۵ــ۴ــ روش تحلیل اجسام صلب تحت اثر نیرو

همان‌طور که قبلاً گفتیم، در استاتیک شرایط تعادل مبتنی بر حالت سکون است. بنابراین برای بررسی تعادل یک جسم صلب در صفحه باید سه شرط زیر برقرار باشد :

۱) $\sum F_x = ۰$

۲) $\sum F_y = ۰$

۳) $\sum M_o = ۰$

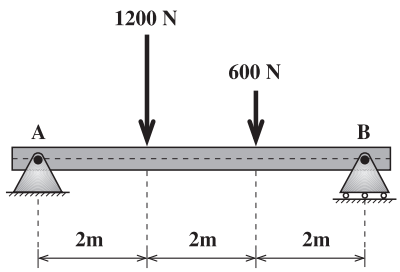
به‌طورکلی، برای تحلیل یک جسم صلب (مشخص نمودن مجهولات آن) گام‌های اساسی زیر باید برداشته شود.

گام ۱: ترسیم نمودار پیکره‌ی آزاد: با توجه به نیروهای وارد شده بر سیستم مورد مطالعه و نوع تکیه‌گاه‌های آن، بر اساس جدول مربوط به واکنش‌های تکیه‌گاهی و انتخاب دستگاه مختصاتی مناسب و با فرض جهتی دلخواه برای نیروهای مجهول، نمودار پیکره‌ی آزاد جسم را رسم می‌کنیم.

گام ۲: تنظیم معادلات تعادل: بر اساس دستگاه مختصات تعیین شده محلی مناسب که بیش‌ترین نیروها مخصوص نیروهای مجهول از آن بگذرد، برای ممان‌گیری انتخاب می‌کنیم (فرض کنید این محل O باشد) و سپس روابط تعادل را می‌نویسیم، هنرجو باید سعی کند ابتدا رابطه‌ای را مورد تحلیل قرار دهد که منجر به دستگاه چند معادله و چند مجهول نشود. این توانایی با کسب تجربه پس از حل چند مسئله روشن می‌شود.

گام ۳: تکمیل نمودار پیکره‌ی آزاد جسم: مقادیر مجهولات به دست آمده جایگزین مقادیر حروفی با جهت‌های اصلاح شده می‌شود تا نمودار تکمیل شود.

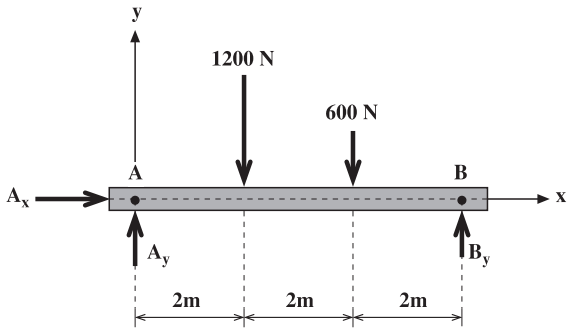
مثال۴: واکنش‌های تکیه‌گاهی تیر نشان داده شده را محاسبه کنید (از وزن تیر صرف‌نظر کنید).



شکل ۱۰ــ۴

حل:

گام ۱: نمودار پیکره‌ی آزاد: تکیه‌گاه A از نوع مفصلی ثابت با دو مؤلفه‌ی تکیه‌گاهی (یک مؤلفه‌ی افقی و یک مؤلفه‌ی عمودی) و تکیه‌گاه B از نوع غلطکی با یک مؤلفه‌ی تکیه‌گاهی (مؤلفه‌ی عمودی) می‌باشد. دستگاه مختصاتی xy را با مبدأ A و جهت مثبت (همانند دستگاه مورد استفاده در ریاضیات) اختیار می‌کنیم تا نمودار پیکره‌ی آزاد، مطابق شکل ۱۱ــ۴ به‌دست آید.



شکل ۱۱ــ۴

گام ۲: تنظیم معادلات تعادل

۱ــ از به کار بردن معادله‌ی تعادل $\sum F_x = 0$ در مورد نمودار پیکره‌ی آزاد رسم شده نتیجه می‌شود که مؤلفه‌ی افقی تکیه‌گاه A صفر است.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow + \quad \Rightarrow +A_x = 0 \quad \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

۲ــ به کاربردن معادله‌ی تعادل $\sum F_y = 0$ یک معادله‌ی تعادل با دو مجهول A_y و B_y را نتیجه می‌دهد که به‌تنهایی قادر به مشخص کردن هر دو مجهول نیست و نیاز به معادله‌ی دیگری برحسب A_y و B_y به تنهایی و یا توأم با هم دارد.

$$\sum F_y = 0 \overset{+}{\uparrow} \quad +A_y - 1200 - 600 + B_y = 0$$

$$\boxed{A_y + B_y = 1800} \qquad \text{(معادله‌ی الف)}$$

۳ــ به‌کاربردن معادله‌ی تعادل $\sum M_o = 0$ می‌تواند معادله‌ی دیگری را برحسب مجهول‌های A_y و یا B_y و یا هر دو (بسته به محل O) به ما بدهد. برای سهولت در محاسبات محل گشتاورگیری را تکیه‌گاه A انتخاب می‌کنیم. بدیهی است که باید مجموع گشتاور تک‌تک نیروهای معلوم و مجهول را نسبت به نقطه‌ی انتخاب شده برابر صفر قرار دهیم. می‌دانیم که مقدار گشتاور هر نیرو برابر حاصل‌ضرب آن نیرو در فاصله‌اش تا محل گشتاورگیری است. برای این که نتیجه‌ی گشتاورگیری صحیح باشد بایستی جهتی دلخواه را برای گشتاورها مثبت فرض کنیم.

$$\sum M_A = 0 \curvearrowleft + \quad -B_y \times 6 + 600 \times 4 + 1200 \times 2 + A_x \times 0 + A_y \times 0 = 0$$

$$-6B_y + 4800 = 0 \Rightarrow \quad -6B_y = -4800$$

$$B_y = \frac{-4800}{-6} = 800\,N \Rightarrow \boxed{B_y = 800\,N \uparrow}$$

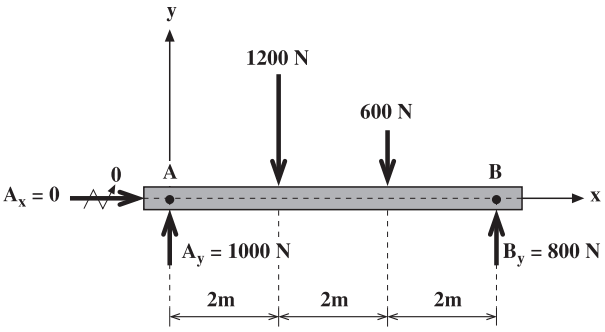
با قرار دادن مقدار B_y به‌دست آمده از شرط تعادل فوق، در معادله‌ی (الف) مقدار A_y به‌دست می‌آید.

$$B_y = 800\,N$$

$$A_y + B_y = 1800 \Rightarrow A_y + 800 = 1800 \qquad A_y = 1800 - 800 \quad \text{(معادله‌ی الف)}$$

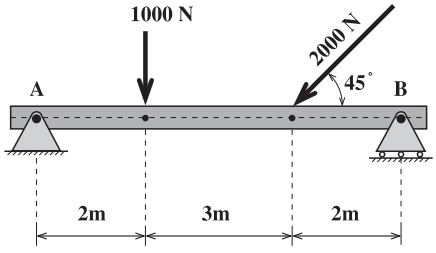
$$\boxed{A_y = 1000\,N \uparrow}$$

گام ۳: تکمیل نمودار پیکره‌ی آزاد: در این مرحله مقادیر عکس‌العمل‌های (مجهولات) به‌دست آمده را جایگزین مقادیر حروفی می‌کنیم تا بدین وسیله نمودار پیکره‌ی آزاد تکمیل شود.



شکل ۱۲ــ۴

مثال ۵: عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی زیر را به دست آورید (از وزن تیر صرف‌نظر شود)



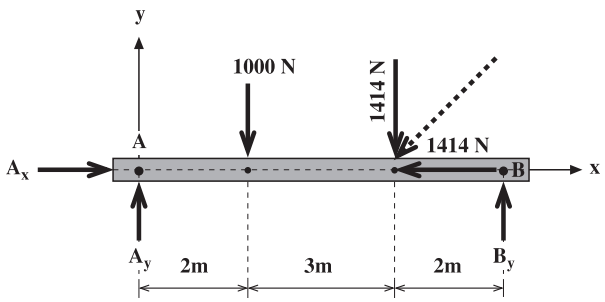
شکل ۱۳ــ۴

حل: تفاوت عمده‌ی این مثال با مثال ۴ در نیروی شیب‌دار ۲۰۰۰ نیوتنی است. برای انجام گام‌های اساسی کافی است ابتدا نیروی تحت زاویه را به دو مؤلفه، یکی عمود بر تیر و دیگری مماس بر تیر، تجزیه کنیم. به طور اختصار برای حل تیر گام‌های زیر برداشته می‌شود :

گام ۱: نمودار پیکره‌ی آزاد: تکیه‌گاه A دارای دو مؤلفه و تکیه‌گاه B دارای یک مؤلفه است. همچنین مؤلفه‌های نیروی ۲۰۰۰ نیوتنی را به دست می‌آوریم که نمودار پیکره‌ی آزاد با توجه به دستگاه نصب شده‌ی xy به صورت زیر است :

$\leftarrow$ مؤلفه‌ی افقی نیروی ۲۰۰۰ نیوتنی $Fx = ۲۰۰۰\cos ۴۵^\circ = ۲۰۰۰ \times ۰/۷۰۷ = ۱۴۱۴N$

$\downarrow$ مؤلفه‌ی عمودی نیروی ۲۰۰۰ نیوتنی $Fy = ۲۰۰۰\sin ۴۵^\circ = ۲۰۰۰ \times ۰/۷۰۷ = ۱۴۱۴N$



شکل ۱۴ــ۴

گام ۲: تنظیم معادلات تعادل

۱ــ به کاربردن رابطه‌ی $\sum F_x = ۰$

$$\sum F_x = ۰ \rightarrow + \quad + A_x - ۱۴۱۴ = ۰ \quad \boxed{A_x = ۱۴۱۴N \rightarrow}$$

۲ــ به کاربردن رابطه‌ی $\sum F_y = ۰$

$$\sum F_y = ۰ \overset{+}{\uparrow} \quad A_y - ۱۰۰۰ - ۱۴۱۴ + B_y = ۰$$

$$\boxed{A_y + B_y = ۲۴۱۴N} \quad \text{(معادله‌ی الف)}$$

۳ــ به کاربردن رابطه‌ی $\sum M_o = ۰$

$$\sum M_A = ۰ \curvearrowleft (+) \quad - B_y \times ۷ + ۱۴۱۴ \times ۵ + ۱۰۰۰ \times ۲ = ۰$$

$$-۷B_y = -۹۰۷۰ \Rightarrow B_y = \frac{۹۰۷۰}{۷} = ۱۲۹۵/۷۱N$$

$$\boxed{B_y = ۱۲۹۵/۷۱N \uparrow}$$

با جای‌گزینی مقدار By در معادله‌ی (الف) خواهیم داشت :

$$B_y = ۱۲۹۵/۷۱N$$

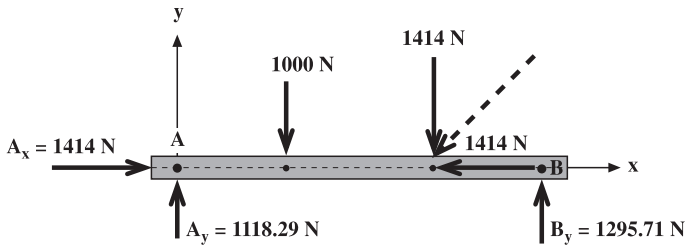
$$A_y + B_y = ۲۴۱۴ \Rightarrow A_y + ۱۲۹۵/۷۱ = ۲۴۱۴ \quad \text{(معادله‌ی الف)}$$

$$A_y = ۲۴۱۴ - ۱۲۹۵/۷۱ = ۱۱۱۸/۲۹N \Rightarrow \boxed{A_y = ۱۱۱۸/۲۹N \uparrow}$$

بنابراین نتایج محاسبات بندهای مختلف عبارت است از :

