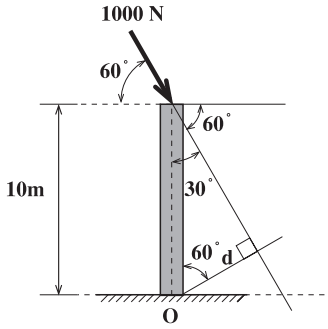


$d = ۱۰ \times \cos ۶۰ = ۵\,m$

در هندسه خوانده‌اید که طول ضلع روبه‌روی زاویه‌ی ۳۰ درجه نصف وتر است.

گشتاور نسبت به O برابر است با :

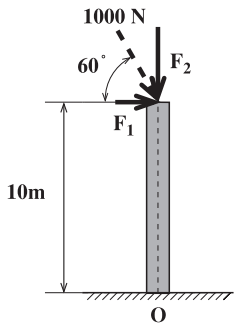
(در جهت عقربه‌های ساعت یا ساعتگرد) $M_O = F \times d = ۱۰۰۰ \times ۵ = ۵۰۰۰ N.m$

ب ــ گشتاور را از طریق مؤلفه‌های نیروی ۱۰۰۰ نیوتنی نسبت به O به‌دست می‌آوریم.

مؤلفه‌ی افقی $F_۱ = ۱۰۰۰ \cos ۶۰ = ۵۰۰ N$

مؤلفه‌ی قائم $F_۲ = ۱۰۰۰ \sin ۶۰ = ۸۶۶/۰۲ N$

$$\begin{cases} F_۱ = ۵۰۰ N \\ d_۱ = ۱۰ m \end{cases} \qquad \begin{cases} F_۲ = ۸۶۶/۰۲ N \\ d_۲ = ۰ \end{cases}$$



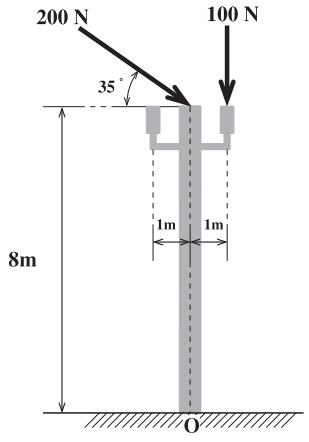
همان‌طور که در شکل ملاحظه می‌کنید امتداد نیروی $F_۲$ از نقطه‌ی O می‌گذرد، لذا فاصله‌ی $F_۲$ تا O صفر است و گشتاوری ایجاد نمی‌کند. می‌توان این نتیجه را به‌صورت زیر بیان کرد :

> اگر امتداد نیرویی از نقطه‌ای بگذرد، نیرو نسبت به آن نقطه گشتاوری ایجاد نمی‌کند.

قضیه‌ی واریگنون $M_O = F \times d = F_۱ \times d_۱ + F_۲ \times d_۲$

(ساعتگرد) $M_O = F_۱ \times d_۱ = F_۲ \times d_۲ = ۵۰۰ \times ۱۰ + ۸۶۶/۰۲ \times ۰ = ۵۰۰۰ N.m$

همان‌طور که از نتیجه‌ی حل الف و ب ملاحظه می‌شود مقدار گشتاورها یکسان است و صحت قضیه‌ی فوق تأیید می‌شود.



شکل ۲ـ۴۲

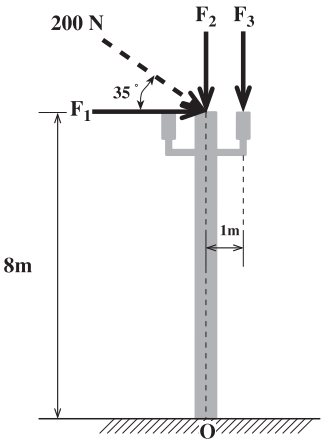
مثال ۱۸: گشتاور نیروهای وارد بر تیر چراغ برق نشان داده شده را نسبت به نقطه‌ی O به‌دست آورید.

حل: برای آسان‌تر شدن راه‌حل، ابتدا نیروی ۲۰۰ نیوتنی را به مؤلفه‌های متعامد (افقی و عمودی) تجزیه می‌کنیم، سپس مقدار گشتاور پای تیرچراغ برق را با استفاده از مجموع گشتاور تک‌تک نیروها به‌دست می‌آوریم :

$$F_1 = 200\cos 35 = 163/83\,N$$

$$F_2 = 200\sin 35 = 114/72\,N$$

$$F_3 = 100\,N$$



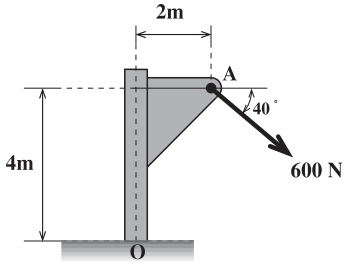
همان‌طور که در شکل ملاحظه می‌کنید امتداد نیروی F_2 از نقطه‌ی O می‌گذرد لذا فاصله‌ی نقطه‌ی O از امتداد نیروی F_2 صفر است و به همین دلیل گشتاوری ایجاد نمی‌کند.

$$M_O = \sum_{i=1}^{3} F_i \times d_i = F_1 \times d_1 + F_2 \times d_2 + F_3 \times d_3$$

$$M_O = 163/83 \times 8 + 114/72 \times 0 + 100 \times 1 = 1410/64\,N.m$$

(در جهت عقربه‌های ساعت)

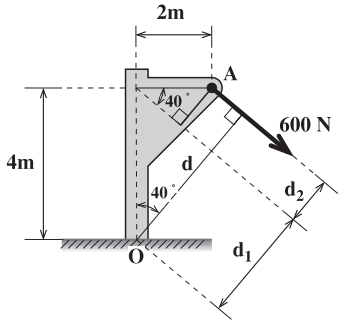
مثال ۱۹: گشتاور نیروی ۶۰۰ نیوتنی را، حول پایه‌ی سازه (نقطه‌ی O)، به‌طرق مختلف به‌دست آورید.



شکل ۴۳ــ۲

حل:

روش اول: ابتدا کوتاه‌ترین فاصله‌ی امتداد نیروی ۶۰۰ نیوتنی را تا نقطه‌ی O از طریق هندسی محاسبه می‌کنیم، سپس با استفاده از رابطه‌ی $M = f \times d$ مقدار گشتاور را به‌دست می‌آوریم :



$$d = d_1 + d_2$$

$$d_1 = 4 \times \cos 40^\circ = 3/06\,m$$

$$d_2 = 2 \times \sin 40^\circ = 1/29$$

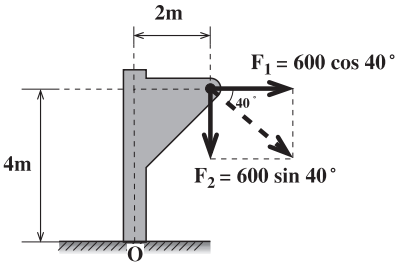
$$d = 3/06 + 1/29 = 4/35\,m$$

$$M_O = 600 \times 4/35 = 2610\ N.m$$ (ساعتگرد)

روش دوم: نیرو را با مؤلفه‌های متعامد آن در نقطه‌ی A جایگزین می‌کنیم، سپس با استفاده از قضیه‌ی واریگنون گشتاور پای میله را به‌دست می‌آوریم.

مؤلفه‌ی افقی $F_1 = 600\cos 40 = 459/63\,N$

مؤلفه‌ی قائم $F_2 = 600\sin 40 = 385/67\,N$



توجه کنید که هر دو نیرو نسبت به نقطه‌ی O ساعتگرد هستند.

$$M_O = F \times d = \sum_{i=1}^{2} F_i \times d_i = F_1 \times d_1 + F_2 \times d_2$$

$$M_O = 459/63 \times 4 + 385/67 \times 2 = 2609/86 \approx 2610\ N.m \quad \text{(ساعتگرد)}$$

همان‌طورکه ملاحظه می‌شود نتیجه‌ی روش دوم با روش اول تقریباً یکسان است و اختلاف اندکی که در نتایج این دو دیده می‌شود به دلیل حذف ارقام بعد از دو رقم اعشار است.

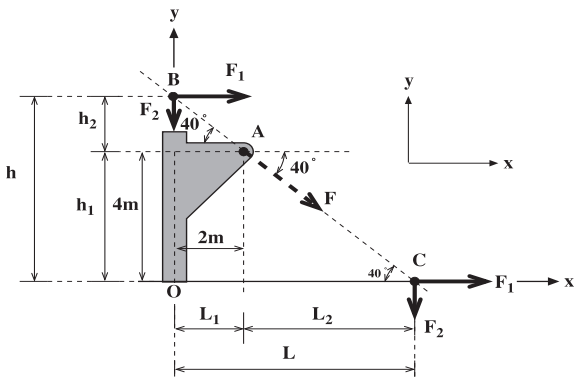
روش سوم: بنابه اصل انتقال نیرو می‌توان نیروی ۶۰۰ نیوتنی را در راستای خود به نقطه‌ی B انتقال داد و سپس آن‌را تجزیه کرد که در این حالت مؤلفه‌ی قائم آن به‌واسطه‌ی عبور از نقطه‌ی O گشتاوری را ایجاد نمی‌کند بلکه فقط مؤلفه‌ی افقی باعث ایجاد گشتاور حول نقطه‌ی O می‌شود.

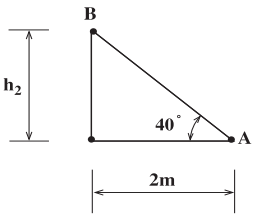
برای حل با این روش ابتدا فاصله‌ی نقطه‌ی O تا B را که با h نمایش داده شده است از طریق هندسی می‌یابیم، سپس با استفاده از قضیه‌ی واریگنون گشتاور را نسبت به نقطه‌ی O به‌دست می‌آوریم.

از مثلثات داریم :

$$tg40 = \frac{h_2}{2}$$

$$h_2 = 2 \times tg40$$





$$\Rightarrow \quad h_1 = 4m$$

$$h_2 = 2 \times tg40^\circ = 1/68 m$$

$$h = 4 + 1/68 = 5/68 m$$

$$M_O = F_1 \times d_1 + F_2 \times d_2 = 459/63 \times 5/68 + 358/67 \times 0$$

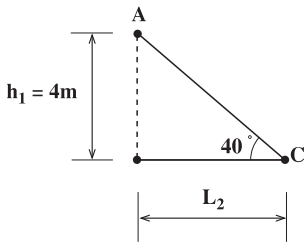
$$= 2610/7 N.m \quad \text{(ساعتگرد)}$$

روش چهارم: بنابه اصل انتقال نیروها می‌توان نیروی ۶۰۰ نیوتنی را به نقطه‌ی C انتقال داد و سپس آن‌را تجزیه کرد. بدیهی است در این حالت مؤلفه‌ی افقی آن به علت گذشتن امتدادش از O گشتاوری به‌وجود نمی‌آورد، بلکه تنها مؤلفه‌ی قائم است که حول نقطه‌ی O گشتاور ایجاد می‌کند. برای حل، ابتدا فاصله‌ی O تا C را که با L نشان داده شده است از طریق هندسی می‌یابیم، سپس با استفاده از قضیه‌ی واریگنون گشتاور پای میله را به‌دست می‌آوریم :

$$L_1 = 2m$$

از مثلثات داریم :

$$\cot g40^\circ = \frac{L_2}{h_1 = 4m} \Rightarrow L_2 = 4 \times \cot g40^\circ$$



می‌دانید که $tg\alpha . \cot g\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \cot g\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$

$$\Rightarrow \quad L_2 = 4 \times \cot g40^\circ = 4\left(\frac{1}{tg40^\circ}\right) = 4/77 m$$

$$L = L_1 + L_2 = 2 + 4/77 = 6/77 m$$

$$M_O = F_1 \times d_1 + F_2 \times d_2 = 459/63 \times 0 + 385/67 \times 6/77 = 2610/94 N.m$$

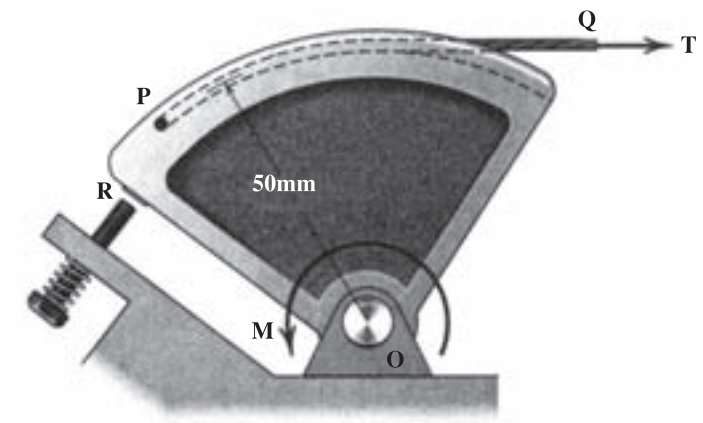
(ساعتگرد)

از بررسی نتایج چهار روش فوق روشن می‌شود که می‌توان نتایج یکسانی را از روش‌های مختلف به‌دست آورد. نکته مهم این است که از روشی استفاده شود که علاوه بر دقیق بودن دارای

محاسبات کم‌تر و سرعت عمل بیش‌تر باشد که این هم فقط با تمرین و ممارست زیاد ممکن خواهد بود.

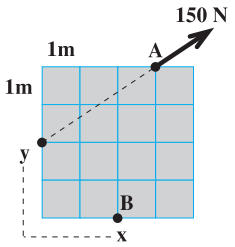
تمرین

۱ــ قطاعی با شعاع ۵۰ میلی‌متر مطابق شکل ۴۴ــ۲، توسط کابلی که در شیار آن تعبیه شده با نیروی $T = 500\,N$ به سمت راست کشیده می‌شود. گشتاور محل اتصال (پین O) را به‌دست آورید.



