فصل دوم

سیستم‌های دو نیرویی

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل، هنرجو باید بتواند :

۱ــ با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث مقدار و امتداد برآیند را در سیستم‌های دو نیرویی متعامد محاسبه کند.

۲ــ با استفاده از قانون کسینوس‌ها و سینوس‌ها مقدار و امتداد برآیند را در سیستم‌های دو نیروی غیرمتعامد محاسبه کند.

۳ــ روش‌های ترسیمی (قانون متوازی الاضلاع و مثلث) را در حل سیستم‌های دو نیرویی به‌کار گیرد.

۴ــ با استفاده از روش تجزیه، مؤلفه‌های یک بردار صفحه‌ای را به‌دست آورد.

۵ــ گشتاور یک نیرو را نسبت به نقطه‌ی مشخصی محاسبه کند.

۶ــ قضیه‌ی واریگنون را در گشتاورگیری یک‌دسته نیرو به‌کار گیرد.

۷ــ کوپل ناشی از دو نیروی زوج را محاسبه کند.

۸ــ زوج نیروهای معادل یک کوپل را در حالات محدودی به‌دست آورد.

۹ــ نیروی وارد بر سیستم‌های صلب را با استفاده از خاصیت زوج نیروها به‌نقاط مشخص انتقال دهد.

چشم‌انداز

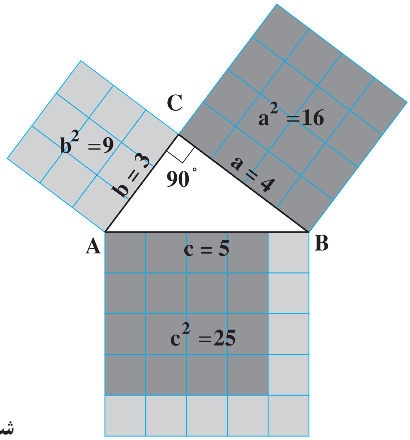
به‌طورکلی هر سیستم می‌تواند تحت تأثیر تعداد n نیرو قرار گیرد. در استاتیک تعداد نیروهای وارد بر یک سیستم اهمیتی ندارد بلکه آنچه مهم است این است که باید، برای به‌دست آوردن برآیند، n نیروی وارد بر یک سیستم، آن سیستم تشکیل یک (n +۱) ضلعی بسته بدهد به طوری که یکی از مؤلفه‌ها، برآیند کل نیروها باشد ؛ بنابراین در مورد سیستم‌های دو نیرویی شرط به‌دست آوردن برآیند تشکیل یک سه ضلعی بسته (مثلث) است.

۱ــ۲ ــ سیستم‌های دو نیرویی متعامد

اگر بر سیستمی دو نیروی متعامد اثر کرده باشند شرط به‌دست آوردن برآیند تشکیل سه ضلعی بسته (یا مثلث قائم‌الزاویه) است. بررسی این سیستم‌ها با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث امکان‌پذیر است.

۱ــ۱ــ۲ــ کاربرد قضیه‌ی فیثاغورث: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی شکل ۱ــ۲ می‌توان نوشت :

$$a^{۲} = ۴^{۲} = ۱۶$$
$$b^{۲} = ۳^{۲} = ۹$$
$$c^{۲} = ۵^{۲} = ۲۵$$

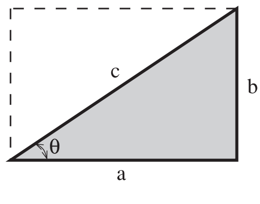


شکل ۱ــ۲

۲ــ۱ــ۲ــ قضیه‌ی فیثاغورث: در مثلث قائم‌الزاویه مربع‌وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر.

$$c^{۲} = a^{۲} + b^{۲}$$

$$\theta = tg^{-۱}\frac{b}{a}$$



شکل ۲ــ۲

$$tg\theta = \frac{\text{ضلع مقابل زاویه } \theta}{\text{ضلع مجاور زاویهٔ } \theta} = \frac{b}{a}$$

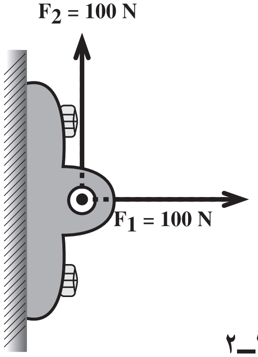
علائم: در مثلث شکل (۲ــ۲)، c ضلع مقابل زاویه‌ی قائمه (وتر)، a و b اضلاع مجاور زاویه‌ی قائمه و θ (تتا) زاویه‌ی بین وتر و یک ضلع از مثلث است. همچنین، $tg^{-۱}$ را بخوانید Arctg (آرک تانژانت).

مثال ۱: در شکل ۳ــ۲ برآیند نیروهای متعامد را R بنامید ؛ آنگاه مطلوب است :

الف ــ تعیین مقدار برآیند ؛

ب ــ تعیین زاویه‌ی برآیند با افق ؛

ج ــ ترسیم برآیند روی شکل ۷ــ۲.



شکل ۳ــ۲

حل:

گام ۱: در این مسئله دو نیروی متعامد ۱۰۰ نیوتنی داده شده است، تعیین مقدار برآیند و زاویه‌ی آن با افق موردنظر است.

گام ۲: داده‌ها و خواسته‌های مسئله عبارت‌اند از :

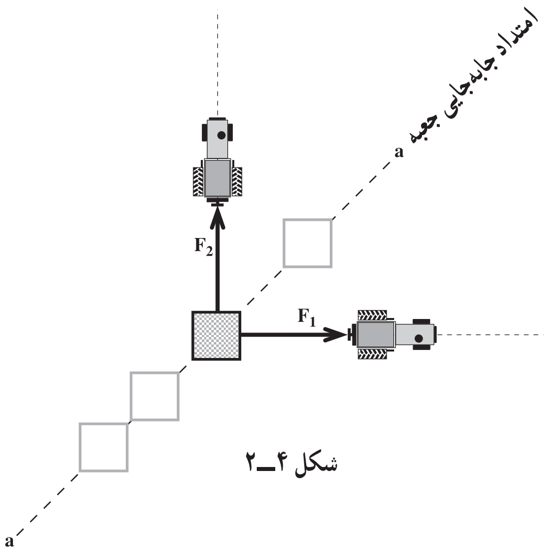
$F_1 = 100 N \rightarrow$

$F_2 = 100 N \uparrow$

$R = ?$ (برآیند دو نیروی F_1 و F_2)

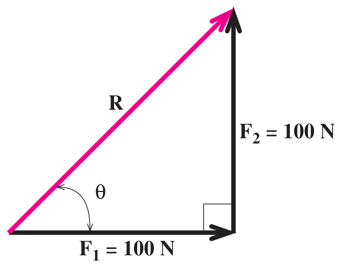
$\theta = ?$ (زاویه‌ی برآیند با افق)

گام۳: برای تعیین امتداد برآیند می‌توان فرض کرد که جعبه‌ای توسط دو نفر با نیروهای F_1 و F_2 در راستای نیروها کشیده شود. براساس تجسم فیزیکی و اصل مربوط به برآیند می‌توان نتیجه گرفت که این جعبه در راستایی، مانند a-a جابه‌جا می‌شود.

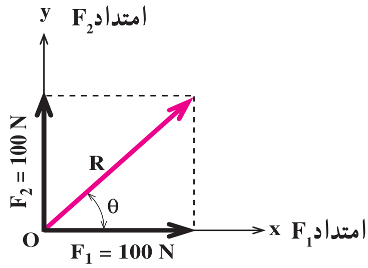


شکل ۴ــ۲

گام ۴: امتداد نیروها و نیز برآیند آن‌ها ترسیم می‌شود.



شکل ۶ــ۲



شکل ۵ــ۲

گام ۵: روابط مربوط به مسئله عبارت‌اند از :

$$R^۲ = F_۱^۲ + F_۲^۲ \qquad \theta = tg^{-۱}\frac{F_۲}{F_۱}$$

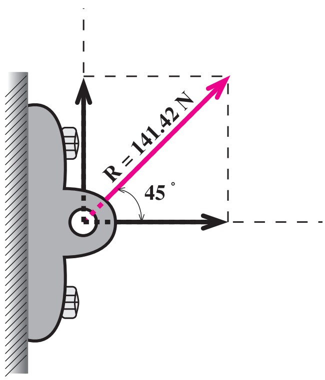
گام ۶: واحدهای به‌کار گرفته شده، نیوتن (واحد پایه) است که نیازی به تبدیل ندارند.

گام ۷: $R^۲ = ۱۰۰^۲ + ۱۰۰^۲ = ۱۰\,۰۰۰ + ۱۰\,۰۰۰ = ۲۰\,۰۰۰$

$$R = \sqrt{۲۰\,۰۰۰} = ۱۴۱/۴۲ \ \ N \qquad \theta = tg^{-۱}\frac{۱۰۰}{۱۰۰} = tg^{-۱}(۱) = ۴۵^\circ$$

گام ۸: مقدار برآیند با توجه به وضعیت قرارگیری نیروها می‌بایست بین ۱۰۰ تا ۲۰۰ نیوتن باشد که جواب به‌دست آمده هم همین را نشان می‌دهد. همچنین به علت مساوی بودن دو نیروی $F_۱$ و $F_۲$ زاویه برآیند تعیین شده (۴۵ درجه) صحیح است.

گام ۹: ترسیم هندسی برآیند (شکل ۷ــ۲).



شکل ۷ــ۲

سخنی با هنرجویان: در حل مسایل، به‌کارگیری توصیه‌های ده‌گانه که در فصل اول خواندید بسیار مؤثر خواهد بود، لذا پیشنهاد می‌کنیم به عنوان یک روش هماهنگ و مفید در حل تمامی مسایل از همه و یا تعدادی از این توصیه‌ها استفاده کنید. در این کتاب به علت کاهش حجم کتاب و حل مسایل بیش‌تر توصیه‌های ارائه شده به‌صورت مرحله‌بندی شده تنظیم نمی‌شوند.

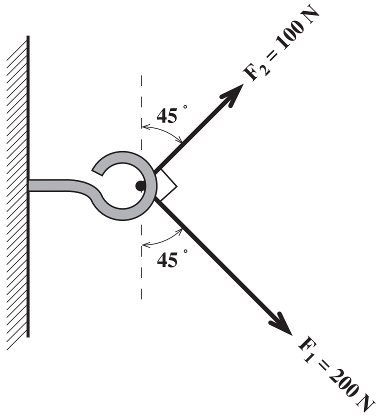
مثال۲: در سیستمی مطابق شکل ۸ــ۲ مطلوب است :

الف ــ محاسبه‌ی مقدار برآیند ؛

ب ــ محاسبه‌ی زاویه‌ی برآیند با امتداد نیروی $F_۱$ ؛

ج ــ محاسبه‌ی زاویه‌ی برآیند با امتداد افق ؛

د ــ محاسبه‌ی زاویه‌ی برآیند با نیروی $F_۲$.



