2$، $AX=A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ یک ماتریس ۱×۲ است و لذا نقطه‌ای از $\mathbb{R}^2$ را نمایش می‌دهد. در واقع این نقطه از ضرب ماتریس A در X به‌وجود می‌آید. پس می‌توانیم بگوییم که یک ماتریس ۲×۲ با ضرب در نقطه‌ای از $\mathbb{R}^2$، آن را به نقطه‌ای از $\mathbb{R}^2$ می‌نگارد و لذا ماتریس‌های ۲×۲ را می‌توانیم به‌عنوان **تبدیلات هندسی** در صفحه در نظر بگیریم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳. ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. این ماتریس نقطهٔ $X=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ از $\mathbb{R}^2$ را به نقطهٔ $AX=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}$ می‌نگارد (به شکل ۱ نگاه کنید).



شکل ۱

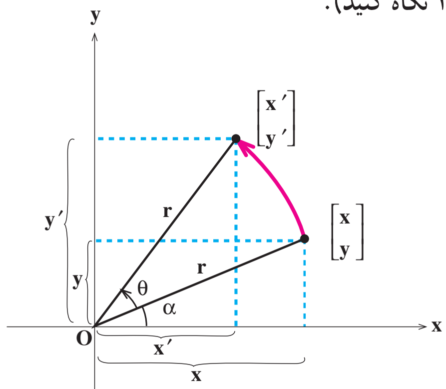
اکنون فرض کنیم F یک شکل هندسی خاص در صفحه باشد. مثلاً می‌توانیم F را محیط و درون دایره‌ای به شعاع ۱ و به مرکز مبدأ مختصات در نظر بگیریم : $F=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^۲ \middle| x^۲+y^۲\leq ۱\right\}$. می‌خواهیم بررسی کنیم A شکل F را به چه شکلی تبدیل خواهد کرد. یعنی اگر A بر تک تک نقاط F اثر کند، نقاط حاصل چه شکلی پدید می‌آورند. گیریم $X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in F$، لذا $x^۲+y^۲\leq ۱$. حال اگر A روی $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ اثر کند، نقطهٔ حاصل، یعنی $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$، برابر است با $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=AX=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\۲y\end{bmatrix}$ و لذا $x=x'$ و $y=\frac{۱}{۲}y'$. درنتیجه $x'^۲+(\frac{۱}{۲}y')^۲\leq ۱$، یا $x'^۲+\frac{y'^۲}{۴}\leq ۱$. پس نقاط حاصل از اثر A روی نقاط F، یعنی $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ها، در $x'^۲+\frac{y'^۲}{۴}\leq ۱$ صدق می‌کنند و لذا شکل حاصل از اثر A روی F، محیط و درون یک بیضی است به مرکز مبدأ مختصات، قطر بزرگ ۴ و قطر کوچک ۲ (به شکل ۲ نگاه کنید).



شکل ۲

در سال دوم دیده‌ایم که ماتریس‌های $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ در اثر روی نقاط صفحه به‌ترتیب آنها را نسبت به محور xها، محور yها، خط y=x، خط $y=-x$ و مبدأ مختصات قرینه می‌کنند. در مثال زیر ماتریسی را پیدا می‌کنیم که در اثر روی نقاط صفحه آنها را به اندازهٔ زاویهٔ ثابت θ حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی دوران می‌دهند.

مثال ۴. فرض کنیم نقطهٔ $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ را به اندازهٔ زاویهٔ ثابت θ حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی دوران دهیم. می‌خواهیم مختصات نقطهٔ حاصل از این دوران را پیدا کنیم. گیریم $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$ نقطهٔ حاصل از دوران باشد. واضح است که فاصلهٔ $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$ از مبدأ مختصات برابر می‌باشد که آن را r فرض می‌کنیم (به شکل ۳ نگاه کنید).



شکل ۳

چون $\begin{cases}x = r\cos\alpha\\ y = r\sin\alpha\end{cases}$ و $\begin{cases}x' = r\cos(\alpha+\theta)\\ y' = r\sin(\alpha+\theta)\end{cases}$، لذا با استفاده از بسط سینوس و کسینوس به‌دست می‌آوریم

$$\begin{cases}x' = (\cos\theta)x + (-\sin\theta)y\\ y' = (\sin\theta)x + (\cos\theta)y\end{cases}$$

لذا $\begin{bmatrix}(\cos\theta)x+(-\sin\theta)y\\(\sin\theta)x+(\cos\theta)y\end{bmatrix}$ دوران یافتهٔ $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی به‌اندازهٔ θ می‌باشد. حال توجه می‌کنیم که

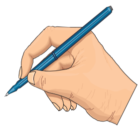
$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\cos\theta)x+(-\sin\theta)y\\(\sin\theta)x+(\cos\theta)y\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}.$$

درنتیجه ماتریس

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

که آن را با R_θ نمایش می‌دهیم، در اثر روی نقاط $\mathbb{R}^۲$ ، آنها را به اندازهٔ θ در جهت مثلثاتی حول مبدأ مختصات دوران می‌دهد.



تمرین

۱. ماتریس‌های زیر را به‌صورت آرایهٔ مستطیلی بنویسید.

الف) $[i+j]_{۲\times۲}$ ، ب) $[i]_{۳\times۳}$ ،

ج) $[i^۲+j^۲]_{۲\times۳}$ ، د) $[۲i+۳]_{۳\times۳}$.

۲. عبارات زیر را محاسبه کنید.