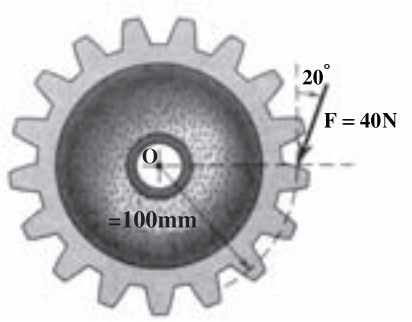
شکل ۴۴ــ۲

۲ــ ورق مربع شکلی، مطابق شکل، تحت اثر نیروی ۱۵۰ نیوتنی در A و در راستای نشان داده شده قرار دارد. گشتاور این نیرو را حول نقطه‌ی B با دو روش به‌دست آورید.



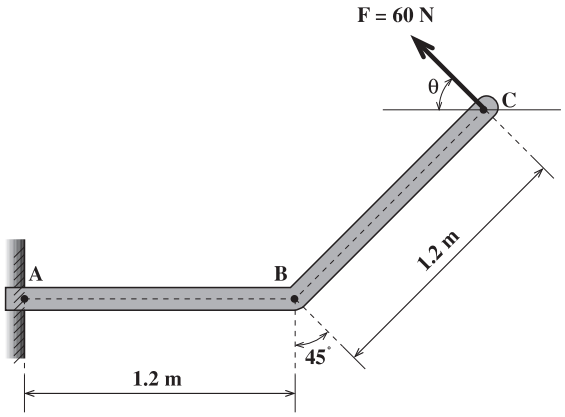
شکل ۴۵ــ۲

۳ــ نیروی ۴۰ نیوتنی بر چرخ دنده‌ای اعمال می‌شود. گشتاور آن‌را حول نقطه‌ی O (مرکز چرخ‌دنده) به‌دست آورید.



شکل ۴۶ــ۲

۴ــ نیروی ۶۰ نیوتنی برمیله‌ی خمیده‌ای مطابق شکل ۴۷ــ۲ اثر می‌کند. به ازای $\theta = ۳۰$ و $\theta = ۴۵$ و $\theta = ۶۰$ مقادیر گشتاور را در نقاط A و B به‌دست آورید.

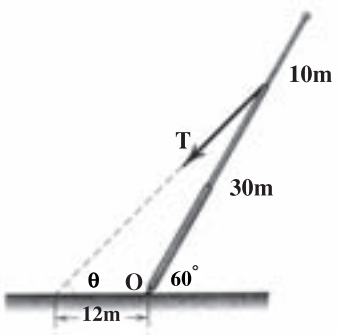


شکل ۴۷ــ۲

۵ ــ زاویه‌ی θ چند درجه باشد تا گشتاور حول نقطه‌ی A ماکزیمم باشد؟

راهنمایی: نیروی F زمانی نسبت به A دارای گشتاور ماکزیمم خواهد بود که امتداد آن بر امتداد AC عمود باشد ؛ به عبارت دیگر هنگامی که فاصله‌ی AC کوتاه‌ترین فاصله باشد.

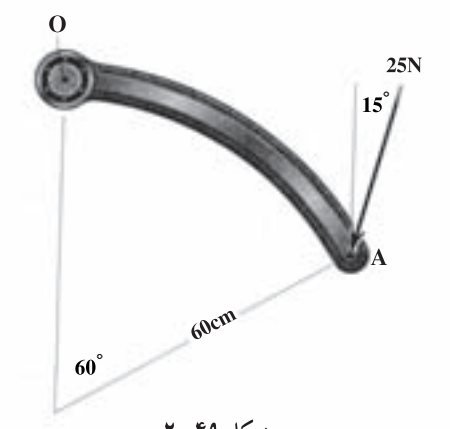
۶ ــ در شکل ۴۸ــ۲ کشش کابل T را طوری محاسبه کنید که گشتاور در پای میله‌ی پرچم نقطه‌ی (O) برابر ۷۲kN.m باشد.



شکل ۴۸ــ۲

راهنمایی: ابتدا زاویه‌ی θ را به طریق مثلثاتی به‌دست آورید و سپس فاصله‌ی عمودی O تا امتداد T را محاسبه کنید.

۷ــ در شکل ۴۹ــ۲ گشتاور حول نقطه‌ی O را به‌دست آورید.



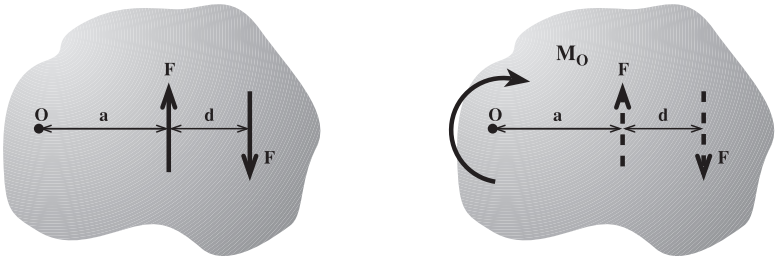
شکل ۴۹ــ۲

۷ــ۲ــ زوج نیرو یا کوپل[1]

دو نیروی مساوی F با امتدادهای موازی و جهت مخالف، در صورتی‌که با هم فاصله‌ای مانند d داشته باشند زوج نیرو نامیده می‌شوند بدیهی است که برآیند این دو نیرو صفر است اما گشتاور آن‌ها صفر نیست. پس زوج نیرو باعث جابه‌جایی جسم نمی‌شود بلکه موجب دوران آن می‌گردد.

نکته‌ی مهم دیگری که در زوج نیرو قابل توجه است، این است که مقدار گشتاور ایجاد شده توسط زوج نیرو نسبت به هر نقطه‌ی دلخواه ثابت است. برای روشن شدن مطلب گشتاور شکل‌های ۵۰ــ۲، ۵۱ــ۲ و ۵۲ــ۲ را نسبت به نقطه‌ی O به‌دست می‌آوریم.

$$M_O = -F \times a + F \times (a+d) = -F.a + F.a + F.d = F.d \qquad \text{(ساعتگرد)}$$

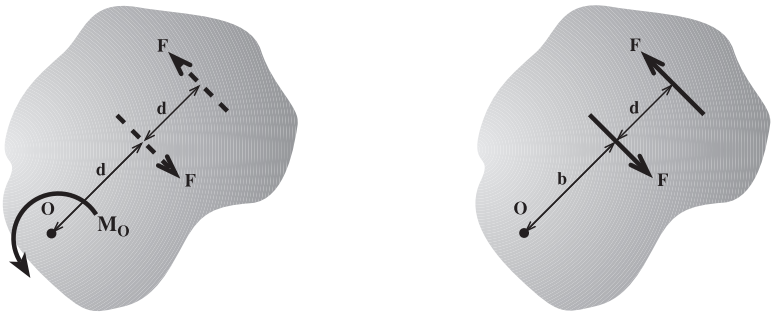


شکل ۵۰ــ۲

۱ــ Couple

$$M_O = F \times b - F \times (b+d) = F.b - F.b - F.d = -F.d$$

$$M_O = F.d$$ (خلاف ساعتگرد)

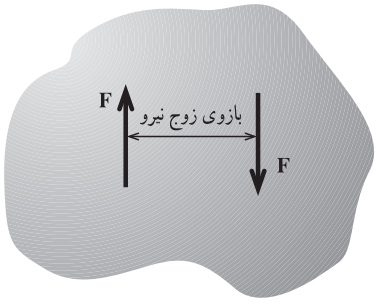


شکل ۵۱ــ۲

همان‌طور که در نتایج هر دو شکل ملاحظه می‌شود مقدار گشتاور برابر $M_O = F.d$ با علامت مثبت و منفی (ساعتگرد و خلاف ساعتگرد) است و فاصله‌ی a و b در نتیجه ظاهر نشده است. پس می‌توان نتیجه گرفت که گشتاور یک زوج نیرو مستقل از فاصله‌ی زوج‌ها تا محل گشتاورگیری است و مقدار گشتاور نسبت به هر نقطه ثابت است و از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود :

بازوی زوج نیرو × یکی از نیروها = گشتاور یک زوج نیرو

بازوی زوج نیرو همان فاصله‌ی عمودی دو نیرو (d) است.

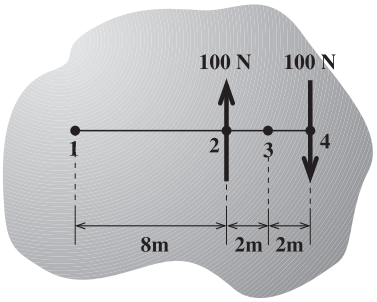


شکل ۵۲ــ۲

مثال ۲۰: گشتاور زوج نیروی نشان داده شده را نسبت به نقاط ۱، ۲، ۳ و ۴ به‌دست آورید.

حل: با توجه به شکل ۵۳ ــ۲ ملاحظه می‌کنید که بازوی زوج نیرو ۴ متراست. پس گشتاور حاصل طبق توضیحات فوق،باید برابر باشد با :

$$M = F \times d = ۱۰۰ \times ۴ = ۴۰۰ N.m$$ (ساعتگرد)



شکل ۵۳ ــ۲

گشتاور نسبت به نقطه‌ی ۱

$$M_۱ = -۱۰۰ \times (۸) + ۱۰۰ \times (۸ + ۴) = ۱۰۰ \times ۴ = ۴۰۰ N.m$$ (ساعتگرد)

گشتاور نسبت به نقطه‌ی ۲

$$M_۲ = ۱۰۰ \times (۰) + ۱۰۰ \times ۴ = ۴۰۰ N.m$$ (ساعتگرد)

گشتاور نسبت به نقطه‌ی ۳

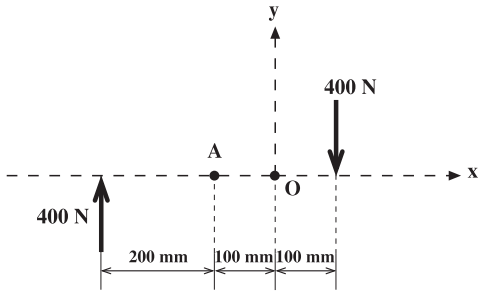
$$M_۳ = ۱۰۰ \times ۲ + ۱۰۰ \times ۲ = ۲۰۰ + ۲۰۰ = ۴۰۰ N.m$$ (ساعتگرد)

گشتاور نسبت به نقطه‌ی ۴

$$M_۴ = ۱۰۰ \times ۴ + ۱۰۰ \times ۰ = ۴۰۰ N.m$$ (ساعتگرد)

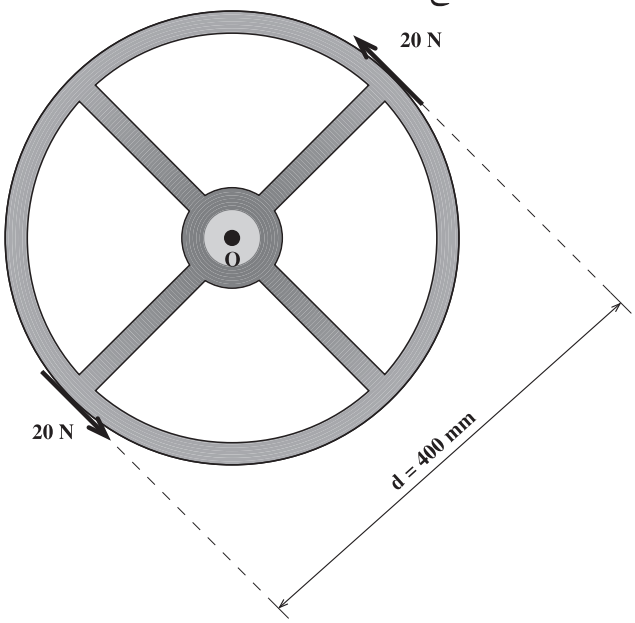
تمرین

۱ــ گشتاور زوج نیروی ۴۰۰ نیوتنی را حول دو نقطه‌ی O و A به‌دست آورید.



شکل ۵۴ ــ۲

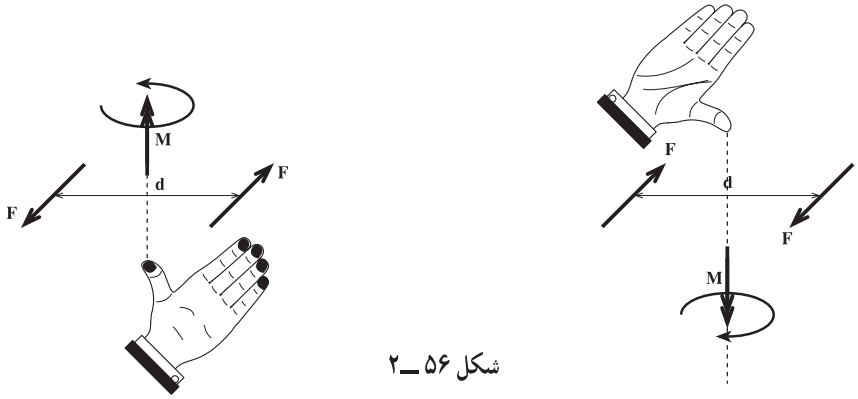
۲ــ راننده‌ای ضمن گردش به چپ، دو زوج نیروی ۲۰ نیوتنی را، مطابق شکل ۵۵ ــ۲، به‌فرمان وارد می‌کند. گشتاور این زوج نیروها را تعیین و در مورد آثار تغییر قطر فرمان (d) بحث کنید.