شکل ۸ــ۲

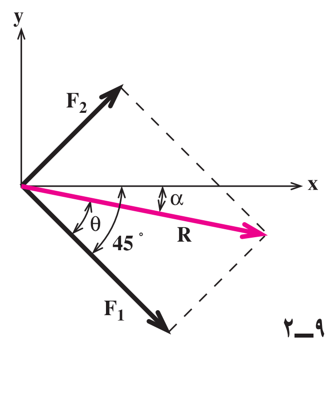
حل:

الف ــ

$$R^۲ = F_۱^۲ + F_۲^۲$$

$$R^۲ = ۲۰۰^۲ + ۱۰۰^۲ = ۵۰\ ۰۰۰$$

$$R = \sqrt{۵۰\ ۰۰۰} = ۲۲۳/۶۱\ \text{N}$$



شکل ۹ــ۲

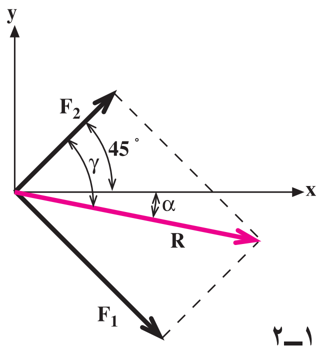
ب ــ زاویه‌ی برآیند با نیروی $F_۱$ $\theta = tg^{-۱}\dfrac{F_۲}{F_۱} = tg^{-۱}\dfrac{۱۰۰}{۲۰۰} = ۲۶/۵۶۵^\circ$

ج ــ زاویه‌ی برآیند با افق را با α (آلفا) نمایش می‌دهیم که مقدار آن به سادگی به‌دست می‌آید.

$$\alpha = ۴۵ - \theta = ۴۵ - ۲۶/۵۶۵ = ۱۸/۴۳۵^\circ$$

د ــ برای محاسبه‌ی زاویه‌ی برآیند با نیروی $F_۲$ می‌توان از رابطه $\gamma = tg^{-۱}\dfrac{F_۱}{F_۲}$ (گاما) استفاده کرد و یا به طریق هندسی عمل نمود : (شکل ۱۰ــ۲).

$$\gamma = tg^{-۱}\frac{۲۰۰}{۱۰۰} = ۶۳/۴۳۵^\circ$$



شکل ۱۰ــ۲

زاویه‌ی γ را می‌توان به طریق هندسی، با توجه به شکل ۱۰ــ۲ محاسبه کرد.

$$\gamma = ۴۵ + \alpha = ۴۵ + ۱۸/۴۳۵ = ۶۳/۴۳۵^\circ$$

تمرین

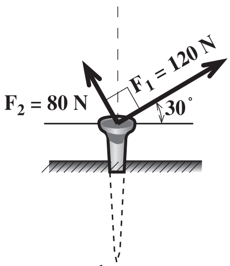
۱ــ بر میخی مطابق شکل دو نیروی متعامد ۱۲۰ و ۸۰ نیوتنی وارد می‌شود. مطلوب است :

الف ــ محاسبه‌ی مقدار برآیند دو نیرو ؛

ب ــ محاسبه‌ی زاویه‌ی برآیند با امتداد $F_۱$ ؛

ج ــ محاسبه‌ی زاویه‌ی برآیند با امتداد $F_۲$ ؛

د ــ محاسبه‌ی زاویه‌ی برآیند با امتداد افق.



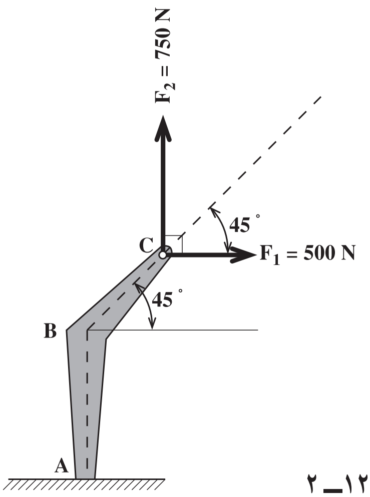
شکل ۱۱ــ۲

۲ــ دو نیروی $F_۱$ و $F_۲$ بر بازویی مطابق شکل اثر می‌کنند. مطلوب است :

الف ــ محاسبه‌ی مقدار برآیند این دو نیرو ؛

ب ــ محاسبه‌ی زاویه‌ی برآیند با افق ؛

ج ــ محاسبه‌ی زاویه‌ی برآیند با امتداد BC.

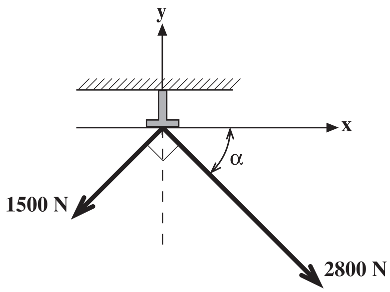


شکل ۱۲ــ ۲

۳ــ در شکل ۱۳ــ۲ مطلوب است :

الف ــ محاسبه‌ی مقدار برآیند نیروهای نشان داده شده ؛

ب ــ محاسبه‌ی زاویه‌ی α طوری که برآیند حاصل منطبق بر محور yها و جهت آن به سمت پایین باشد.



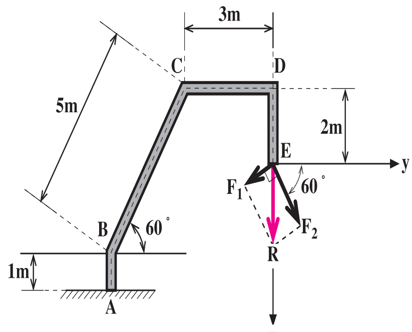
شکل ۱۳ــ۲

۴ــ در شکل ۱۴ــ۲ اگر نیروی $F_۲ = ۱۰۰۰N$ باشد.

الف ــ مقدار $F_۱$ را طوری تعیین کنید که برآیند R منطبق بر محور xها شود.

ب ــ با $F_۱$ به‌دست آمده مقدار برآیند را محاسبه کنید.

ج ــ زاویه‌ی بین برآیند و امتداد BC را محاسبه کنید.



شکل ۱۴ــ۲

۲ــ۲ــ سیستم‌های دو نیرویی غیرمتعامد

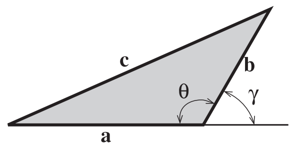
در این سیستم شرط لازم بسته‌شدن سه‌ضلعی نیروهاست، امّا تفاوتی که این حالت با حالت متعامد دارد غیرمشخص‌بودن سه‌ضلعی (مثلث)نیروهاست. به همین دلیل استفاده از قانون متوازی‌الاضلاع برای حل ترسیمی، و استفاده از قانون سینوس‌ها و کسینوس‌ها برای حل مثلثاتی کارآمد خواهد بود.

۱ــ۲ــ۲ــ قانون کسینوس‌ها در مثلث

$$c^{2}=a^{2}+b^{2}-2(a)(b)\cos\theta$$

یا

$$c^{2}=a^{2}+b^{2}+2(a)(b)\cos\gamma$$



شکل ۱۵ــ۲

علائم:

c ؛ ضلع روبه‌روی زاویه‌ی θ یا برآیند اضلاع دیگر،

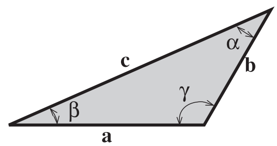
a و b ؛ اضلاع مجاور زاویه‌ی θ،

θ ؛ زاویه‌ی داخلی مثلث نیروها،

γ ؛ زاویه‌ی خارجی مثلث نیروها یا زاویه‌ی بین ضلع b و امتداد ضلع a.

۲ــ۲ــ۲ــ قانون سینوس‌ها در مثلث

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$



شکل ۱۶ــ۲

علائم:

γ,β,α ؛ زوایای داخلی مثلث نیروها،

a ؛ ضلع مقابل زاویه‌ی α ،

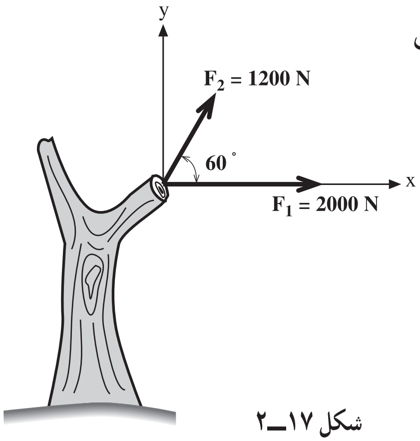
b ؛ ضلع مقابل زاویه‌ی β ،

c ؛ ضلع مقابل زاویه‌ی γ .

مثال ۳: دو نیروی غیرمتعامد بر تنه‌ی درختی مطابق شکل وارد می‌شوند. مطلوب است :

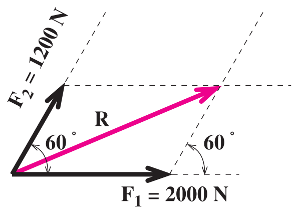
الف ــ محاسبه‌ی مقدار برآیند.

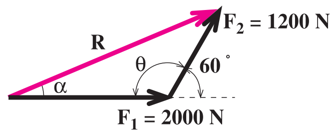
ب ــ محاسبه‌ی زاویه‌ی برآیند با افق.



شکل ۱۷ــ۲

حل: ابتدا با استفاده از قانون متوازی‌الاضلاع مقدار و جهت برآیند را به‌صورت ترسیمی تعیین می‌کنیم و سپس با استفاده از قانون کسینوس‌ها و یا سینوس‌ها مقدار دقیق برآیند و زاویه‌ی آن را با افق محاسبه می‌کنیم.