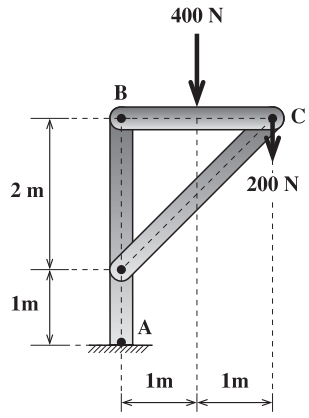
$$\boxed{\begin{aligned} A_x &= ۱۴۱۴N \rightarrow \\ A_y &= ۱۱۱۸/۲۹N \uparrow \\ B_y &= ۱۲۹۵/۷۱N \uparrow \end{aligned}}$$

گام ۳: تکمیل نمودار پیکره‌ی آزاد



شکل ۱۵ــ۴

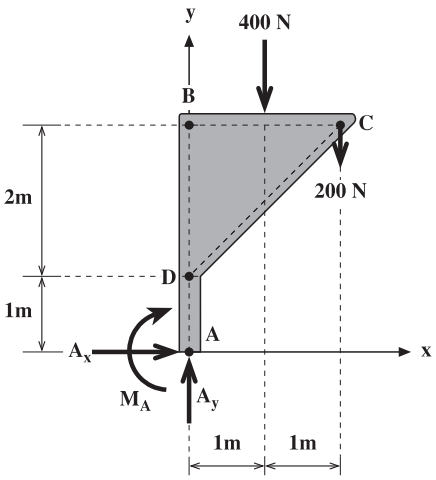
مثال ۶: قابی تحت بارگذاری نشان داده شده، در شکل زیر، قرار دارد. عکس‌العمل‌هایی را که در تکیه‌گاه A ایجاد می‌کند به دست آورید (از وزن اجزا صرف‌نظر شود).



شکل ۱۶ــ۴

حل: تکیه‌گاه A از نوع گیردار بوده که سه مؤلفه (دو مؤلفه‌ی نیرو و یک مؤلفه‌ی گشتاور) تولید می‌کند. برای محاسبه‌ی عکس‌العمل‌ها اجزا را صلب فرض می‌کنیم و در نتیجه شکل کلی را می‌توان صلب فرض نمود. با انتخاب یک دستگاه مختصات به مبدأ A می‌توان گام‌های اساسی تحلیل را برداشت.

گام ۱: نمودار پیکره‌ی آزاد جسم: از بررسی دقیق‌تر شکل می‌توان نتیجه گرفت که نیروها باعث می‌شوند تا قاب در جهت عقربه‌های ساعت تمایل به چپ شدن داشته باشد. بنابراین عکس‌العمل گشتاوری M_A برای ایجاد تعادل بایستی در خلاف جهت عقربه‌های ساعت باشد، امّا به عنوان یک گزینه، M_A در جهت ساعتگرد انتخاب شده است.



شکل ۱۷ــ۴

گام ۲: تنظیم معادلات تعادل

۱ــ رابطه‌ی $\sum F_x = 0$:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow + \quad \Rightarrow +A_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

۲ــ رابطه‌ی $\sum F_y = 0$:

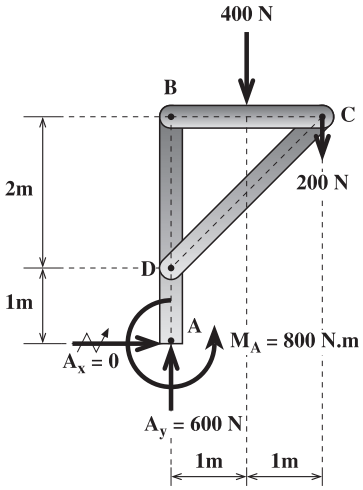
$$\sum F_y = 0 \overset{+}{\uparrow} \quad \Rightarrow +A_y - 400 - 200 = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = 600\,N}$$

۳ــ رابطه‌ی $\sum M_o = 0$:

$$\sum M_A = 0 \curvearrowleft + \quad +M_A + 400 \times 1 + 200 \times 2 = 0 \Rightarrow M_A + 800 = 0$$

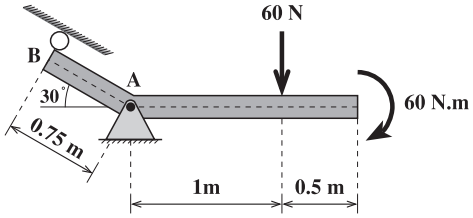
$$\Rightarrow M_A = -800\,N.m \Rightarrow \boxed{M_A = 800\,N.m \curvearrowright}$$

گام ۳: تکمیل نمودار پیکره‌ی آزاد



شکل ۱۸ــ۴

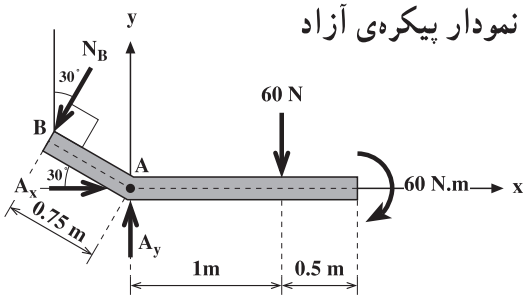
مثال ۷: مؤلفه‌های تکیه‌گاهی تیر نشان داده شده را محاسبه کنید.



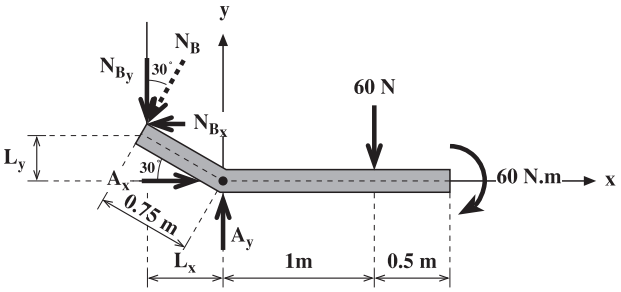
شکل ۱۹ــ۴

حل: تکیه‌گاه A از نوع مفصلی ثابت با دو مؤلفه‌ی تکیه‌گاهی، یکی افقی و دیگری عمودی، و تکیه‌گاه B از نوع غلطکی با یک مؤلفه‌ی تکیه‌گاهی، عمود بر تیر (عمود بر سطح تکیه‌گاه) می‌باشد. در این تیر یک گشتاور ۶۰ نیوتن متری در سمت راست تیر وارد شده که بر مقدار عکس‌العمل‌ها تأثیر می‌گذارد. مراحل تحلیل به‌شرح زیر است.

گام ۱: ترسیم نمودار پیکره‌ی آزاد



شکل ۲۰ــ۴ــ نمودار پیکره‌ی آزاد (الف)



شکل ۲۱ــ۴ــ نمودار پیکره‌ی آزاد (ب)

$$N_{Bx} = N_B \sin ۳۰ = ۰/۵ N_B \leftarrow$$

$$N_{By} = N_B \cos ۳۰ = ۰/۸۶۶ N_B \downarrow$$

$$L_x = ۰/۷۵ \cos ۳۰ = ۰/۶۵ m$$

$$L_y = ۰/۷۵ \sin ۳۰ = ۰/۳۷۵ m$$

گام ۲: تنظیم روابط تعادل: برای تنظیم روابط می‌توان از دو نمودار پیکره‌ی آزاد الف و ب استفاده کرد اما استفاده از نمودار الف به دلیل داشتن فاصله‌ی عمودی A تا مؤلفه‌ی N_B از سهولت بیش‌تری برخوردار است. برای مقایسه‌ی نتایج دو نمودار پیکره‌ی آزاد نتایج تشکیل معادلات هر دو روش در زیر ارائه می‌گردد. توجه کنید که برای تفکیک گشتاور از نیرو در حین محاسبات زیر گشتاور با خط تیره مشخص شده است.

۱ــ نمودار پیکره‌ی آزاد الف ــ برای راحتی عملیات و کم کردن تعداد مجهولات در معادله‌ی تشکیل شده ابتدا از رابطه‌ی گشتاور $\sum Mo = ۰$ استفاده می‌کنیم.

$$\sum M_A = ۰ \overset{(+)}{\curvearrowleft} \; -N_B \times ۰/۷۵ + ۶۰ \times ۱ + \underline{۶۰} = ۰ \Rightarrow ۰/۷۵ N_B = ۱۲۰$$

$$N_B = \frac{۱۲۰}{۰/۷۵} = ۱۶۰ N \qquad \boxed{N_B = ۱۶۰ N \;\; \swarrow 60^\circ}$$

$$\sum F_x = ۰ \rightarrow + \quad \underbrace{-N_B \sin ۳۰}_{\text{مؤلفه افقی } N_B} + A_x = ۰ \;\Rightarrow A_x = ۱۶۰ \sin ۳۰ = ۱۶۰ \times ۰/۵ = ۸۰ N$$

$$\boxed{A_x = ۸۰ N \rightarrow}$$

$$\sum F_y = ۰ \overset{+}{\uparrow} \; -N_B \cos ۳۰ + A_y - ۶۰ = ۰ \Rightarrow -۱۳۸/۵۶ + A_y - ۶۰ = ۰$$

$$\boxed{A_y = ۱۹۸/۵۶ N \uparrow}$$

۲ــ نمودار پیکره‌ی آزاد ب ــ ابتدا به محل A گشتاورگیری می‌کنیم :

$$۱ــ \; \sum M_A = ۰ \overset{(+)}{\curvearrowleft} \; -N_B y \times l_x - N_B x \times l_y + ۶۰ \times ۱ + \underline{۶۰} = ۰$$

$$-۰/۸۶۶ N_B \times ۰/۶۵ - ۰/۵ N_B \times ۰/۳۷۵ + ۶۰ + \underline{۶۰} = ۰$$

$$-۰/۷۵N_B=-۱۲۰ \quad N_B=\frac{۱۲۰}{۰/۷۵}=۱۶۰N \Rightarrow \boxed{N_B=۱۶۰N \ \angle 60^\circ}$$

۲ـ $\sum F_x=۰ \rightarrow + \quad -N_{Bx}+A_x=۰$

$$-۰/۵N_B+A_x=۰ \quad \Rightarrow -۰/۵(۱۶۰)+A_x=۰ \Rightarrow \boxed{A_x=۸۰N \rightarrow}$$

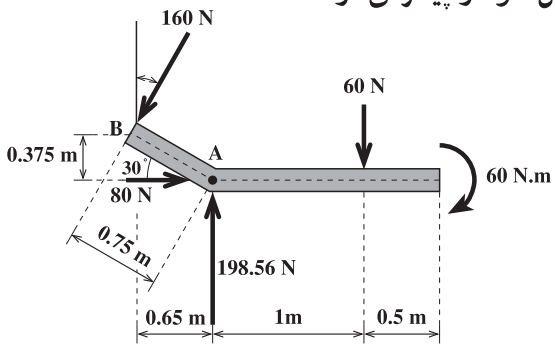
۳ـ $\sum F_y=۰ \overset{+}{\uparrow} -N_By+A_y-۶۰=۰$

$$-۰/۸۶۶N_B+A_y-۶۰=۰ \quad -۰/۸۶۶(۱۶۰)+A_y-۶۰=۰$$

$$-۱۹۸/۵۶+A_y=۰ \quad \boxed{A_y=۱۹۸/۵۶N \uparrow}$$

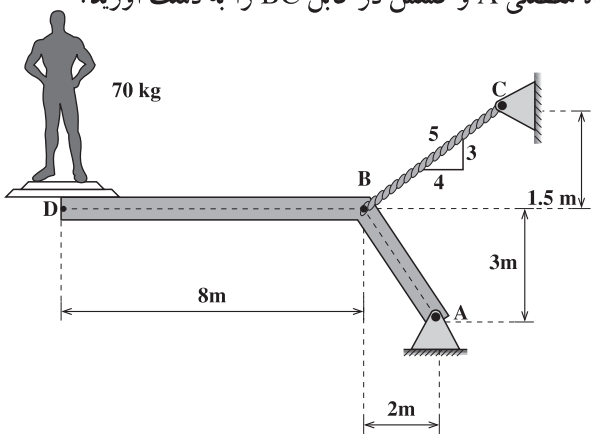
همان‌طور که ملاحظه می‌کنید نتایج هر دو روش یکسان است.