شکل ۵۵ ــ۲

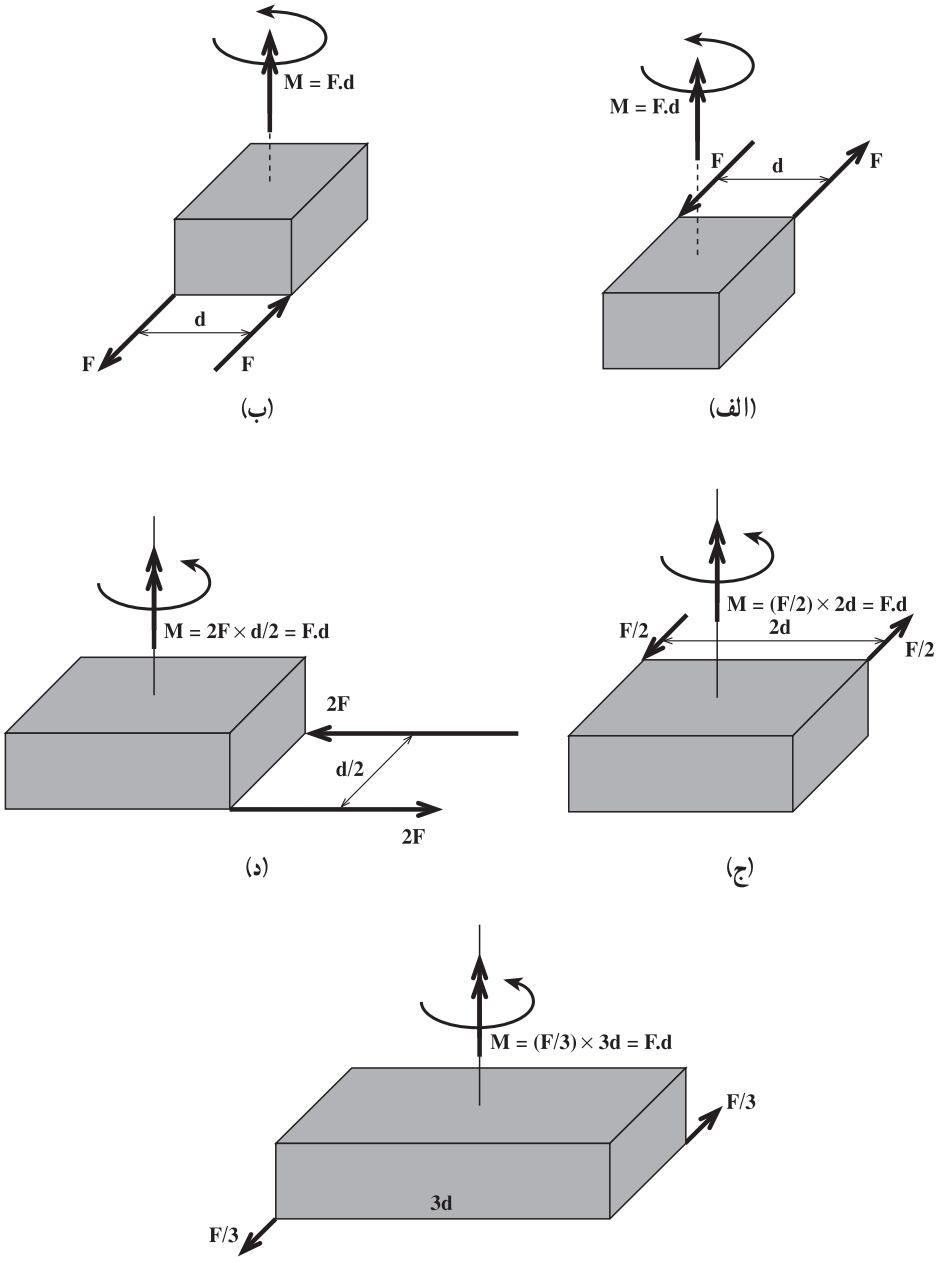
۸ ــ۲ــ سیستم‌های زوج نیرویی معادل

تا زمانی که گشتاور زوج نیروهای مختلفی ثابت باشد آن زوج نیروها هم‌ارز یا معادل یک‌دیگرند. برای این منظور گشتاور یک زوج نیرو را با بردار دو فلش‌دار (⇉) نمایش می‌دهیم که جهت آن تابع قانون دست راست است؛ یعنی با قرار دادن لبه‌ی دست راست روی یکی از نیروها (به‌طوری که کف دست رو به نیروی دیگر باشد) و چرخاندن چهار انگشت به سمت نیروی دیگر، انگشت شست نشان‌دهنده‌ی جهت مثبت گشتاور است.



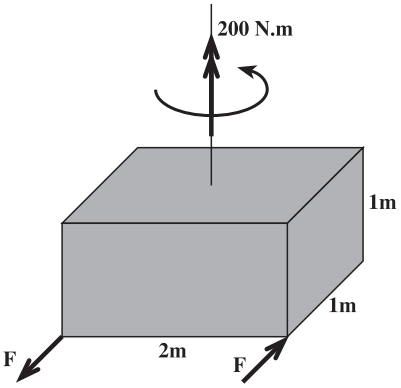
شکل ۵۶ ــ۲

در مکعب‌های نشان داده شده تمامی زوج نیروها معادل هم‌اند زیرا گشتاورهایی که تولید می‌کنند اولاً در یک راستا هستند و ثانیاً مقدار آن‌ها با هم برابراست.



شکل ۵۷ ــ ۲

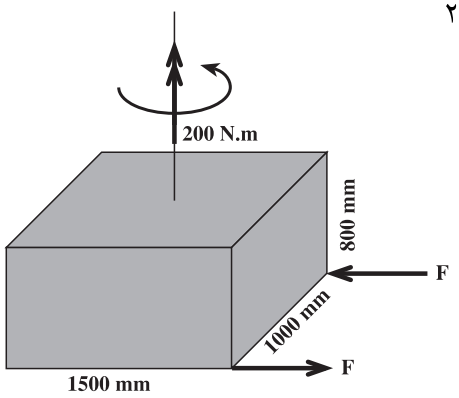
مثال ۲۱: در شکل‌های زیرمقادیر نیروها و فواصل را طوری تعیین کنید که گشتاور حاصل $M = ۲۰۰ N.m$ شود.



شکل ۵۸ــ۲

حل:

$$M = F.d \qquad ۲۰۰ = F \times ۲ \qquad F = \frac{۲۰۰}{۲} = ۱۰۰ N$$



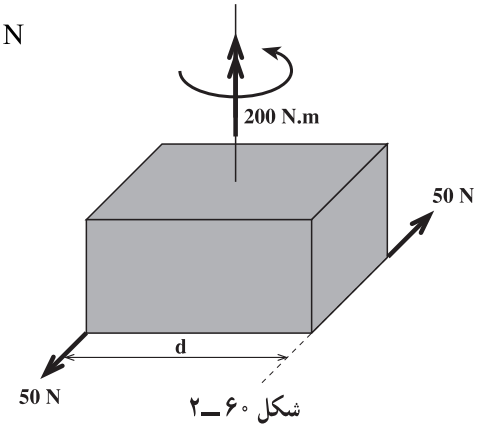
شکل ۵۹ــ۲

حل: ابتدا فواصل را به متر تبدیل می‌کنیم زیرا واحد گشتاور نیوتن در متر است.

$$d = ۱۰۰۰ mm = ۱۰۰۰ \times ۱۰^{-۳} (m) = ۱ m$$

$$M = F.d \quad ۲۰۰ (N.m) = F(N) \times ۱(m)$$

$$F = \frac{۲۰۰}{۱} = ۲۰۰ N$$



شکل ۶۰ــ۲

حل:

$d = ?$

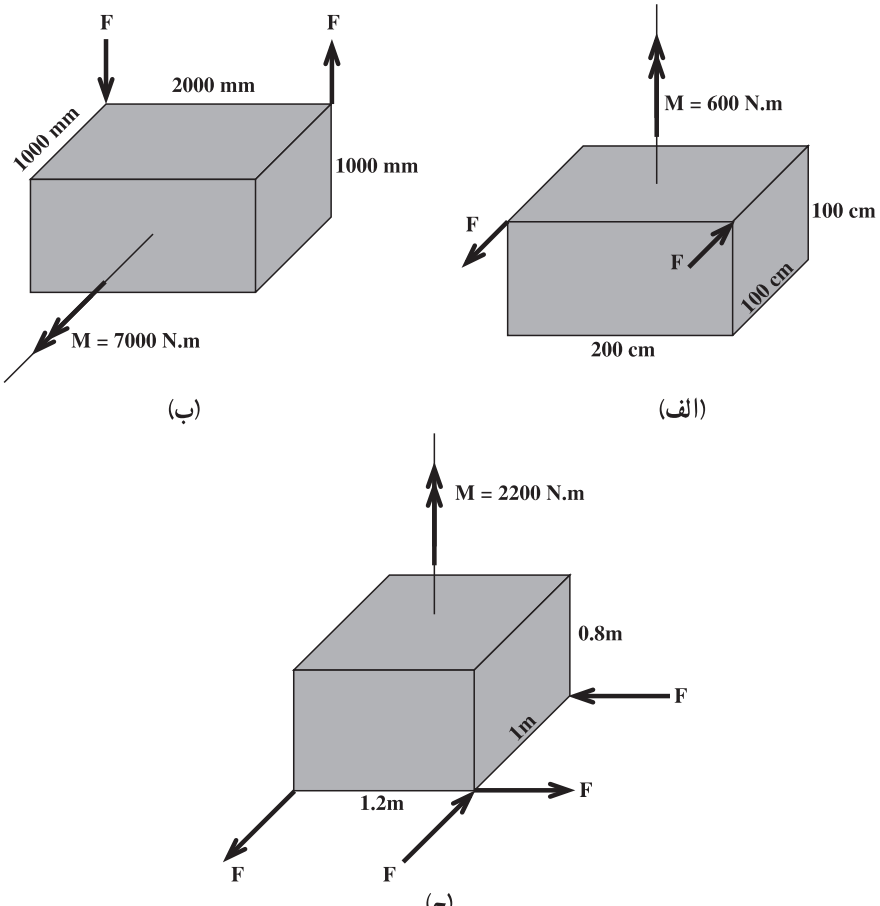
$F = ۵۰\ N$

$M = F.d \qquad ۲۰۰(N.m) = ۵۰(N) \times d(m)$

$$d = \frac{۲۰۰}{۵۰} = ۴m$$

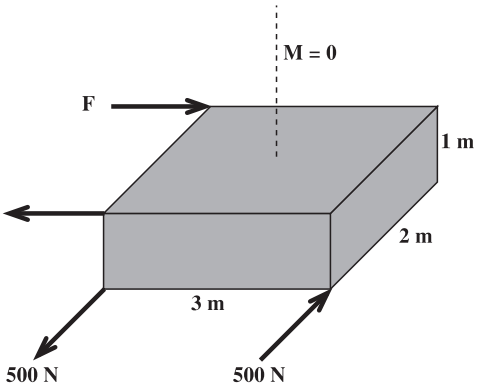
تمرین

۱ــ در هر یک از شکل‌های ۶۱ ــ۲ نیروها را طوری بیابید که گشتاور نشان داده شده تولید شود و همچنین جهت دورانی لنگر را روی شکل‌ها نشان دهید.



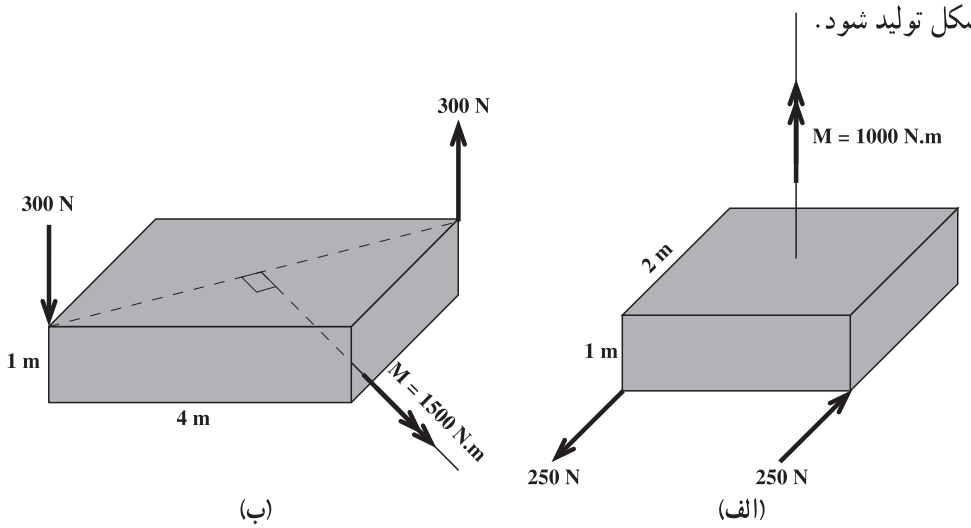
شکل ۶۱ ــ۲

۲ــ در شکل ۶۲ ــ۲ مقدار F را طوری بیابید که گشتاور حاصل از مجموع دسته‌های زوج نیرو صفر شود.



شکل ۶۲ ــ۲

۳ــ در شکل ۶۳ ــ۲ ابعاد هر مکعب را طوری تعیین کنید که گشتاور نشان داده شده روی شکل تولید شود.

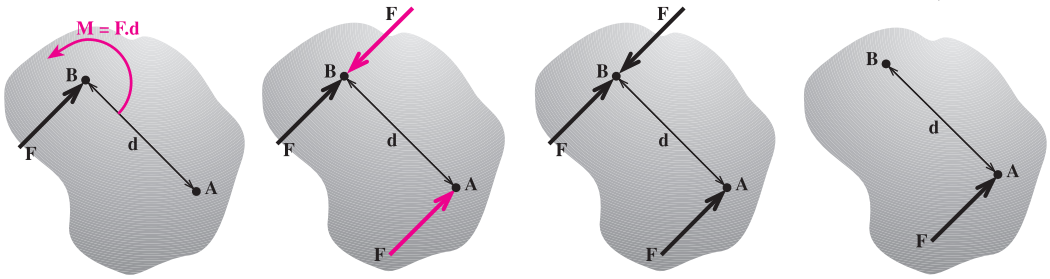


شکل ۶۳ ــ۲

۹ــ۲ــ انتقال نیرو با استفاده از خاصیت زوج نیروها

فرض کنید می‌خواهیم نیرویی مانند F را که بر نقطه‌ی A وارد شده است به نقطه‌ی B انتقال دهیم. برای این منظور دو نیروی مخالف و مساوی F را، مطابق شکل ۶۴ ــ۲ــالف، بر نقطه‌ی B اثر می‌دهیم. بدیهی است اعمال نیروها درنقطه‌ی B، به دلیل خنثی کردن یک‌دیگر، تأثیری بر جسم ندارد، اما با بررسی بیش‌تر می‌توان ملاحظه کرد که نیروی واقع در A و یکی از نیروهای B تشکیل زوج نیرو می‌دهند که اثر آن‌ها فقط یک کوپل است و می‌توان تنها یک کوپل جایگزین آن‌ها کرد. همان‌طورکه

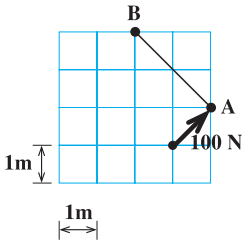
در شکل ۶۴ ــ۲ــد ملاحظه می‌کنید نیروهای باقی‌مانده یک نیرو (F) و کوپل (M) در B است، که نیرو هم راستا و مساوی نیروی اولیه می‌باشد.