الف ــ با استفاده از قانون کسینوس‌ها داریم :

$$\theta = ۱۸۰ - ۶۰ = ۱۲۰^\circ$$

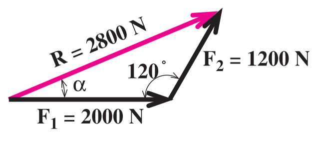
$$R^۲ = ۲۰۰۰^۲ + ۱۲۰۰^۲ - ۲(۲۰۰۰)(۱۲۰۰)\cos ۱۲۰ = ۷\,۸۴۰\,۰۰۰$$

$$R = \sqrt{۷\,۸۴۰\,۰۰۰} = ۲۸۰۰\text{N}$$

ب ــ با استفاده از قانون سینوس‌ها داریم :

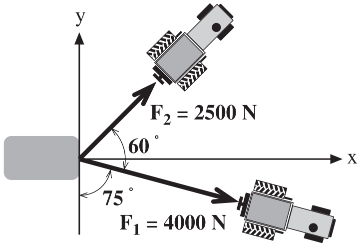
$$\frac{۲۸۰۰}{\sin ۱۲۰} = \frac{۱۲۰۰}{\sin\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۱۲۰۰}{۲۸۰۰}\sin ۱۲۰$$

$$\sin\alpha = ۰/۳۷۱ \Rightarrow \alpha = \sin^{-۱}(۰/۳۷۱) = ۲۱/۷۸۷^\circ$$



زاویه‌ی برآیند با $F_۱$ یا افق $\alpha = ۲۱/۷۸۷^\circ$

مثال ۴: دو نیرو، مطابق شکل، توسط دو کابل بر یک سنگ معدنی وارد می‌شود. مطلوب است :



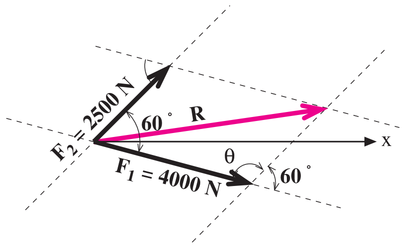
الف ــ محاسبه‌ی مقدار برآیند ؛

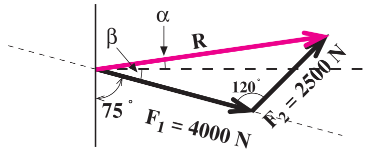
ب ــ محاسبه‌ی زاویه‌ی برآیند با افق ؛

ج ــ ترسیم مسیر جابه‌جایی سنگ.

حل:

الف ــ با استفاده از قانون کسینوس‌ها داریم :





$$\theta = ۱۸۰ - ۶۰ = ۱۲۰^\circ$$

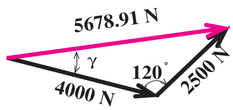
$$R^۲ = ۴۰۰۰^۲ + ۲۵۰۰^۲ - ۲(۴۰۰۰)(۲۵۰۰)\cos ۱۲۰ = ۳۲\ ۲۵۰\ ۰۰۰$$

$$R = ۵۶۷۸/۹۱\ \ N$$

ب ــ با استفاده از قانون سینوس‌ها داریم : $\beta = ۹۰ - ۷۵ = ۱۵^\circ$ (زاویه $F_۱$ با افق).

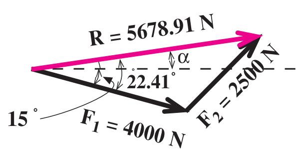
$$\frac{۵۶۷۸/۹۱}{\sin ۱۲۰} = \frac{۲۵۰۰}{\sin\gamma}$$

$$\Rightarrow \sin\gamma = \frac{۲۵۰۰}{۵۶۷۸/۹۱}\sin ۱۲۰ = ۰/۳۸۱$$



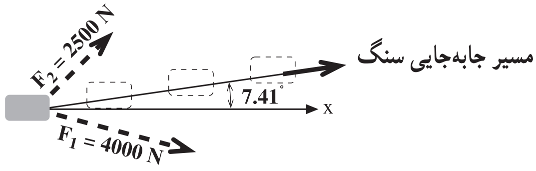
زاویه‌ی نیروی $F_۱$ با برآیند $\gamma = ۲۲/۴۱۱^\circ$

زاویه‌ی برآیند با افق به طریق زیر به‌دست می‌آید.



زاویه‌ی برآیند با افق $\alpha = ۲۲/۴۱ - ۱۵ = ۷/۴۱^\circ$

ج −

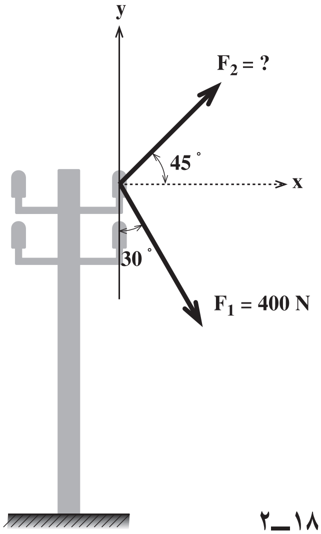


تمرین

۱ــ در شکل ۱۸ــ۲ برای تیر چراغ برق نیروی $F_۲$ را طوری بیابید که :

الف ــ برآیند در امتداد افق (x) باشد.

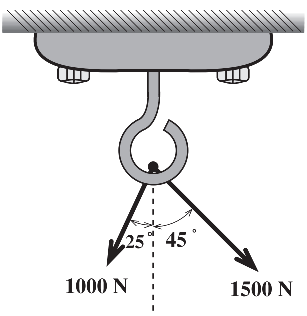
ب ــ برای شرط الف مقدار برآیند را به دست آورید.



شکل ۱۸ــ۲

۲ــ مقدار و امتداد برآیند دو نیروی نشان داده شده در شکل ۱۹ــ۲ را به‌دست آورید.

راهنمایی: منظور از امتداد برآیند، زاویه‌ی آن با محور افق است.



شکل ۱۹ــ۲

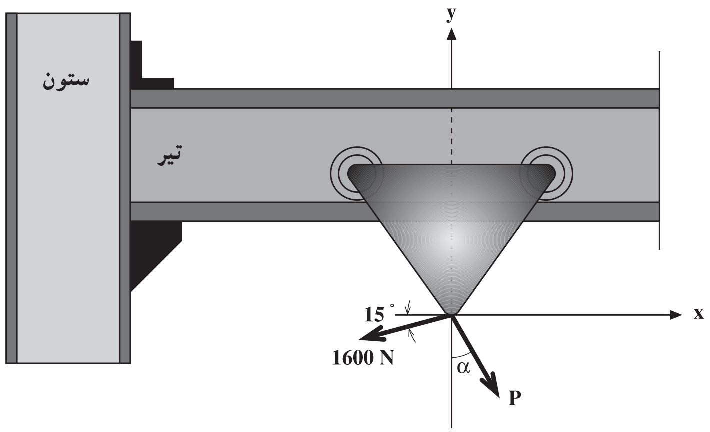
۳ــ بر قرقره‌ی نقاله‌ای که روی بال تیری حرکت می‌کند دو نیرو مطابق شکل ۲۰ــ۲ وارد می‌شود مطلوب است :

الف ــ اگر $\alpha = ۲۵^\circ$ باشد نیروی P را طوری تعیین کنید که برآیند وارد بر قرقره کاملاً عمودی باشد.

ب ــ مقدار برآیند برای پاسخ بند (الف) چند نیوتن است؟

ج ــ موارد بند (الف) و (ب) را با $\alpha = ۴۵^\circ$ تکرار کنید.

د ــ اگر $\alpha = ۳۰^\circ$ باشد و بخواهیم امتداد برآیند کاملاً افقی باشد در مورد نیرو و جهت P بررسی‌های لازم را به‌عمل آورید.

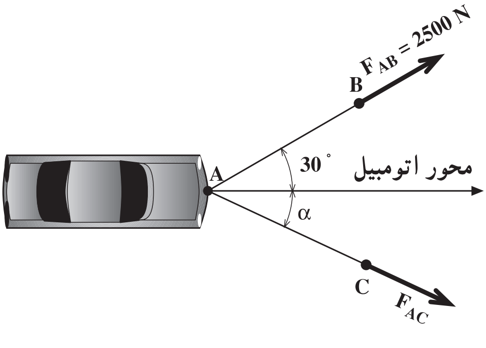


شکل ۲۰ــ۲

۴ــ یک اتومبیل خراب را مطابق شکل ۲۱ــ۲ با دو کابل بگسل کرده‌اند. اگر نیروی کشش در کابل AB برابر ۲۵۰۰ نیوتن و $\alpha = ۲۵^\circ$ باشد، برای حالتی که برآیند دو نیروی وارده در امتداد محور اتومبیل باشد مطلوب است :

الف ــ کشش در کابل AC

ب ــ مقدار برآیند



شکل ۲۱ــ۲

۵ــ مسئله‌ی ۴ را با فرض این‌که کشش در کابل AB برابر ۴kN و $\alpha = ۲۰^\circ$ باشد، حل کنید.

۶ــ در مسئله‌ی ۴، اگر کشش در کابل AB برابر ۳/۷۵kN باشد، کشش در کابل AC و مقدار زاویه‌ی α را طوری تعیین کنید که مقدار برآیند ۶(kN) و در امتداد محور اتومبیل باشد.

۳ــ۲ــ کاربرد روش ترسیمی برای سیستم‌های دو نیرویی

با داشتن خط‌کش و نقاله می‌توان به صورت ترسیمی، پاسخ سیستم‌های تحت اثر دو نیرویی (متعامد و یا غیرمتعامد) را با تقریب مناسبی به دست آورد. روش مورد استفاده برای ترسیم، استفاده از قانون متوازی‌الاضلاع و یا مثلث است.

مراحل ترسیمی به روش متوازی‌الاضلاع

۱ــ نقطه‌ی مناسبی در روی صفحه‌ی کاغذ برای شروع در نظرگرفته می‌شود.

۲ــ محورهای اصلی متعامد به‌صورت کم‌رنگ روی نقطه‌ی مورد نظر نصب می‌شوند.

۳ــ امتداد نیروها به صورت کم‌رنگ از نقطه‌ی تعیین شده ترسیم و از هر طرف ادامه می‌یابد.

۴ــ روی امتدادها مقادیر نیروها با خط‌کش (با مقیاس مناسب ابعاد صفحه) استخراج می‌شوند.

۵ــ از انتهای هر نیرو به موازات محور دیگر محور کم‌رنگی (خط هادی) ترسیم می‌شود. بدیهی است دو محور هادی هم‌دیگر را در نقطه‌ای قطع می‌کنند.

۶ــ خط واصل از نقطه‌ی شروع به محل تلاقی خطوط هادی، مقدار برآیند دو نیرو را مشخص می‌کنند. اگر طول این پاره‌خط با اشل اندازه‌گیری شود با تقریب مناسبی مقدار برآیند را نمایش می‌دهد.

۷ــ برای تعیین امتداد برآیند کافی است با استفاده از نقاله زاویه‌ی بین پاره‌خط برآیند و محورهای اصلی (محور افق یا x) برداشت شود.

مراحل ترسیمی به روش مثلث

۱ــ نقطه‌ی مناسبی (نقطه‌ی O) در روی صفحه‌ی کاغذ به عنوان مبدأ در نظرگرفته می‌شود.

۲ــ محورهای اصلی متعامد x و y به‌صورت کم‌رنگ روی نقطه‌ی مورد نظر رسم می‌شوند.

۳ــ امتداد یکی از نیروها (به‌دلخواه) از روی نقطه‌ی موردنظر به‌صورت کم‌رنگ نمایش داده می‌شود.

۴ــ با خط‌کش و با انتخاب مقیاس مناسبی، مقدار نیرو روی امتداد رسم شده با مبدأ تعیین شده استخراج می‌گردد.

