طول روز در طی یک سال کم و زیاد می‌شود. تصویر بالا علت این امر را نشان می‌دهد می‌توان دید که طول روز را تقریباً می‌توان به صورت یک تابع مثلثاتی از روزهای سال نوشت.

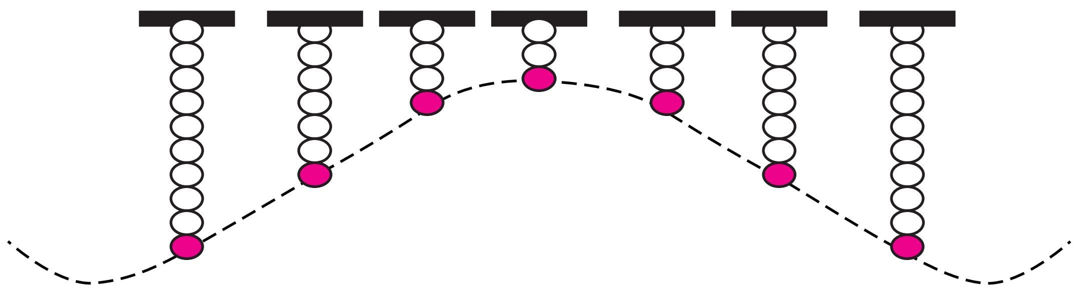
مثلثات

۱. توابع مثلثاتی
۲. تانژانت و کتانژانت
۳. اتحادهای مثلثاتی
۴. معادلات مثلثاتی
۵. وارون توابع مثلثاتی

توابع مثلثاتی

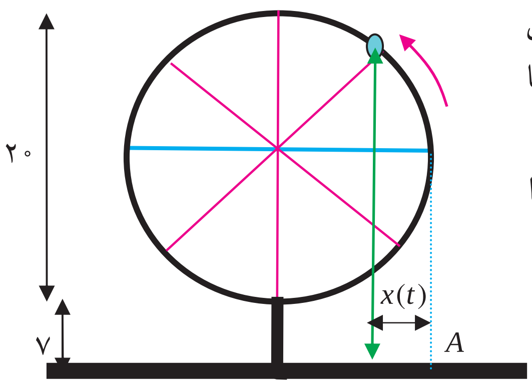
بیان ریاضی بسیاری از حرکت‌های متناوب در طبیعت، با توابع مثلثاتی انجام می‌شود. مثلاً حرکت رفت و برگشتی یک آونگ، حرکت سیارات به دور خورشید، نوسانات یک فنر همگی از طریق توابع مثلثاتی قابل بیان هستند.

مثال : فرض کنید وزنه‌ای را از یک فنر آویزان کرده‌ایم و فنر به حال تعادل رسیده است.
اگر وزنه به یک مقدار اندک کشیده و رها شود با فرض کم بودن اصطکاک وزنه یک حرکت نوسانی انجام خواهد داد. اگر مبدأ محاسبه ارتفاع وزنه را حالت تعادل وزنه بگیریم، و لحظه $t=0$ را لحظه رد شدن وزنه از حالت تعادل بگیریم تابعی که ارتفاع وزنه را در هر لحظه مشخص می‌کند به صورت $y(t)=A\sin(Bt)$ است.



تمرین در کلاس

فرض کنید چرخ وفلکی به قطر ۲۰ متر داریم که هر ۲ دقیقه یک دور در جهت مثبت می‌چرخد. فرض کنید پایین‌ترین نقطه چرخ و فلک ۷ متر بالای زمین باشد، و کابین خاصی از چرخ و فلک را در نظر گرفته باشیم که در لحظه $t=0$ با زمین ۱۷ متر فاصله دارد و رو به بالا در حال حرکت است.
می‌خواهیم در هر لحظه ارتفاع این کابین از سطح زمین را مشخص کنیم.



۱ــ پس از گذشت t ثانیه، کمانی که کابین طی می‌کند چند رادیان است؟

۲ــ پس از گذشت t ثانیه، کابین چند متر بالای قطر افقی قرار دارد؟ (اگر کابین زیر قطر افقی باشد این عدد را منفی حساب کنید.)

۳ــ تابعی که ارتفاع کابین را (بر حسب متر) نسبت به زمان (بر حسب ثانیه) نشان می‌دهد بنویسید.

۴ــ اگر در لحظه t فاصله سایه این کابین روی زمین تا نقطه A را با $x(t)$ نشان دهیم، این تابع را به دست آورید.

مثال

می‌دانیم که تغییرات طول روز در هر سال مشابه سال قبل تکرار می‌شود. اگر از اول فروردین طول هر روز را یادداشت کنیم این مقدارها تا اول تابستان در حال افزایش هستند. بعد از اولین روز تابستان طول روزها کاهش می‌یابند تا به روز اول زمستان برسیم و مجدداً بعد از روز اول زمستان طول روزها افزایش می‌یابند. این یک حرکت تناوبی است و می‌توانیم با یک تابع مثلثاتی طول روزها را بیان کنیم.

فرض کنیم t نشان دهنده روزهای سال باشد و $t = ۰$ نشان دهنده روز اول فروردین و t = ۳۶۴ نشان دهنده روز آخر سال باشد. طول روز tام (بر حسب ساعت) را با $L(t)$ نشان می‌دهیم و فرض کنید به ازای برخی اعداد مانند A و B و C داریم $L(t) = A\sin(Bt) + C$. با داشتن اطلاعات زیر سعی می‌کنیم A و B و C را به دست آوریم.

روز	اول فروردین	اول تیر	اول دی
طول روز(ساعت)	۱۲/۲۵	۱۵/۵	۹

تمرین در کلاس

۱ــ با توجه به آن که دوره تناوب تابع $L(t)$، $\frac{2\pi}{B}$ است نشان دهید $B \approx ۰/۰۲$.

۲ــ نشان دهید بیشترین مقدار $L(t)$ برابر $A + C$ و کمترین مقدار آن $-A + C$ است و نتیجه بگیرید $A = ۳/۲۵$، $C = ۱۲/۲۵$.

۳ــ تابع $L(t)$ را بنویسید و طول روز را در ۵ آذر حساب کنید.

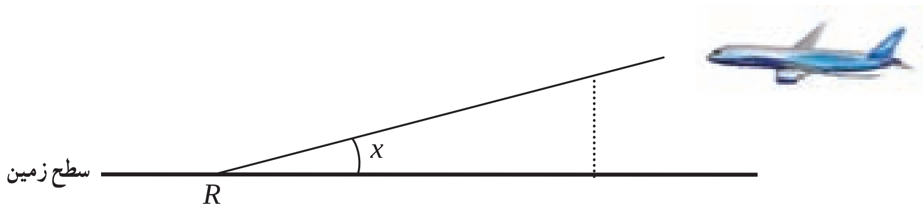
توابع تانژانت و کتانژانت

یکی از توابع مثلثاتی تابع تانژانت است. به ازای هر مقدار $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ (k عدد صحیح)بنا به تعریف :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

تمرین در کلاس

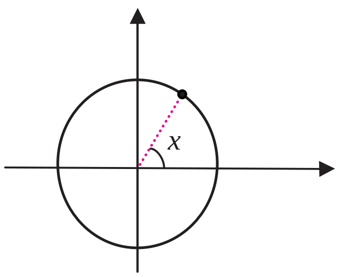
هواپیمایی در ارتفاع ۳ کیلومتری پرواز می‌کند و در حال نزدیک شدن به فرودگاه در محل R است.



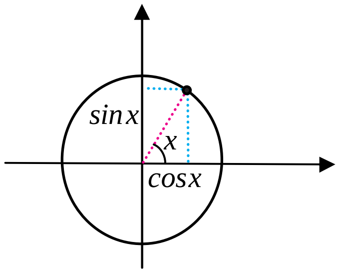
۱ــ فاصله افقی هواپیما با فرودگاه را بر حسب زاویه‌ای که رادار طبق شکل به دست می‌آورد حساب کنید.

۲ــ اگر رادار زاویه ۴۵ درجه را نشان دهد، فاصله افقی هواپیما با فرودگاه چقدر است؟

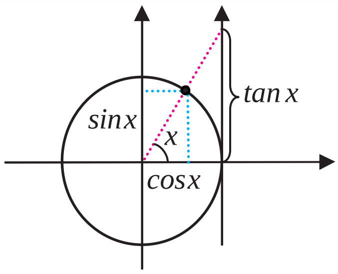
مقدار $\tan x$ را می‌توان در دایره مثلثاتی به شکل هندسی نمایش داد. با رسم یک دستگاه مختصات و دایره واحد به مرکز مبدأ، هر مقدار x که به عنوان زاویه‌ای بر حسب رادیان در نظر گرفته شود نقطه‌ای از دایره مثلثاتی را معین می‌کند.



