$$\Delta L = \frac{+PL}{AE} = \frac{+50000 \times 3000}{20096 \times 2/1 \times 10^{5}} = +3/55 \times 10^{-2} mm = 0/0355 mm$$

تذکر ۱: علامت مثبت نمایانگر افزایش طول میله است.

تذکر ۲: واحدها باید از یک سیستم مناسب انتخاب شوند.

مثال ۴: یک میله‌ی گرد به قطر $D = 2cm$ و طول $L = 3m$ در اثرِ اعمال نیروی کششی $P = 12560N$ ، یک میلی‌متر ازدیاد طول پیدا می‌کند. در صورتی که بار وارده از حد کشسانی مصالح فراتر نرفته باشد ضریب کشسانی (الاستیسیته) میله و جنس آن را تعیین کنید.

حل:

اطلاعات مسئله

$$P = +12560N$$

$$L = 3000mm$$

$$A = \frac{\pi}{4} \times 20^{2} = 314mm^{2}$$

$$\Delta L = +1mm$$

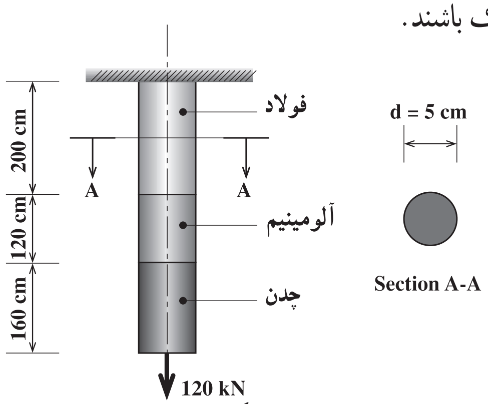
$$E = ?$$

$$\Delta L = \frac{PL}{AE} \Rightarrow E = \frac{P.L}{A.\Delta L} = \frac{12560 \times 3000}{314 \times 1} = 120000 N/mm^{2}$$

$$E = 120000 N/mm^{2} = 1/2 \times 10^{5} N/mm^{2}$$

با مراجعه به جدول (۱ــ ۸) دیده می‌شود که مدول الاستیسیته $1/2 \times 10^{5}$ مربوط به چدن است.

مثال ۵: یک میله مطابق شکل، متشکل از آهن، چدن و آلومینیم تحت اثر بار محوری $120kN$ قرار دارد مطلوب است محاسبه‌ی تغییر شکل و کرنش کلّی در صورتی که تنش‌ها در کم‌تر از محدوده‌ی الاستیک باشند.

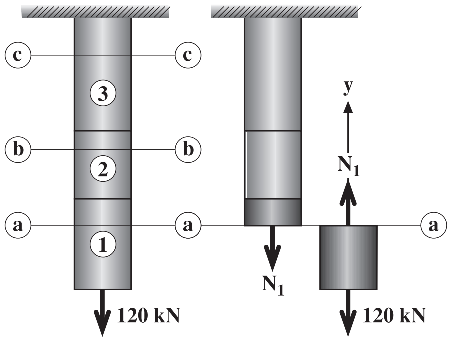


شکل۸ــ۸

حل: چون میله متشکل از سه جنس مختلف است باید ــ به دلیل متفاوت بودن E هر جنس ــ هر جنس به طور جداگانه بررسی شود. به این منظور سه مقطع مختلف a − a ، b − b و c − c به ترتیب در چدن، آلومینیم و فولاد ایجاد می‌کنیم و سپس با تشکیل روابط تعادل اقدام به تعیین نیروی محوری هر جنس می‌نماییم.

رابطه‌ی تعادل $\sum f_y = ۰ \uparrow$

$+N_۱ - ۱۲۰ = ۰ \Rightarrow \boxed{N_۱ = ۱۲۰ kN}$



شکل ۹ــ۸

نتیجه: نیروی داخلی چدن ۱۲۰kN است.