شکل ۶۴ ــ۲

نتیجه‌گیری: برای انتقال یک نیرو به نقطه‌ای دلخواه می‌بایست ضمن انتقال نیرو اثر این انتقال را (کوپلی را به اندازه‌ی حاصل‌ضرب نیروی جابه‌جا شونده در فاصله‌ی انتقال) روی سیستم اعمال کرد. واضح است که با عکس این روش می‌توان یک نیرو و کوپل وارد شده به یک جسم را فقط با یک نیرو جایگزین نمود.

مثال ۲۲: نیروی وارد شده در نقطه‌ی A را به نقطه‌ی B منتقل کنید.

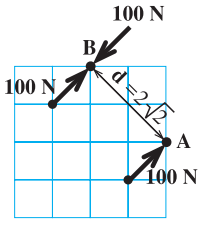


شکل ۶۵ ــ۲

حل: فاصله‌ی انتقال (AB) قطر مربعی به ضلع ۲ متر است.

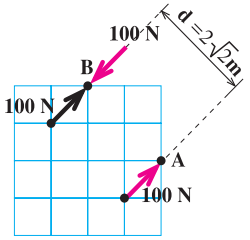
پس : $d = \sqrt{۲^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}\ m$

برای انتقال نیرو از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B کافی است در محل B دو نیروی ۱۰۰ نیوتنی را به‌موازات نیروی وارد شده در A و با جهت مخالف هم وارد کنیم.



شکل ۶۶ ــ۲ــ(الف)

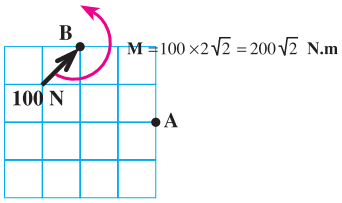
بدیهی است که نیروهای نشان داده شده در شکل ۶۶ ــ۲ــ الف، یعنی نیروی وارد شده در A و یکی از نیروهای B که مخالف جهت نیروی A است، تشکیل فقط یک کوپل می‌دهند.



شکل ۶۶ ــ۲ــ(ب)

با جایگزینی یک کوپل به‌جای زوج نشان داده شده حاصل شکل (۶۷ ــ۲) می‌شود.

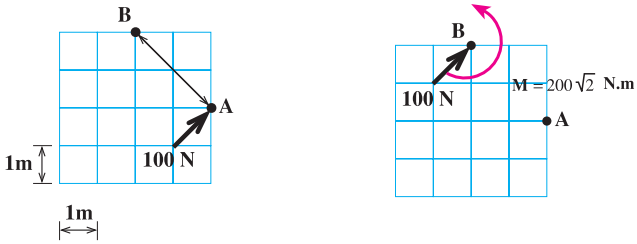
$$M = F.d = ۱۰۰ \times (۲\sqrt{۲}) = ۲۰۰\sqrt{۲}\ N.m$$



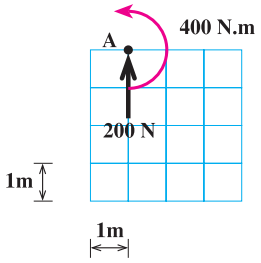
شکل ۶۷ ــ۲

از این به بعد به طریق ساده‌تری می‌توان عملیات فوق را انجام داد. برای انتقال نیروی ۱۰۰ نیوتنی از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B کافی است نیرو را در کوتاه‌ترین فاصله‌ی بین دو نقطه ضرب کرده تا اثر انتقال به‌صورت لنگری به‌دست آید، سپس نیرو را به نقطه‌ی B، همراه با لنگر محاسبه شده، اعمال نمود. برای تعیین جهت لنگر با استفاده از قانون دست راست عمل می‌شود (شکل ۶۸ ــ۲).

$$M = ۱۰۰ \times ۲\sqrt{۲} = ۲۰۰\sqrt{۲}\ N.m \qquad d = ۲\sqrt{۲}$$ فاصله‌ی بین A و B



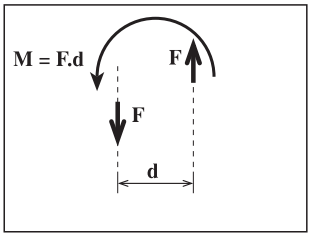
شکل ۶۸ ــ۲



شکل ۶۹ــ۲

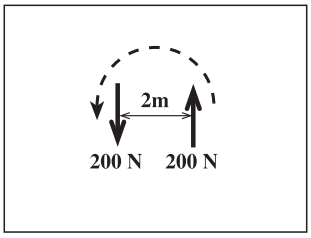
مثال ۲۳: در شکل ۶۹ــ۲ سیستم نیرو و ممان نشان داده شده را فقط به یک نیرو تبدیل کنید.

حل: برای از بین بردن ممان باید عوامل ایجاد ممان (زوج نیرو) را به طریق مناسبی روی سیستم اعمال کرد. چون جهت ممان در خلاف ساعتگرد است پس زوج نیرو باید خلاف ساعتگرد باشد (شکل ۷۰ــ۲ــ الف).



شکل ۷۰ــ۲ــ(الف)

مقدار نیروی زوج باید به اندازه‌ی همان نیروی وارد شده در نقطه‌ی A (۲۰۰ نیوتن) باشد پس می‌دانیم که یک زوج نیروی ۲۰۰ نیوتنی باعث ایجاد ممان ۴۰۰ نیوتن متری شده است با علم به این موضوع فاصله یا بازوی زوج به‌دست می‌آید.



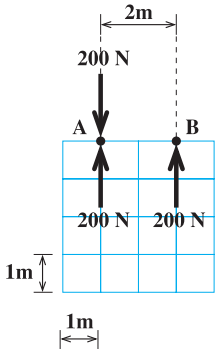
شکل ۷۰ــ۲ــ(ب)

$$M = ۴۰۰\,N.m \qquad F = ۲۰۰\,N \qquad M = F.d \qquad d = \frac{M}{F}$$

بازوی زوج

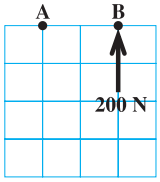
$$d = \frac{۴۰۰\,N.m}{۲۰۰\,N} = ۲m$$

حال، مطابق شکل ۷۰ــ۲ــج، به‌جای ممان، یک زوج نیرو اعمال می‌کنیم به‌طوری‌که یکی از مؤلفه‌های آن دقیقاً روی نقطه‌ی A وارد شده باشد و امتداد آن‌ها موازی نیروی موجود در A باشد. توجه داشته باشید که نحوه‌ی قرارگیری زوج در A به گونه‌ای است که نیروی موجود A با یکی از مؤلفه‌های زوج که در A استقرار می‌یابد هم‌دیگر را خنثی می‌کنند.



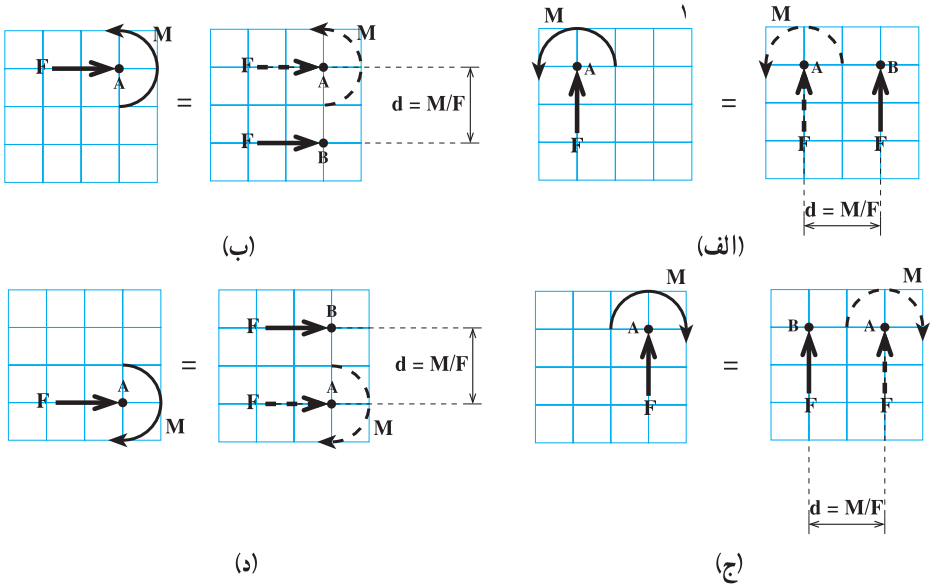
شکل ۷۰ــ۲ــ(ج)

همان‌طور که از شکل پیداست نیروهای واقع شده در A همدیگر را خنثیٰ نموده و تنها یک نیرو در نقطه‌ی B روی سیستم وارد می‌شود.



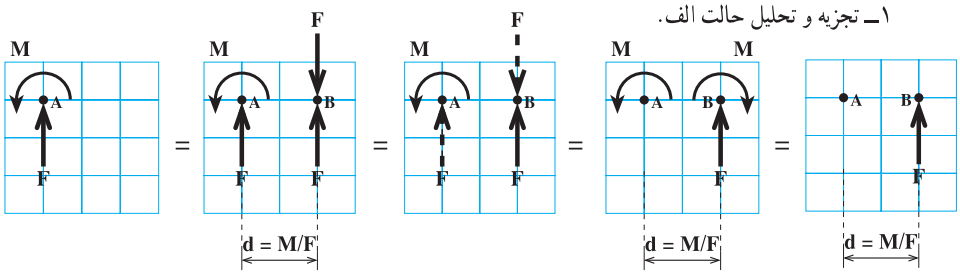
شکل ۷۰ ــ ۲ــ(د)

نتیجه‌گیری: برای جایگزینی نیرو و کوپلی با فقط یک نیرو، کافی است نیرو را به اندازه‌ی حاصل تقسیم کوپل بر نیرو، در راستای عمود بر نیرو، به‌گونه‌ای انتقال دهیم که کوپل ناشی از انتقال نیرو با کوپل موجود هماهنگ و هم‌جهت شود. به شکل ۷۱ ــ ۲ توجه کنید :



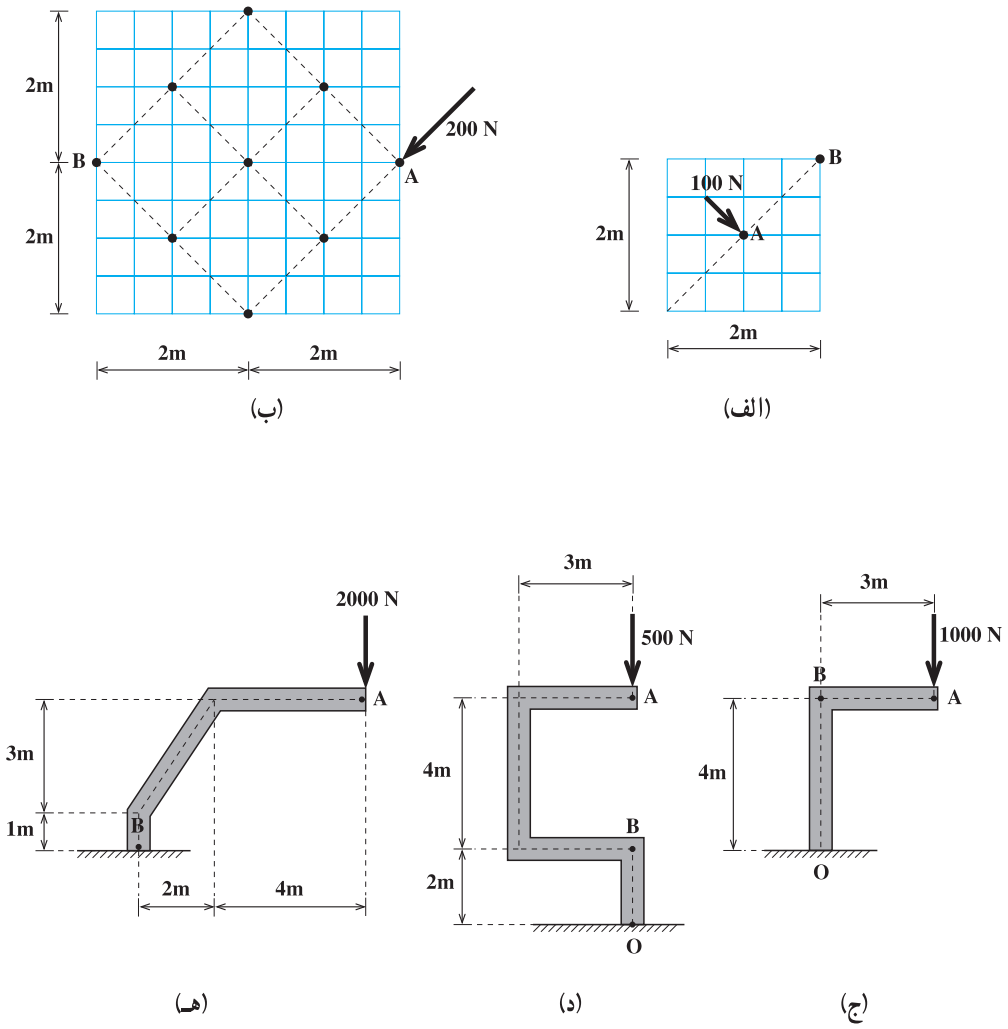
شکل ۷۱ ــ ۲

۱ــ تجزیه و تحلیل حالت الف.