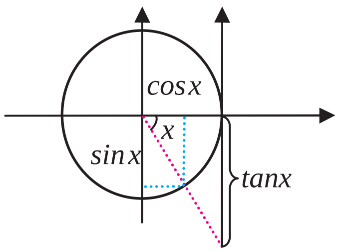
با رسم خطهایی عمود بر دو محور، از این نقطه مقدارهای $\cos x$ و $\sin x$ مشخص می‌شوند.



با رسم خط مماس بر دایره مثلثاتی در نقطه (۱,۰) و ساختن محوری جدید، اگر خطی را که مبدأ را به نقطه روی دایره وصل می‌کند ادامه دهیم تا این محور جدید را قطع کند، عرض نقطه برخورد مقدار $tanx$ را نشان می‌دهد.

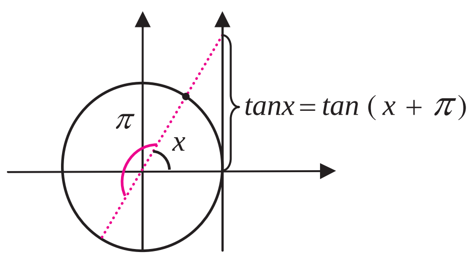


درستی این مطلب از طریق رابطه تشابه در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که ساخته شده‌اند قابل بررسی است. درستی علامت مقدار تانژانت نیز با بررسی آن، وقتی زاویه در ربع‌های دیگری قرار می‌گیرد قابل انجام است. مثلاً وقتی که زاویه در ربع چهارم قرار می‌گیرد مقدار کسینوس مثبت و مقدار سینوس منفی است، پس مقدار تانژانت منفی است.



از آنجا که محورهای بالا مقدارهای سینوس و کسینوس و تانژانت را نمایش می‌دهند، در دایره مثلثاتی این محورها را محورسینوس‌ها و محور کسینوس‌ها و محور تانژانت‌ها می‌نامند. از روی شکل مشخص است که برای زاویه‌هایی که مضرب صحیح و فردی(مثبت یا منفی) از $\frac{\pi}{۲}$ هستند مقدار تانژانت تعریف نمی‌شود، زیرا در این نقاط خط واصل از مبدأ به نقطه روی دایره با محور تانژانت‌ها موازی است و آن را قطع نمی‌کند. از طریق جبری نیز مشاهده می‌کنیم که در این زاویه‌ها کسینوس صفر است و کسر $\frac{\sin x}{\cos x}$ معنا ندارد. بنابراین دامنه تعریف تابع $tanx$ اعداد به صورت $(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$ را (k اعداد صحیح هستند) در بر ندارد.

از روی شکل هم‌چنین مشاهده می‌کنیم که برای دو زاویه x و $x+\pi$ مقدار تانژانت مساوی است.



به طور جبری نیز می‌توان این رابطه را به دست آورد.

$$tan(x+\pi)=\frac{sin(x+\pi)}{cos(x+\pi)}=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$$

از این تساوی نتیجه می‌شود $tanx$ تابعی متناوب است و π یک دوره تناوب آن است.

فعالیت ۱

در این فعالیت می‌خواهیم چگونگی تابع تانژانت را در یک دوره تناوب آن، مانند بازه $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ، بررسی کنیم.

۱ـ از طریق شکل و محور تانژانت‌ها توضیح دهید که وقتی مقدارهای x از صفر شروع شوند و به طور مداوم افزایش یابند تا به $\frac{\pi}{2}$ نزدیک شوند، مقدارهای $tanx$ چگونه تغییر می‌کنند.

۲ـ آیا تابع تانژانت روی بازه $(0,\frac{\pi}{2})$ صعودی است؟

۳ـ از طریق شکل و محور تانژانت‌ها توضیح دهید که وقتی مقدارهای x از صفر شروع شوند و به طور مداوم کاهش یابند تا به $-\frac{\pi}{2}$ نزدیک شوند، مقدارهای $tanx$ چگونه تغییر می‌کنند.

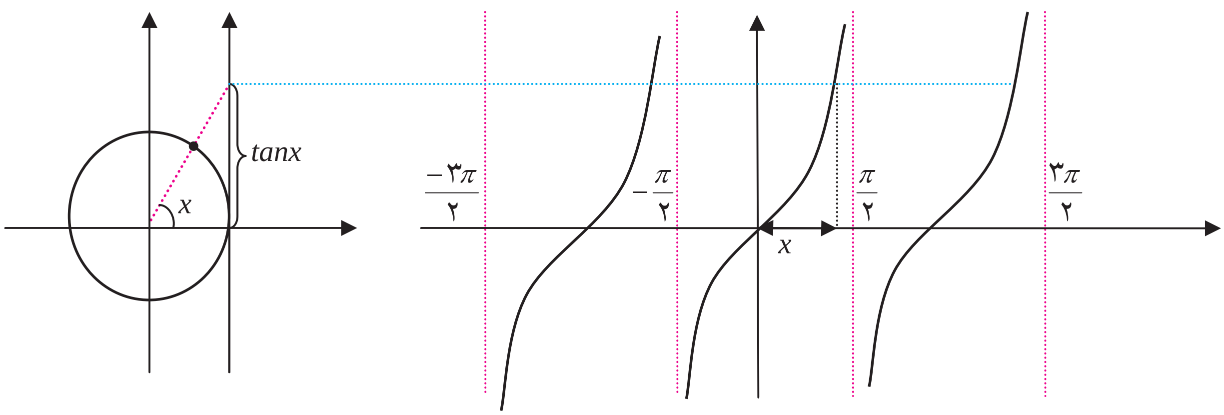
۴ـ آیا تابع تانژانت روی بازه $(-\frac{\pi}{2},0)$ صعودی است؟ آیا تابع تانژانت روی بازه $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ صعودی است؟

۵ـ آیا تابع تانژانت روی بازه $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ تابعی زوج یا فرد می‌باشد؟

۶ـ با تکمیل جدول زیر و یافتن مقدار $tanx$ در چند نقطه خاص نمودار تقریبی این تابع را در کل دامنه آن رسم کنید.

x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$tanx$							

با توجه به اطلاعاتی که در فعالیت قبل نسبت به تابع تانژانت به دست آورده‌اید، نمودار تقریبی آن به شکل زیر خواهد بود.



یکی دیگر از توابع مهم مثلثاتی تابع کتانژانت است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad (x \neq k\pi)$$

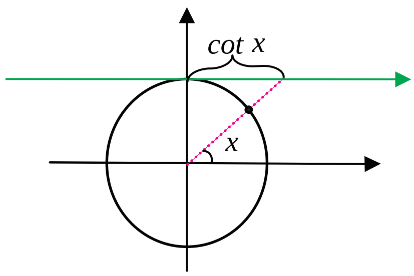
در زاویه‌هایی که تابع تانژانت ناصفر است مقدار کتانژانت وارون مقدار تانژانت است. یعنی $\cot x = \frac{1}{\tan x}$.

تمرین در کلاس

۱ــ نشان دهید دامنه تابع کتانژانت همه اعداد، غیر از اعداد به صورت $k\pi$ است که k عددی صحیح است.

۲ــ نشان دهید π یک دوره تناوب تابع کتانژانت است.

۳ــ نشان دهید مقدار $cotx$ از طریق محوری که در زیر رسم شده است و آن را محور کتانژانت‌ها می‌نامند به دست می‌آید.



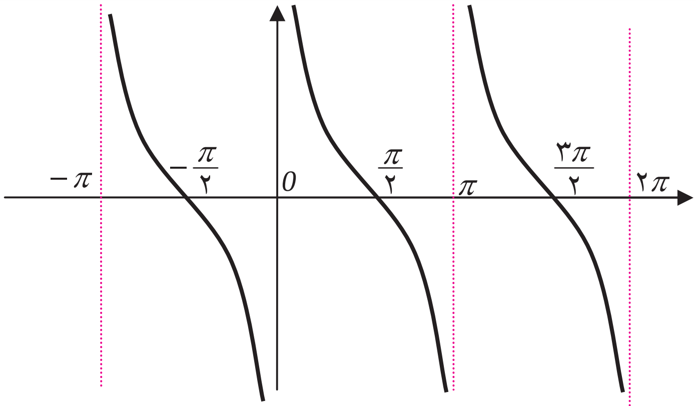
۴ــ از طریق محور کتانژانت‌ها توضیح دهید که وقتی مقدارهای x از یک زاویه مثبت نزدیک صفر شروع شوند و به طور مداوم افزایش یابند تا به π نزدیک شوند، مقدارهای $cotx$ چگونه تغییر می‌کنند.