گام ۳: تکمیل نمودار پیکره‌ی آزاد



شکل ۲۲ـ۴

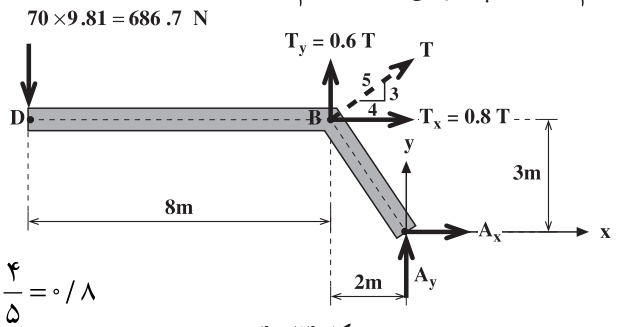
مثال ۸: در شکل زیر جرم مردی که در انتهای تیر ایستاده ۷۰ کیلوگرم است. مؤلفه‌های عکس‌العمل تکیه‌گاه مفصلی A و کشش در کابل BC را به دست آورید.



شکل ۲۳ـ۴

حل:

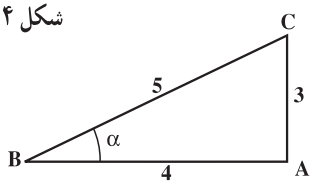
گام ۱: ترسیم نمودار پیکره‌ی آزاد جسم



شکل ۲۴ــ۴

$$\cos\alpha = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$

$$\sin\alpha = \frac{۳}{۵} = ۰/۶$$



$$T_x = T \times \cos\alpha = ۰/۸T$$

$$T_y = T \times \sin\alpha = ۰/۶T$$

نکته‌ی مهم در این مسئله توجه به پدیدآمدن فقط نیروی کششی در کابل‌ها است.

گام ۲: تنظیم روابط تعادل

$$۱\text{ــ } \sum M_A = ۰ \curvearrowleft + \quad -۶۸۶/۷ \times ۱۰ + T_y \times ۲ + T_x \times ۳ = ۰$$

$$-۶۸۶۷ + (۰/۶T) \times ۲ + (۰/۸T) \times ۳ = ۰$$

$$-۶۸۶۷ + ۱/۲T + ۲/۴T = ۰ \quad ۳/۶T = ۶۸۶۷ \quad T = \frac{۶۸۶۷}{۳/۶} = ۱۹۰۷/۵N$$

$\boxed{T = ۱۹۰۷/۵N}$ (5, 4, 3) نیروی کششی کابل BC

$$۲\text{ــ } \sum F_x = ۰ \rightarrow + \quad +T_x + A_x = ۰ \quad (۰/۸T) + A_x = ۰$$

$$(۰/۸ \times ۱۹۰۷/۵) + A_x = ۰ \Rightarrow A_x = -۱۵۲۶N$$

$\boxed{A_x = ۱۵۲۶N \leftarrow}$

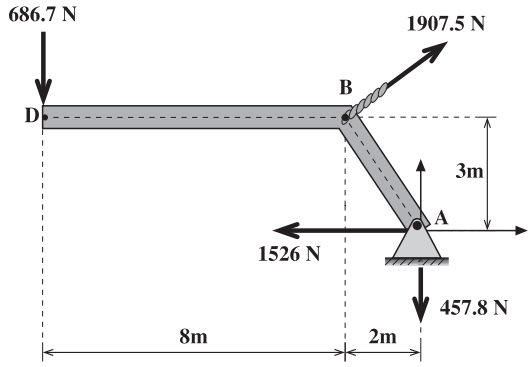
$$۳\text{ــ } \sum F_y = ۰ \overset{+}{\uparrow} \quad -۶۸۶/۷ + T_y + A_y = ۰$$

$$-۶۸۶/۷ + (۰/۶T) + A_y = ۰$$

$$-۶۸۶/۷ + ۰/۶ \times ۱۹۰۷/۵ + A_y = ۰ \Rightarrow ۴۵۷/۸ + A_y = ۰$$

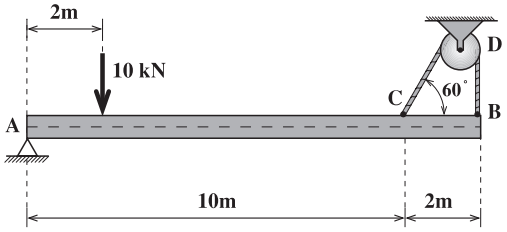
$$A_y = -۴۵۷/۸N \Rightarrow \boxed{A_y = ۴۵۷/۸N \downarrow}$$

علامت منفی نشان دهنده‌ی مخالف بودن جهت فرضی عکس‌العمل با جهت واقعی آن است.



شکل ۲۵ــ۴

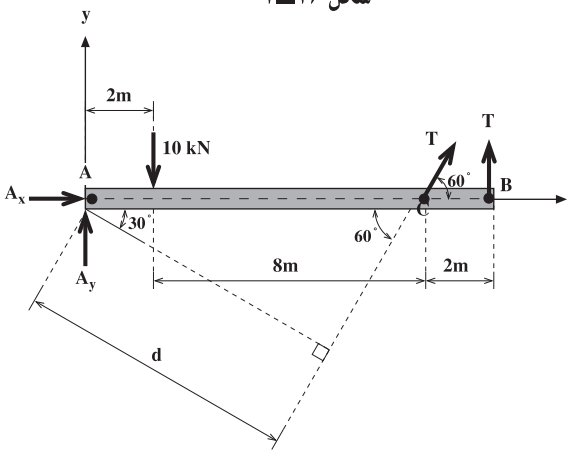
گام ۳: تکمیل نمودار پیکره‌ی آزاد تیر



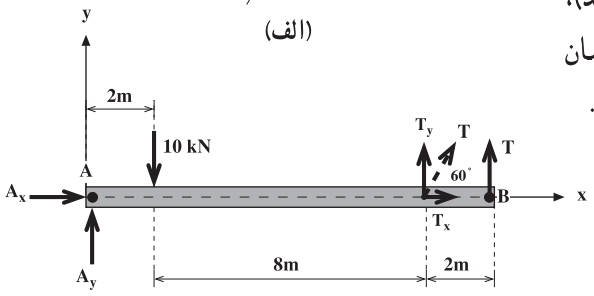
شکل ۲۶ــ۴

مثال ۹: کشش کابل و عکس‌العمل تکیه‌گاه A را به دست آورید. نقاط B و C توسط کابل پیوسته‌ای که از روی قرقره‌ی بدون اصطکاک D می‌گذرند ثابت نگه‌داری می‌شوند.

گام ۱: ترسیم نمودار پیکره‌ی آزاد جسم: نکته‌ی مهم در این مثال وجود یک کابل پیوسته از نقطه‌ی C تا نقطه‌ی B است که از روی قرقره‌ی بدون اصطکاک D عبور کرده است. این مطلب باعث می‌شود که نیرو در تمام کابل، اولاً از نوع کششی (کابل‌ها قادر به انتقال نیروی فشاری نیستند)، ثانیاً مقدار نیرو در هر نقطه‌ی کابل یکسان باشد و ثالثاً نیروها در امتداد کابل باشند.



(الف)



$T_x = T \cos 60^\circ = 0.5\ T$

$T_y = T \sin 60^\circ = 0.866\ T$

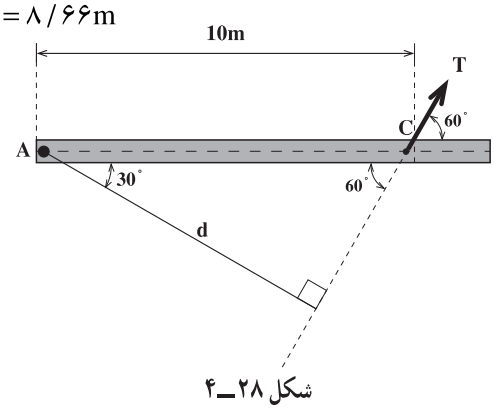
(ب)

شکل ۲۷ــ۴

گام ۲: تنظیم روابط تعادل

۱ــ براساس نمودار الف: برای این حالت ابتدا فاصله‌ی عمودی امتداد T را که تحت زاویه‌ی ۶۰ درجه است با تکیه‌گاه A که محل ممان‌گیری می‌باشد به دست می‌آوریم و سپس به تکیه‌گاه A گشتاورگیری می‌کنیم.

$d = ۱۰\cos ۳۰ = ۸/۶۶\text{m}$



شکل ۲۸ــ۴

بر اساس نمودار الف داریم :

$$۱ــ \sum M_A = ۰ \curvearrowleft + \quad -T\times ۱۲ - T\times d + ۱۰۰۰۰\times ۲ = ۰$$

$$-۱۲T - ۸/۶۶T + ۲۰۰۰۰ = ۰ \Rightarrow ۲۰/۶۶T = ۲۰۰۰۰$$

$$\boxed{T = \frac{۲۰۰۰۰}{۲۰/۶۶} = ۹۶۸/۰۵\text{N} \nearrow -\uparrow}$$

$$۲ــ \sum F_x = ۰ \rightarrow + \quad + A_x + \underbrace{T\cos ۶۰}_{T_x} = ۰ \Rightarrow A_x + ۹۶۸/۰۵\times\cos ۶۰ = ۰$$

$A_x + ۴۸۴/۰۳ = ۰ \quad A_x = -۴۸۴/۰۳$ جهت فرض شده صحیح نبوده است

$$\boxed{A_x = ۴۸۴/۰۳\text{N} \leftarrow}$$

$$۳ــ \sum F_y = ۰ \overset{+}{\uparrow} + A_y - ۱۰۰۰۰ + \underbrace{T\sin ۶۰}_{T_y} + T = ۰$$

$$\Rightarrow A_y - ۱۰۰۰۰ + T(۱ + \sin ۶۰) = ۰$$

$$A_y - ۱۰۰۰۰ + T(۱ + ۰/۸۶۶) = ۰$$

$$A_y - ۱۰۰۰۰ + ۱/۸۶۶T = ۰$$

$$A_y - ۱۰۰۰۰ + ۱/۸۶۶\times ۹۶۸/۰۵ = ۰ \quad A_y - ۸۱۹۳/۶۲ = ۰$$

$$A_y = ۸۱۹۳/۶۲\text{N} \Rightarrow \boxed{A_y = ۸۱۹۳/۶۲ \uparrow}$$

۲ــ *براساس نمودار ب:* در این حالت نیروی T را که تحت زاویه می‌باشد به دو مؤلفه‌ی افقی و عمودی تجزیه می‌کنیم، سپس با تنظیم روابط تعادل مجهولات به دست می‌آیند.