با ایجاد مقاطع b − b و c − c می‌توان نتیجه گرفت که $N_۲ = N_۳ = ۱۲۰ kN$

اطلاعات مسئله

$P = ۱۲۰ kN = ۱۲۰۰۰۰ N$ چدن

$P = ۱۲۰ kN = ۱۲۰۰۰۰ N$ آلومینیم

$P = ۱۲۰ kN = ۱۲۰۰۰۰ N$ فولاد

A چدن $= A$ آلومینیم $= A$ فولاد $= \frac{\pi}{۴} \times ۵۰^۲ = ۱۹۶۲/۵ mm^۲$

$E = ۱/۲ \times ۱۰^۵ \ N/mm^۲$ چدن — مطابق جدول (۱ــ۸)

$E = ۰/۷ \times ۱۰^۵ \ N/mm^۲$ آلومینیم — مطابق جدول (۱ــ۸)

$E = ۲/۱ \times ۱۰^۵ \ N/mm^۲$ فولاد — مطابق جدول (۱ــ۸)

$L = ۱۶۰۰ \ mm$ چدن

$L = ۱۲۰۰ \ mm$ آلومینیم

فولاد $L = ۲۰۰۰\ mm$

از رابطه‌ی **۵ــ۸** استفاده می‌کنیم :

$$\Delta L = \sum_{i=۱}^{۳} \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$ (کلی) ⇐ چون میله دارای سه جنس مختلف است

$$\Delta L_{کلی} = \frac{P_۱ L_۱}{A_۱ E_۱} + \frac{P_۲ L_۲}{A_۲ E_۲} + \frac{P_۳ L_۳}{A_۳ E_۳}$$

چون $P_۱ = P_۲ = P_۳ = P$ و $A_۱ = A_۲ = A_۳ = A$ می‌توان رابطه را به صورت ساده‌تری نوشت :

$$\Delta L = \frac{P}{A}\left(\frac{L_۱}{E_۱} + \frac{L_۲}{E_۲} + \frac{L_۳}{E_۳}\right)$$

$$\Delta L = \frac{۱۲۰۰۰۰}{۱۹۶۲/۵}\left(\frac{۱۶۰۰}{۱/۲\times۱۰^۵} + \frac{۱۲۰۰}{۰/۷\times۱۰^۵} + \frac{۲۰۰۰}{۲/۱\times۱۰^۵}\right) = ۲/۴۴mm$$

افزایش طولی $\boxed{\Delta L = ۲/۴۴mm}$

$$\varepsilon_{کرنش\ کلی} = \frac{\Delta L_{کلی}}{L_{کلی}} = \frac{۲/۴۴}{۱۶۰۰+۱۲۰۰+۲۰۰۰} = ۵/۰۸\times۱۰^{-۴}$$

توضیح: در صورتی که در مسئله، عبارتِ **کرنش کلی** عنوان نشود می‌باید علاوه بر کرنش کلی، کرنش‌های تک‌تک‌نواحی (چدن، آلومینیم و فولاد) محاسبه شوند.

بدیهی است از روابط زیر می‌توان کرنش تک‌تک نواحی سه‌گانه را محاسبه کرد. اثبات این امر، به هنرجویان واگذار می‌شود.

$$\varepsilon_۱ = \frac{P_۱}{A_۱ E_۱} \quad \varepsilon_۲ = \frac{P_۲}{A_۲ E_۲} \quad \varepsilon_۳ = \frac{P_۳}{A_۳ E_۳}$$

مثال ۶: در مثال ۵ ثابت کنید که کرنش کلّی ε با مجموع کرنش‌های سه‌گانه‌ی $\varepsilon' = \varepsilon_۱ + \varepsilon_۲ + \varepsilon_۳$ متفاوت است.

حل:

کرنش در چدن $\varepsilon_۱ = \frac{۱۲۰۰۰۰}{۱۹۶۲/۵\times۱/۲\times۱۰^۵} = ۵/۱۰\times۱۰^{-۴}$

کرنش در آلومینیم $\varepsilon_۲ = \frac{۱۲۰۰۰۰}{۱۹۶۲/۵\times۰/۷\times۱۰^۵} = ۸/۷۴\times۱۰^{-۴}$

کرنش در آهن $\varepsilon_۳ = \frac{۱۲۰۰۰۰}{۱۹۶۲/۵\times۲/۱\times۱۰^۵} = ۲/۹۱\times۱۰^{-۴}$