۵ــ از انتهای نیروی رسم شده یک خط هادی به موازات نیروی بعدی رسم می‌کنیم. انتهای

نیروی اولی (محل تلاقی هادی‌ها) به عنوان مبدأ نیروی دومی تلقی می‌شود.

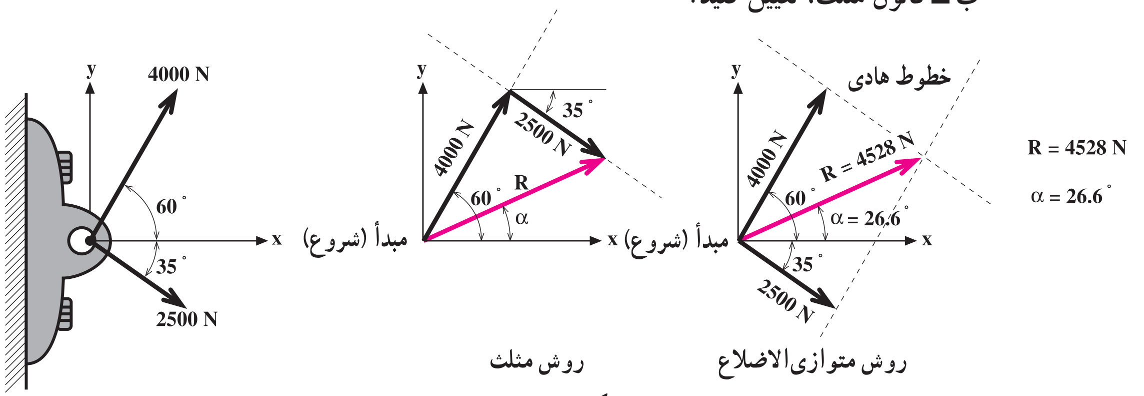
۶ــ از مبدأ دوم با مقیاس انتخاب شده نیروی دومی ترسیم می‌شود.

۷ــ از مبدأ اولیه به انتهای نیروی دومی پاره‌خطی ترسیم می‌شود که طول این پاره‌خط مقدار برآیند را نمایش می‌دهد و زاویه‌ی آن با افق معرف امتداد برآیند است.

مثال ۵: مقدار و جهت برآیند نیروهای نشان داده شده در شکل‌های ۲۲ــ۲ را به روش ترسیمی و با استفاده از:

الف ــ قانون متوازی‌الاضلاع،

ب ــ قانون مثلث، تعیین کنید.

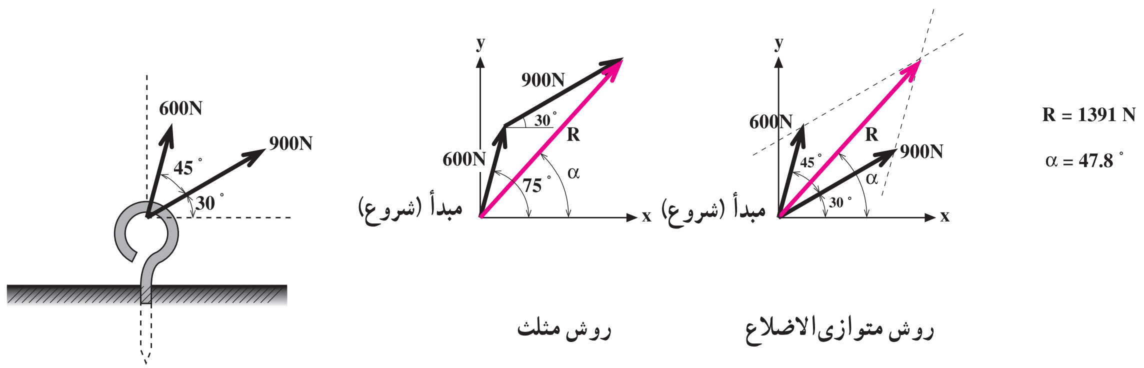


شکل ۲۲ــ۲

مثال ۶: مقدار و جهت برآیند نیروهای وارد بر پیچ نشان داده شده در شکل ۲۳ــ ۲ را به روش ترسیمی و با استفاده از:

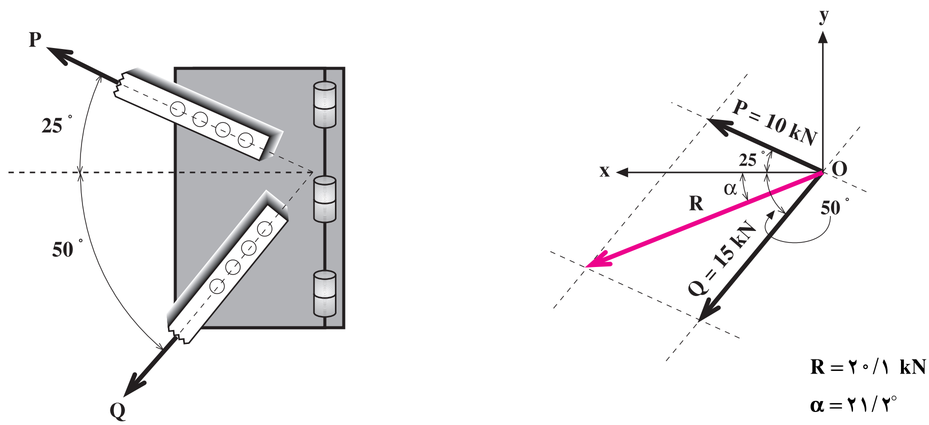
الف ــ قانون متوازی‌الاضلاع،

ب ــ قانون مثلث، تعیین کنید.



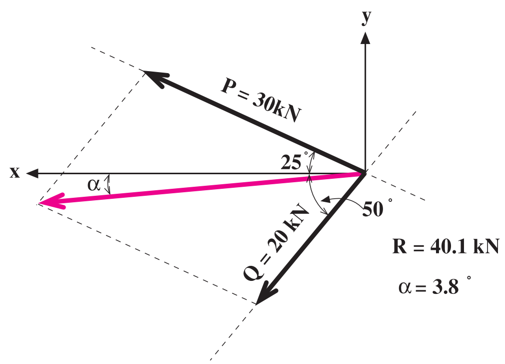
شکل ۲۳ــ۲

مثال ۷: دو نبشی مطابق شکل ۲۴ــ۲ به صفحه‌ی اتصالی پیچ شده‌اند. اگر هر دو عضو در کشش باشند و $P=10\,kN$ و $Q=15kN$ باشد مقدار و امتداد برآیند نیروهای وارد بر صفحه‌ی اتصال را به روش ترسیمی تعیین کنید.



شکل ۲۴ــ۲

مثال ۸: در مثال ۷ اگر $P=30\,kN$ و $Q=20\,kN$ باشد مطلوب است : تعیین مقدار و امتداد برآیند به روش ترسیمی.

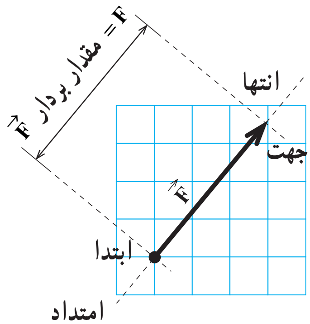


شکل ۲۵ــ۲

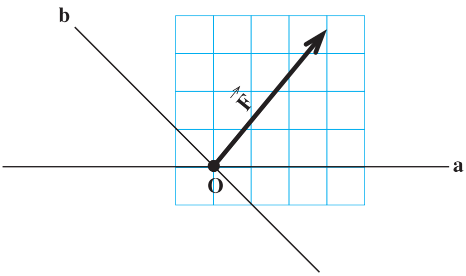
۴ــ۲ــ تجزیه‌ی یک بردار صفحه‌ای به مؤلفه‌های آن

در بخش‌های گذشته چگونگی محاسبه‌ی برآیند دو نیرو به روش ترسیمی را توضیح دادیم.

اکنون می‌خواهیم با داشتن برآیند، دو نیروی منجر به برآیند (مؤلفه‌ها) را تعیین کنیم. روش کلی برای مؤلفه‌های متعامد و غیرمتعامد بدین‌صورت است که از انتهای نیرو به موازات محورهای داده شده خطوط هادی رسم و سپس به روش ترسیمی مؤلفه‌ها به سادگی تعیین می‌شوند. البته استفاده از قانون سینوس‌ها، کسینوس‌ها و قضیّه‌ی فیثاغورث برای تعیین مقدار آن‌ها مفید خواهد بود که در ادامه‌ی همین بخش به آن‌ها خواهیم پرداخت.

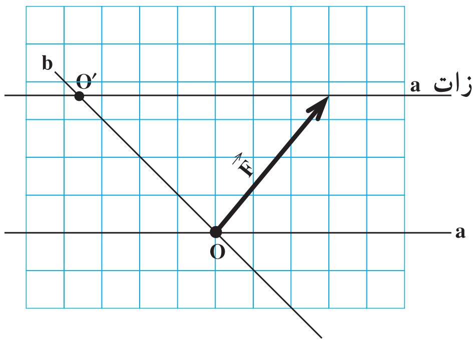


۱ـ۴ـ۲ـ تجزیه‌ی یک بردار به مؤلفه‌های آن به‌صورت ترسیمی: در درس‌های گذشته ابتدا و انتهای یک بردار را، مطابق شکل، شناختید. اکنون فرض کنید برداری مانند F موردنظر باشد. اگر بخواهیم این بردار را به مؤلفه‌های آن در امتداد a و b تجزیه کنیم به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

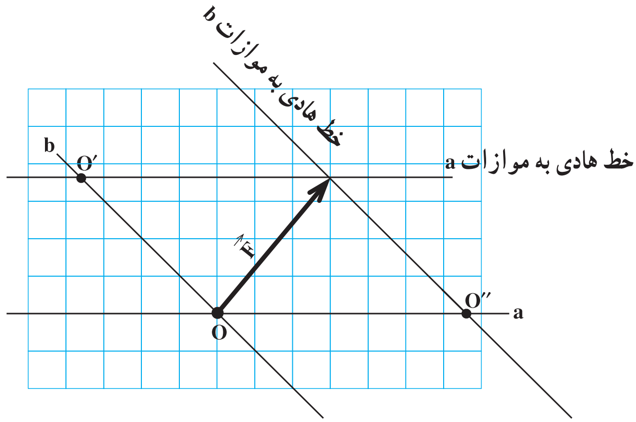


شکل ۲۶ـ۲

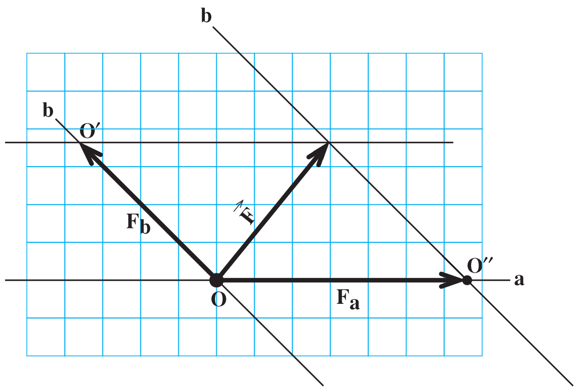
گام ۱: از انتهای بردار F یک خط هادی به موازات a به‌صورت نازک رسم می‌کنیم.