۵ــ وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع کتانژانت در بازه $(0 , \pi)$ چگونه است؟

۶ــ با یافتن مقدار $cotx$ در چند نقطه خاص نمودار تقریبی این تابع را در کل دامنه آن رسم کنید.

۷ــ درستی تساوی $\cot x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$ را به دست آورید و از طریق آن چگونگی ارتباط نمودارهای دو تابع $cotx$ و $tanx$ را توضیح دهید.

با توجه به نتایجی که از تمرین بالا به دست می‌آید نمودار تابع کتانژانت در صفحهٔ بعد رسم شده است.



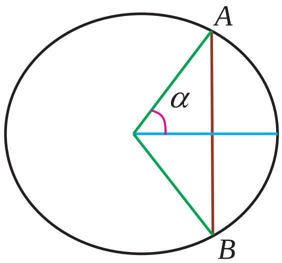
اتحادهای مثلثاتی

حل یک مسئله

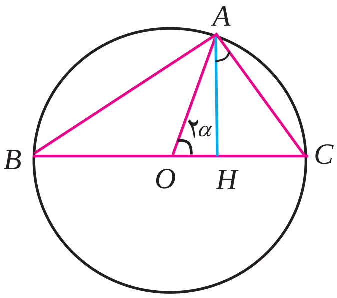
اگر زاویه‌ای دو برابر شود، نسبت‌های مثلثاتی آن چگونه تغییر می‌کنند؟

کسی که اولین بار به این سؤال پاسخ گفت ابوالوفای بوزجانی از دانشمندان ایرانی بود که نقش زیادی در گسترش علم مثلثات در آن دوره داشته است. فعالیت زیر بر اساس روش بوزجانی برای یافتن $sin۲\alpha$ بر حسب نسبت‌های مثلثاتی α می‌باشد.

فعالیت ۲



۱ــ از طریق شکل مقابل نشان دهید که اگر AB وتری در دایره واحد باشد که زاویه کمان روبروی آن ۲α باشد، طول وتر $۲sin\alpha$ است.



۲ــ در شکل مقابل O مرکز دایره واحد و زاویه بین دو شعاع OA و OC برابر ۲α است و AH عمود بر BC است. ابتدا استدلال کنید $\hat{B}=\alpha$ و $\hat{A}=\frac{\pi}{۲}$ و $\widehat{HAC}=\alpha$.

۳ــ استدلال کنید که $AC = 2\sin\alpha$ و $AH = \sin 2\alpha$ و در مثلث قائم‌الزاویه AHC داریم $\cos\alpha = \frac{AH}{AC}$.

۴ــ نتیجه بگیرید : $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

۵ــ از تساوی‌های $OH + HC = 1$ و $OH = \cos 2\alpha$ و $\sin\alpha = \frac{HC}{AC}$ ، نتیجه بگیرید :
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.

اگرچه استدلال بالا فقط برای حالتی که $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ اعتبار دارد، ولی برای سایر زاویه‌ها نیز، با استفاده از خواص توابع سینوس و کسینوس، می‌توان درستی این تساوی‌ها را به دست آورد.

مثال

۱ : برای زاویه $\alpha = \frac{\pi}{4}$ داریم : $2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = 2\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 = \sin 2\times\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{2}$

۲ : برای زاویه $\frac{\pi}{6}$ داریم :

$$2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} = 2\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 2\times\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3}$$

به کمک روابط بالا می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های دیگری غیر از $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{4}$ را هم با دقت حساب کنیم.

۳ : سینوس زاویه ۱۵ درجه را حساب می‌کنیم.

$$\cos 30^\circ = \cos 2\times 15^\circ = 1 - 2\sin^2 15^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2 15^\circ \Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

تمرین در کلاس

۱ــ با توجه به درستی تساوی $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ برای زاویه‌های حاده، درستی این تساوی را برای زاویه منفرجه β ثابت کنید. (از زاویه حاده $\alpha = \pi - \beta$ کمک بگیرید.)

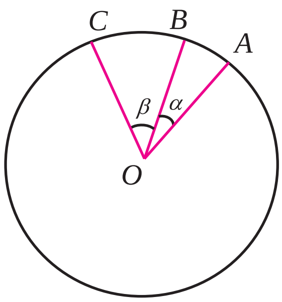
۲ــ نشان دهید برای هر زاویه α داریم :

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

۳ــ نشان دهید برای هر زاویه α داریم :

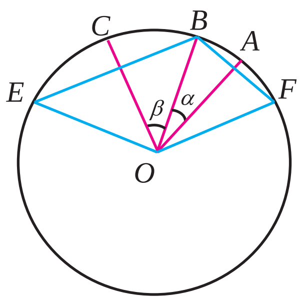
$$\cos^{2}\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2} \quad , \quad \sin^{2}\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

۴ــ سینوس و کسینوس زاویه $22/5^{\circ}$ را حساب کنید.



مسئله مهم‌تر دیگری که بوزجانی به حل آن پرداخت یافتن نسبت‌های مثلثاتی مجموع دو زاویه مانند α و β بود. روشی که در زیر برای حل این مسئله می‌آید بر اساس روش بوزجانی است.

در دایره واحد دو زاویه α و β را به مرکز مبدأ پهلوی هم رسم می‌کنیم. حالتی را در نظر می‌گیریم که $\alpha+\beta$ حاده باشد.



اگر زاویه‌های مرکزی 2αو 2β و $2(\alpha+\beta)$ را بسازیم وتر روبروی آن‌ها مقدارهای $2\sin\alpha$ و $2\sin\beta$و $2\sin(\alpha+\beta)$ را نشان خواهند داد. برای این کار از B به OC و OA عمودی رسم می‌کنیم تا دایره را به ترتیب در نقاط E و F قطع کنند.

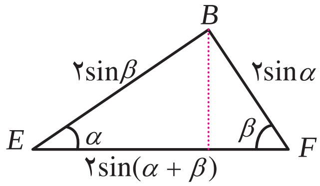
ادامه روش بوزجانی را در فعالیت زیر دنبال می‌کنیم.

فعالیت ۳

۱ــ با رسم پاره‌خط EF نتیجه بگیرید $EF=2\sin(\alpha+\beta)$.

۲ــ نشان دهید زاویه‌های $\widehat{EFB}$ و $\widehat{FEB}$ به ترتیب برابر β و α می‌باشند.

۳ــ مثلث EFB را جداگانه در صفحه بعد رسم کرده‌ایم و ارتفاع وارد بر ضلع EF را نیز رسم کرده‌ایم. با توجه به آن که طول اضلاع و زاویه‌های این مثلث معلوم شده‌اند، نتیجه بگیرید :



$$sin(\alpha + \beta) = sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta$$

اگرچه استدلال بالا فقط برای حالتی که $\alpha + \beta$ حاده باشد اعتبار دارد، ولی با استفاده از خواص توابع سینوس و کسینوس می‌توان درستی آن را برای تمام زاویه‌ها به دست آورد. مثلاً در حالتی که α و β حاده هستند ولی $\alpha + \beta$ منفرجه است، می‌توانیم برای دو زاویه $\alpha' = \frac{\pi}{۲} - a$ و $\beta' = \frac{\pi}{۲} - \beta$ که هر دو حاده هستند و $\alpha' + \beta' = \pi - (\alpha + \beta)$ نیز حاده است بنویسیم :

$$sin(\alpha' + \beta') = sin\alpha' cos\beta' + cos\alpha' sin\beta'$$

در نتیجه :

$$sin(\alpha + \beta) = sin(\pi - (\alpha + \beta)) = sin(\alpha' + \beta') = sin\alpha' cos\beta' + cos\alpha' sin\beta'$$

$$= sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha)cos(\frac{\pi}{۲} - \beta) + cos(\frac{\pi}{۲} - \alpha)sin(\frac{\pi}{۲} - \beta)$$

$$= cos\alpha sin\beta + sin\alpha cos\beta$$

برای بقیه حالت‌ها نیز می‌توان محاسبات مشابهی را انجام داد.