$$۱_\ \sum M_A = ۰ \curvearrowleft + \quad -T\times ۱۲ - \underbrace{۰/۸۶۶T}_{T_y}\times ۱۰ + ۱۰۰۰۰\times ۲ = ۰$$

$$-۲۰/۶۶T + ۲۰۰۰۰ = ۰ \qquad \boxed{T = \frac{۲۰۰۰۰}{۲۰/۶۶} = ۹۶۸/۰۵N}$$

$$۲_\ \sum F_x = ۰ \rightarrow + \quad +A_x + ۰/۵T = ۰ \quad A_x = -۰/۵T = -۰/۵(۹۶۸/۰۵)$$

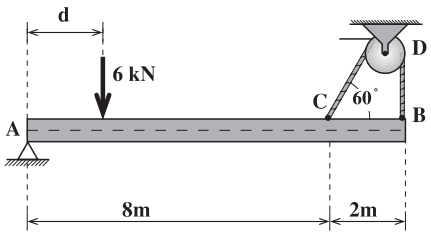
$$A_x = -۴۸۴/۰۳N \Rightarrow \quad \boxed{A_x = ۴۸۴/۰۳N \leftarrow}$$

$$۳_\ \sum F_y = ۰ \overset{+}{\uparrow} \quad +A_y - ۱۰۰۰۰ + ۰/۸۶۶T + T = ۰$$

$$A_y - ۱۰۰۰۰ + ۱/۸۶۶ \times ۹۶۸/۰۵ = ۰ \quad A_y - ۸۱۹۳/۶۲ = ۰$$

$$\Rightarrow A_y = ۸۱۹۳/۶۲N \Rightarrow \quad \boxed{A_y = ۸۱۹۳/۶۲N \uparrow}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود نتیجه هر دو نمودار الف و ب یکسان است.

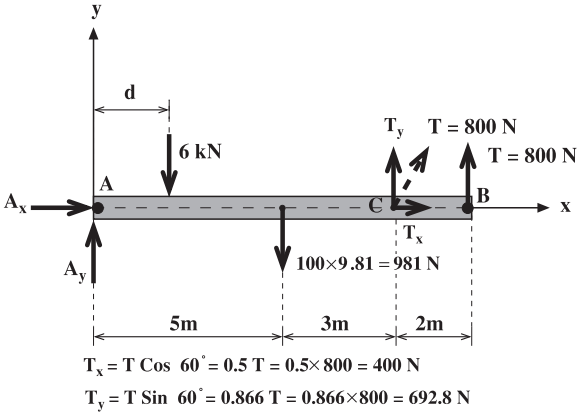


شکل ۲۹ــ۴

مثال ۱۰: تیر AB دارای جرم یک‌نواخت ۱۰۰ کیلوگرم است. این تیر در نقطه‌ی A روی تکیه‌گاه مفصلی ثابت و در C و B به وسیله‌ی یک کابل پیوسته از روی قرقره‌ی بدون اصطکاک D گذشته است. حداکثر نیروی کششی که این کابل می‌تواند تحمل کند تا پاره نشود ۸۰۰ نیوتن است. اولاً محل اثر نیروی ۶ کیلونیوتنی را طوری پیدا کنید که کابل پاره نشود، و ثانیاً مؤلفه‌های تکیه‌گاهی را بیابید.

حل:

گام ۱: رسم نمودار پیکره‌ی آزاد: نکته‌ی مهم در این مثال وجود جرم ۱۰۰ کیلوگرمی میله است که باید در وسط آن تأثیر داده شود. کشش کابل‌ها در نقاط B و C برابر ۸۰۰ نیوتن در امتداد کابل‌ها است که تحت زاویه به دو مؤلفه‌ی افقی و عمودی تجزیه می‌شود.



شکل ۳۰ــ۴

گام ۲: تنظیم روابط تعادل: ابتدا از رابطه‌ی $\sum M_o = 0$ استفاده می‌کنیم و سپس با مشخص شدن فاصله‌ی d مؤلفه‌های تکیه‌گاهی را به دست می‌آوریم.

$$۱ـ \quad \sum M_A = 0 \curvearrowleft + \quad -۸۰۰\times۱۰ - ۶۹۲/۸\times۸ + ۹۸۱\times۵ + ۶۰۰۰\times d = 0$$

$$۶۰۰۰d = ۸۶۳۷/۴ \qquad d = \frac{۸۶۳۷/۴}{۶۰۰۰} = ۱/۴۴m$$

نتیجه: اگر فاصله‌ی نیرو از تکیه‌گاه A $d = ۱/۴۴m$ باشد نیروی ایجاد شده در کابل ۸۰۰ نیوتن خواهد شد.

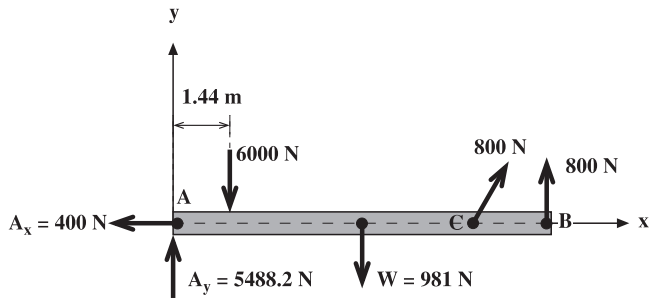
$$۲ـ \quad \sum F_x = 0 \rightarrow + \quad +A_x + ۴۰۰ = 0 \qquad A_x = -۴۰۰N$$

$$\boxed{A_x = ۴۰۰N \leftarrow}$$

$$۳ـ \quad \sum F_y = 0 \overset{+}{\uparrow} \quad +A_y - ۶۰۰۰ - ۹۸۱ + ۶۹۲/۸ + ۸۰۰ = 0$$

$$A_y - ۵۴۸۸/۲ = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = ۵۴۸۸/۲N\uparrow}$$

گام ۳: تکمیل نمودار پیکره‌ی آزاد

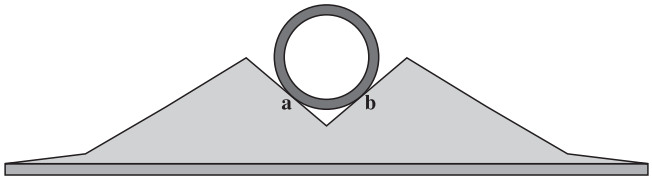


شکل ۳۱ـ۴

تمرین

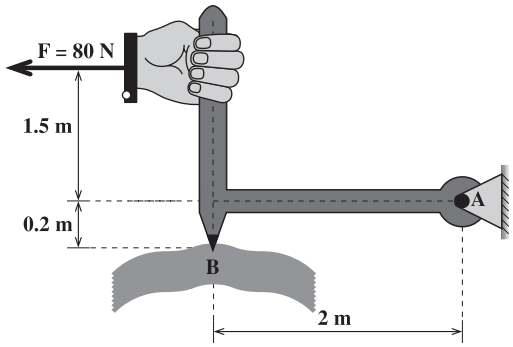
در تمرین‌های زیر عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها را محاسبه کنید.

۱ـ یک لوله‌ی یک‌نواخت صاف به جرم ۵۰۰N که در a و b بر سطوح صاف تکیه دارد و سطوح a و b زاویه ۱۲۰ درجه با هم می‌سازند.



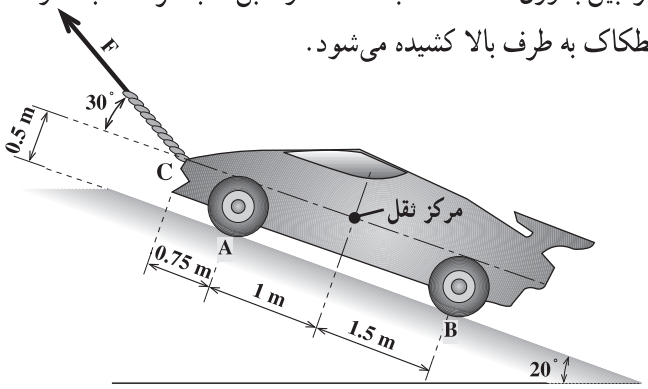
شکل ۳۲ـ۴

۲ــ یک سوراخ کن دستی که به وسیله‌ی پین A به تکیه‌گاه متصل شده و در B بر روی سطح فشار وارد می‌آورد.



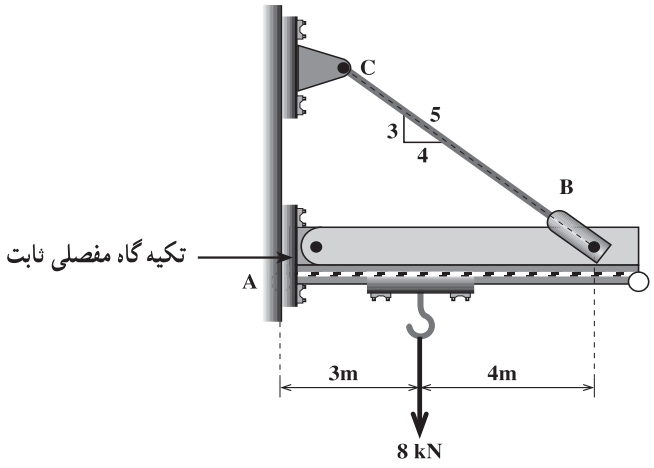
شکل ۳۳ــ۴

۳ــ یک اتومبیل به وزن ۲۰ kN که با استفاده از کابل C با سرعت ثابت در امتداد یک جاده‌ی شیبدار بدون اصطکاک به طرف بالا کشیده می‌شود.



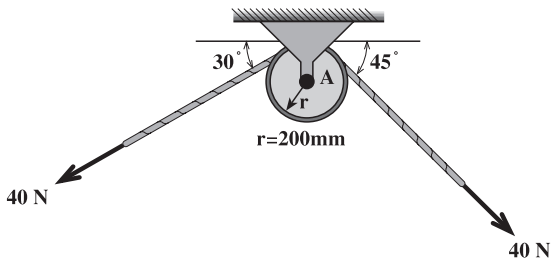
شکل ۳۴ــ۴

۴ــ جرثقیل AB که در نقطه‌ی A به وسیله‌ی پین متصل شده و به کمک کابل BC نگه‌داشته شده است.



شکل ۳۵ــ۴

۵ــ یک قرقره که مرکز آن به پین A متصل شده و با یک کابل که در حال تحمل نیروی کششی ۴۰ N است تماس دارد.



شکل ۳۶ــ۴

فصل پنجم

خرپاها

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل، هنرجو باید بتواند :

۱ــ هدف استفاده از خرپا را توضیح دهد.

۲ــ فرضیات اساسی برای حل خرپا را بیان کند.

۳ــ با استفاده از روش تعادل مفاصل، نیروهای داخلی خرپا را محاسبه کند.

۴ــ بدون محاسبه، عضوهای صفر نیرویی را مشخص کند.

مقدمه

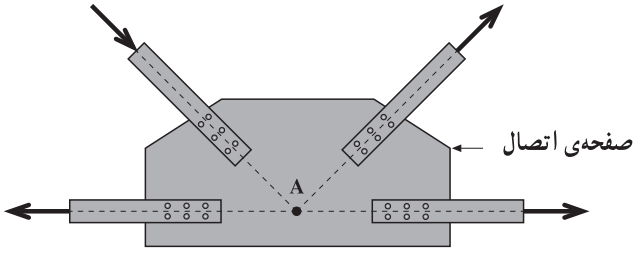
در این فصل، با استفاده از معادلات تعادل در صفحه، به بررسی و تجزیه و تحلیل سازه‌هایی می‌پردازیم که اعضای آن‌ها به وسیله‌ی مفصل (پین) به هم متصل شده‌اند. اصول کلی تحلیل، بر این پایه است که اگر کل یک سازه (مجموعه‌ای از اعضا) در حال تعادل باشد هر یک از عضوهای آن نیز در حال تعادل خواهد بود

.