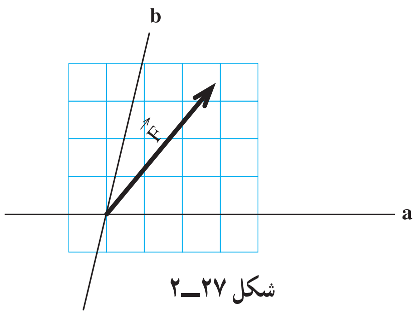
گام ۲: از انتهای بردار F یک خط هادی به موازات b به‌صورت نازک رسم می‌کنیم.



گام ۳: پاره‌خط ′OO تصویر نیروی F روی امتداد b و پاره‌خط ″OO تصویر نیروی F روی امتداد a می‌باشد. تصویر F روی امتداد a را با F_a و تصویر F روی امتداد b را با F_b نمایش می‌دهیم. اگر از قانون کسینوس‌ها و یا سینوس‌ها برآیند دو نیروی F_a و F_b را به‌دست آوریم می‌بینیم که مقدار برآیند با مقدار F برابر است.



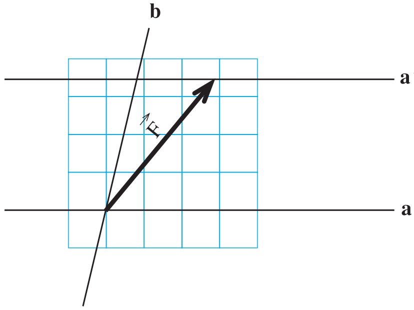
مثال ۹: بردار F را به مؤلفه‌هایش در امتدادهای a و b تجزیه کنید.



شکل ۲۷ـ۲

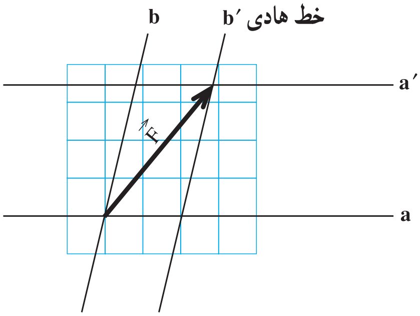
حل:

گام ۱: ترسیم خط هادی a' ؛



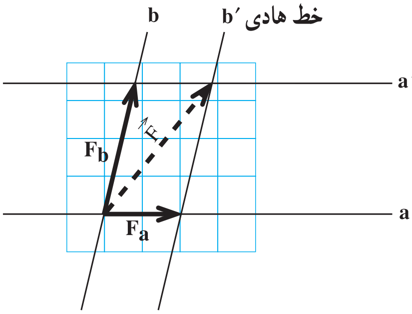
(الف)

گام ۲: ترسیم خط هادی b' ؛



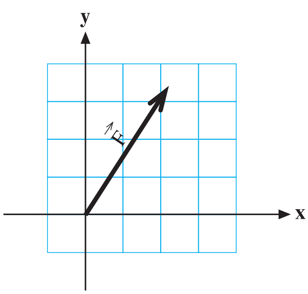
(ب)

گام ۳: تعیین مؤلفه‌ها ؛

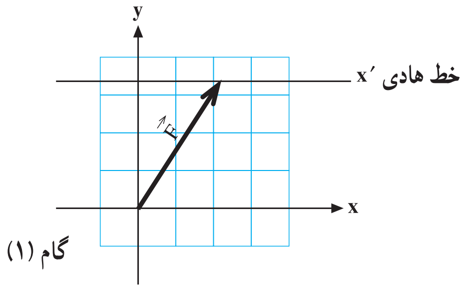


(ج)

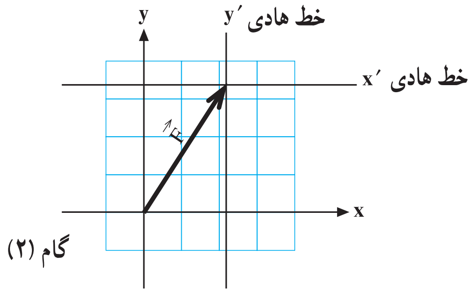
مثال ۱۰: بردار F را به مؤلفه‌هایش در امتدادهای x و y تجزیه کنید.



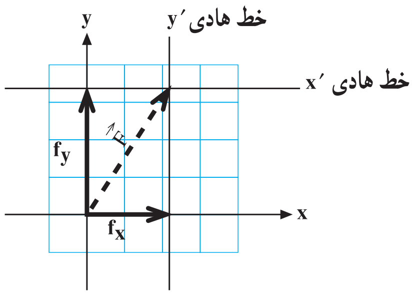
شکل ۲۸ــ۲



(الف)

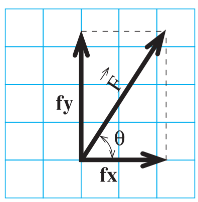


(ب)



(ج)

توجه: تجزیه‌ی بردار F در شکل‌های بالا روی دو محور متعامد x و y بود که در این روش برای محاسبه‌ی مقادیر مؤلفه‌ها و یا برآیند می‌توان از قضیه‌ی فیثاغورث و یا نسبت‌های مثلثاتی استفاده کرد. تجزیه‌ی یک بردار روی محورهای متعامد از ساده‌ترین روش‌هاست.



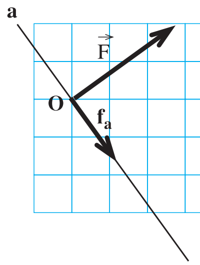
مقدار برآیند $F^2 = fx^2 + fy^2 \Rightarrow F = \sqrt{fx^2 + fy^2}$

زاویه‌ی برآیند با افق (محور xها) $\quad tg\,\theta=\frac{fy}{fx}\Rightarrow\theta=tg^{-1}\frac{fy}{fx}$

مؤلفه روی محور xها $\quad \cos\theta=\frac{fx}{F}\Rightarrow fx=F.\cos\theta$

مؤلفه روی محور yها $\quad \sin\theta=\frac{fy}{F}\Rightarrow fy=F.\sin\theta$

مثال ۱۱: در شکل زیر یک مؤلفه و برآیند داده شده است. مؤلفه‌ی دیگر را از طریق ترسیمی به‌دست آورید.



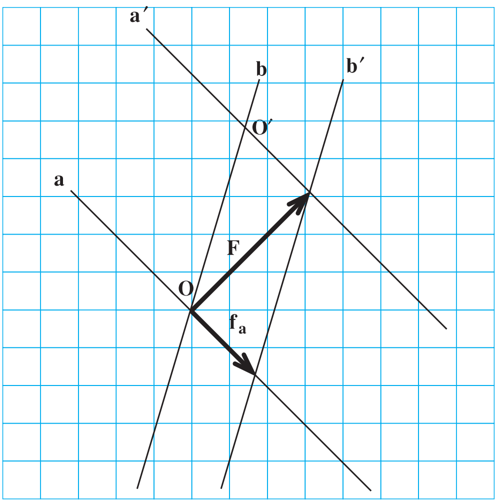
حل:

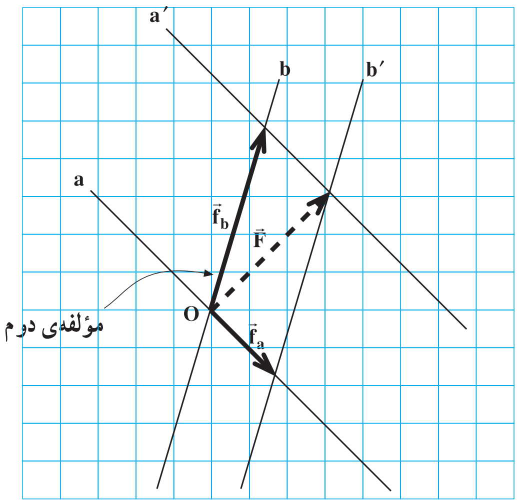
گام ۱: ابتدا، انتهای برآیند $(\vec{F})$ و مؤلفه $(\vec{fa})$ را به هم وصل و امتداد می‌دهیم تا امتداد b به‌دست آید.

گام ۲: امتداد b را به مرکز O انتقال می‌دهیم (b')

گام ۳: از انتهای برآیند (F) به موازات a امتدادی را رسم می‌کنیم.

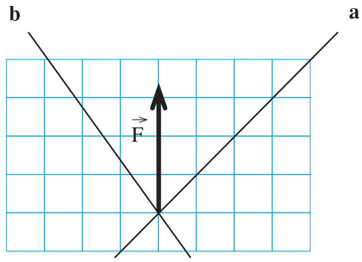
گام ۴: بدیهی است که پاره‌خط OO' مؤلفه دیگر بردار $(\vec{F})$ است.



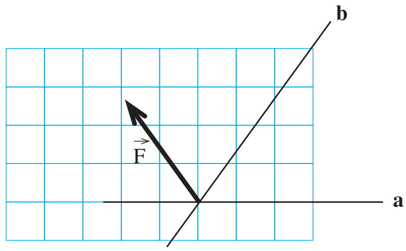


تمرین

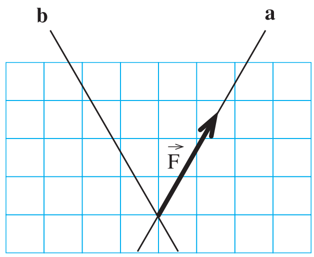
۱ــ در هر یک از شکل‌های زیر بردار F را به مؤلفه‌های خود، روی امتدادهای a و b، تجزیه و به‌طور کامل ترسیم کنید.