مثال

سینوس زاویه ۷۵° را حساب می‌کنیم.

$$sin۷۵^\circ = sin(۴۵^\circ + ۳۰^\circ) = sin۴۵^\circ cos۳۰^\circ + cos۴۵^\circ sin۳۰^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۶} + \sqrt{۲}}{۴}$$

تمرین در کلاس

۱ــ فرمول سینوس مجموع دو زاویه برای هر دو زاویه دلخواهی برقرار است. در این فرمول β را به $-\beta$ تبدیل کنید و نتیجه بگیرید برای هر دو زاویه α و β داریم :

$$sin(\alpha - \beta) = sin\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sin\ \beta$$

۲ــ با توجه به آن که $cos(\alpha+\beta)=sin(\frac{\pi}{۲}-(\alpha+\beta))=sin((\frac{\pi}{۲}-\alpha)-\beta)$ ، نتیجه بگیرید برای هر دو زاویه α و β داریم :

$$cos(\alpha+\beta)=cos\,\alpha\,cos\,\beta-sin\,\alpha\,sin\,\beta$$

۳ــ ثابت کنید برای هر دو زاویه α و β داریم :

$$tan(\alpha+\beta)=\frac{tan\alpha+tan\beta}{۱-tan\alpha\,tan\beta}$$

۴ــ ثابت کنید برای هر زاویه α داریم :

$$sin۳\alpha=-۴sin^۳\alpha+۳sin\alpha \qquad , \qquad cos۳\alpha=۴cos^۳\alpha-۳cos\alpha$$

به کمک روابط بالا می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های بیشتری را با دقت حساب کنیم.

مثال

۱ : تانژانت زاویه ۱۰۵° را حساب می‌کنیم.

$$tan۱۰۵^\circ=tan(۴۵^\circ+۶۰^\circ)=\frac{tan۴۵^\circ+tan۶۰^\circ}{۱-tan۴۵^\circ\,tan۶۰^\circ}$$

$$=\frac{۱+\sqrt{۳}}{۱-۱\times\sqrt{۳}}=-\frac{(۱+\sqrt{۳})^۲}{۲}$$

۲ : کسینوس زاویه $۶۷/۵^\circ$ را حساب می‌کنیم.

داریم $۶۷/۵^\circ=۳\times۲۲/۵^\circ=۳\times\frac{۴۵^\circ}{۲}$. ابتدا کسینوس $۲۲/۵^\circ$ را حساب می‌کنیم.

$$cos^۲۲۲/۵^\circ=\frac{۱+cos۴۵^\circ}{۲}=\frac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}=\frac{۲+\sqrt{۲}}{۴}\Rightarrow cos۲۲/۵^\circ=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$$

حال کسینوس $۶۷/۵^\circ$ را حساب می‌کنیم.

$$cos۶۷/۵^\circ=۴cos^۳(۲۲/۵^\circ)-۳cos۲۲/۵^\circ=۴\times\frac{(\sqrt{۲+\sqrt{۲}})^۳}{۸}-۳\times\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$$

$$=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}(\sqrt{۲}-۱)$$

روابط به دست آمده در محاسبات نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل زاویه‌ها موجب می‌شود روابط جدید دیگری بین توابع مثلثاتی به دست آیند. مثلاً برای هر دو زاویه α و β داریم :

$$sin(\alpha+\beta)=sin\alpha cos\beta+cos\alpha sin\beta$$

$$sin(\alpha-\beta)=sin\alpha cos\beta-cos\alpha sin\beta$$

با جمع طرفین تساوی نتیجه می‌شود :

$$sin\alpha cos\beta=\frac{۱}{۲}(sin(\alpha+\beta)+sin(\alpha-\beta))$$

اتحاد بالا یک عمل ضرب نسبت‌های مثلثاتی را به یک عمل جمع نسبت‌های مثلثاتی دیگر تبدیل می‌کند.

تمرین در کلاس

۱ــ با استفاده از فرمول محاسبه $cos(\alpha+\beta)$ و $cos(\alpha-\beta)$ نتیجه بگیرید :

$$cos\alpha cos\beta=\frac{۱}{۲}(cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta))$$

$$sin\alpha sin\beta=\frac{۱}{۲}(cos(\alpha-\beta)-cos(\alpha+\beta))$$

۲ــ با استفاده از روابط بند (۱) و نتایج قبل با قرار دادن $A=\alpha+\beta$ و $B=\alpha-\beta$ نتیجه بگیرید :

$$sin A+sin B=۲sin\frac{A+B}{۲}cos\frac{A-B}{۲}$$

$$cos A+cos B=۲cos\frac{A+B}{۲}cos\frac{A-B}{۲}$$

$$cos A-cos B=-۲sin\frac{A+B}{۲}sin\frac{A-B}{۲}$$

این اتحادهای مثلثاتی کمک زیادی در ساده‌سازی عبارت‌های مثلثاتی می‌کنند و از آن‌ها در جهت تبدیل جمع‌ها به ضرب‌ها و برعکس تبدیل ضرب‌ها به جمع‌ها استفاده می‌شود.

مثال

۱ : نشان دهید $\cos 2x+\cos 4x=2\cos x\cos 3x$.

$$\cos 2x+\cos 4x=2\cos\frac{2x+4x}{2}\cos\frac{2x-4x}{2}$$

$$=2\cos 3x\cos(-x)=2\cos x\cos 3x$$

۲ : عبارت $\sin(x+h)-\sin x$ را به صورت حاصل ضربی تبدیل می‌کنیم.

$$\sin(x+h)-\sin x=\sin(x+h)+\sin(-x)=2\sin\frac{x+h+(-x)}{2}\cos\frac{x+h-(-x)}{2}$$

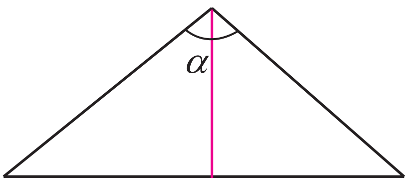
$$=2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})$$

مسائل

۱ـ اگر α زاویه‌ای در ربع اول و β زاویه‌ای در ربع سوم باشد که $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ و $\cos\beta=-\frac{5}{13}$، مقدارهای $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$ و $\tan(\alpha+\beta)$ را تعیین کنید.

۲ـ با استفاده از مثلث متساوی‌الساقین زیر که طول ساق‌های آن واحد است و زاویه رأس آن α است، با محاسبه مساحت آن از دو طریق نتیجه بگیرید :

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$



۳ـ نمودار تابع $y=3-6\sin^2 x$ را در بازه $[0,2\pi]$ رسم کنید. دوره تناوب این تابع چقدر است؟

۴ـ فرمول محاسبه $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ را از طریق فرمول محاسبه $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha+\beta)$ به دست آورید.

۵ـ برای یک زاویه دلخواه α که برای آن $\tan 2\alpha$ تعریف شده است درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

۶ـ اگر α زاویه‌ای در بازه $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ باشد که $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$، مقدار $\tan\frac{\alpha}{2}$ را حساب کنید.

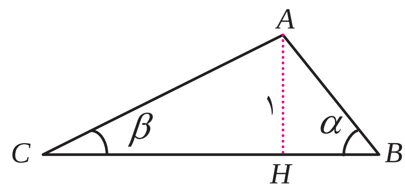
۷ــ درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید.

الف) $\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})$ ب) $۱+\sin ۲x=(\sin x+\cos x)^{۲}$

ج) $\sin ۲x=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^{۲} x}$ د) $\cos ۲x=\frac{۱-\tan^{۲} x}{۱+\tan^{۲} x}$

هـ) $\cos ۴x=۸\cos^{۴} x-۸\cos^{۲} x+۱$

۸ــ در این مسئله روش دیگری برای محاسبه فرمول $\sin(\alpha+\beta)$ در حالتی که α و β حاده هستند ارائه می‌شود. مثلث ABC را به گونه‌ای می‌سازیم که زاویه رأس B برابر α و زاویه رأس C برابر β باشد و ارتفاع وارد بر ضلع BC ۱ واحد باشد. چگونگی ساختن این مثلث را توضیح دهید.