۱ــ۵ــ خرپاهای ساده

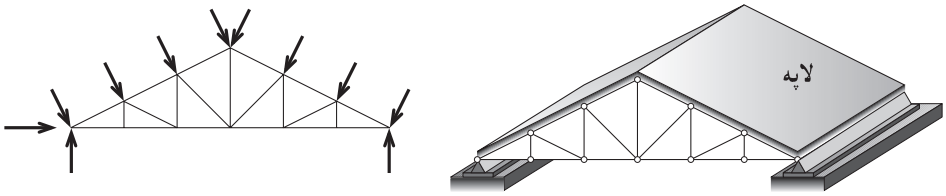
خرپا عبارت است از سازه‌ای متشکل از عضوهای باریک (لاغر) که انتهای آن‌ها به هم متصل شده‌اند. مصالح مورد استفاده در خرپا غالباً از نوع فلزی است اما خرپاهای چوبی و گاهی بتنی هم مورد استفاده قرار می‌گیرند. شکل مقطع اعضای خرپاها از چارتراش‌های چوبی، میله‌ها، نبشی‌ها یا ناودانی‌ها رواج بیش‌تری دارد.

اتصال اعضای خرپا در یک محل به صورت نشان داده شده در شکل ۱ــ۵ با پیچ کردن یا جوش دادن به صفحه‌ی انتهایی، موسوم به صفحه‌ی اتصال، صورت می‌گیرد.



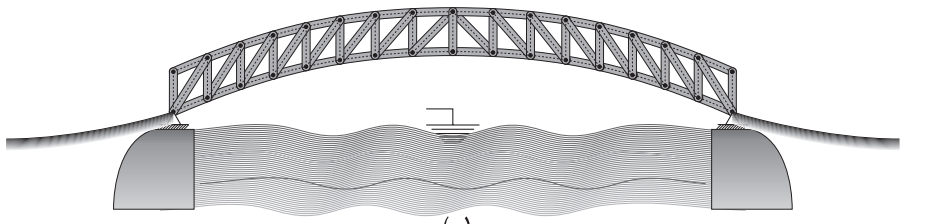
شکل ۱ــ۵ــ اتصال خرپا

خرپاها سازه‌های مناسبی برای پوشش دهانه‌های وسیع، مانند سالن‌های بزرگ و پل‌ها می‌باشند. خرپای شکل ۲ــ۵ الف نمونه‌ای از یک خرپای پوششِ سقف است که در آن، بار سقف توسط مجموعه‌ای از تیرها (لاپه‌ها) در محل گره‌ها به خرپا منتقل می‌شود. در این نوع خرپا چون بارهای وارد شده در صفحه‌ی خرپا برگره‌ها اثر می‌کنند، خرپا را صفحه‌ای[1] می‌نامند. در شکل ۲ــ۵ ب نمودار بارهای وارده را ملاحظه می‌کنید.



الف ــ خرپای پوشش سقف

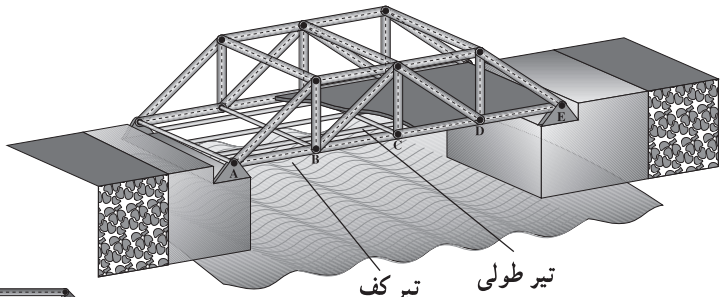
ب ــ نمودار بارهای وارده در خرپای صفحه‌ای



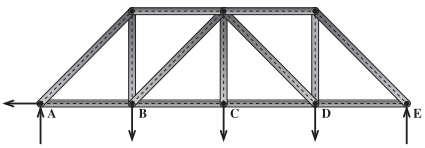
(ج)

شکل ۲ــ۵ــ خرپاهای صفحه‌ای

در مورد یک پل، از قبیل پل نشان داده شده در شکل ۳ــ۵ الف بار مؤثر بر کف پل ابتدا به تیرهای طولی، سپس به تیرهای کف، و بالاخره به مفصل‌های C،B و D، در دو خرپای جانبی نگه‌دارنده‌ی پل، منتقل می‌شود، همانند خرپای پوشش سقف بارگذاری مؤثر بر خرپای پل نیز صفحه‌ای است (شکل۳ــ۵ ب).



(الف)



(ب)

شکل ۳ــ۵

۱ــ خرپای صفحه‌ای: خرپایی است که مجموعه‌ی بارها و اعضای آن در یک صفحه قرار دارند.

هنگامی که طول خرپا، چه خرپای پل و چه خرپای سقف، زیاد باشد معمولاً در یک انتهای خرپا (مفصل E در شکل‌های ۳ــ۵ الف و ۳ــ۵ ب) تکیه‌گاه غلطان[1] یا غلطکی به کار برده می‌شود. این نوع تکیه‌گاه به خرپا اجازه می‌دهد که در اثر تغییرات دما یا اعمال و حذف بارها آزادانه منبسط یا منقبض شود.

فرضیات طراحی

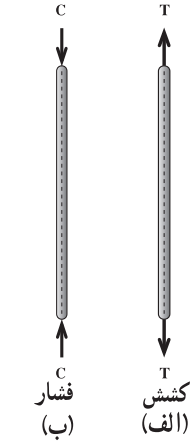
برای طراحی عضوها و اتصالات یک خرپا، لازم است ابتدا معلوم کنیم هنگامی که خرپا تحت اثر یک بارگذاری مفروض قرار می‌گیرد بر هر یک از عضوهای آن چه نیرویی اعمال می‌شود. بدین‌لحاظ دو فرض مهم زیر را در نظر می‌گیریم :

فرض اول: «همه‌ی نیروهای خارجی بر اتصالات اعمال می‌شوند». در بیش‌تر وضعیت‌ها، از قبیل خرپاهای به کار رفته برای پل‌ها و سقف‌ها این فرض صحیح است. در تحلیل نیروهای مؤثر بر خرپاها اغلب از وزن عضوها صرف‌نظر می‌شود، زیرا نیروهایی که عضوها تحمل می‌کنند، معمولاً در مقایسه با وزن آن‌ها بزرگ است در مواردی که لازم است وزن عضو در تحلیل گنجانده شود عموماً آن را به صورت یک نیروی قائم، که نیمی از بزرگی آن در یک انتها و نیم دیگر در انتهای دوم اثر می‌کند، در نظر می‌گیرند.

فرض دوم: «عضوها به وسیله‌ی پین‌های بدون اصطکاک به یکدیگر متصل شده‌اند». در مواردی که اتصالات پیچ شده یا جوش شده مورد استفاده قرار می‌گیرد چنانچه محور عضوهای متصل شده به هم (همانند مورد نقطه‌ی A در شکل ۱ــ۵)متقارب باشند این فرض قابل قبول خواهد بود.

با توجه به این دو فرض، هر یک از عضوهای خرپاها همانند یک عضو دو نیرویی عمل می‌کند و در نتیجه خط اثر نیروهای مؤثر بر دو انتهای یک عضو ضرورتاً بر محور آن عضو منطبق خواهد بود.

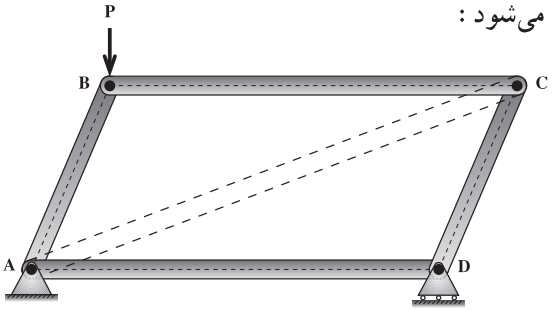
اگر نیرو تمایل به افزایش طول عضو داشته باشد، نیروی کششی (T)، (شکل ۴ــ۵ الف) و اگر تمایل به کاهش طول عضو داشته باشد نیروی فشاری (C) خواهد بود (شکل ۴ــ۵ ب) در طراحی واقعی یک خرپا بیان این مطلب که ماهیت نیرو کششی است یا فشاری اهمیت دارد. در اغلب موارد، به علت احتمال کمانش، عضوهای فشاری باید قوی‌تر از عضوهای کششی ساخته شوند.



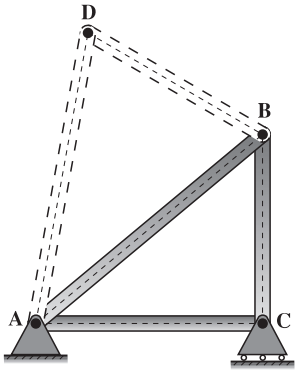
شکل ۴ــ۵

۱ــ Rocker support

هندسه‌ی خرپای ساده: برای جلوگیری از فرو ریختگی خرپا اسکلت آن باید پایدار باشد. واضح است که قاب چهار میله‌ای ABCD در شکل ۵ــ۵ فرو خواهد ریخت مگر این که برای پایدار کردن آن یک عضو قطری، مثلاً AC، به آن افزوده شود. ساده‌ترین قابی که می‌تواند صلب‌گونه یا پایدار باشد قابی با شکل مثلث است ؛ که به آن «جزءِ پایدار» گفته می‌شود. بنابراین یک خرپای ساده به شیوه‌ی زیر ساخته می‌شود :



شکل ۵ــ۵



شکل ۶ــ۵

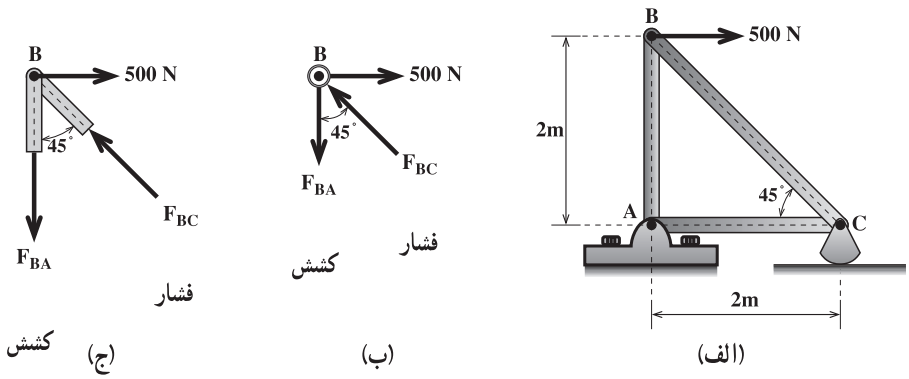
با انتخاب یک جزءِ پایدار، مثلاً مثلث ABC در شکل ۶ــ۵، شروع می‌کنیم و برای تشکیل یک قسمت اضافه دو عضو (AD ، BD) را به آن می‌افزاییم. بدین ترتیب ملاحظه می‌کنیم که با افزودن قسمت اضافی متشکل از دو عضو به خرپا، تعداد مفصل‌های آن یک واحد افزایش می‌یابد.