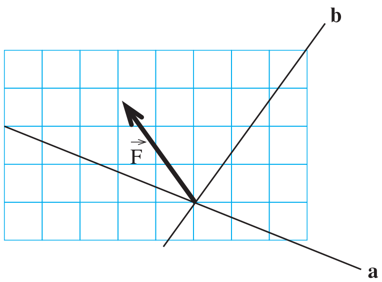
(الف)



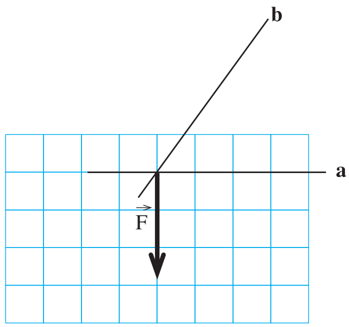
(ب)



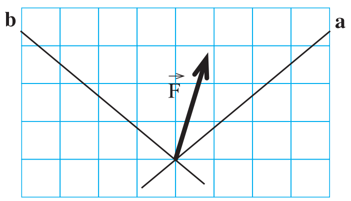
(ج)



(د)



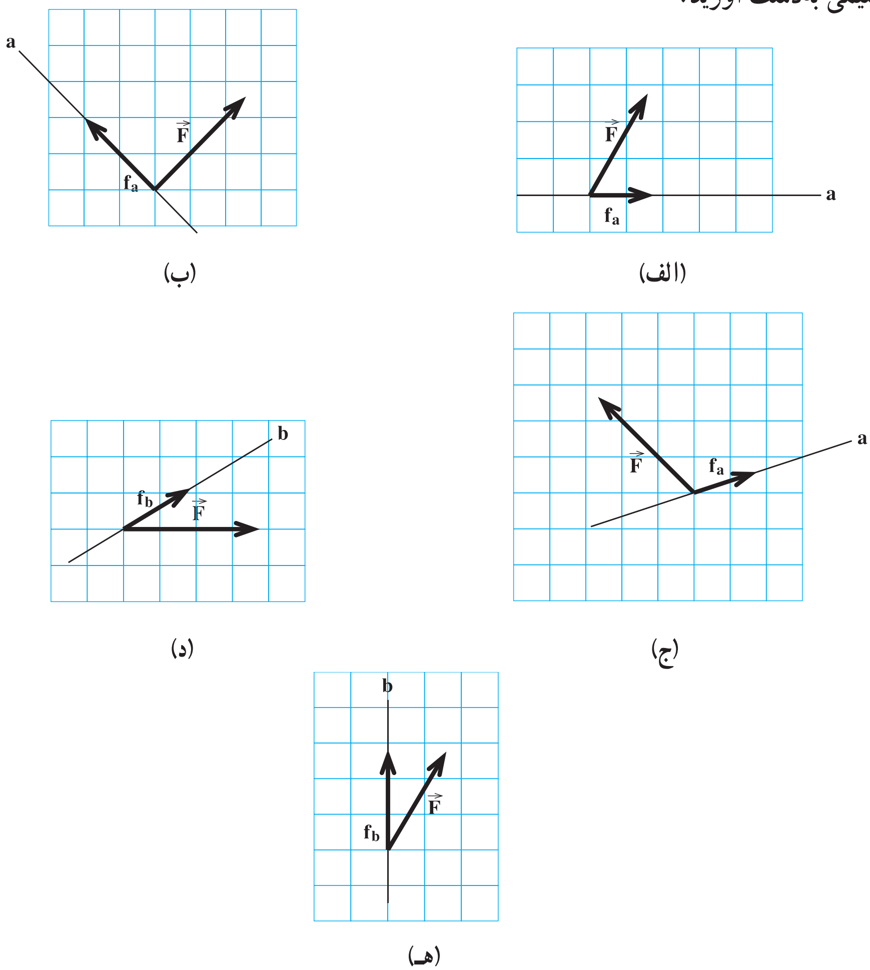
(هـ)



(و)

شکل ۲۹ــ۲

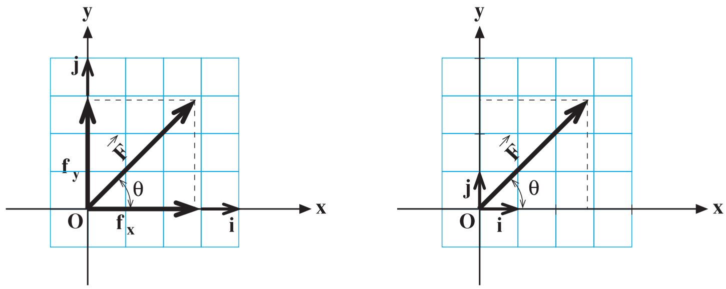
۲ــ در هر یک از شکل‌های زیر یک مؤلفه و برآیند مشخص است. مؤلفه‌ی دیگر را به روش ترسیمی به‌دست آورید.



شکل ۳۰ــ۲

۳ــ مؤلفه و برآیند شکل‌های الف، د و هـ را در تمرین‌های ۱ و ۲ با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی و قانون متوازی‌الاضلاع با توجه به تعداد و زاویه‌ی تقریبی شبکه‌ها به‌دست آورید.

۲ــ۴ــ۲ــ تجزیه‌ی یک بردار به مؤلفه‌های متعامد: ساده‌ترین راه تجزیه‌ی یک بردار تجزیه‌ی آن به دو مؤلفه‌ی متعامد است. برای این منظور دستگاه مختصاتی به مرکز O اختیار کرده و بردار یکه‌ی i و j را به‌ترتیب بر محورهای x و y منطبق می‌کنیم و با استفاده از قانون متوازی‌الاضلاع بردار F را به‌صورت $\vec{F} = f_x i + f_y j$ نمایش می‌دهیم.



(ب) (الف)

شکل ۳۱ــ۲

با استفاده از آنچه که در بخش‌های قبلی ذکر شد می‌توان نوشت :

$$fx = F\cos\theta$$
$$fy = F\sin\theta$$
$$F = \sqrt{Fx^2 + Fy^2}$$
$$\theta = tg^{-1}\frac{Fy}{Fx}$$
[1] $$\vec{F} = fxi + fyj$$

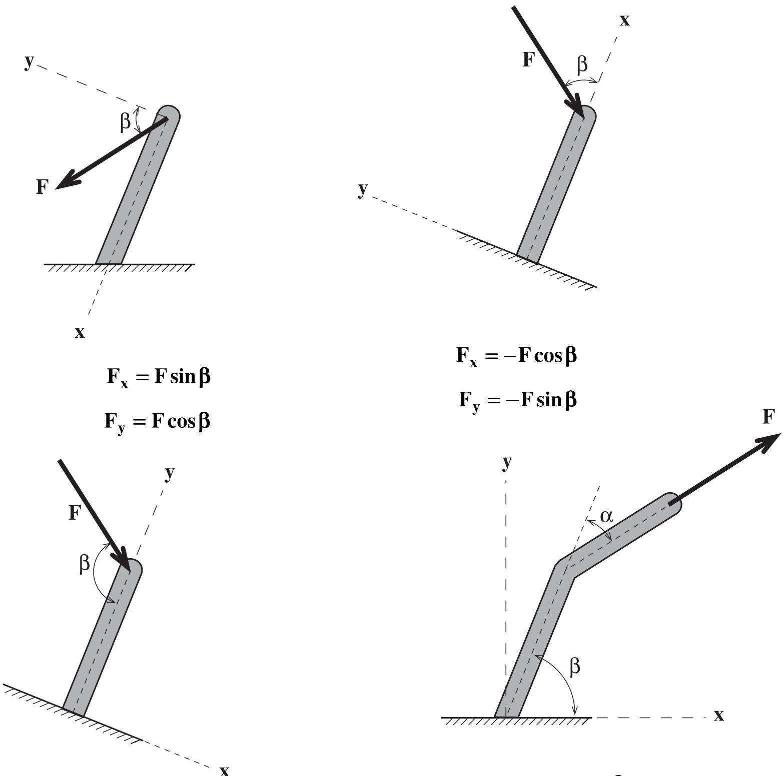
در بسیاری از مسایل استاتیک جهت نیروها به‌صورت عمودی و افقی نیست. به همین‌خاطر انتخاب محورهای متعامد در جهت افقی و عمودی گاهی باعث افزایش و نیز دشواری عملیات می‌شود، از این‌رو استفاده از دستگاه مختصاتی که بتوان به‌راحتی نیروها را در امتدادهای آن تجزیه کرد بسیار مفید خواهد بود.

در شکل ۳۲ــ۲ چند نمونه عضو با نیرو و دستگاه‌های مختصاتی مناسب ملاحظه می‌کنید. این نیروها با روابط داده شده به‌راحتی قابل تجزیه در امتدادهای x و y هستند.

۱ــ بردار $\vec{F}$ را می‌توان به‌صورت زیر هم نوشت :

$$\vec{F} = fxi + fyj = F\cos\theta i + F\sin\theta j = F(\cos\theta i + \sin\theta j)$$

که به عبارت داخل پرانتز بردار هادی یا بردار واحد گویند.



$F_x = F\sin\beta$

$F_y = F\cos\beta$

$F_x = -F\cos\beta$

$F_y = -F\sin\beta$

$F_x = F\sin(\pi-\beta)$

$F_y = -F\cos(\pi-\beta)$

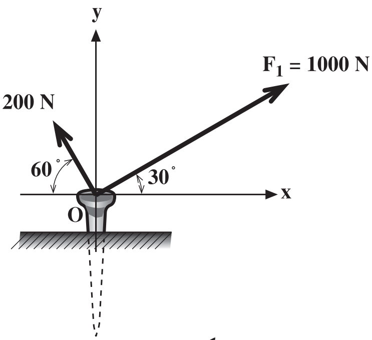
$F_x = F\cos(\beta-\alpha)$

$F_y = F\sin(\beta-\alpha)$

شکل ۳۲ــ۲

کاربرد مهم روش تجزیه به مؤلفه‌های متعامد برای محاسبه‌ی برآیند و امتداد برآیند در سیستم‌های تحت اثر نیروهای بیش از دو می‌باشد.

مثال ۱۲: دو نیروی F_1 و F_2 مطابق شکل ۳۳ــ۲ بر میخی اثر کرده‌اند. مطلوب است تعیین برآیند این دو نیرو و امتداد آن با استفاده از روابط مربوط به مؤلفه‌های متعامد.