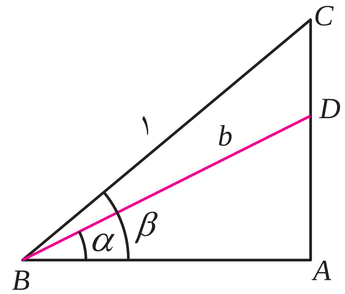


با محاسبه طول پاره خط‌های AB و AC و CH و BH بر حسب نسبت‌های مثلثاتی α و β و محاسبه مساحت مثلث ABC از دو طریق، یا با استفاده از رابطه سینوس‌ها در مثلث ABC، فرمول محاسبه $\sin(\alpha+\beta)$ را به دست آورید.

۹ــ در این مسئله روش دیگری برای محاسبه فرمول $\sin(\beta-\alpha)$ در حالتی که α و β حاده هستند و $\alpha<\beta$، ارائه می‌شود. در شکل زیر زاویه $\hat{A}$ قائمه است و ضلع BC واحد است. طول پاره خط BD را عددی مانند b فرض کنید. با محاسبه طول پاره خط‌های دیگری که در شکل دیده می‌شود و محاسبه مساحت مثلث‌هایی که در شکل دیده می‌شوند، با استفاده از تساوی:

$$(\text{مساحت } BDC) = (\text{مساحت } ABC) - (\text{مساحت } ADB)$$

ثابت کنید: $\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$



معادلات مثلثاتی

حل یک مسئله

آیا می‌توان مثلثی رسم کرد که طول دو ضلع آن ۲ و ۶ سانتی‌متر باشد و مساحت آن ۳ سانتی‌متر مربع شود؟ چند مثلث با این خاصیت موجودند و با چه روشی می‌توان آن‌ها را ساخت؟

معلم از دانش‌آموزان پرسید : چگونه می‌توانیم این مسئله را حل کنیم.

زهرا : باید طول ضلع سوم را هم بیابیم تا مثلث مشخص شود و طول این ضلع باید مقداری باشد تا مساحت مثلث ۳ سانتی‌متر مربع شود.

صدیقه : ولی ما رابطه‌ای که مساحت مثلث را بر حسب طول اضلاع بیان کند، نمی‌شناسیم پس راهی برای به دست آوردن ضلع سوم نخواهیم داشت.

معلم : البته چنین رابطه‌ای وجود دارد ولی می‌توانیم دنبال راه حل دیگری بگردیم. اما نکته‌ای که زهرا بیان کرد آن است که ما باید با روشی مثلث جواب را مشخص کنیم. اگر راهی برای مشخص کردن ضلع سوم نداریم باید دنبال چیز دیگری بگردیم.

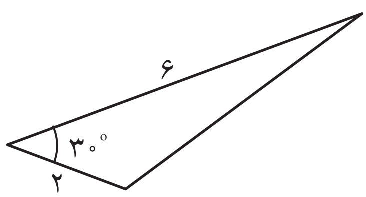
زینب : چطور است که زاویه بین آن دو ضلع را بیابیم؟

معلم : فکر بسیار خوبی است، چه راهی برای تعیین این زاویه داریم؟

زهرا : ما می‌توانیم مساحت یک مثلث را از طریق طول دو ضلع و زاویه بین آن‌ها به دست آوریم. اگر این زاویه را θ بنامیم باید داشته باشیم :

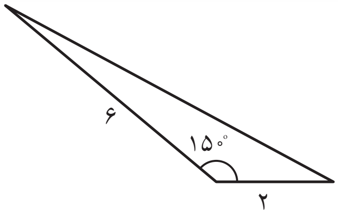
$$\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۲\times \sin\theta = ۳$$

زینب : از این معادله نتیجه می‌شود $\sin\theta=\frac{۱}{۲}$ یعنی θ، ۳۰ درجه است. پس جواب مسئله مثلث زیر است.



معلم : بله شما توانستید یک جواب برای این مسئله بیابید. اما آیا این معادله جواب دیگری ندارد؟

صدیقه : برای زاویه ۱۵۰ درجه نیز داریم $sin 150^\circ = \frac{1}{2}$ ، پس مثلث دیگری هم با شرایط مورد نظر مسئله وجود دارد.



معلم : آیا جواب دیگری هم می‌توانید پیدا کنید؟

زهرا : نه، جواب دیگری وجود ندارد زیرا زاویه‌های دیگری که سینوس آن‌ها برابر $\frac{1}{2}$ است نمی‌توانند زاویه یک مثلث باشند.

در برخی از مسائل مجهول یک زاویه است که اطلاعاتی از نسبت‌های مثلثاتی آن در دست است. اگر این اطلاعات را به صورت یک معادله بنویسیم، آن را یک معادله مثلثاتی می‌نامند.

مثال

در مثلثی که طول اضلاع آن ۱، ۳، $\sqrt{7}$ است، زاویه روبروی ضلع به طول $\sqrt{7}$ چقدر است؟

اگر این زاویه را θ بنامیم طبق رابطه کسینوس‌ها داریم :

$$(\sqrt{7})^2 = 1^2 + 3^2 - 2\times1\times3\cos\theta$$

این یک معادله مثلثاتی بر حسب θ است و با حل آن داریم : $\cos\theta = \frac{1}{2}$ تنها زاویه‌ای که بتواند زاویه یک مثلث باشد و کسینوس آن $\frac{1}{2}$ باشد ۶۰ درجه است.

حل معادلات مثلثاتی

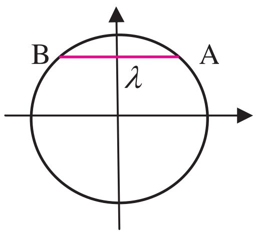
شیوه کلی حل معادلات مثلثاتی به این صورت است که پس از محاسبات جبری معادله را به یکی از شکل‌های $sin\alpha = sin\beta$ یا $cos\alpha = cos\beta$ یا $tan\alpha = tan\beta$ در بیاوریم.

در مثال بالا، معادله مثلثاتی پس از محاسبات جبری به صورت $\cos\theta = \frac{1}{2}$ در آمد یعنی $\cos\theta = \cos 60^\circ$.

همچنین در مسئله مطرح شده، معادله به صورت $\sin\theta = \frac{1}{2}$ در آمد و این یعنی $\sin\theta = \sin 30^\circ$.

حل یک مسئله

اگر α و β دو زاویه باشند که $\sin\alpha = \sin\beta$ ، این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟



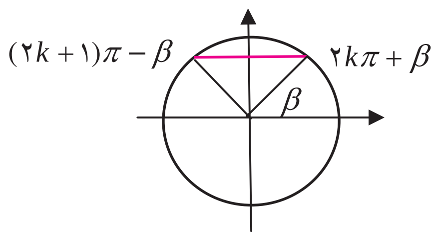
مناسب است که این مسئله را از طریق دایره مثلثاتی بررسی کنیم. اگر $sin\alpha = sin\beta = \lambda$، λ عددی در بازه $[-۱,۱]$ است و زاویه‌هایی که سینوس آن‌ها λ است، طبق شکل زیر آن‌هایی هستند که نقطه متناظر آن‌ها در دایره مثلثاتی در نقطه A یا B قرار گیرد.

اگر نقطه‌های متناظر α و β روی دایره مثلثاتی هر دو در A یا هر دو در B قرار گیرند، معنای آن این است که $\alpha = \beta + ۲k\pi$ که k عددی صحیح است. و اگر نقطه‌های متناظر α و β روی دایره مثلثاتی یکی در A و دیگری در B قرار گیرند معنای آن این است که α و $\pi - \beta$ در مضرب صحیحی از ۲π اختلاف دارند، یعنی $\alpha = \pi - \beta + ۲k\pi$ که k عددی صحیح است.

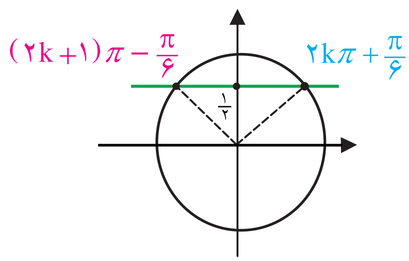
بنابراین اگر α و β دو زاویه باشند که $sin\alpha = sin\beta$ می‌توان نتیجه گرفت که $\alpha = \beta + ۲k\pi$ یا $\alpha = \pi - \beta + ۲k\pi$ که k عددی صحیح است. به عبارت دیگر :

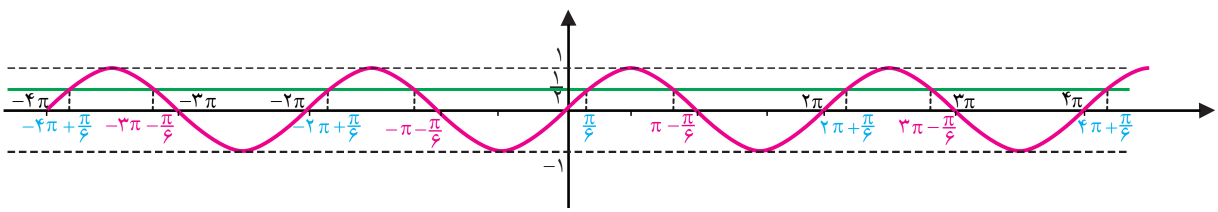
قضیه :

معادله $sin\alpha = sin\beta$ دارای جواب‌هایی به صورت $\alpha = ۲k\pi + \beta$ و $\alpha = (۲k+۱)\pi - \beta$ است که k عددی صحیح است.