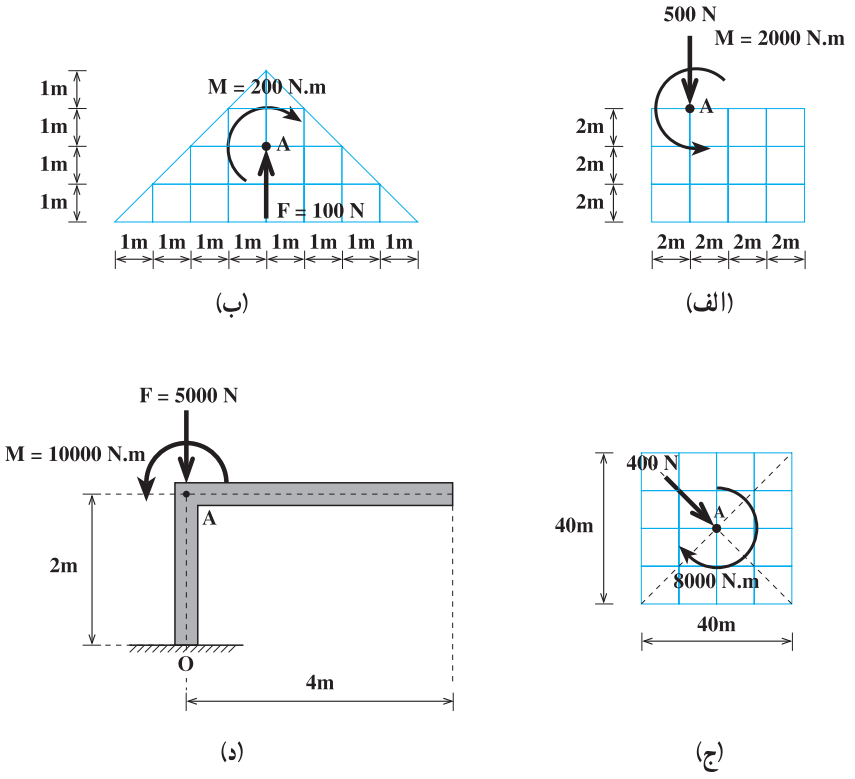
تمرین

۱ــ نیروهای نشان داده شده در شکل ۷۲ ــ۲ را به نقطه‌ی B انتقال دهید.



شکل ۷۲ ــ۲

۲ــ در شکل ۷۳ ــ۲ نیرو و کوپل نشان داده شده را فقط با یک نیروی مناسب جایگزین کنید. (کوپل را به نحو مناسبی حذف کنید).



شکل ۷۳ ــ۲

فصل سوم

تعادل یک ذرّه

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل، هنرجو باید بتواند :
۱ــ شرط لازم وکافی برای تعادل یک ذرّه را توضیح دهد.
۲ــ نمودار پیکره‌ی آزاد نیروهای وارد بر یک ذرّه را ترسیم کند.
۳ــ ذرات تحت اثر نیرو را تجزیه و تحلیل نماید.

۱ــ۳ــ تعادل یک ذرّه

وقتی ابعاد یک جسم قابل صرف‌نظر باشد آن را ذرّه می‌نامند. ذرّه از نظر فیزیکی جسمی است که ابعاد آن بسیار کوچک باشد ولی می‌تواند جرم داشته باشد. در استاتیک وقتی که ابعاد جسم در ارتباط با فضای اطراف آن و یا اثر نیروهای وارد بر آن کوچک باشد می‌توان آن‌را به‌صورت ذرّه تلقی نمود.

بنابراین به علت کوچک بودن ابعاد ذرّه نیروهای وارد بر آن ضرورتاً «متقارب»اند. شرط لازم و کافی برای تعادل یک ذره تحت اثر نیروهای مؤثر بر آن، به‌صورت زیر بیان می‌شود :

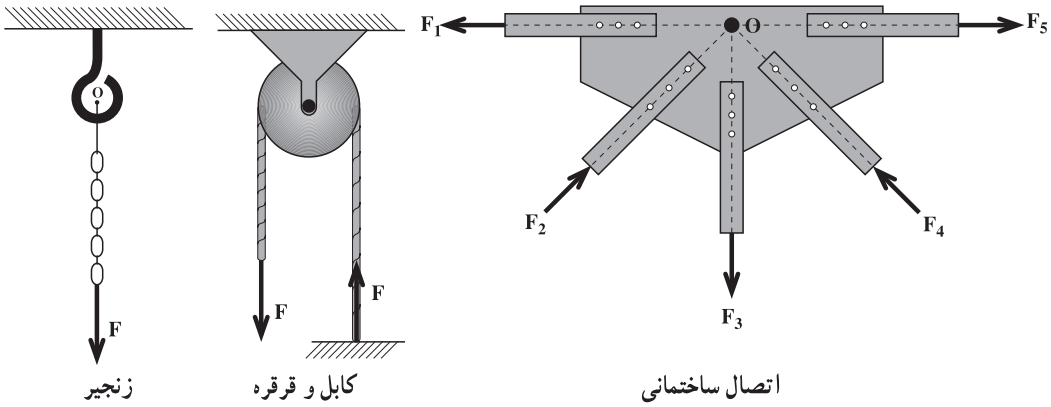
$$\sum \vec{F} = 0 \qquad (۱ــ۳)$$

در رابطه‌ی ۱ــ۳، $\sum \vec{F}$ عبارت است از مجموع نیروهای وارد بر ذره در جهات مختلف. برای آن‌که بتوان این رابطه را به‌طور صحیح به‌کار برد لازم است همه‌ی نیروهای مجهول و معلوم وارد بر ذرّه مشخص باشند که بهترین راه انجام این کار استفاده از نمودار پیکره‌ی آزاد است که در این فصل آن‌را، در مورد ذرّه، شرح می‌دهیم.

۲ــ۳ــ نمودار پیکره‌ی آزاد

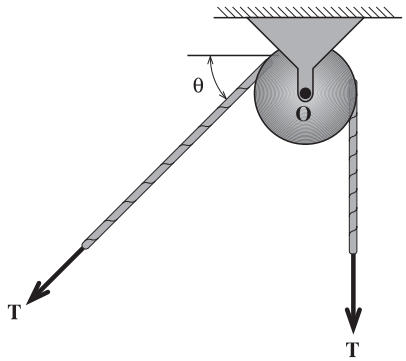
نمودار پیکره‌ی آزاد عبارت است از یک ترسیمه‌ی ساده از ذره که در آن ذره از محیط اطراف جدا شده و نیروهای مؤثر بر آن (مجهول و معلوم) در راستای واقعی نیروها نمایش داده شده باشند.

در شکل ۱ــ۳ سیستم‌هایی را می‌بینید که نیرو را فقط در راستای خود انتقال می‌دهند.



شکل ۱ــ۳

توضیح: کابل و قرقره یک سیستم مکانیکی است که در صنعت ساختمان‌سازی برای انتقال بار مورد استفاده قرار می‌گیرد (شکل ۲ــ۳).



شکل ۲ــ۳

در تجزیه و تحلیل کابل‌ها فرض می‌شود که اولاً، وزن کابل ناچیز و قابل صرف‌نظر کردن است و ثانیاً افزایش طول کابل صفر است.

یک کابل فقط و فقط می‌تواند یک نیروی کششی را تحمل کند واین نیرو همیشه در امتداد کابل است بنابراین در شکل ۲ــ۳ نیروی کابل مستقل از زاویه‌ی θ بوده و برای هر زاویه‌ای نیروی کابل برابر T است. پس می‌توان نتیجه گرفت که T در طول کابل ثابت است.

۳ــ۳ــ رسم نمودار پیکره‌ی آزاد

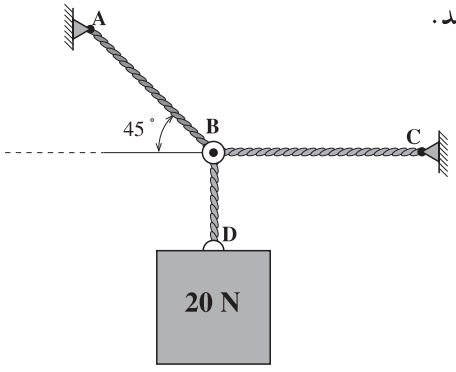
ترسیم نمودار پیکره‌ی آزاد، قبل از نوشتن روابط، از اهمیت زیادی برخوردار است و هرگونه کم دقتی در این خصوص بعضاً منجر به استخراج جواب‌های غیرمعمول در مسئله می‌شود. برای ترسیم یک نمودار پیکره‌ی آزاد رعایت سه مرحله ضروری است.

مرحله‌ی ۱: ذره‌ی مورد نظر را از محیط جدا کرده و آن را با یک نقطه نشان می‌دهیم.

مرحله‌ی ۲: بر روی ذره‌ی مشخص شده نیروهای مؤثر را نشان می‌دهیم. بدیهی است که نیروهای وارد بر ذره شامل نیروهای فعال و واکنش‌ها هستند. نیروهای فعال نیروهایی هستند که می‌خواهند جسم را به حرکت درآورند و نیروهای غیرفعال و یا واکنش‌ها نیروهای ناشی از تکیه‌گاه‌ها است که تمایل دارند از حرکت جسم ممانعت کنند.

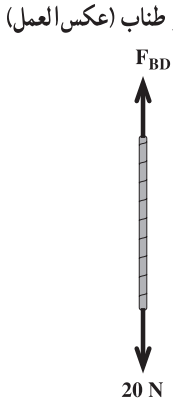
مرحله‌ی ۳: مقدار و جهت نیروهای معلوم را باید در کنار بُردار آن‌ها مشخص کرد. برای نشان دادن مقدار و جهت نیروهای مجهول از حروف مناسب استفاده می‌شود. در حالت خاص چنانچه امتداد یک نیرو مشخص اما جهت آن نامشخص باشد، می‌توان جهتی دلخواه را اختیار کرد که پس از حل، در صورت مثبت بودن پاسخ، جهت فرض شده صحیح و در صورت منفی بودن، جهت واقعی نیرو در خلاف جهت فرض شده می‌باشد.

مثال ۱: جعبه‌ای که در شکل ۳ــ۳ نشان داده شده است ۲۰ نیوتن وزن دارد، نمودار پیکره‌ی آزاد طناب BD و حلقه‌ی B را رسم کنید.



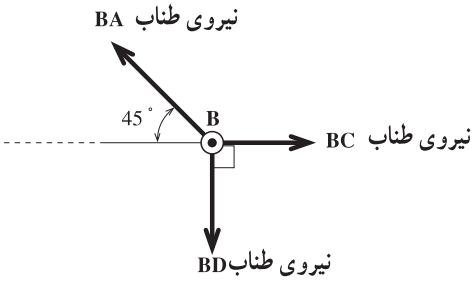
شکل ۳ــ۳

حل: نیروی ۲۰ نیوتنی از نقطه‌ی D توسط طناب BD به حلقه‌ی B انتقال می‌یابد. بنابراین بر طناب BD در نقطه‌ی D نیروی ۲۰ نیوتنی به سمت پایین وارد می‌شود و در محل B عکس‌العمل آن به سمت بالاست. پس طول طناب BD افزایش می‌یابد که این امر نشان‌دهنده‌ی وجود نیروی کششی در طناب BD است.



شکل ۴ ــ۳

برای رسم نمودار پیکره‌ی آزاد حلقه‌ی B، ابتدا آن‌را از محیطش جدا می‌کنیم. به‌دلیل طبیعت طناب و کابل‌ها که فقط قادر به تحمل نیروهای کششی هستند می‌توان نتیجه گرفت که سه نیرو در راستای طناب‌ها با جهت کششی بر حلقه‌ی B وارد می‌شوند.



شکل ۵ ــ ۳

۴ــ۳ــ روش تحلیل ذرّات تحت اثر نیرو

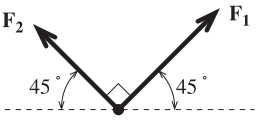
هرگاه ذره‌ای پس از تأثیر مجموعه‌ای از نیروها در حال سکون و یا در حال حرکت یک‌نواخت مستقیم‌الخط باشد آن جسم در حال تعادل است و نیروهای وارد شده را نیروهای متعادل‌کننده گویند. یک روش حل مسایل تعادل نیروهای متقارب یا همرس به‌صورت زیر است :

۱ــ ترسیم نمودار پیکره‌ی آزاد: یک نمودار پیکره‌ی آزاد برای ذره رسم می‌شود و نیروها با امتداد واقعی و جهت واقعی یا فرض روی ذره نمایش داده می‌شوند. در کنار بردار نیروها مقدار برای نیروهای معلوم و حروف مناسب برای نیروهای مجهول و یا واکنش تکیه‌گاه‌ها نوشته می‌شوند.

۲ــ تنظیم معادلات تعادل: به‌طورکلی، در نیروهای متقارب باید شرط $\sum \vec{F} = 0$ برقرار باشد. همان‌طورکه می‌دانید بردارهای صفحه‌ای دارای دو مؤلفه‌ی i و j $(\vec{F} = f_x i + f_y j)$ هستند ؛ پس شرط تعادل این است که مجموعه‌ی هر مؤلفه (مجموع نیروها در جهت x و y) صفر باشد ؛ در نتیجه برای نیروهای همرس در صفحه دو رابطه‌ی زیر باید برقرار باشد :

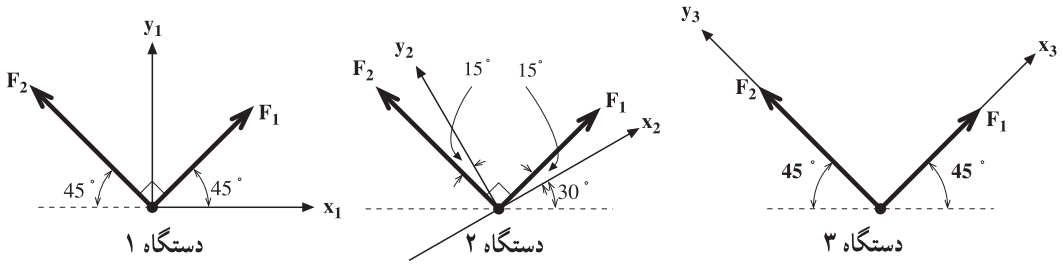
$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \end{aligned} \qquad (۳ــ۲)$$

محور x و y یا روی سیستم مشخص است و یا این‌که توسط کاربر تعیین می‌شود. نکته‌ی حائز اهمیت در تعیین دستگاه مختصاتی این است که دستگاهی انتخاب شود که عملیات را ساده کند. برای مثال در شکل ۶ ــ۳ دو نیروی همرس بر ذره‌ی A اعمال شده است و در شکل ۷ــ۳ سه نوع دستگاه



شکل ۶ ــ ۳

دلخواه پیش‌بینی شده است که در زیر به اختصار، هر کدام مورد بررسی قرار می‌گیرد.