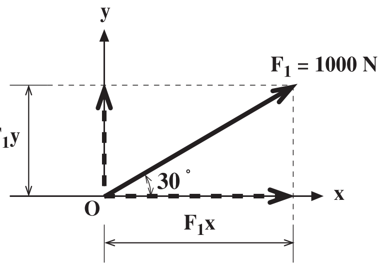
شکل ۳۳ــ۲

حل:

الف ــ نیروی $F_۱$ را به مؤلفه‌های متعامد تجزیه می‌کنیم.

$$F_۱x = F_۱ \cos\theta = ۱۰۰۰ \times \cos ۳۰ = ۸۶۶/۰۲N$$

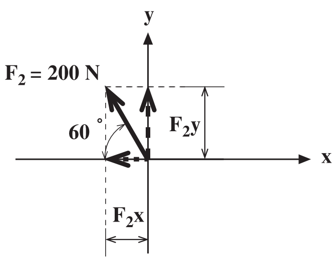
$$F_۱y = F_۱ \sin\theta = ۱۰۰۰ \times \sin ۳۰ = ۵۰۰N$$



ب ــ نیروی $F_۲$ را به مؤلفه‌های متعامد تجزیه می‌کنیم :

$$F_۲x = -F_۲ \cos\beta = -۲۰۰ \times \cos ۶۰ = -۱۰۰N$$

$$F_۲y = F_۲ \sin\beta = ۲۰۰ \times \sin ۶۰ = ۱۷۳/۲N$$



ج ــ برای تعیین برآیند کلی روی امتدادهای x و y کافی است مؤلفه‌های هم‌نام را با هم جمع جبری کنیم :

برآیند روی امتداد xها $Fx = F_۱x + F_۲x$

$$Fx = ۸۶۶/۰۲ - ۱۰۰ = ۷۶۶/۰۲N$$

برآیند روی امتداد yها $Fy = F_۱y + F_۲y$

$$Fy = ۵۰۰ + ۱۷۳/۲ = ۶۷۳/۲N$$

د ــ برای محاسبه‌ی مقدار برآیند از قاعده‌ی «مجذور مربع مؤلفه‌های به‌دست آمده» استفاده می‌کنیم :

برآیند کلی $F = \sqrt{fx^۲ + fy^۲} = \sqrt{(۷۶۶/۰۲)^۲ + (۶۷۳/۲)^۲} = ۱۰۱۹/۸ \ N$

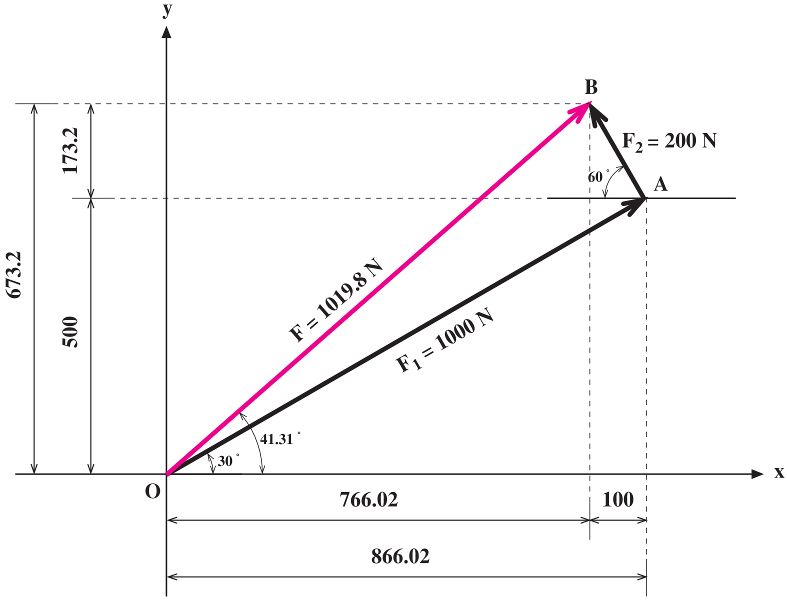
هـ ــ زاویه‌ی برآیند با افق و یا امتداد آن به‌صورت زیر تعیین می‌شود :

$$\theta = tg^{-۱}\frac{fy}{fx} = tg^{-۱}\frac{۶۷۳/۲}{۷۶۶/۰۲} = ۴۱/۳۱^\circ$$

و ــ برای نمایش برداری F به‌صورت زیر عمل می‌شود :

$$\vec{F} = fxi + fyj = ۷۶۶/۰۲i + ۶۷۳/۲j$$

نتایج عملیات بالا در شکل پایین به‌صورت ترسیمی نمایش داده شده است.

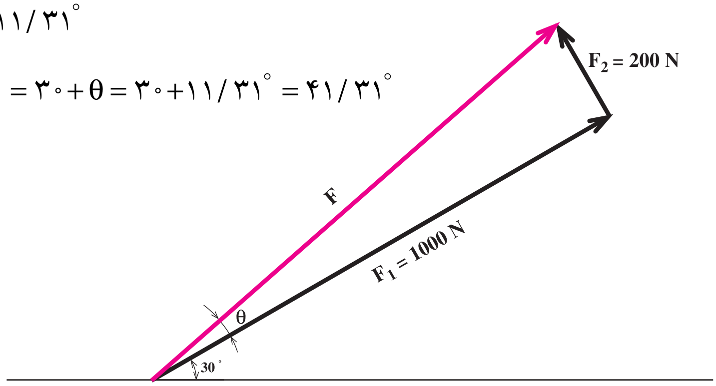


از بررسی دقیق‌تر می‌توان نتیجه گرفت که بردارهای $F_۱$ و $F_۲$ بر هم عمودند. بنابراین با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث برآیند آن‌ها به‌دست می‌آید.

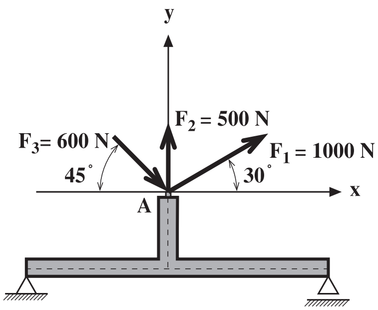
$$F = \sqrt{(۱۰۰۰)^۲ + (۲۰۰)^۲} = ۱۰۱۹/۸ \ \ N$$

$$\theta = tg^{-۱}\frac{۲۰۰}{۱۰۰۰} = ۱۱/۳۱^\circ$$

زاویه‌ی برآیند با افق $= ۳۰ + \theta = ۳۰ + ۱۱/۳۱^\circ = ۴۱/۳۱^\circ$



مثال ۱۳: نیروهای F_1 ، F_2 و F_3 را که در نقطه‌ی A بر تیری، مطابق شکل، اثر می‌کنند به مؤلفه‌های متعامد تجزیه کرده، سپس برآیند مجموعه و امتداد آن را به‌دست آورید.



شکل ۳۴ـ۲

حل:

تجزیه‌ی نیروی F_1
$$\begin{cases} F_1x = 1000 \times \cos 30 = 866/02 \ \ N \ \rightarrow \\ F_1y = 1000 \times \sin 30 = 500 \ \ N \uparrow \end{cases}$$

تجزیه‌ی نیروی F_2
$$\begin{cases} F_2x = 500 \times \cos 90 = 0 \\ F_2y = 500 \times \sin 90 = 500 \ \ N \uparrow \end{cases}$$

تجزیه‌ی نیروی F_3
$$\begin{cases} F_3x = 600 \times \cos 45 = 424/26 \ \ N \ \rightarrow \\ F_3y = -600 \times \sin 45 = -424/26 \ \ N \downarrow \end{cases}$$

برآیند مؤلفه‌ها روی محورهای x و y :

$$Fx = \sum_{i=1}^{n} F_i x = F_1x + F_2x + F_3x = 866/02 + 0 + 424/26 = 1290/28 \ \ N$$

$$Fy = \sum_{i=1}^{n} F_i y = F_1y + F_2y + F_3y = 500 + 500 - 424/26 = 575/74 \ \ N$$

مقدار برآیند کل :

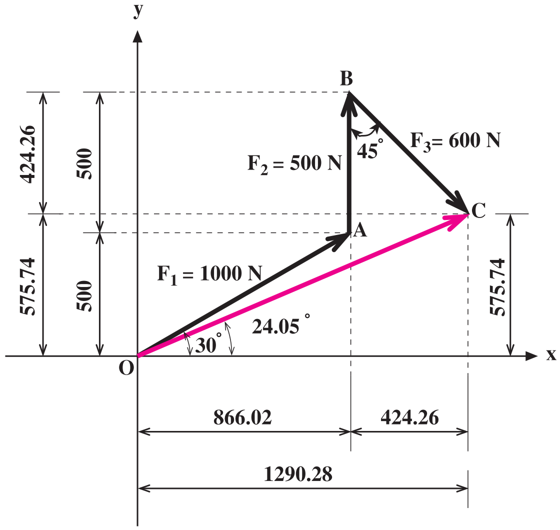
$$F = \sqrt{Fx^2 + Fy^2} = \sqrt{(1290/28)^2 + (575/74)^2} = 1412/90 \, N$$

زاویه‌ی برآیند با افق :

$$\theta = tg^{-1} \frac{fy}{fx} = tg^{-1} \frac{575/74}{1290/28} = 24/05^\circ$$

برآیند به‌صورت برداری :

$$\vec{F} = Fxi + Fyj = ۱۲۹۰/۲۸i + ۵۷۵/۷۴j$$



تمرین

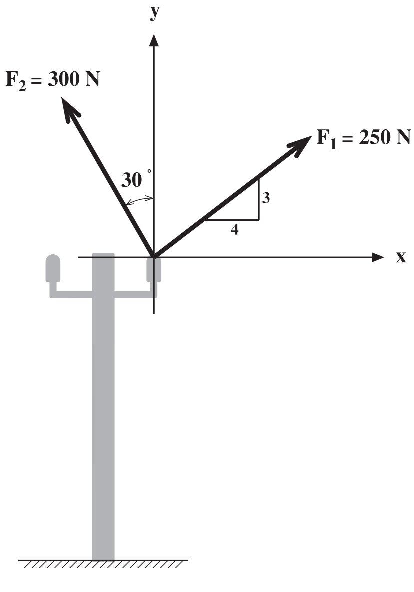
ــ در شکل ۳۵ــ۲ این موارد را تعیین کنید :

الف ــ برآیند به‌صورت برداری ؛

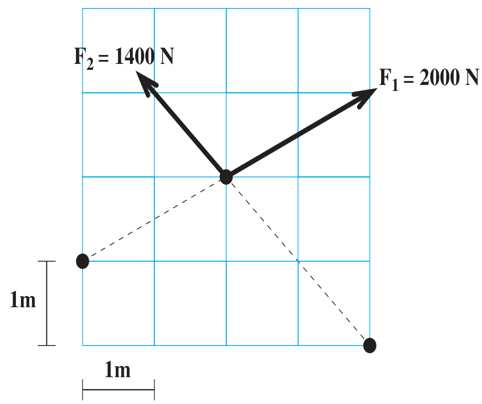
ب ــ مقدار برآیند ؛

ج ــ امتداد برآیند (زاویه‌ی برآیند با افق) ؛

د ــ نشان دادن روش ترسیمی.