به‌عنوان نمونه وضعیت معادله $sin\theta = \frac{۱}{۲}$ را همزمان روی دایره مثلثاتی و نمودار سینوسی در شکل بعد مشخص شده است.





$$sin\theta = \frac{۱}{۲} \begin{cases} \theta = \dots, -۴\pi+\frac{\pi}{۶}, -۲\pi+\frac{\pi}{۶}, \frac{\pi}{۶}, ۲\pi+\frac{\pi}{۶}, ۴\pi+\frac{\pi}{۶}, \dots \rightarrow \theta = ۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \\ \theta = \dots, -۳\pi-\frac{\pi}{۶}, -\pi-\frac{\pi}{۶}, \pi-\frac{\pi}{۶}, ۳\pi-\frac{\pi}{۶}, \dots \rightarrow \theta = (۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

مثال

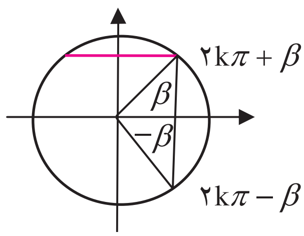
۱ : معادله $sin۲x = sin۳x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل $۳x = ۲k\pi + ۲x$ و $۲x = (۲k\pi + ۱)\pi - ۳x$ هستند. در نتیجه $x = ۲k\pi$ و $x = \frac{۲k+۱}{۵}\pi$ جواب‌های این معادله‌اند.

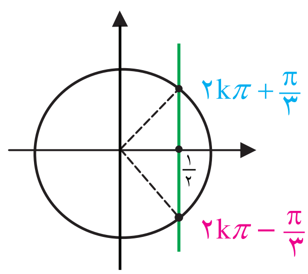
با استدلالی مشابه از طریق دایره مثلثاتی می‌توان نتیجه گرفت که اگر α و β دو زاویه باشند که $cos\alpha = cos\beta$ آنگاه $\alpha = \beta + ۲k\pi$ یا $\alpha = -\beta + ۲k\pi$ که k عددی صحیح است. به عبارت دیگر :

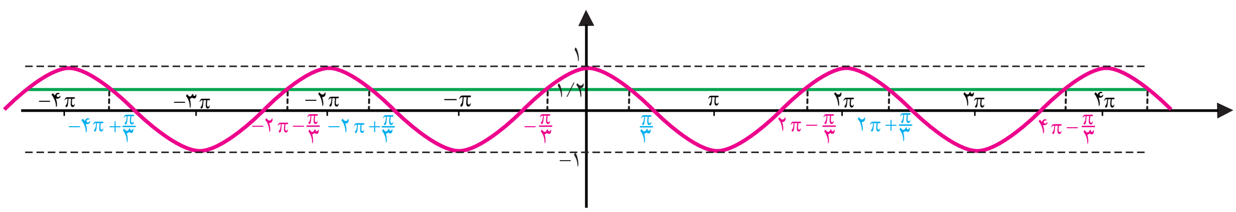
قضیه :

معادله $cos\alpha = cos\beta$ دارای جواب‌هایی به صورت $\alpha = ۲k\pi \pm \beta$ است که k عددی صحیح است.



به‌عنوان نمونه وضعیت معادله $cos\theta = \frac{۱}{۲}$ در تصویر زیر مشخص می‌باشد.





$$cos\theta = \frac{۱}{۲} \nearrow \theta = \ldots, -۴\pi + \frac{\pi}{۳}, -۲\pi + \frac{\pi}{۳}, \frac{\pi}{۳}, ۲\pi + \frac{\pi}{۳}, \ldots \rightarrow \theta = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳}$$

$$cos\theta = \frac{۱}{۲} \searrow \theta = \ldots, -۲\pi - \frac{\pi}{۳}, -\frac{\pi}{۳}, ۲\pi - \frac{\pi}{۳}, ۴\pi - \frac{\pi}{۳}, \ldots \rightarrow \theta = ۲k\pi - \frac{\pi}{۳}$$

مثال

۲ : معادله $\cos x = \cos 2x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل $x = 2k\pi \pm 2x$ هستند. در نتیجه $x = 2k\pi$ و $x = \frac{2k\pi}{3}$ جواب‌های این معادله‌اند. البته جواب‌های به صورت $x = \frac{2k\pi}{3}$ خود به خود جواب‌های به صورت $x = 2k\pi$ را در بر دارد.

اگر α و β دو زاویه باشند که $\tan\alpha = \tan\beta$ می‌توان نتیجه گرفت که $\alpha = k\pi + \beta$ که k عددی صحیح است. به عبارت دیگر :

قضیه :

معادله $\tan\alpha = \tan\beta$ دارای جواب‌هایی به صورت $\alpha = k\pi + \beta$ است که k عددی صحیح است.

مثال

۳ : معادله $\tan x = \tan 5x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل $5x = k\pi + x$ هستند. پس $x = k\frac{\pi}{4}$. البته مقدارهای $\tan x$ و $\tan 5x$ نیز باید قابل محاسبه باشند، پس همچنین x و $5x$ نباید مضرب فردی از $\frac{\pi}{2}$ باشند.

۴ : معادله $\sin x + \cos x = 1$ را حل می‌کنیم.

باید سعی کنیم که با محاسبات جبری، این معادله را به یکی از سه شکل صفحهٔ قبل درآوریم. مثلاً می‌توانیم محاسبات زیر را انجام دهیم.

$$\sin x + \cos x = 1 \Rightarrow \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} + \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow 2\tan\frac{x}{2} + 1 - \tan^2\frac{x}{2} = 1 + \tan^2\frac{x}{2} \Rightarrow \tan\frac{x}{2}\left(1-\tan\frac{x}{2}\right) = 0$$

بنابراین معادله دارای دو دسته جواب $\tan\frac{x}{2} = 0$ و $\tan\frac{x}{2} = 1$ است. اولی به صورت $\tan\frac{x}{2} = \tan 0$ و دومی به صورت $\tan\frac{x}{2} = \tan\frac{\pi}{4}$ است. از اولی جواب‌های $\frac{x}{2} = k\pi + 0$ و از دومی جواب‌های $\frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4}$ به دست می‌آیند. در نهایت کلیه جواب‌ها به صورت $x = 2k\pi$ و $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ خواهد بود.

یک راه حل دیگر آن است که در تمرینات دیدید که $sin\,x+cos\,x=\sqrt{۲}\,sin(x+\frac{\pi}{۴})$ ، بنابراین معادله به صورت $\sqrt{۲}\,sin(x+\frac{\pi}{۴})=۱$ در می‌آید. در نتیجه $sin(x+\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=sin\frac{\pi}{۴}$. از این معادله جواب‌های $x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}$ و $x+\frac{\pi}{۴}=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۴}$ به دست می‌آیند که نهایتاً همان جواب‌های $x=۲k\pi$ و $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ می‌باشند.

۵ : کلیه جواب‌های معادله $cost(۲cost-۹)=۵$ را به دست آورید.

ابتدا معادله را به صورت $۲cos^۲t-۹cost-۵=۰$ می نویسیم. این یک معادله درجه دوم بر حسب $cost$ است. یعنی اگر قرار دهیم $x=cost$، معادله به شکل $۲x^۲-۹x-۵=۰$ در می‌آید. با حل این معادله درجه دوم جواب‌های $x=۵$ و $x=-\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آیند. حال باید معادلات $cost=۵$ و $cos\,t=-\frac{۱}{۲}$ را حل کنیم. اولین معادله جواب ندارد(چرا؟) و دومین معادله به شکل $cos\,t=cos\frac{۲\pi}{۳}$ نوشته می‌شود پس کلیه جواب‌ها به صورت $t=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$ می‌باشند که k عددی صحیح است.