پس توسعه‌ی یک خرپای پایدار با افزودن هر بار دو عضو و یک مفصل به جزءِ پایدار (مثلثی) امکان‌پذیر است. اگر این منطق در تشکیل هر خرپایی حاکم باشد آن خرپا پایدار خواهد بود.

۲ــ۵ــ روش مفاصل در حل خرپا

اگر یک خرپا در حال تعادل باشد هر یک از مفصل‌های آن نیز ضرورتاً در حال تعادل خواهند بود. بنابراین، روش مفاصل عبارت است از به وجود آوردن شرایط تعادل در مورد نیروهایی که بر پین واقع در هر یک از مفصل‌های خرپا اثر می‌کنند. چون همه‌ی عضوهای خرپا عضوهای دو نیرویی واقع در یک صفحه هستند، سیستم نیروی مؤثر بر هر یک از پین‌ها هم صفحه و متقارب است. بنابراین، شرط تعادل چرخشی یا گشتاوری در مفصل (پین) خودبه‌خود برآورده شده و فقط لازم است برای اطمینان یافتن از تعادل انتقالی یا نیرویی شرایط معادلات $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ تأمین گردد.

هنگام استفاده از روش مفاصل لازم است که در ابتدا و پیش از تشکیل معادلات تعادل، نمودار پیکره‌ی آزاد مفصل را رسم کنیم. برای انجام این کار یادآوری می‌کنیم **که خط اثر نیروی هر عضو که بر اتصال وارد می‌شود با توجه به شکل هندسی خرپا مشخص می‌شود؛ زیرا نیروی مؤثر بر هر عضو در امتداد محور آن عضو است.**[1] به عنوان مثال در شکل ۷ــ۵ الف پین واقع در مفصل B را در نظر بگیرید. سه نیرو بر این پین اعمال می‌شود. این سه نیرو عبارت‌اند از نیروی ۵۰۰ نیوتنی و نیروهایی که عضوهای BA و BC اعمال می‌کنند. نمودار پیکره‌ی آزاد این مفصل در شکل ۷ــ۵ب نشان داده شده است. همان‌گونه که در شکل ملاحظه می‌کنید F_{BA} در حال **کشیدن** پین است. از این مطلب نتیجه می‌گیریم که عضو BA کششی است و در همین حال F_{BC} در حال فشردن پین است و در نتیجه عضو BC فشاری است. و با جدا کردن مفصل مورد نظر از بقیه‌ی خرپا (شکل ۷ــ۵ ج) می‌توان این اثرات را به‌طور ترسیمی نمایش داد. در شکل ۷ــ۵ ج قطعات کوچک عضوهای متصل به پین همراه با پین نشان داده شده است. باید توجه داشت که فشردن این قطعات کوچک با کشیدن آن‌ها نشان دهنده‌ی این است که عضو مربوط فشاری یا کششی می‌باشد.



شکل ۷ــ۵

در همه‌ی موارد، تحلیل باید از مفصلی شروع شود که در آن، همان‌گونه که در شکل ۷ــ۵ ب مشاهده می‌شود، حداقل یک نیروی معلوم[2] و حداکثر دو نیروی مجهول وجود داشته باشد. بدین‌طریق با روابط تعادل، $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ دو معادله‌ی جبری حاصل می‌شود که با حل آن‌ها می‌توانیم پاسخ دو مجهول را به دست آوریم، هنگام تشکیل این معادلات، تعیین جهت صحیح نیروی مجهول

۱ــ این پدیده ناشی از خاصیت میله‌ای است که در تکیه‌گاه‌های میله‌ای هم صدق می‌کند.

۲ــ این شرط برای داشتن اعضا با نیروی غیر صفر است زیرا می‌توان ثابت کرد که در یک مفصل دو عضوی اگر نیرویی بر مفصل، وارد نشده باشد نیروی داخلی هر دو عضو صفر است.

یک عضو با استفاده از روش‌های زیر امکان‌پذیر است :

۱ــ همیشه نیروهای مجهولی را که عضوها بر نمودار پیکره‌ی آزاد مفصل وارد می‌کنند کششی، یعنی در حال «کشیدن» پین فرض کنید. اگر این روش در پیش گرفته شود پس از حل عددی معادلات در حل معادلات تعادل، جواب مربوط به عضوهای کششی مثبت و جواب مربوط به عضوهای فشاری منفی خواهد بود. پس از این که نیروی مجهول یک عضو تعیین شد در نمودارهای پیکره‌ی آزاد مفصل‌های بعدی بزرگی و جهت صحیح آن (کششی یا فشاری) را به کار ببرید.

۲ــ در بسیاری از موارد می‌توان از طریق «بازرسی» جهت صحیح نیروی مجهول یک عضو را تعیین کرد. به عنوان مثال، در شکل ۷ــ۵ ب، F_{BC} باید بر پین فشار آورد (BC فشاری است) زیرا مؤلفه‌ی افقی آن، یعنی $F_{BC} \sin ۴۵^\circ$ ، باید نیروی ۵۰۰ نیوتنی را خنثی کند($\Sigma f_x = ۰$) . به طور مشابه F_{BA} یک نیروی کششی است، زیرا مؤلفه‌ی قائم، یعنی «$F_{BC} \cos ۴۵^\circ$» را خنثی می‌کند($\Sigma f_y = ۰$) . در موارد پیچیده‌تر، می‌توان برای نیروی مجهول یک عضو یک جهت فرض کرد، سپس، با حل معادلات تعادل، با استفاده از نتایج عددی به دست آمده درستی یا نادرستی جهت فرض شده معین می‌شود. یک جواب مثبت نشان دهنده‌ی آن است که این جهت صحیح است و جواب منفی نشان می‌دهد که جهت نشان داده شده بر روی نمودار پیکره‌ی آزاد باید معکوس شود. در مثال‌هایی که پس از این خواهد آمد این روش را به کار می‌بریم.

روش تحلیل

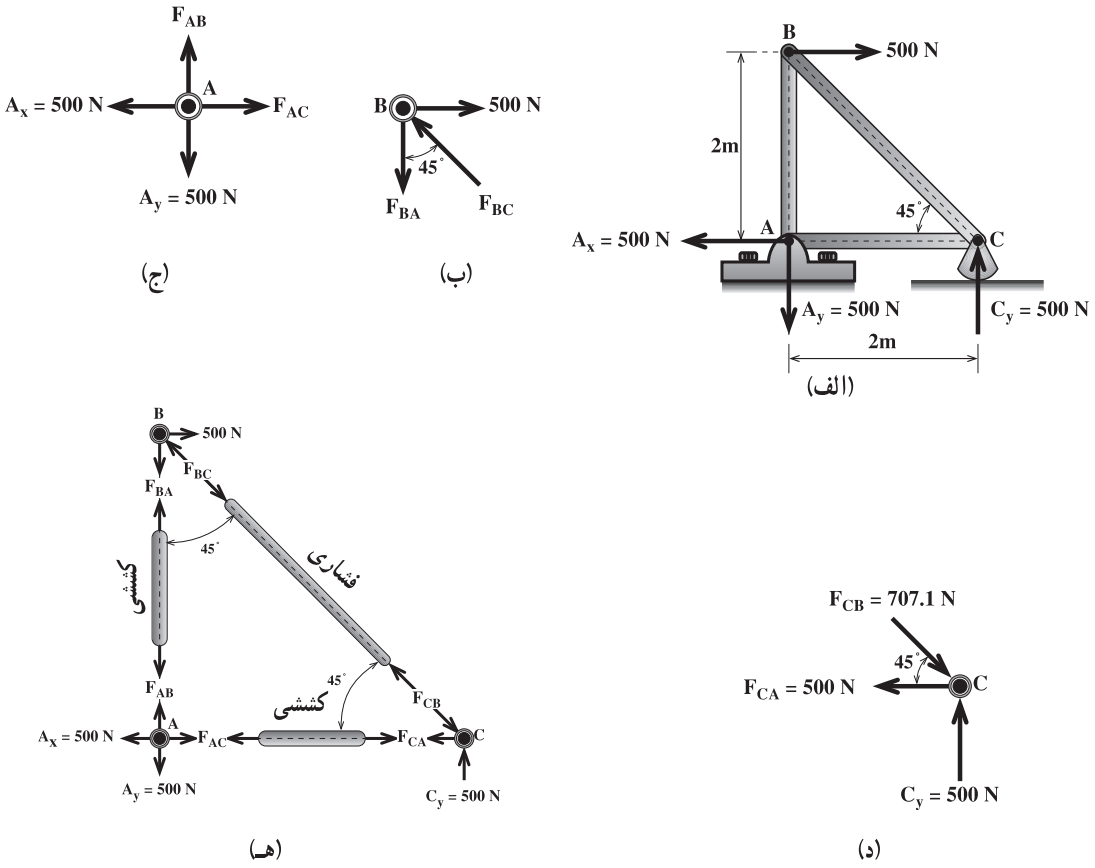
در زیر شیوه‌ی تحلیل خرپاها با استفاده از روش مفاصل شرح داده شده است.

نمودار پیکره‌ی آزاد یک مفصل را که در آن حداقل یک نیروی معلوم و حداکثر دو نیروی مجهول وجود دارد رسم کنید (اگر این مفصل در یکی از تکیه‌گاه‌ها واقع باشد، عموماً لازم است که عکس‌العمل خارجی مؤثر بر تکیه‌گاه خرپا معلوم باشد.) برای تعیین جهت یک نیروی مجهول یکی از دو روش توصیف شده در فوق را به کار ببرید. محورهای x و y را به گونه‌ای انتخاب کنید که نیروهای موجود در نمودار پیکره‌ی آزاد را به سادگی بتوان به مؤلفه‌های x و y تجزیه کرد ؛ سپس دو معادله‌ی تعادل نیرو $\Sigma f_x = ۰$ و $\Sigma f_y = ۰$ را به کار ببرید. پاسخ دو نیروی مجهول مؤثر بر دو عضو را به دست آورید و جهت صحیح آن‌ها را معین کنید.

با تحلیل هر یک از مفصل‌های باقی‌مانده محاسبه را ادامه دهید. برای این کار لازم است دوباره مفصلی را انتخاب کنید که در آن حداکثر دو نیروی مجهول و حداقل یک نیروی معلوم وجود داشته باشد. درک این نکته لازم است که همین که با تحلیل یک مفصل واقع در یکی از دو سر یک عضو

نیروی مؤثر بر این عضو معلوم شد، این نتیجه را می‌توان برای تحلیل نیروهای مؤثر بر مفصل واقع در سر دیگر نیز به کار برد. البته باید از اصل عمل و عکس‌العمل مساوی و مخالف، به‌طور دقیق تبعیت شود. توجه کنید که یک عضو فشاری، مفصل را «می‌فشارد» و یک عضو کششی، آن را «می‌کشد».

مثال ۱: در خرپای نشان داده شده در شکل ۸ــ۵ الف نیروی مؤثر بر هر یک از عضوهای خرپا را به دست آورید و اعضای کششی و فشاری را مشخص کنید.



شکل ۸ــ۵

حل: اگر عکس‌العمل‌های مؤثر بر A و B محاسبه نشده بود (مقادیر این عکس‌العمل‌ها بر روی شکل نشان داده شده‌اند) تحلیل باید از مفصل B شروع می‌شد. چرا؟

مفصل B: نمودار پیکره‌ی آزاد پین B در شکل ۸ــ۵ب نشان داده شده است. سه نیرو بر این پین اثر می‌کنند : نیروی خارجی ۵۰۰N و دو نیروی مجهولی که عضوهای BA و BC اعمال می‌کنند. با تشکیل معادلات تعادل در مفصل B داریم :

$\sum f_x = 0 \rightarrow + \quad \Rightarrow 500 - F_{BC} \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow F_{BC} = 707/1\text{N}$ **پاسخ** (فشاری)

$\sum f_y = 0 \uparrow \Rightarrow F_{BC} \cos 45^\circ - F_{BA} = 0 \Rightarrow F_{BA} = 500\text{N}$ **پاسخ** (کششی)

چون نیروهای مؤثر بر عضوهای BA و BC تعیین شده‌اند، می‌توانیم با تحلیل نیروهای مؤثر بر هر یک از مفصل‌های A و C حل مسأله را ادامه دهیم.