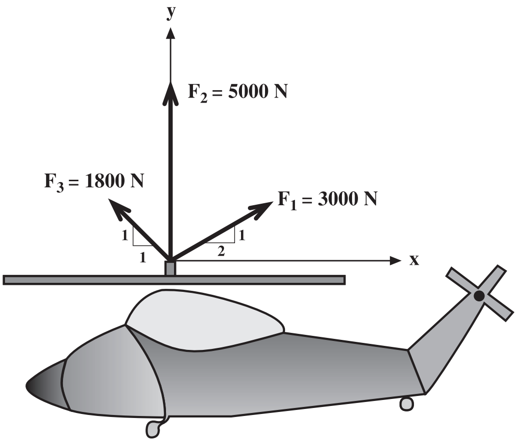


(الف)

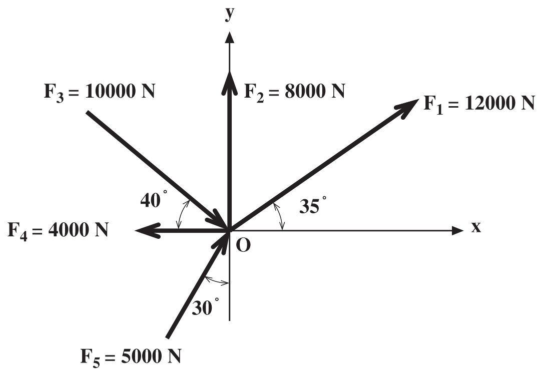


(ب)

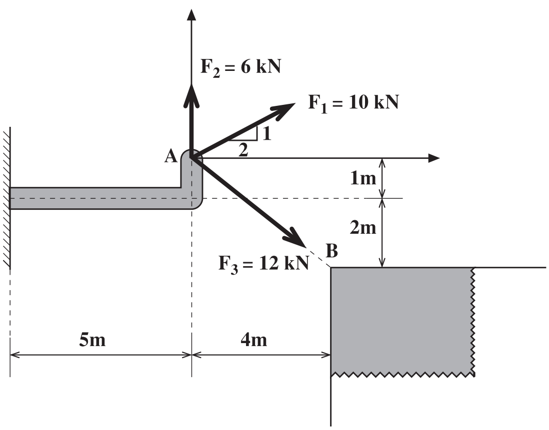
شکل ۳۵ــ۲



(ج)



(د)



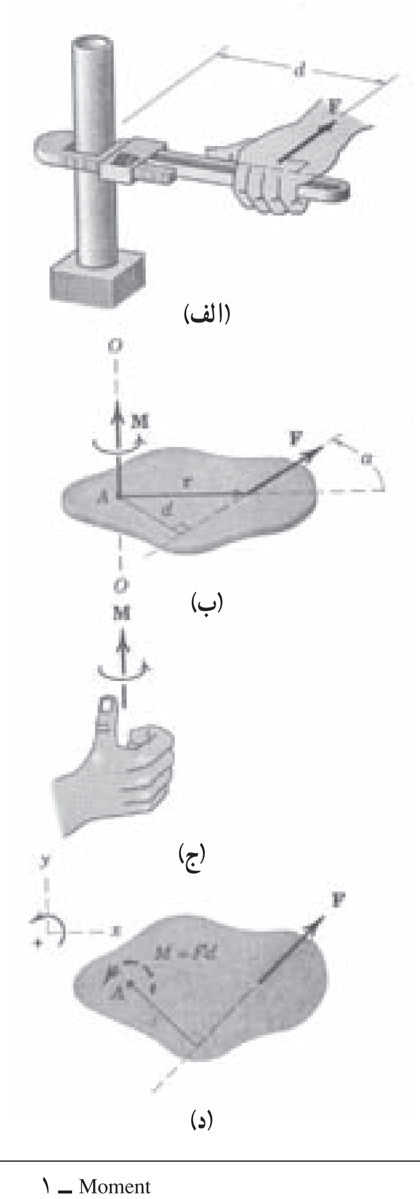
(هـ)

ادامه‌ی شکل ۳۵ــ۲

۵ــ۲ــ گشتاور[1] (لنگر یا ممان)

همان‌طور که در بخش‌های گذشته گفتیم، هر نیرویی که به جسمی وارد شود تمایل دارد آن را در راستای اثر خود حرکت دهد. علاوه بر این، در حالت‌های خاصی نیرو تمایل دارد که جسم را نسبت به یک محور به چرخش درآورد که به این خصوصیت (میل به چرخاندن)، گشتاور گفته می‌شود. واحد گشتاور حاصل‌ضرب نیرو در فاصله است.

مطابق شکل ۳۶ــ۲ نیروی وارد بر دسته‌ی آچار شلاقی باعث باز شدن پیچ لوله می‌شود. مقدار این نیرو بستگی به فاصله‌ی دست از لوله (d) دارد به‌طوری که هر اندازه این فاصله بیش‌تر باشد نیروی کم‌تری برای باز کردن لوله لازم است.

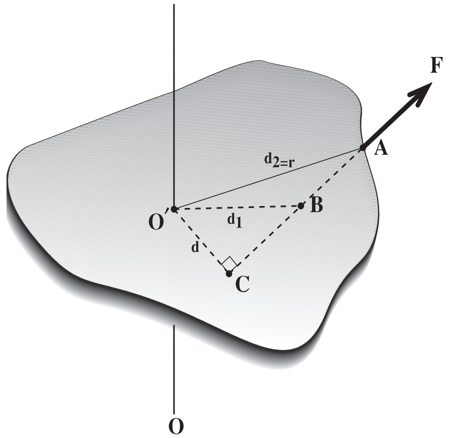


شکل ۳۶ــ۲

۱ ــ Moment

مقدار گشتاور برابر است با حاصل‌ضرب نیرو در کوتاه‌ترین فاصله‌ی نیرو و یا امتداد آن تا محور موردنظر. گشتاور را با M نمایش می‌دهند و آن را حول محور[1] می‌خوانند.

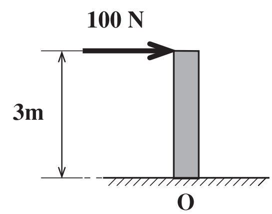
$$M = F.d$$



شکل ۳۷ــ۲

در شکل ۳۷ــ۲ بدیهی است که کوتاه‌ترین فاصله‌ی محور O ــO تا نیرو و یا امتداد نیرو فاصله‌ی $O'C$ است که با d نمایش داده شده است.

مثال ۱۴: مقدار گشتاور حول نقطه‌ی O را در شکل ۳۸ــ۲ به‌دست آورید.



شکل ۳۸ــ۲

حل: $M_O = F \times d = ۱۰۰ \times ۳ = ۳۰۰$ N.m (در جهت عقربه‌های ساعت)

مقدار گشتاور حول نقطه‌ی O، ۳۰۰ نیوتن متر است.

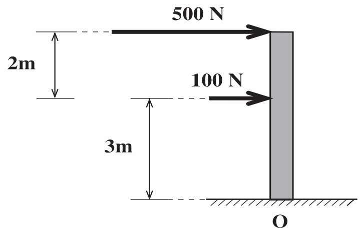
۱ــ چون نیرو تمایل دارد جسم را حول محور موردنظر بچرخاند معمولاً گشتاور را حول آن محور می‌نامند و اگر مقدار گشتاور صفر باشد بدین معنی است که عامل چرخشی وجود ندارد و جسم دوران نمی‌کند. در صفحه، گشتاور را حول نقطه می‌نامند.

مثال ۱۵: در شکل ۳۹ــ۲ مقدار گشتاور را، حول نقطه‌ی O، به‌دست آورید.

حل:

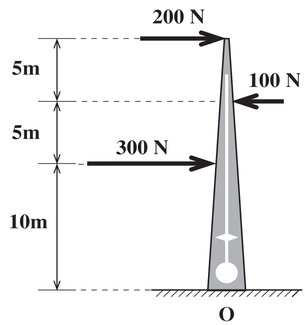
راهنمایی: برای حل این مسئله گشتاور تک‌تک نیروها نسبت به نقطه‌ی O را با هم جمع جبری می‌کنیم.

$M_O = F_۱ \times d_۱ + F_۲ \times d_۲ = ۵۰۰ \times ۵ + ۱۰۰ \times ۳ = ۲۸۰۰ \ \ N.m$ (در جهت عقربه‌های ساعت)



شکل ۳۹ــ۲

مثال ۱۶: مقدار گشتاور نیروهای نشان داده شده را حول نقطه‌ی O به‌دست آورید.



شکل ۴۰ــ۲

حل: همان‌طور که ملاحظه می‌شود دو نیروی ۲۰۰ و ۳۰۰ نیوتنی نسبت به نقطه‌ی O چرخشی در جهت عقربه‌های ساعت ایجاد می‌کنند اما نیروی ۱۰۰ نیوتنی نسبت به همین نقطه چرخشی در خلاف جهت عقربه‌های ساعت ایجاد می‌کند که باعث خنثی شدن مقداری از گشتاور نیروهای ۲۰۰ و ۳۰۰ نیوتنی خواهد شد. لذا در محاسبات، به‌صورت دلخواه، چرخش را در یک جهت مثبت و در خلاف آن جهت منفی فرض می‌کنیم.

$$M_O = \text{مجموع گشتاور نیروها} = \sum_{i=۱}^{n} M_i = \sum_{i=۱}^{n} F_i \times d_i$$

$$\begin{cases} F_۱ = ۲۰۰ \ \ N \\ d_۱ = ۲۰ \ \ m \end{cases} \qquad \begin{cases} F_۲ = ۱۰۰ \ \ N \\ d_۲ = ۱۵ \ \ m \end{cases} \qquad \begin{cases} F_۳ = ۳۰۰ \ \ N \\ d_۳ = ۱۰ \ \ m \end{cases}$$

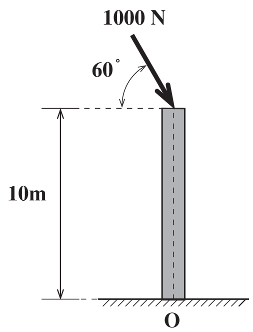
$$M_O = F_۱ \times d_۱ - F_۲ \times d_۲ + F_۳ \times d_۳ = ۲۰۰ \times ۲۰ - ۱۰۰ \times ۱۵ + ۳۰۰ \times ۱۰ = ۵۵۰۰ \ \ N.m$$

(در جهت عقربه‌های ساعت)

۶ــ۲ــ قضیه‌ی واریگنون[۱]

قضیه‌ی فوق بدین صورت بیان می‌شود : «گشتاور یک نیرو حول هر نقطه برابر است با مجموع گشتاورهای مؤلفه‌های آن نیرو حول همان نقطه.» این قضیه به این صورت نیز بیان می‌شود : «گشتاور یک دسته نیرو حول هرنقطه برابر گشتاور برآیند آن نیروها حول همان نقطه است.»

مثال ۱۷: صحت قضیه‌ی واریگنون را برای شکل زیر اثبات کنید.



شکل ۴۱ــ۲

حل:

الف ــ ابتدا گشتاور نیروی ۱۰۰۰ نیوتنی را به صورت مستقیم نسبت به پای میله‌ی O به‌دست می‌آوریم. برای این منظور ابتدا فاصله‌ی عمودی نقطه‌ی O تا امتداد نیرو را از طریق هندسی استخراج می‌کنیم :

۱ــ Varignon’s Theorem ــ در بعضی از کتاب‌ها این قضیه را وارینیون می‌نامند.