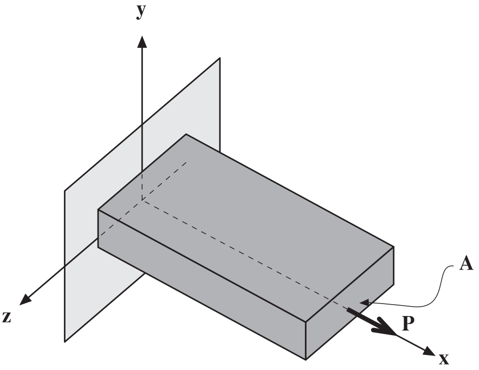
مجموع کرنش‌ها $\varepsilon' = ۵/۱۰\times۱۰^{-۴} + ۸/۷۴\times۱۰^{-۴} + ۲/۹۱\times۱۰^{-۴} = ۱۶/۷۵\times۱۰^{-۴}$

مجموع کرنش‌ها $\varepsilon' \neq \varepsilon$ کرنش کلی

$\frac{\varepsilon'}{۳} = ۵/۵۸ \times ۱۰^{-۴}$ (میانگین کرنش‌ها) $\varepsilon \neq$ کرنش کلی

نتیجه: کرنش کلی با مجموع کرنش‌های هر قطعه و با متوسط کرنش‌های قطعات متفاوت است.

نسبت پواسون (ضریب پواسون Poisson's ratio): فرض کنید تیری مطابق شکل ۱۰ــ۸ تحت تأثیر نیروی کششی P قرار دارد. تا زمانی که تنش در اثر بار P از حدّ ارتجاعی مصالح تجاوز نکرده است تنش و کرنش حاصل در قانون هوک صدق می‌کند.



$$\sigma_x = \frac{+P}{A} \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

شکل ۱۰ــ۸

باید توجه داشت که تنش‌های حاصل از نیروی P روی سطوح جانبی عضو، یعنی در امتداد محورهای y و z، برابر صفر است.

$$\sigma_y = \sigma_z = ۰$$

در این بحث ممکن است نتیجه گرفته شود که چون تنش در امتداد محورهای y و z برابر صفر است پس کرنش‌های مربوطه‌ی ε_y و ε_z نیز برابر صفر خواهند بود که این نتیجه‌گیری اشتباه است. در کلیه‌ی مصالح ازدیاد طول در امتداد نیروی کششی P با یک انقباض عرضی توأم خواهد بود که به **کرنش عرضی** موسوم است. کرنش‌های عرضی در امتدادهای عمود بر بار با هم برابرند و مقدار مطلق نسبت کرنش عرضی به کرنش طولی یا محوری که نسبت ثابتی برای هر مصالح است به **نسبت پواسون** مشهور است. این نسبت را به افتخار ریاضی‌دان فرانسوی **سیمن دنیس پواسون** (۱۸۴۰ــ۱۷۸۱) به این نام می‌خوانند و با حرف یونانی μ (مو) نشان می‌دهند.

شکل ۱۱ــ۸

$$\mu = \frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش طولی}} \qquad (۸\_۶)$$

رابطه‌ی کرنش عرضی با کرنش طولی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{-\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu\varepsilon_x} \qquad (۸\_۷)$$

از رابطه‌ی ۷ــ۸ می‌توان استنباط کرد که هرگاه کرنش محوری به صورت افزایش طول (انبساط) باشد باید کرنش عرضی کاهش عرض (انقباض) داشته باشد و برعکس.

رابطه‌ی ۷ــ۸ را می‌توان به صورت زیر نشان داد :

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu\varepsilon_x \Rightarrow \text{چون } \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu\frac{\sigma_x}{E}} \qquad (۸\_۸)$$

در روابط ۷ــ۸ و ۸ــ۸، μ نسبت پواسون است که برای مصالح مختلف مقادیر متفاوتی دارد. برای بعضی از مصالح مقادیر μ در جدول ۲ــ۸ آورده شده است. باید توجّه داشت که نسبت پواسون برای اجسام مختلف بین $۰/۵ > \mu > ۰$ تغییر می‌کند و برای مصالح ساختمانی متداول این نسبت بین ۰/۱۵ تا ۰/۳۵ متغیّر است.