تمرین در کلاس

۱ــ اگر $\theta_۰$ زاویه حاده‌ای باشد که $sin\theta_۰=\frac{۳}{۵}$ ، کلیه جواب‌های معادله $۶cosx+۸sinx=۵$ را بر حسب $\theta_۰$ به‌دست آورید و آن جواب‌هایی که در بازهٔ $\pi<x<۲\pi$ می‌باشند را تعیین کنید.

۲ــ کلیه جواب‌های معادله $\frac{\sqrt{۳}}{sin\,x}+\frac{۱}{cos\,x}=۴$ را تعیین کنید.

۳ــ کلیه جواب‌های معادله $tan\,x-cot\,x=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ را تعیین کنید.

مسائل

۱ــ معادلات زیر را حل کنید و جواب‌هایی که در بازه $[-\pi,\pi]$ هستند را تعیین کنید.

الف) $sinx-cosx=۱$ ب) $sin۲\theta+\sqrt{۲}\,cos\theta=۰$ ج) $tanxtan۲x=۱$

د) $۲sin^۲t+sint-۱=۰$ هـ) $cos۲x-cosx+۱=۰$ و) $sinx+sin۲x+sin۳x=۰$

۲ــ مثلثی رسم کرده‌ایم که طول اضلاع آن ۲ و $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}+۱$ است. زاویه‌های این مثلث را به دست آورید.

وارون توابع مثلثاتی

حل یک مسئله

اگر طول وتر یک دایره را بدانیم، زاویه مرکزی روبری آن چقدر است؟

در فعالیت زیر سعی خواهیم کرد این مسئله را حل کنیم.

فعالیت ۴

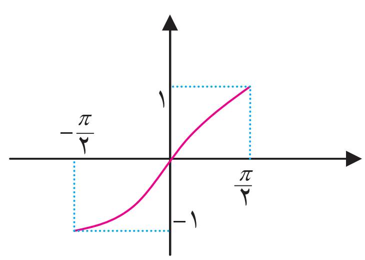
۱ــ در دایره واحد وتر دلخواهی به طول x رسم کنید. x در چه بازه‌ای تغییر می‌کند.

۲ــ زوایه مرکزی روبروی این وتر را روی شکل نمایش دهید و آن را θ بنامید. θ در چه بازه‌ای تغییر می‌کند.

۳ــ آیا x تابعی از θ است؟ این تابع چیست و دامنه و برد آن چیست؟ آیا این تابع یک به یک است؟

۴ــ آیا θ تابعی از x است؟ آیا می‌توانید فرمولی برای این تابع بنویسید؟

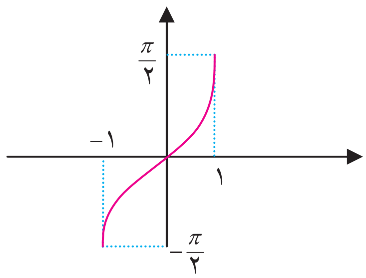
در فعالیت بالا متوجه می‌شویم که لازم است وارونی برای تابع $sinx$ داشته باشیم، اما این تابع یک به یک نیست و در کل دامنه آن وارون پذیر نیست. اما این تابع روی دامنه‌های کوچک‌تر می‌تواند یک به یک و در نتیجه وارون‌پذیر باشد. بنا به قرارداد تابع $sinx$ را روی بازه $\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ محدود می‌کنند که در این بازه صعودی و یک به یک است.



با این عمل تابعی یک به یک به دست می‌آید که دامنه آن $\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ و برد آن $[-۱ , ۱]$ است. وارون این تابع را با $sin^{-۱} x$

نشان می‌دهند که تابعی صعودی با دامنه $[-۱ , ۱]$ و برد $\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ است و نمودار آن با قرینه‌یابی نمودار تابع $sinx$ نسبت به نیمساز

ربع اول به شکل زیر درمی‌آید.



توجه داشته باشید که $sin^{-1} x$ را با $\frac{1}{\sin x}$ اشتباه نگیرید. اولی به معنای مقدار تابع وارون $sinx$ در نقطه x است و دومی به معنای وارون مقدار $sinx$ است و این‌ها با هم متفاوتند.

مثال

۱ : $sin^{-1}(\frac{۱}{۲})=\frac{\pi}{۶}$ ، زیرا $\frac{\pi}{۶}$ زاویه‌ای در بازه $\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ است و $sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$.

۲ : مقدار $sin^{-1}(sin\frac{۴\pi}{۳})$ را حساب می‌کنیم.

ابتدا داریم $sin\frac{۴\pi}{۳}=sin(\pi+\frac{\pi}{۳})=-sin\frac{\pi}{۳}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$. بنابراین مقدار $sin^{-1}(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ را باید حساب کنیم.

$sin^{-1}(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ زاویه‌ای است که سینوس آن $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است و این زاویه در بازه $\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ قرار دارد. این زاویه $-\frac{\pi}{۳}$ است، پس $sin^{-1}(sin\frac{۴\pi}{۳})=-\frac{\pi}{۳}$.

۳ : مقدار $cos(sin^{-1}(\frac{۳}{۵}))$ را حساب می‌کنیم.

فرض کنید α آن زاویه‌ای باشد که در بازه $\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ قرار دارد و $sin\alpha=\frac{۳}{۵}$ ، یعنی $sin^{-1}(\frac{۳}{۵})=\alpha$.

بنابراین باید $cos\alpha$ را حساب کنیم. از آنجا که $sin\alpha=\frac{۳}{۵}$ و α در بازه $\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ قرار دارد، داریم :

$$\cos\alpha=\sqrt{۱-sin^{۲}\alpha}=\sqrt{۱-\frac{۹}{۲۵}}=\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}}=\frac{۴}{۵}$$

بنابراین : $cos(sin^{-1}(\frac{۳}{۵}))=\frac{۴}{۵}$.

تمرین در کلاس

۱ــ مقدار $sin^{-1} x$ را با زبان فارسی بیان کنید.

۲ــ در دایره مثلثاتی مقدارهای x و $sin^{-1} x$ را نشان دهید و روی شکل دامنه و برد این تابع را توضیح دهید.

۳ــ مقدارهای زیر را حساب کنید.

الف) $sin^{-1}(1)$ ب) $sin^{-1}(\frac{3}{5})+sin^{-1}(\frac{4}{5})$

ج) $sin^{-1}(sin\frac{5\pi}{4})$ د) $sin^{-1}(cos\frac{\pi}{12})$

۴ــ تابعی که زاویه مرکزی روبروی یک وتر را بر حسب طول وتر به دست می‌دهد بنویسید.

به طور مشابه برای تابع $cosx$ نیز لازم است تابع وارونی به دست آوریم. در فعالیت زیر سعی خواهیم کرد این تابع وارون را بسازیم.

فعالیت ۵

۱ــ آیا تابع $cosx$ در کل دامنه آن وارون پذیر است؟

۲ــ با محدود کردن تابع $cosx$ به بازه $[0, \pi]$، آیا تابع جدید یک به یک می‌شود؟ نظر خود را از طریق دایره مثلثاتی توضیح دهید.

۳ــ وارون این تابع محدود شده از $cosx$ را با $cos^{-1} x$ نشان می‌دهند. دامنه و برد $cos^{-1} x$ را تعیین کنید و نمودار آن را رسم کنید.

۴ــ مقدار $cos^{-1} x$ را به زبان فارسی بیان کنید.

مثال

۱ : $cos^{-1}(-\frac{1}{2})=\frac{2\pi}{3}$، زیرا $\frac{2\pi}{3}$ زاویه‌ای در بازه $[0, \pi]$ است و $cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

۲ : مقدار $cos^{-1}(cos(-\frac{4\pi}{3}))$ را حساب می‌کنیم.

ابتدا داریم $cos(-\frac{4\pi}{3})=cos(-2\pi+\frac{2\pi}{3})=cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$. بنابراین مقدار $cos^{-1}(-\frac{1}{2})$ را باید حساب کنیم. $cos^{-1}(-\frac{1}{2})$ زاویه‌ای است که کسینوس آن $-\frac{1}{2}$ است و این زاویه در بازه $[0, \pi]$ قرار دارد. این زاویه $\frac{2\pi}{3}$ است،

پس $\cos^{-1}(\cos(-\frac{۴\pi}{۳}))=\frac{۲\pi}{۳}$.

۳ : مقدار $\sin(\cos^{-1}(\frac{۳}{۵}))$ را حساب می‌کنیم.