الف) $\begin{bmatrix}۲ & ۳ & ۱\\۰ & ۱ & ۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۱ & ۴ & ۸\\۵ & -۳ & ۴\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۶\\۵ & ۶ & ۷\end{bmatrix}$ ،

ب) $\begin{bmatrix}۳ & ۹\\۱ & -۲\end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix}۶ & ۰\\-۱ & ۵\end{bmatrix}-۳\begin{bmatrix}۲ & -۴\\۱ & ۲\end{bmatrix}$ ،

ج) $\begin{bmatrix}۱ & ۳ & ۶\\۴ & ۲ & ۷\\۰ & ۳ & ۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۹ & ۰ & ۳\\۰ & -۱ & ۳\\۴ & ۹ & ۰\end{bmatrix}$.

۳. فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\۳ & ۴\\۵ & ۶\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۳ & -۲\\۱ & -۵\\۴ & ۳\end{bmatrix}$. یک ماتریس ۲×۳ مانند C را طوری

پیدا کنید که $A+B-C=O_{۳\times۲}$.

۴. قضیهٔ ۱ را ثابت کنید.

۵. حاصلضربهای زیر را به‌دست آورید.

الف) $\begin{bmatrix}۲ & ۳ & ۴\\ ۱ & ۵ & ۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۲\\ ۳\end{bmatrix}$ ،

ب) $\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۱\\ ۴ & ۰ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & -۴\\ ۱ & ۵\\ -۲ & ۲\end{bmatrix}$.

۶. اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & -۳ & -۵\\ -۱ & ۴ & ۵\\ ۱ & -۳ & -۴\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۳ & ۵\\ ۱ & -۳ & -۵\\ -۱ & ۳ & ۵\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۲ & -۲ & -۴\\ -۱ & ۳ & ۴\\ ۱ & -۲ & -۳\end{bmatrix}$

نشان دهید $AB=BA=O$ ، $AC=A$ و $CA=C$.

۷. فرض کنید a، b، c و d چهار واحد طول باشد. ماتریس زیر یک جدول تبدیل واحد است

$$A=\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} a & b & c & d\end{array}\\ \begin{bmatrix}۱ & ۳ & ۶ & ۲۴\\ \frac{۱}{۳} & ۱ & ۲ & ۸\\ \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۴\\ \frac{۱}{۲۴} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۴} & ۱\end{bmatrix}\end{array}.$$

بنابراین، یک واحد از a، شش واحد از c است، یک واحد از b هشت واحد از d است، و یک واحد از c نصف واحد از b است. این جدول را به عنوان یک ماتریس در نظر بگیرید و شرح دهید که چرا $a_{ik}a_{kj}=a_{ij}$. آیا می‌توانید بدون محاسبهٔ مستقیم $A^۲$ را پیدا کنید؟

۸. کارخانه‌ای سه محصول a، b و c را به دو بازار m و n می‌فروشد. تعداد واحدهای فروخته شده هر محصول در هر بازار در یک سال معین با ماتریس

$$A=\begin{array}{c} \\ m\\ n\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} a & b & c\end{array}\\ \begin{bmatrix}۵۰۰۰ & ۲۰۰۰ & ۱۵۰۰\\ ۲۰۰۰ & ۲۰۰۰ & ۱۰۰۰\end{bmatrix}\end{array}$$

داده شده است. ماتریس‌های $B=\begin{bmatrix}۲\\۴\\۳\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۱/۸\\۳/۵\\۲/۵\end{bmatrix}$ به‌ترتیب، قیمت فروش و قیمت تمام‌شده هر واحد از a، b و c را نشان می‌دهند. درآیه‌های هر یک از ماتریس‌های AB، AC و $AB-AC$ را تعبیر کنید.

۹. اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۲&۲\\۲&۱&۲\\۲&۲&۱\end{bmatrix}$ ، نشان دهید $A^۲-۴A-۵I_۳=O$.

۱۰. اگر $A=\begin{bmatrix}۰&۱\\۱&۰\end{bmatrix}$ ، مطلوب است محاسبهٔ $A^{۱۰}$.

۱۱. اگر $A=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۱&۰\end{bmatrix}$ ، ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، $A^n=\begin{bmatrix}n+۱&-n\\n&-n+۱\end{bmatrix}$.

۱۲. اگر $A=\begin{bmatrix}۰&۱&۳\\۰&۰&۴\\۰&۰&۰\end{bmatrix}$ ، به کمک محاسبهٔ توان‌های مختلف A، نشان دهید عدد طبیعی n موجود است که $A^n=O$.

۱۳. اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۰\\۱&۲\end{bmatrix}$ ، ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، $A^n=(۲^n-۱)A-۲(۲^{n-۱}-۱)I_۲$.

۱۴. ویژگی‌های ۱، ۲ و ۴ از قضیهٔ ۵ را ثابت کنید.

۱۵. اگر $AB=BA$ که A و B دو ماتریس مربعی مرتبهٔ ۲ یا ۳ هستند و هر دو متقارن یا هر دو پاد متقارن، ثابت کنید AB متقارن است.

۱۶. ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۲&۱&۳\\۴&۱&۲\end{bmatrix}$ را به‌صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن بنویسید.

۱۷. فرض کنید F محیط و درون دایرهٔ $(x-۱)^۲+y^۲=۴$ باشد :

$$F=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^۲\middle|(x-۱)^۲+y^۲\le ۴\right\}.$$

ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲&۰\\۰&۴\end{bmatrix}$ در اثر روی F، F را به چه شکل هندسی تبدیل می‌کند؟

۱۸. برای زاویهٔ ثابت داده شدهٔ θ و عدد طبیعی n، ثابت کنید $R_\theta^n=R_{n\theta}$ ، یعنی

$$\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\cos n\theta&-\sin n\theta\\\sin n\theta&\cos n\theta\end{bmatrix}.$$