شکل ۷ــ۳

دستگاه ۱: این دستگاه که هم‌راستای امتداد افقی و عمودی است به نظر ساده‌ترین دستگاه تلقی می‌شود، اما همان‌طورکه در شکل ملاحظه می‌کنید برای تعیین مؤلفه‌های دو نیروی F_1 و F_2، هر دو نیرو روی محورهای x و y دارای مؤلفه هستند؛ پس برای تشکیل روابط تعادل بر امتدادهای x و y با چهار مؤلفه‌ی نیرو (برای هر نیرو دو مؤلفه) سر و کار داریم:

$$F_1 \text{ مؤلفه‌های نیروی } \begin{cases} f_{1x} = F_1 \cos 45 \\ f_{1y} = F_1 \sin 45 \end{cases} \qquad F_2 \text{ مؤلفه‌های نیروی } \begin{cases} f_{2x} = -F_2 \cos 45 \\ f_{2y} = F_2 \sin 45 \end{cases}$$

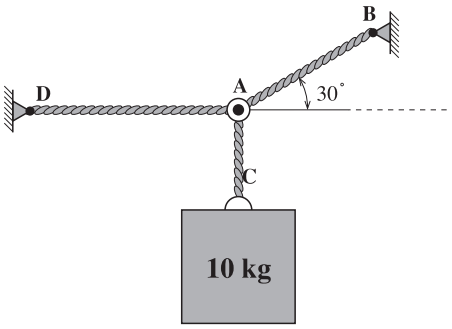
دستگاه ۲: در این دستگاه، همانند دستگاه ۱، با چهار مؤلفه‌ی نیرو سروکار خواهیم داشت که عبارت‌اند از:

$$F_1 \text{ مؤلفه‌های نیروی } \begin{cases} f_{1x} = F_1 \cos 15 \\ f_{1y} = F_1 \sin 15 \end{cases} \qquad F_2 \text{ مؤلفه‌های نیروی } \begin{cases} f_{2x} = -F_2 \sin 15 \\ f_{2y} = F_2 \cos 15 \end{cases}$$

دستگاه ۳: این دستگاه طوری انتخاب شده که محورهای x و y به موازات نیروهاست لذا برای تشکیل روابط روی هر محور تنها با یک نیرو سروکار داریم:

$$\begin{cases} f_x = F_1 \\ f_y = F_2 \end{cases}$$

به‌دلیل عملیات و مؤلفه‌های کم‌تر دردستگاه ۳ نسبت به دو دستگاه دیگر، این دستگاه، دستگاه مناسبی بوده و خطای آن به حداقل می‌رسد. پس کاربر با اندکی تأمل می‌تواند دستگاهی را اختیار کند که عملیات را ساده نماید. نکته‌ی مهم‌تر در انتخاب دستگاه مختصاتی این است که دلیلی ندارد دستگاه همواره دارای جهات مثبتی همانند آنچه که در ریاضیات فراگرفته‌اید باشد، زیرا دستگاه و محورهای مثبت آن نسبی است و می‌توان هر جهتی را مثبت فرض کرد.

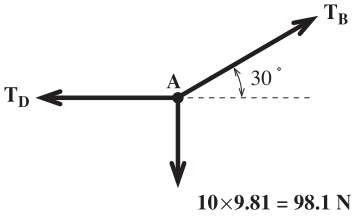


شکل ۸ــ۳

مثال ۲: نیروهای کششی مؤثر در طناب‌های AB و AD را به‌گونه‌ای تعیین کنید که وزنه و مجموعه در حال تعادل باشد (از وزن طناب‌ها صرف‌نظر می‌شود).

حل: نیروها در نقطه‌ی A همرس‌اند، بنابراین می‌توان با بررسی این نقطه و نوشتن شرایط تعادل، نیروی کششی طناب‌ها را تعیین نمود. برای این منظور عملیات زیر را انجام می‌دهیم :

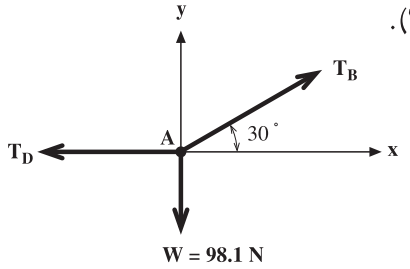
گام ۱: رسم نمودار پیکره‌ی آزاد: سه نیروی همرس در A اثر می‌کنند که یکی از آن‌ها ناشی از وزن جرم و جهت آن در A به سمت پایین (کششی) است. دو نیروی دیگر عکس‌العمل طناب‌ها با جهت کششی می‌باشند که مجهولات مسئله‌اند. برای مقدار نیرو در طناب AB، T_B و برای مقدار نیرو در طناب AD، T_D فرض می‌کنیم.



شکل ۹ــ۳

گام ۲: دستگاه مناسبی را روی نمودار پیکره‌ی آزاد نصب می‌کنیم. بدیهی است به علت وجود سه نیرو، حداقل یکی از نیروها بر محورهای دستگاه منطبق نمی‌شود.

مناسب‌ترین دستگاه، دستگاهی است که بیش‌ترین نیروها در امتدادهای آن واقع شوند، به همین دلیل یک دستگاه مختصات عمودی مطابق شکل ۱۰ــ۳ باعث می‌شود که دو نیروی وزنه و T_D در امتدادهای آن واقع شوند و تنها نیروی غیر هم امتداد با آن‌ها T_B است که می‌توان به سادگی مؤلفه‌های آن‌را تعیین کرد (شکل ۱۰ــ۳).

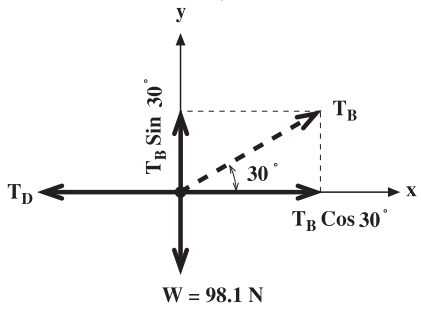


شکل ۱۰ــ۳

گام ۳: معادلات تعادل : ابتدا مؤلفه‌های T_B را نسبت به محورهای x و y برحسب T_B تعیین می‌کنیم، سپس با تشکیل روابط تعادل مقدار T_B و T_D را به‌دست می‌آوریم (شکل ۱۱ــ۳).

$T_B \cos ۳۰$ = مؤلفه‌ی T_B روی محور xها

$T_B \sin ۳۰$ = مؤلفه‌ی T_B روی محور yها



شکل ۱۱ــ۳

پس از به‌دست آوردن مؤلفه‌ها روابط تعادل برای نیروهای صفحه‌ای همرس ($\sum F_x = ۰$ و $\sum F_y = ۰$) را با توجه به جهات مثبت قراردادی تشکیل می‌دهیم.

$+\longrightarrow$ = جهت قراردادی مثبت در افق

$+\uparrow$ = جهت قراردادی مثبت در قائم

$$\sum F_x = ۰ \longrightarrow + \quad -T_D + T_B \cos ۳۰ = ۰ \qquad (۱)$$

$$\sum F_y = ۰ \ +\uparrow \quad T_B \sin ۳۰ - ۹۸/۱ = ۰ \qquad (۲)$$

معادله‌ی ۲ دارای یک مجهول است که به راحتی مقدار T_B را نتیجه می‌دهد.

$$T_B \sin ۳۰ - ۹۸/۱ = ۰ \Rightarrow \quad T_B \sin ۳۰ = ۹۸/۱ \quad \text{از (۲) داریم :}$$

$$T_B = \frac{۹۸/۱}{\sin ۳۰} = \frac{۹۸/۱}{۰/۵} = ۱۹۶/۲ \ \text{N}$$

که به علت مثبت بودن جواب می‌توان نتیجه گرفت که جهت اختیار شده برای T_B صحیح بوده است.

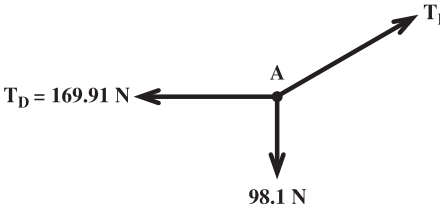
با قرار دادن T_B به دست آمده از معادله‌ی ۲ در معادله‌ی ۱ می‌توان مقدار T_D را تعیین کرد.

$$\Rightarrow T_B = ۱۹۶/۲ \text{N} \quad \text{از (۲) داشتیم}$$

$$\Rightarrow -T_D + T_B \cos ۳۰ = ۰ \Rightarrow T_D = T_B \cos ۳۰ \quad \text{از (۱) داریم}$$

$$T_D = ۱۹۶/۲ \times \cos ۳۰ = ۱۹۶/۲ \times ۰/۸۶۶ = ۱۶۹/۹۱ \text{N}$$

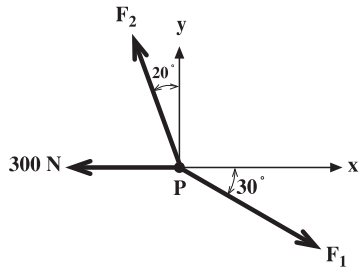
نتایج به‌صورت ترسیمی در شکل ۱۲ــ۳ نمایش داده شده است.



شکل ۱۲ــ۳

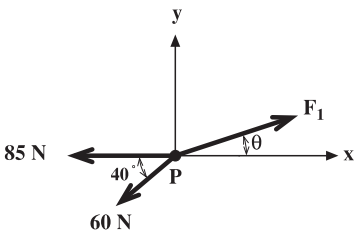
تمرین

۱ــ مقدار نیروهای F_1 و F_2 را طوری تعیین کنید که ذره P در حال تعادل باشد.



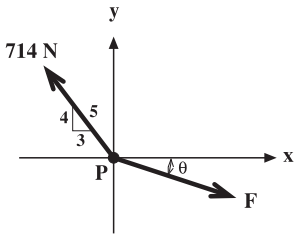
شکل ۱۳ــ۳

۲ــ مقدار و جهت بردار F_1 را طوری تعیین کنید که ذره‌ی P در حال تعادل باشد.



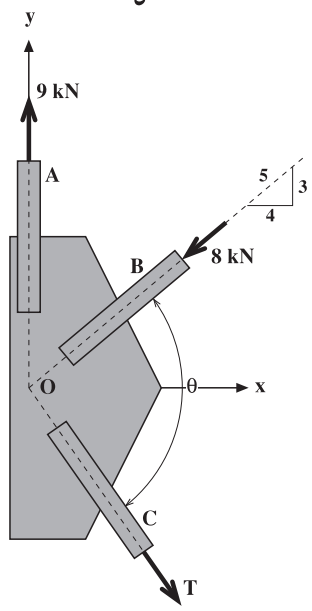
شکل ۱۴ــ۳

۳ــ مقدار و جهت نیروی F را طوری بیابید که ذره‌ی P در حال تعادل باشد.



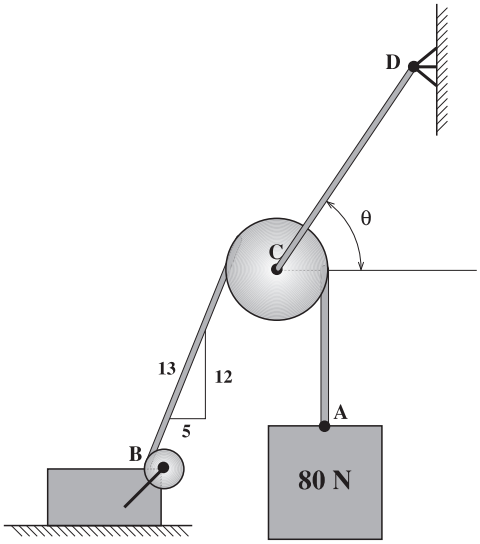
شکل ۱۵ــ۳

۴ــ صفحه‌ی اتصال اعضای یک خرپا تحت تأثیر نیروهایی مطابق شکل ۱۶ــ۳ قرار دارد نیروی عضو C که با T نشان داده شده است و زاویه‌ی θ را طوری تعیین کنید که تعادل در اتصال برقرار باشد.



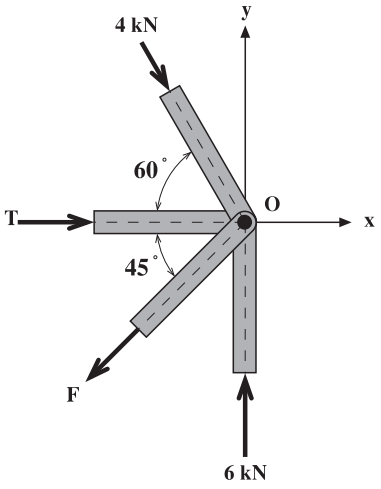
شکل ۱۶ــ۳

۵ ــ طناب متصل به موتور B به یک جعبه به وزن ۸۰ نیوتن متصل است که موتور با سرعت ثابت جعبه را بالا می‌کشد. برای وضعیت نشان داده شده، نیروی مؤثر بر طناب CD و زاویه‌ی θ را در حالت تعادل تعیین کنید (قطر قرقره‌ی C ناچیز است).



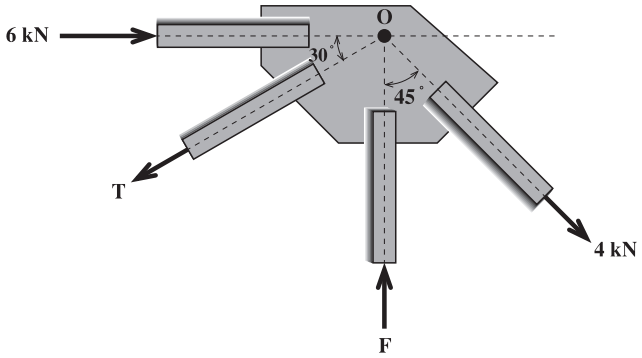
شکل ۱۷ــ۳

۶ ــ عضوهای یک خرپا مطابق شکل ۱۸ــ۳ در محل O توسط پین به‌هم متصل شده‌اند. مقادیر نیروهای F و T را طوری تعیین کنید که تعادل اتصال برقرار باشد.