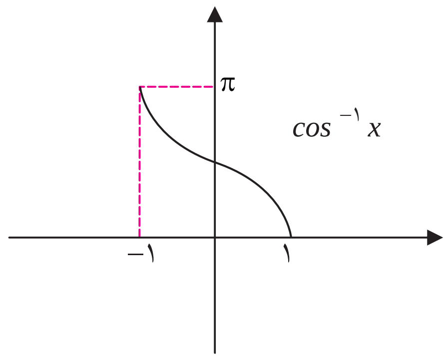
فرض کنید α آن زاویه‌ای باشد که در بازه $[۰ , \pi]$ قرار دارد و $\cos\alpha=\frac{۳}{۵}$ ، یعنی $\alpha=\cos^{-1}\frac{۳}{۵}$. بنابراین باید $\sin\alpha$ را حساب کنیم. از آنجا که $\cos\alpha=\frac{۳}{۵}$ و α در بازه $[۰ , \pi]$ قرار دارد، داریم :

$$\sin\alpha=\sqrt{۱-\cos^{۲}\alpha}=\sqrt{۱-\frac{۹}{۲۵}}=\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}}=\frac{۴}{۵}$$

بنابراین :

$$\sin(\cos^{-۱}(\frac{۳}{۵}))=\frac{۴}{۵}$$

$\cos^{-۱} x$ تابعی نزولی با دامنه $[-۱ , ۱]$ و برد $[۰ , \pi]$ است و نمودار آن به شکل زیر خواهد بود.



تمرین در کلاس

۱ــ در دایره مثلثاتی x و $\cos^{-۱} x$ را نمایش دهید و روی شکل دامنه و برد تابع $\cos^{-۱} x$ را توضیح دهید.

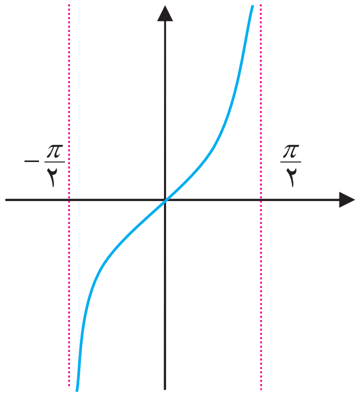
۲ــ مقدارهای زیر را حساب کنید.

الف) $\cos^{-۱}(-۱)$ ب) $\sin^{-۱}(\frac{۳}{۵})+\cos^{-۱}(\frac{۳}{۵})$

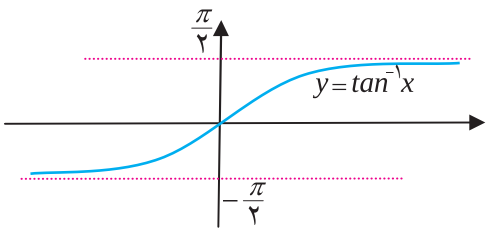
ج) $\cos^{-۱}(\cos\frac{۵\pi}{۴})$ د) $\cos^{-۱}(\sin\frac{\pi}{۸})$

۳ــ در مثلثی که طول دو ضلع آن به طور ثابت ۳ و ۵ است، زاویه بین این دو ضلع تابعی از طول ضلع سوم است. این تابع را به دست آورید. دامنه و بُرد این تابع چیست؟

تابع تانژانت نیز به خاطر متناوب بودن در کل دامنه خود یک به یک نیست ولی اگر آن را به بازه $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ محدود کنیم تابعی صعودی به دست می‌آید که یک به یک نیز خواهد بود و دارای وارون می‌باشد.



وارون این تابع را با $tan^{-۱}x$ نشان می‌دهند. دامنه این تابع کل $\mathbb{R}$ است و برد آن بازه $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ می‌باشد. با قرینه‌یابی نمودار $tanx$ نسبت به نیمساز ربع اول، نمودار $tan^{-۱}x$ به شکل زیر خواهد بود.



برای هر x، $tan^{-۱}x$ زاویه‌ای را نشان می‌دهد که در بازه $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ قرار دارد و تانژانت آن برابر x است.

مثال

۱ : $tan^{-۱}(-۱)=-\frac{\pi}{۴}$، زیرا $-\frac{\pi}{۴}$ زاویه‌ای در بازه $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ است و $tan(-\frac{\pi}{۴})=-۱$.

۲ : مقدار $tan^{-۱}(tan\frac{۴\pi}{۳})$ را حساب می‌کنیم.

ابتدا داریم $tan\frac{۴\pi}{۳}=tan(\pi+\frac{\pi}{۳})=tan\frac{\pi}{۳}=\sqrt{۳}$. بنابراین مقدار $tan^{-۱}(\sqrt{۳})$ را باید حساب کنیم.

$tan^{-۱}(\sqrt{۳})$ زاویه‌ای است که تانژانت آن $\sqrt{۳}$ است و این زاویه در بازه $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ قرار دارد. این زاویه $\frac{\pi}{۳}$

است، پس $\frac{\pi}{۳}=tan^{-۱}(tan\frac{۴\pi}{۳})$.

۳ : مقدار $cos(tan^{-۱}(\frac{۳}{۴}))$ را حساب می‌کنیم.

فرض کنید α آن زاویه‌ای باشد که در بازه $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ قرار دارد و $tan\alpha=\frac{۳}{۴}$ ، یعنی $tan^{-۱}\frac{۳}{۴}=\alpha$. بنابراین باید $cos\alpha$ را حساب کنیم. از آنجا که $tan\alpha=\frac{۳}{۴}$ و α در بازه $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ قرار دارد، داریم :

$$cos\,\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۱+tan^{۲}\alpha}}=\frac{۱}{\sqrt{۱+\frac{۹}{۱۶}}}=\frac{۱}{\sqrt{\frac{۲۵}{۱۶}}}=\frac{۱}{\frac{۵}{۴}}=\frac{۴}{۵}$$

بنابراین : $cos(tan^{-۱}(\frac{۳}{۴}))=\frac{۴}{۵}$.

تمرین در کلاس

۱ــ برای هر x، در دایره مثلثاتی x و $tan^{-۱}\,x$ را نمایش دهید و روی شکل دامنه و برد تابع $tan^{-۱}\,x$ را توضیح دهید.

۲ــ مقدارهای زیر را حساب کنید.

الف) $tan^{-۱}(-\sqrt{۳})$

ب) $tan^{-۱}(\sqrt{۳})+tan^{-۱}(\frac{۱}{\sqrt{۳}})$

ج) $tan^{-۱}(tan\frac{۵\pi}{۴})$

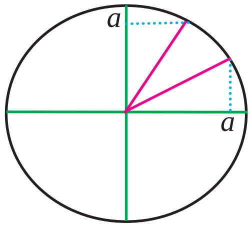
د) $sin^{-۱}(tan\frac{۳\pi}{۴})$

۳ــ راجع به وضعیت وارون‌پذیری و نیز تابع وارون $y=\frac{۱-tan\,x}{۱+tan\,x}$ بحث کنید.

مسائل

۱ــ برای هر عدد $۰<a<۱$ از طریق شکل زیر استدلال کنید که

$$sin^{-۱}\,a+cos^{-۱}\,a=\frac{\pi}{۲}$$



در حالت $-1 < a < 0$ با استدلال مشابه درستی تساوی صفحهٔ قبل را ثابت کنید.

۲ــ از طریق دایره مثلثاتی نشان دهیدکه برای هر $-1 \leq x \leq 1$ داریم :

$$sin^{-1}(-x) = -sin^{-1}x$$

$$cos^{-1}(-x) = \pi - cos^{-1}x$$

۳ــ برای هر $-1 \leq x \leq 1$ از طریق دایره مثلثاتی نشان دهید :

$$sin(cos^{-1}x) = cos(sin^{-1}x) = \sqrt{1-x^2}$$

۴ــ برای هر x نشان دهید :

$$sin(tan^{-1}x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad , \quad cos(tan^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

۵ــ در مورد فرد یا زوج بودن توابع $sin^{-1}x$, $cos^{-1}x$, $tan^{-1}x$ چه می‌توان گفت؟

۶ــ برای هر عدد مثبت x نشان دهید $tan^{-1}x + tan^{-1}\frac{1}{x}$ زاویه‌ای در بازه $(0, \pi)$ است و با محاسبه سینوس یا کسینوس این زاویه نتیجه بگیرید :

$$tan^{-1}x + tan^{-1}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$