مفصل A: نمودار پیکره‌ی آزاد پین A در شکل ۸ــ۵ ج نشان داده شده است. در این‌جا اثر تکیه‌گاه بر روی پین به کمک عکس‌العمل‌های $A_x = 500\text{N}$ و $A_y = 500\text{N}$ نمایش داده شده است. چون معلوم شد که نیروی عضو BA کششی است، آنگاه F_{BA} (که برابر است با ۵۰۰ نیوتن) پین را می‌کشد (به شکل ۸ــ۵ ج مراجعه کنید).

با تشکیل معادلات تعادل نتیجه می‌گیریم که :

پاسخ $\sum f_x = 0 \rightarrow + \quad \Rightarrow F_{AC} - 500 = 0 \quad F_{AC} = 500\text{N}$ (کششی)

کنترل $\sum f_y = 0 \uparrow \Rightarrow 500 - 500 = 0$ ☑

مفصل C: اکنون که نیروهای مؤثر بر همه‌ی عضوها معلوم شده است می‌توانیم با بررسی نمودار پیکره‌ی آزاد آخرین مفصل (مفصل C) درستی بخشی از نتایج را امتحان کنیم :

کنترل $\sum f_x = 0 \rightarrow + \quad \Rightarrow -500 + 707/1 \cos 45^\circ \cong 0$ ☑

کنترل $\sum f_y = 0 \uparrow \quad \Rightarrow 500 - 707/1 \sin 45^\circ \cong 0$ ☑

نتایج تحلیل در شکل ۸ــ۵هـ به طور خلاصه نشان داده شده است. توجه کنید که نمودار پیکره‌ی آزاد هر یک از پین‌ها اثرات عضوهای متصل شده و نیروهای خارجی مؤثر بر پین را نشان می‌دهد. در همین حال، نمودار پیکره‌ی آزاد هر یک از عضوها نشان دهنده‌ی اثرات پین‌های انتهایی بر عضو موردنظر است.

مثال ۲: در خرپایی که در شکل ۹ــ۵ الف مشاهده می‌شود نیروهای مؤثر بر همه‌ی عضوها را تعیین کنید. نیروهای مؤثر بر تکیه‌گاه‌ها در شکل نشان داده شده‌اند.

چون عکس‌العمل‌ها محاسبه شده‌اند تحلیل را می‌توان از هر یک از مفصل‌های C یا A شروع کرد. چرا؟

حل:

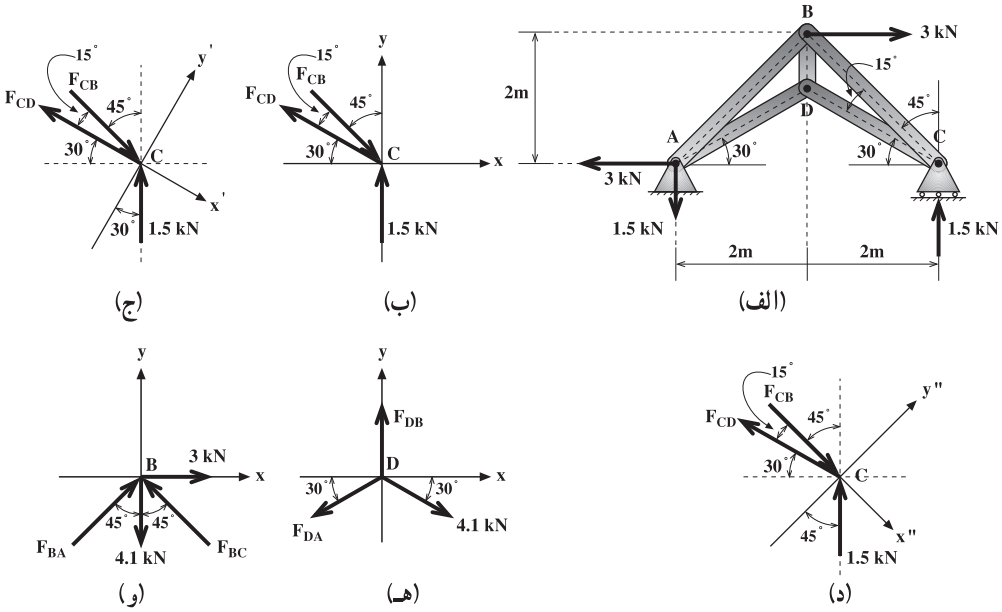
مفصل C (شکل ۹ــ۵ــ ب)

$$\Sigma f_x = ۰ \rightarrow + \quad \Rightarrow -F_{CD}\cos ۳۰^\circ + F_{CB}\sin ۴۵^\circ = ۰$$

$$\Sigma f_y = ۰ \uparrow \quad \Rightarrow ۱/۵ + F_{CD}\sin ۳۰^\circ - F_{CB}\cos ۴۵^\circ = ۰$$

باید دو معادله‌ی فوق به‌طور همزمان حل شوند تا مقادیر دو مجهول به دست آید. توجه داشته باشید که می‌توان با نوشتن معادله‌ی تعادل نیرو در امتداد یک محور که عمود بر جهت نیروی مجهول دیگر است، پاسخ یکی از نیروهای مجهول را مستقیماً به دست آورد. به عنوان مثال با جمع کردن نیروها در امتداد محور y' که عمود بر جهت F_{CD} است، شکل ۹ــ۵ــ ج، پاسخ F_{BC} مستقیماً محاسبه می‌شود.

$$\Sigma f_{y'} = ۰ \uparrow$$



شکل ۹ــ۵

پاسخ $F_{CB} = ۵/۰۲\text{kN}$ (فشاری) $\quad ۱/۵\cos ۳۰^\circ - F_{CB}\sin ۱۵^\circ = ۰$

به روش مشابه با جمع کردن نیروها در امتداد محور y'' شکل ۹ــ۵ د، پاسخ F_{CD} مستقیماً به‌دست می‌آید.

$$\Sigma f_{y''} = ۰ \uparrow$$

پاسخ (کششی) $F_{CD} = ۴/۱۰\text{kN}$ $۱/۵\cos ۴۵^\circ - F_{CD}\sin ۱۵^\circ = ۰$

مفصل D شکل **۹ــ۵ هـ**

$\sum f_x = ۰ \rightarrow +$

پاسخ (کششی) $F_{DA} = ۴/۱۰\text{kN}$ $-F_{DA}\cos ۳۰^\circ + ۴/۱۰\cos ۳۰^\circ = ۰$

پاسخ (کششی) $F_{DB} = ۴/۱۰\text{kN}$ $\sum f_y = ۰ \overset{+}{\uparrow} \Rightarrow F_{DB} - ۲(۴/۱۰\sin ۳۰^\circ) = ۰$

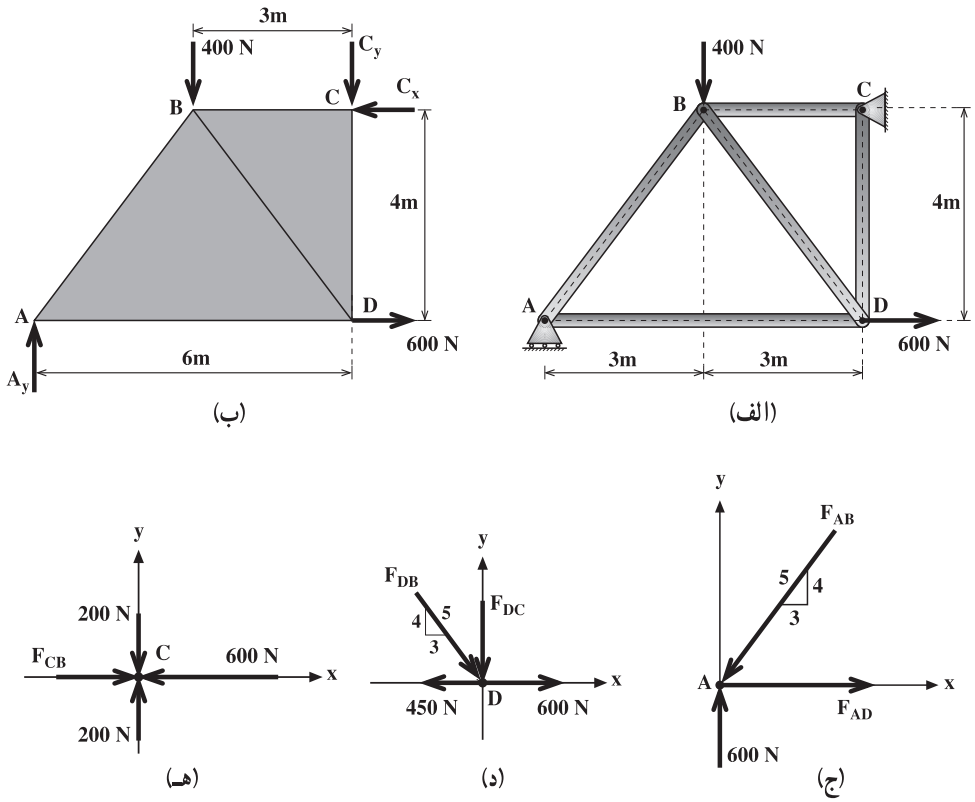
مفصل B شکل **۹ــ۵** و $\sum f_x = ۰ \rightarrow +$

پاسخ (فشاری) $F_{BA} = ۰/۷۷۷\text{kN}$ $F_{BA}\sin ۴۵^\circ - ۵/۰۲\sin ۴۵^\circ + ۳ = ۰$

☑ کنترل $\sum f_y = ۰ \overset{+}{\uparrow} ۰/۷۷۷\cos ۴۵^\circ - ۴/۱۰ + ۵/۰۲\cos ۴۵^\circ = ۰$

با تحلیل «آخرین مفصل» A درستی بخشی از این نتایج را امتحان کنید.

مثال ۳: در خرپای نشان داده شده در شکل **۱۰ــ۵** الف نیروی مؤثر بر هر یک از عضوها را به دست آورید و مشخص کنید که این عضوها کششی هستند یا فشاری.



شکل **۱۰ــ۵**

حل:

عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه : پیش از آن که عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه تعیین شود هیچ یک از مفصل‌ها را نمی‌توان تحلیل کرد. چرا؟ نمودار پیکره‌ی آزاد کل خرپا در شکل ۱۰ــ۵ ب ارائه شده است. با تشکیل معادلات تعادل داریم :

$$\sum f_x = 0 \rightarrow + \quad \Rightarrow 600 - C_x = 0 \Rightarrow \boxed{C_x = 600\text{N} \leftarrow}$$

$$\sum M_C = 0 \curvearrowleft + \quad + A_y(6) - 400(3) - 600(4) = 0 \quad \boxed{A_y = 600\text{N} \uparrow}$$

$$\sum f_y = 0 \uparrow \quad \underbrace{600}_{A_y} - 400 - C_y = 0 \quad \boxed{C_y = 200\text{N} \downarrow}$$

اکنون می‌توان از هر یک از مفصل‌های A یا C تحلیل را شروع کرد. انتخاب مفصل دلخواه است زیرا در هر یک از آن‌ها یک نیروی معلوم و دو نیروی مجهول بر پین اثر می‌کند.