جدول ۲ــ۸

مصالح	نسبت پواسون μ
فولاد	۰/۲۵ ــ ۰/۳۵
مس	۰/۳۱ ــ ۰/۳۴
برنز	۰/۳۲ ــ ۰/۳۵
چدن	۰/۲۳ ــ ۰/۲۷
سرب	۰/۴۵
برنج	۰/۳۲ ــ ۰/۴۲
آلومینیم	۰/۳۲ ــ ۰/۳۶
سنگ‌ها	۰/۱۶ ــ ۰/۳۴
لاستیک	۰/۴۷
چوب	۰/۰۷
شیشه	۰/۲۵
بتن	۰/۰۸ ــ ۰/۱۸
روی	۰/۲۱

مثال ۷: میله‌ای فولادی به طول $۲/۵m$ و قطر $۱۵cm$، تحت اثر نیروی کششی $P = ۳۵۰۰kN$ قرار دارد. مطلوب است : الف ـ محاسبه‌ی کرنش جانبی در صورتی که $\mu = ۰/۳$ فرض شود.
ب ـ قطر ثانویه‌ی میله.

اطلاعات مسئله

$$P = ۳۵۰۰kN = ۳۵۰۰۰۰۰N$$

$$E = ۲/۱ \times ۱۰^{۵}\ N/mm^{۲}$$

$$\mu = ۰/۳$$

$$A = \frac{\pi . d^{۲}}{۴} = \frac{\pi \times ۱۵۰^{۲}}{۴} = ۱۷۶۶۲/۵mm^{۲}$$

$$L = ۲/۵m = ۲۵۰۰mm$$

حل:

الف ـ فرض می‌کنیم محور طولی x باشد ؛ پس نیروی کششی P موجب کرنش محوری ε_x خواهد شد.

تنش کششی $\sigma_x = \dfrac{P}{A} \Rightarrow \sigma_x = \dfrac{+۳۵۰۰۰۰۰}{۱۷۶۶۲/۵} = +۱۹۸/۱۶ N/mm^{۲}$

کرنش محوری (افزایش نسبی طول) $\varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} \Rightarrow \varepsilon_x = \dfrac{+۱۹۸/۱۶}{۲/۱ \times ۱۰^{۵}} = +۹/۴۴ \times ۱۰^{-۴}$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu\varepsilon_x = -۰/۳ \times ۹/۴۴ \times ۱۰^{-۴} = -۲/۸۳ \times ۱۰^{-۴}$$

کرنش عرضی (کاهش نسبی عرض)

ب ـ

عرض ثانویه $d' = d(۱ + \varepsilon_y \text{ یا } \varepsilon_z) = ۱۵۰(۱ + (-۲/۸۳ \times ۱۰^{-۴})) = ۱۴۹/۹۶mm$

قطر ثانویه $\boxed{d' = ۱۴۹/۹۶mm}$

طول ثانویه $l' = l(۱ + \varepsilon_x) = ۲۵۰۰(۱ + ۹/۴۳ \times ۱۰^{-۴}) = ۲۵۰۲/۳۶mm$

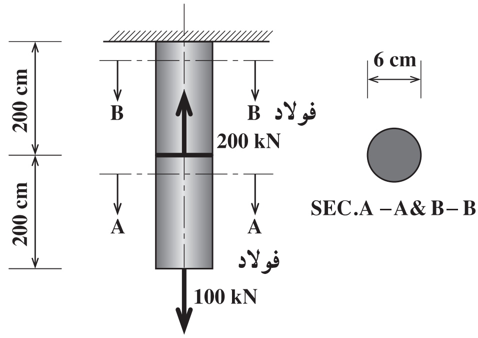
$$\boxed{l' = ۲۵۰۲/۳۶mm}$$

تمرین

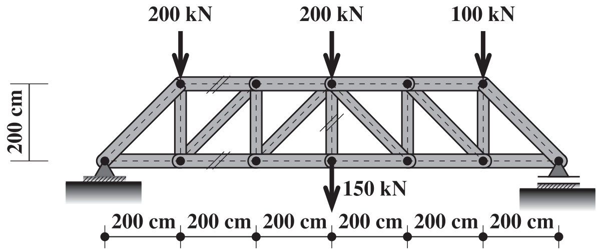
در مسایل ۱ تا ۴ کرنش‌های تک‌تک نواحی و کرنش‌های کلی را محاسبه کنید (مقادیر E از جدول ۱ــ۸ استخراج شوند و فرض کنید که تنش‌ها در محدوده‌ی ارتجاعی هستند).