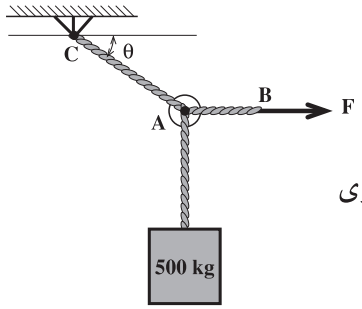
شکل ۱۸ــ۳

۷ــ در اتصال خرپایی مطابق شکل ۱۹ــ۳ نیروهای F و T را طوری تعیین کنید که تعادل اتصال برقرار باشد.



شکل ۱۹ــ۳

۸ ــ صندوقی به جرم ۵۰۰ کیلوگرم با استفاده از طناب‌های AB و AC مطابق شکل نگهداری می‌شود. حداکثر نیرویی که هر یک از طناب‌ها می‌تواند تحمل کند تا پاره نشود معادل ۲۵۰۰ کیلوگرم است. در صورتی‌که طناب AB همواره افقی باشد کمترین مقدار θ را طوری تعیین کنید تا صندوق بالا کشیده شود و طناب پاره نشود.



راهنمایی: در اینگونه مسائل نیروی بیشتر در طناب مورب بوجود می‌آید.

شکل ۲۰ــ۳

فصل چهارم

تعادل جسم صُلب

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل، هنرجو باید بتواند :

۱ــ شرط لازم و کافی برای تعادل یک جسم صلب را توضیح دهد.

۲ــ شرط تعادل سیستم‌های نیرویی مختلف (هم‌خط، همرس، موازی، عمومی) را توضیح دهد.

۳ــ واکنش‌های تکیه‌گاهی مختلف را بشناسد.

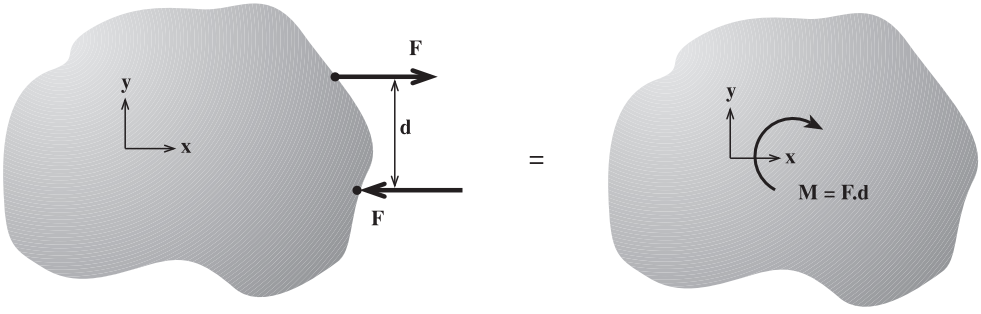
۴ــ نمودار پیکره‌ی آزاد اجسام صلب را رسم کند.

۵ ــ روش تحلیل اجسام صلب تحت نیرو را در حل مسایل به‌کار گیرد.

۶ ــ مجهولات مؤلفه‌های تکیه‌گاهی را محاسبه کند.

۱ــ۴ــ تعادل جسم صُلب

جسم صلب به علت داشتن ابعاد قابل توجه معمولاً تحت تأثیر نیروهای غیرهمرس قرار می‌گیرد در حالی‌که در یک ذره، به علت کوچک بودن ابعاد آن، نیروها همرس هستند. اثر نیروهای همرس فقط جابه‌جایی در راستای نیروهاست که با دو شرط $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ تعادل ذره مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. اما در جسم صلب، به علت بزرگی ابعاد، اگر نیروها همرس نباشند چرخش به‌وجود خواهد آمد (شکل ۱ــ۴).



شکل ۱ــ۴

همان‌طورکه در شکل ۱ــ۴ می‌بینید یک زوج نیرو برجسم صلبی تأثیر گذاشته‌اند که در آن شرایط $\sum F_x = 0$ و $\sum F_y = 0$ برقرار است، اما اثر این زوج نیرو گشتاوری است در جهت عقربه‌های ساعت که موجب چرخش جسم در جهت ساعتگرد می‌شود. بنابراین برای جسم صلب مورد بحث فراهم کردن شرایط تعادل فقط منوط به $\sum F_x = 0$ و $\sum F_y = 0$ نیست و باید شرط دیگری نیز مبنی بر عدم چرخش عضو مورد بررسی قرار گیرد. ضروری است یادآوری کنیم که نیرو موجب جابه‌جایی و گشتاور موجب چرخش می‌شود ؛ پس شرایط تعادل یک جسم صلب در صفحه با روابط زیر ارزیابی می‌شود.

به منظور جابه‌جا نشدن جسم در امتداد محور x می‌بایست مجموع نیروهای این امتداد مساوی صفر شود $\sum F_x = 0$
به منظور جابه‌جا نشدن جسم در امتداد محور y می‌بایست مجموع نیروهای این امتداد مساوی صفر شود $\sum F_y = 0$
به منظور دوران نکردن جسم در صفحه‌ی XY (حول نقطه‌ی دلخواه O) می‌بایست مجموع گشتاورها نسبت به نقطه‌ی دلخواه O صفر شود. $\sum M_O = 0$

۲ــ۴ــ شرایط تعادل جسم صُلب

گفتیم که نیروهای وارد بر یک جسم،هم از طریق تماس فیزیکی مستقیم و هم از راه دور اثر می‌کنند و ممکن است هدف، بررسی نیروها در داخل و یا خارج جسم باشد. نیروهای خارجی شامل نیروها و واکنش‌ها هستند که از نظر ظاهری ممکن است متمرکز و یا پراکنده باشند.

تا زمانی که آثار خارجی نیرو روی جسم، موردنظر است می‌توان از اصل قابلیت انتقال نیرو استفاده کرد، حتی می‌توان برای شرایط فوق نیروهای پراکنده را با یک نیروی متمرکز (برآیند) که نقطه اثر آن در مرکز بار پراکنده شده باشد جایگزین کرد.

بسته به شرایط ظاهری نیروها و متناسب با شرایط آن‌ها می‌توان معادله‌های مناسبی را برای بررسی تعادل برگزید. در زیر به اختصار به بررسی شرایط ظاهری سیستم نیرویی پرداخته می‌شود.

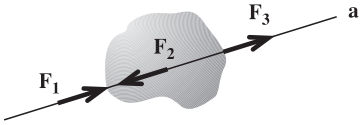
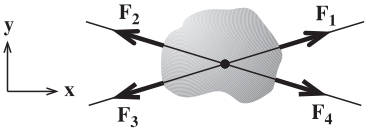
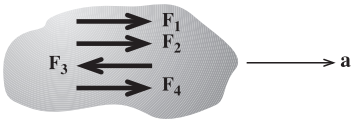
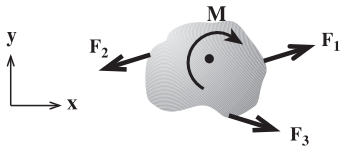
۱ــ برای بررسی تعادل نیروهای هم‌خط فقط به یک معادله‌ی تعادل در راستای نیرو نیاز است (جدول ۱ــ۴).

۲ــ برای بررسی تعادل نیروهای همرس (متقارب) فقط به دو معادله‌ی نیرو ($\sum F_x = 0$ و $\sum F_y = 0$) نیاز است، زیرا مجموع گشتاور نیروها به نقطه‌ی تقارب نیروها صفر است (جدول ۱ــ۴).

۳ــ برای بررسی تعادل یک دسته نیروی موازی در صفحه به یک معادله‌ی تعادل نیرو در راستای نیروها و یک معادله‌ی گشتاور حول نقطه‌ای دلخواه در صفحه نیاز است (جدول ۱ــ۴).

۴ــ برای بررسی تعادل یک جسم صُلب در صفحه، تحت اثر هر نوع نیرو و گشتاور، به دو معادله‌ی تعادل نیرو ($\sum F_x = 0$ و $\sum F_y = 0$) و یک معادله‌ی تعادل گشتاور نسبت به هر نقطه‌ی دلخواه O که محور z از آن می‌گذرد ($\sum M_O = \sum M_z = 0$) نیاز است.

جدول ۱ــ۴

سیستم نیرو	نمودار پیکره‌ی آزاد	معادلات مستقل
۱ــ هم‌خط		$\Sigma F_a = 0$
۲ــ همرس (متقارب) در یک نقطه		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$
۳ــ موازی		$\Sigma F_a = 0$ $\Sigma M_O = 0$ O ــ هر نقطه دلخواه
۴ــ عمومی (کلی)		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma M_O = \Sigma M_z = 0$

یکی از نکات اساسی برای تشکیل روابط تعادل تعیین تعداد و جهت واکنش‌های تکیه‌گاهی است که به آن پرداخته می‌شود.

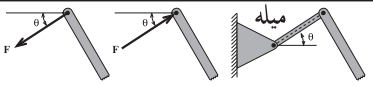
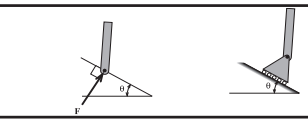
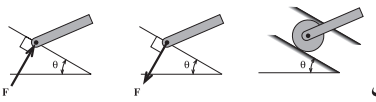
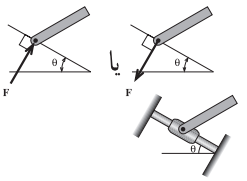
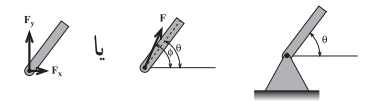
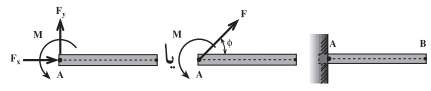
۳ــ۴ــ واکنش‌های تکیه‌گاهی

قبل از رسم نمودار پیکره‌ی آزاد اجسام صلب، ابتدا انواع واکنش‌های گوناگونی را که در تکیه‌گاه‌ها ایجاد می‌شود بررسی می‌کنیم.

به هنرجویان عزیز توصیه می‌شود تعداد و جهت واکنش‌های تکیه‌گاهی را به دقت به خاطر بسپارند. در جدول نمایش داده شده فرض می‌شود زاویه‌ی θ مشخص است و سایر زوایا بایستی به‌طریق تئوری محاسبه شوند (جدول ۲ــ۴). ضمناً جهت عکس‌العمل‌ها می‌تواند خلاف آنچه که در جدول نمایش داده شده است باشد[۱].

۱ــ عکس‌العمل در کابل‌ها و طناب‌ها همواره کششی است.

جدول ۲ــ۴ــ تکیه‌گاه‌ها و مؤلفه‌های مربوط به اجسام صلب تحت اثر سیستم‌های نیرویی دو بعدی

نوع اتصال	عکس‌العمل	تعداد مجهول‌ها
(۱) کابل		یک مجهول ؛ عکس‌العمل یک نیروی کششی که در امتداد کابل به سمت خارج از عضو اثر می‌کند.
(۲) میله‌ی بدون وزن		یک مجهول ؛ عکس‌العمل نیرویی که در امتداد محور میله اثر می‌کند.
(۳) غلطک		یک مجهول ؛ عکس‌العمل نیرویی که در نقطه‌ی تماس در جهت عمود بر سطح تماس اثر می‌کند.
(۴) غلطک یا پین در یک شکاف صاف		یک مجهول ؛ عکس‌العمل نیرویی که در جهت عمود بر شکاف اثر می‌کند.
(۵) تکیه‌گاه غلطان		یک مجهول ؛ عکس‌العمل نیرویی که در نقطه‌ی تماس در جهت عمود بر سطح تماس اثر می‌کند.
(۶) سطوح در حال تماس بدون اصطکاک		یک مجهول ؛ عکس‌العمل نیرویی که در نقطه‌ی تماس در جهت عمود بر سطح تماس اثر می‌کند.
(۷) عضوی که به‌وسیله‌ی پین به کشوی واقع بر میله‌ی صاف متصل شده است.		یک مجهول ؛ عکس‌العمل نیرویی که در جهت عمود بر میله اثر می‌کند.
(۸) پین یا لولای بدون اصطکاک (مفصل ثابت)		دو مجهول ؛ که عبارت‌اند از دو مؤلفه‌ی نیرو، با بزرگی و جهت ϕ نیروی برآیند. توجه کنید که ϕ و θ الزاماً مساوی نیستند (مگر در تکیه‌گاه با اعضای میله‌ای که ϕ و θ با هم برابر می‌شود).
(۹) عضوی که به کشوی واقع بر روی میله‌ی صاف به‌طور ثابت متصل شده است.		دو مجهول، عکس‌العمل‌ها هستند که عبارت‌اند از گشتاور و نیرو که عمود بر میله اثر می‌کنند.
(۱۰) تکیه‌گاه ثابت (گیردار)		سه مجهول، عکس‌العمل‌ها عبارت‌انداز یک گشتاور و دو مؤلفه‌ی نیرو، یا برآیند آن‌ها با امتداد ϕ .

۴ــ۴ــ ترسیم نمودار پیکره‌ی آزاد جسم صلب

برای رسم نمودار پیکره‌ی آزاد یک جسم صلب، یا مجموعه‌ای از اجسام صلب که تشکیل سیستم صلب واحدی را می‌دهند، گام‌های زیر برداشته می‌شود :

گام ۱: جسم و یا مجموعه‌ی اجسام را به‌عنوان یک جسم صلب از محیط اطراف جدا می‌کنیم.

گام ۲: انتخاب دستگاه مختصات مناسب و نصب آن در نقطه‌ای که حجم عملیات را کاهش دهد.

گام ۳: تمامی نیروهای معلوم و مجهول ناشی از واکنش‌های تکیه‌گاهی را روی جسم با راستای واقعی و مقادیر نمایش می‌دهیم. این نیروها شامل نیروهای زیر هستند.