مفصل A شکل ۱۰ــ۵ ج، همان‌گونه که در نمودار پیکره‌ی آزاد نشان داده شده است سه نیرو بر پین واقع در مفصل A اثر می‌کنند. زاویه‌ی تمایل F_{AB} با استفاده از شکل هندسی خرپا تعیین می‌شود. آیا می‌توانید با بررسی و معاینه‌ی دقیق بگویید که چرا این نیرو فشاری و نیروی F_{AD} کششی فرض شده است؟ با تشکیل معادلات تعادل داریم :

$$\sum f_y = 0 \uparrow \Rightarrow \quad 600 - \frac{4}{5}F_{AB} = 0 \quad \boxed{F_{AB} = 750\text{N (فشاری)} \swarrow}$$

پاسخ

$$\sum f_x = 0 \rightarrow + \Rightarrow F_{AD} - \frac{3}{5}(750) = 0 \quad \boxed{F_{AD} = 450\text{N (کششی)} \rightarrow}$$

پاسخ

مفصل D شکل ۱۰ــ۵ د، در گام بعدی پین واقع در این مفصل را انتخاب می‌کنیم. با بررسی شکل ۱۰ــ۵ ج نیروی مؤثر بر AD معلوم شد و دو نیروی مجهول مؤثر بر DB و DC را می‌توان تعیین کرد. با تشکیل معادلات تعادل در شکل ۱۰ــ۵ د داریم :

$$\sum F_x = 0 \rightarrow + \Rightarrow -450 + \frac{3}{5}F_{DB} + 600 = 0 \quad F_{DB} = -250\text{N}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که جهت واقعی F_{DB} مخالف با جهت نشان داده شده در شکل ۱۰ــ۵ د است.

$$\boxed{F_{DB} = 250\text{N (کششی)}}$$

پاسخ

بنابراین برای تعیین F_{DC} می‌توانیم جهت F_{DB} را تصحیح کنیم و سپس $\sum f_y = 0$ را به کار ببریم یا این‌که براساس جهت‌های همان شکل ۱۰ــ۵ د اقدام به تشکیل معادلات تعادل نماییم مشروط بر این‌که به جای مقدار F_{DB} مقدار منفی آن -250N در معادلات جایگزین شود ؛ یعنی :

$$\sum f_y = 0 \uparrow \Rightarrow -F_{DC} - \frac{4}{5}(-250) = 0 \quad \boxed{F_{DC} = 200\text{N (فشاری)}}$$

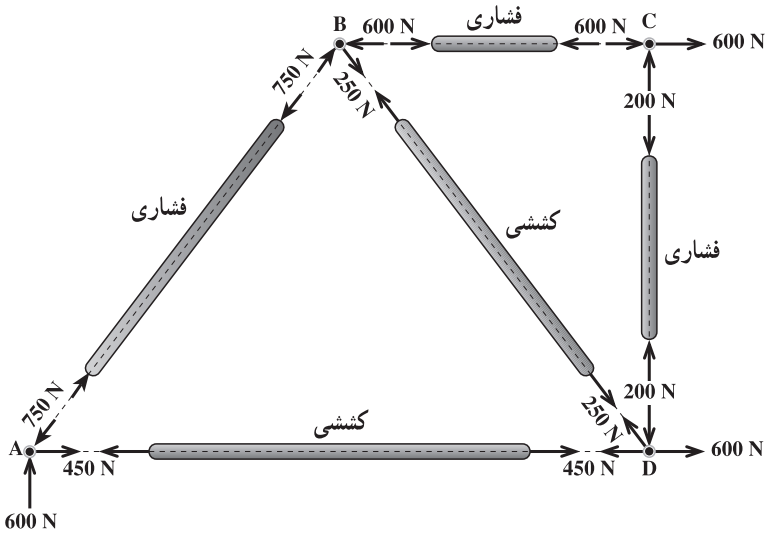
پاسخ

مفصل C شکل ۱۰ــ۵ هـ

$$\sum f_x = 0 \rightarrow + \Rightarrow F_{CB} - 600 = 0 \qquad \boxed{F_{CB} = 600\,N \text{ (فشاری)}}$$

$$\sum f_y = 0 \uparrow \Rightarrow 200 - 200 = 0 \quad \checkmark \text{ کنترل}$$

می‌توان با تحلیل پین واقع در «آخرین مفصل» یعنی B، درستی بخشی از نتایج را تحقیق کرد. نتایج تحلیل به طور خلاصه در شکل ۱۱ــ۵ نشان داده شده است. در این شکل نمودار پیکره‌ی آزاد هر یک از پین‌ها و عضوها را ملاحظه می‌کنید.



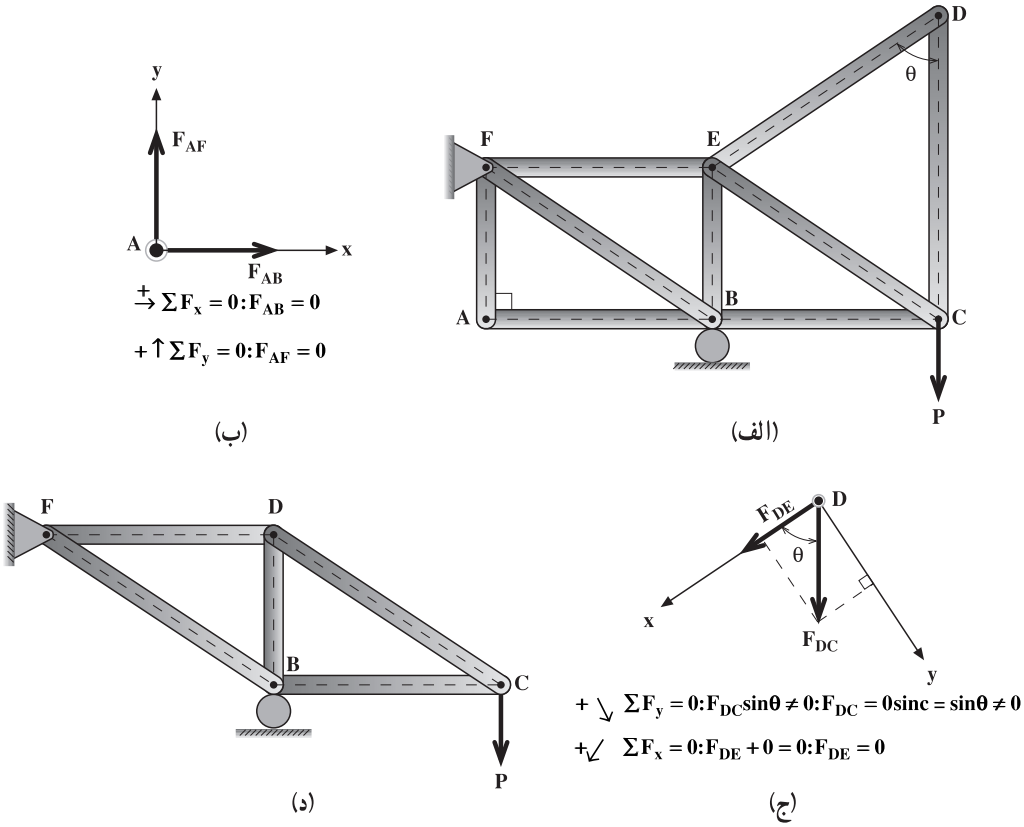
شکل ۱۱ــ۵

۳ــ۵ــ عضوهای صفر نیرویی

هنگام تحلیل یک خرپا با استفاده از روش مفصل‌ها، اگر بتوانیم ابتدا آن عضوهایی را که هیچ باری تحمل نمی‌کنند تعیین کنیم تحلیل بسیار ساده‌تر خواهد بود. این عضوهای صفر نیرویی برای افزایش پایداری خرپا، تأمین ایستایی در برابر بارهای متحرک، مشارکت در توزیع بار در حین گسیختگی خرپا و کاهش طول اعضا به کار می‌روند.

عموماً از طریق بررسی دقیق هر یک از مفصل‌های یک خرپا می‌توانیم عضوهای صفر نیرویی آن را تعیین کنیم. به عنوان مثال، خرپای نشان داده شده در شکل ۱۲ــ۵ الف را در نظر بگیرید. اگر نمودار پیکره‌ی آزاد پین واقع در مفصل A را رسم کنیم، شکل ۱۲ــ۵ ب، نتیجه می‌گیریم که

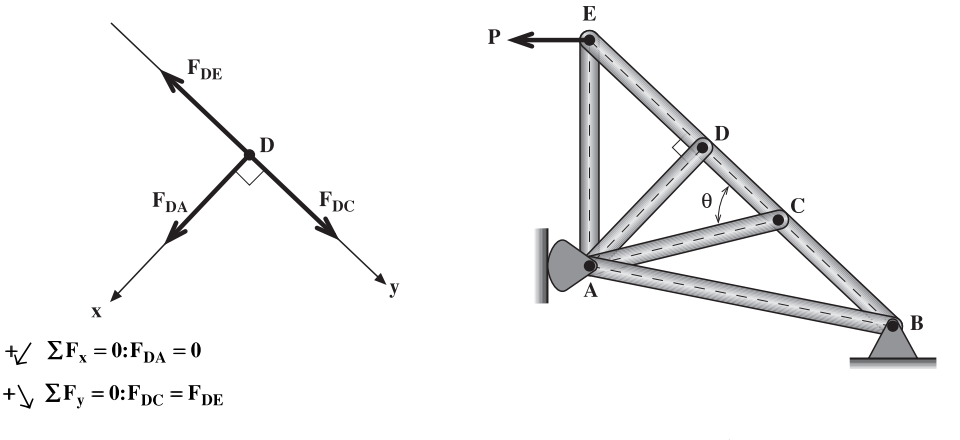
عضوهای AB و AF عضوهای صفر نیرویی هستند. توجه کنید که در مورد عضوهای DC و DE شکل ۱۲ــ۵ ج نیز همین مطلب صادق است. بنابراین به عنوان یک قاعده‌ی کلی، اگر فقط دو عضو یک مفصل خرپا را تشکیل دهند و هیچ بار خارجی یا عکس‌العمل تکیه‌گاهی بر این مفصل اثر نکند این عضوها ضرورتاً عضوهای صفر نیرویی خواهند بود.



شکل ۱۲ــ۵

بنابراین بار مؤثر بر خرپای نشان داده شده در شکل ۱۲ــ۵ الف فقط توسط پنج عضوی که در شکل ۱۲ــ۵ د ملاحظه می‌شود تحمل می‌شود. اکنون خرپای نشان داده شده در شکل ۱۳ــ۵ الف را مورد توجه قرار دهید. نمودار پیکره‌ی آزاد پین واقع در مفصل D را در شکل ۱۳ــ۵ ب ملاحظه می‌کنید. با انتخاب محور y در امتداد عضوهای DC و DE و محور x در امتداد محور DA نتیجه می‌گیریم که DA یک عضو صفر نیرویی است. توجه کنید که در مورد عضو CA شکل ۱۳ــ۵ ج نیز همین مطلب صادق است. بنابراین، به طور کلی اگر یک مفصل از سه عضو که دوتای آن در امتداد هم باشند، تشکیل شده باشد با این شرط که نیروی خارجی یا عکس‌العمل تکیه‌گاهی بر آن مفصل اثر

نکند، عضو سوم یک عضو صفر نیرویی خواهد بود. در نتیجه، خرپای نشان داده شده در شکل ۱۳ــ۵ د برای تحمل بار P کفایت دارد.



شکل ۱۳ــ۵

مثال ۴: در شکل ۱۴ــ۵ الف ؛ خرپایی را مشاهده می‌کنید. با استفاده از روش مفصل‌ها همه‌ی عضوهای صفر نیرویی این خرپا را تعیین نمایید.