مسایل مربوط به تغییر شکل‌ها

۱ـ

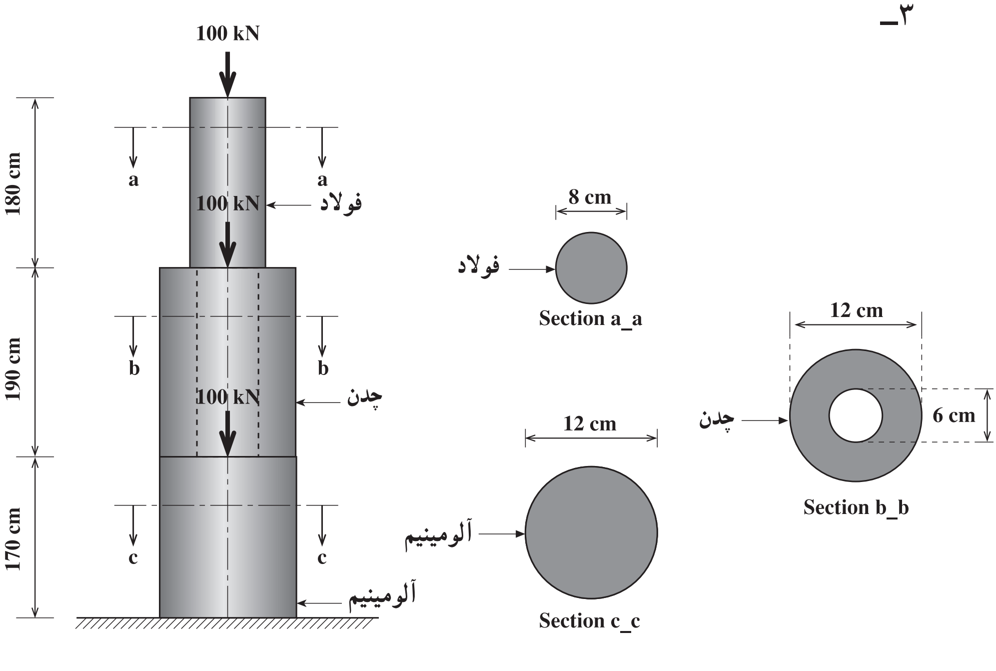


۲ـ

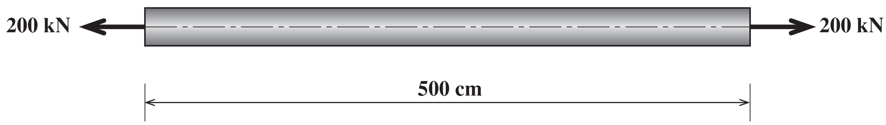


توضیح: فقط اعضای مشخص شده با (≠) بررسی شوند. تمام میله‌ها از فولاد با سطح مقطع ۷cm² می‌باشند.