الف ــ بارهای خارجی اعمال شده ؛

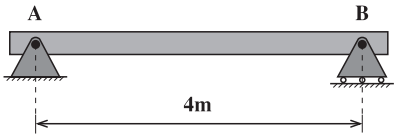
ب ــ عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی و یا نیروهای ناشی از تماس اجسام ؛

ج ــ وزن جسم که معمولاً معادل نیروی متمرکز شده در مرکز ثقل جسم است.

مؤلفه‌های مجهول تکیه‌گاهی روی نمودار پیکره‌ی آزاد با حروف مناسب رسم می‌شوند. برای جهت‌های نامشخص مؤلفه‌ها می‌توان جهتی را فرض کرد و در پایان کار نتیجه از نظر مثبت یا منفی بودن مورد تجزیه و تحلیل قرار گیرد.

گام ۴: انتخاب نقطه‌ای مناسب جهت گشتاورگیری به‌طوری‌که بیش‌ترین نیروهای مجهول از این نقطه بگذرند و عملیات سهل‌تر شود.

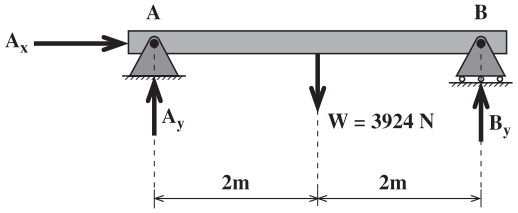
مثال ۱: نمودار پیکره‌ی آزاد تیر نشان داده شده در شکل **۲ــ۴** را که دارای جرم ۱۰۰ کیلوگرم در هر متر است رسم کنید.



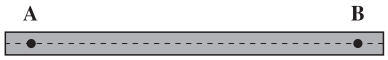
شکل ۲ــ۴

حل: تکیه‌گاه A یک مفصل ثابت (پین یا لولای بدون اصطکاک) است و دو مؤلفه‌ی واکنش (دو مجهول) دارد که یکی عمود بر سطح و دیگری مماس بر سطح فرض می‌شوند. همچنین تکیه‌گاه B یک غلطک است که فقط عمود بر سطح می‌تواند مؤلفه داشته باشد درامتداد غلطک نمی‌تواند مقاومتی از خود (مؤلفه) داشته باشد.

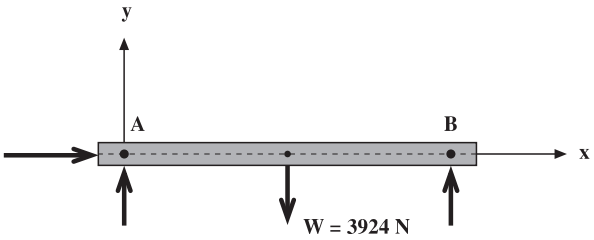
میله دارای جرم یک‌نواخت ۱۰۰ کیلوگرم در متر است و برآیند کل جرم آن که در مرکز میله قرار دارد برابر [kg]۴۰۰ = ۴×۱۰۰ کیلوگرم یا [N]۳۹۲۴ = ۴۰۰×۹/۸۱ نیوتن است. اکنون گام‌های چهارگانه را به‌صورت زیر برای رسم نمودار پیکره‌ی آزاد تیر به‌کار می‌بندیم.



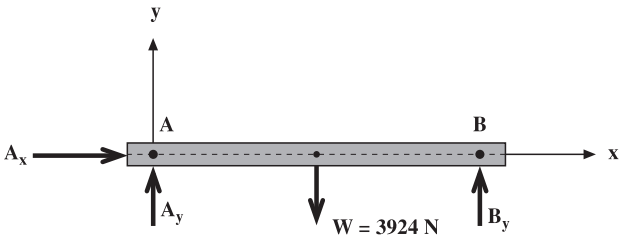
شکل ۳ــ۴ــ دیاگرام کلی



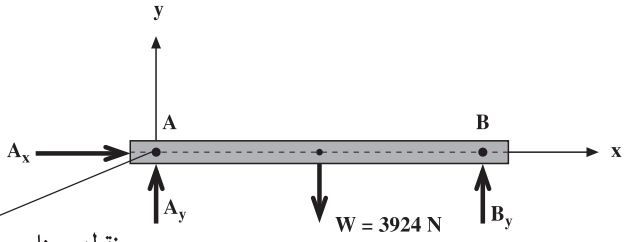
(الف) گام ۱



(ب) گام ۲



(ج) گام ۳

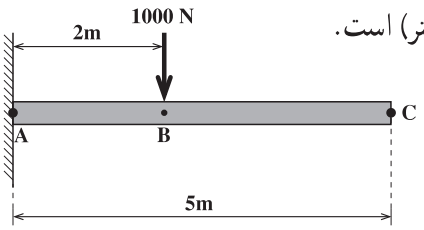


نقطه‌ی مناسب برای گشتاورگیری

(د) گام ۴

شکل ۴ــ۴

مثال ۲: نمودار پیکره‌ی آزاد تیر طره‌ای را مطابق شکل ۵ــ۴ رسم کنید. جرم واحد طول این تیر ۵۰kg/m (کیلوگرم بر متر) است.

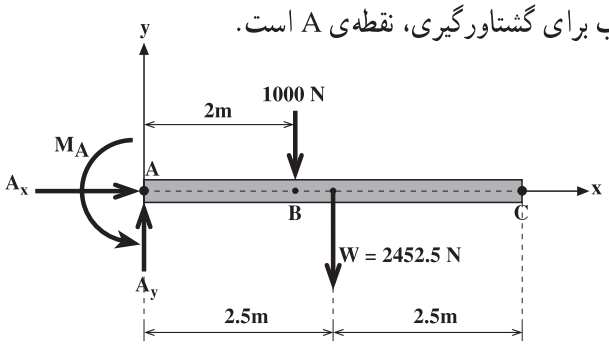


شکل ۵ــ۴

حل: تکیه‌گاه A از نوع گیردار می‌باشد که دارای سه مؤلفه‌ی تکیه‌گاهی است (دو مؤلفه‌ی نیرو و یک مؤلفه‌ی گشتاور) بنابراین با انتخاب دستگاه مختصاتی به مبدأ A و اعمال وزن تیر در مرکز آن نمودار پیکره‌ی آزاد تیر مطابق شکل زیر رسم می‌شود :

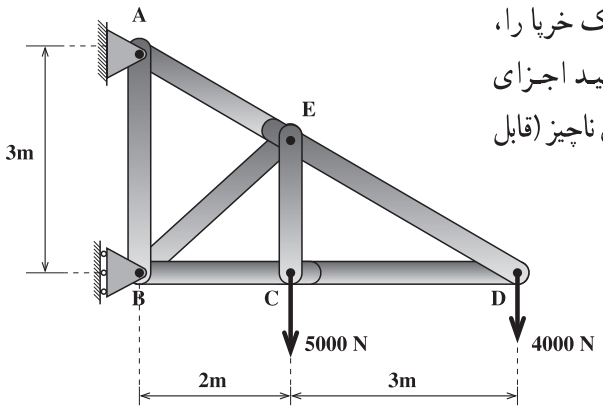
$$\text{جرم کلی تیر} = ۵ \times ۵۰ = ۲۵۰\,kg$$

$$W = ۲۵۰ \times ۹/۸۱ = ۲۴۵۲/۵\,N$$ وزن کلی تیر در فاصله‌ی ۲/۵ متری از تکیه‌گاه A محل مناسب برای گشتاورگیری، نقطه‌ی A است.



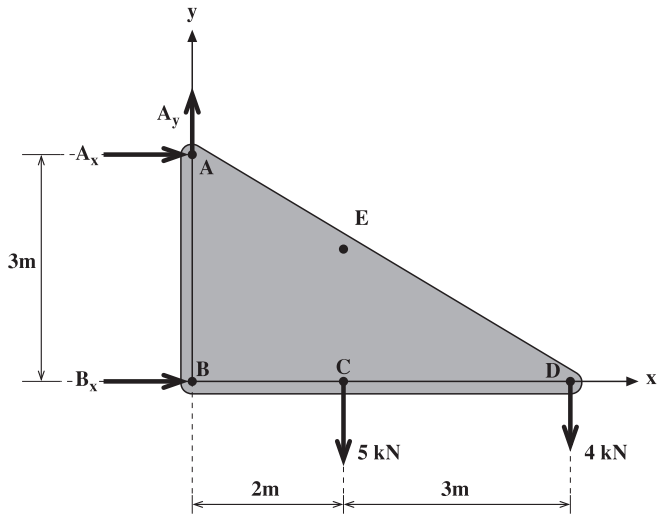
شکل ۶ــ۴

مثال ۳: نمودار پیکره‌ی آزاد یک خرپا را، مطابق شکل، رسم کنید. فرض کنید اجزای تشکیل‌دهنده‌ی خرپا صلب و دارای وزن ناچیز (قابل صرف‌نظر کردن) هستند.



شکل ۷ــ۴

حل: تکیه‌گاه A دو مجهوله (یک مؤلفه‌ی افقی و یک مؤلفه‌ی عمودی) و تکیه‌گاه B یک مجهوله (فقط مؤلفه‌ی افقی) است. با انتخاب یک دستگاه مختصات مناسب، با فرض کل اجزا به‌عنوان یک جسم صلب، نمودار پیکره‌ی آزاد به‌صورت زیر حاصل می‌شود :

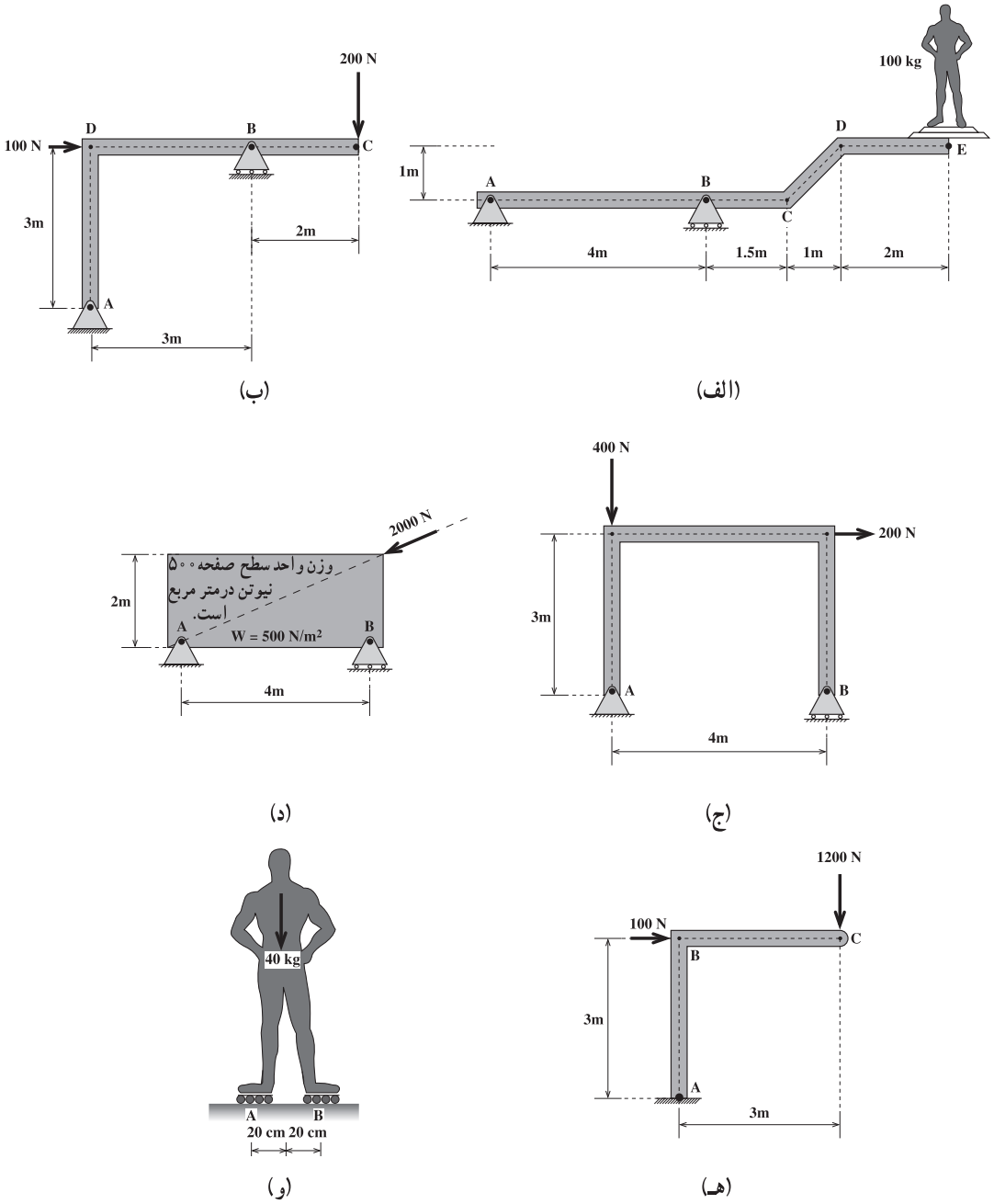


شکل ۸ ــ ۴

با اندکی دقت روی نمودار آزاد می‌توان نتیجه گرفت که جهت Ax در خلاف محور xها است، زیرا دو نیروی ۵ و ۴ کیلونیوتنی موجب می‌شوند که خرپا در محل A تمایل به جدا شدن از تکیه‌گاه داشته باشد، پس مؤلفه‌ی افقی تکیه‌گاه A به سمت چپ است. همچنین با پذیرفتن جهت مؤلفه‌ی Ax در جهت مخالف محور xها، با بررسی دیگری می‌توان نتیجه گرفت که تنها نیروی افقی که باید Ax را خنثی کند Bx است و به همین دلیل برای ایجاد تعادل باید جهت Bx در امتداد مثبت محورهای x باشد.

محل مناسب، برای گشتاورگیری، نقطه‌ی A است.

تمرین ــ نمودار پیکره‌ی آزاد سازه‌های زیر را رسم کنید.



شکل ۹ــ۴