۳ـ



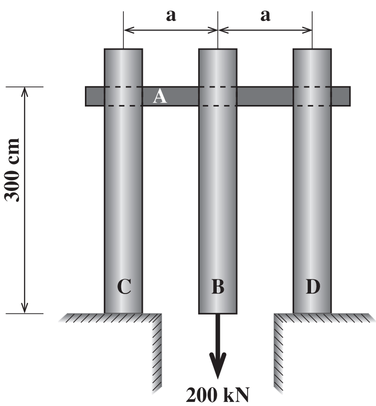
۴ـ

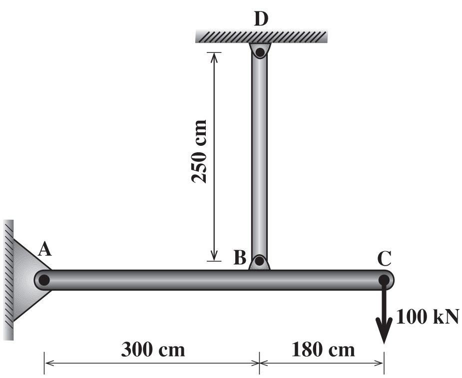


سؤال: اگر مقطع میله‌ی نشان داده شده در مثال ۴، دایره‌ای به قطر d و جنس آن از فولاد $(E = ۲/۱ \times ۱۰^{۵}\ N/mm^{۲})$ باشد و خواسته باشیم $\Delta L_{max} = ۰/۲۴۳cm$ باشد ؛ مطلوب است محاسبه‌ی حداقل قطر میله.

۵ـ در شکل زیر، اگر سیستم نشان داده شده متشکل از سه میله‌ی فولادی، هر یک با سطح مقطع $A = ۱۰cm^{۲}$ ، باشد در صورتی که اتّصال آن‌ها در محل A به اندازه‌ی کافی مقاوم باشد و از تنش‌های موضعی محل A صرف‌نظر شود، مطلوب است محاسبه‌ی تغییر مکان انتهای B تحت اثر بار محوری ۲۰۰kN و کرنش هر یک از میله‌ها.

۶ـ تیرصلب ABC در انتهای A به تکیه‌گاه مفصلی و در محل B به یک میله‌ی نسبتاً باریک، با قطر ۳cm از جنس فولاد، متصل است. مطلوب است محاسبه‌ی تغییر مکان عمودی نقطه‌ی C (ناشی از کشش میله BD) در اثر بار عمودی ۱۰۰kN.

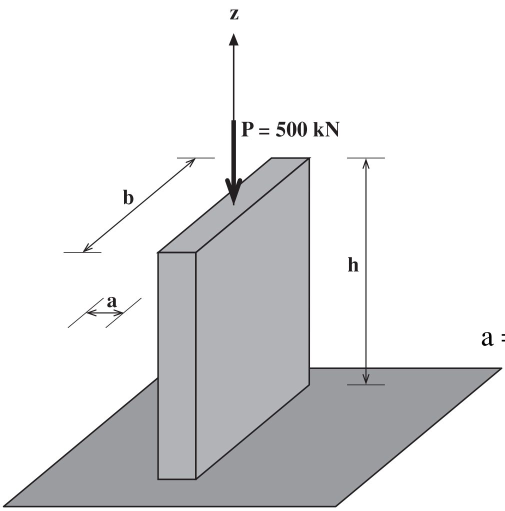




تذکر: اتصال میله‌ی BD به تیر AC در محل B لولایی در نظر گرفته شود.

مسایل مربوط به ضریب پواسون

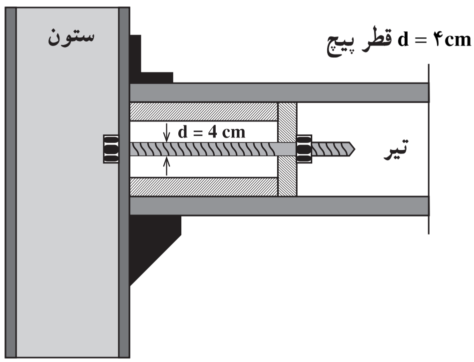
۱ــ سیمی به قطر ۸mm و به طول ۸۰m از بالابری آویزان است. این سیم در اثر اعمال نیروی کششی $P=۲kN$ ازدیاد طولی برابر ۱۵mm پیدا می‌کند. مطلوب است محاسبه‌ی ضریب ارتجاعی سیم.



۲ــ عضوی بتنی به ابعاد نشان داده شده در شکل تحت اثر نیروی فشاری $P=۵۰۰kN$ قرار دارد. اگر ضریب پواسون $\mu=۰/۱۵$ باشد مطلوب است محاسبه‌ی عرض‌های ثانوی a' و b' (فرض کنید کمانش مطرح نباشد و از وزن آن نیز صرف‌نظر کنید).

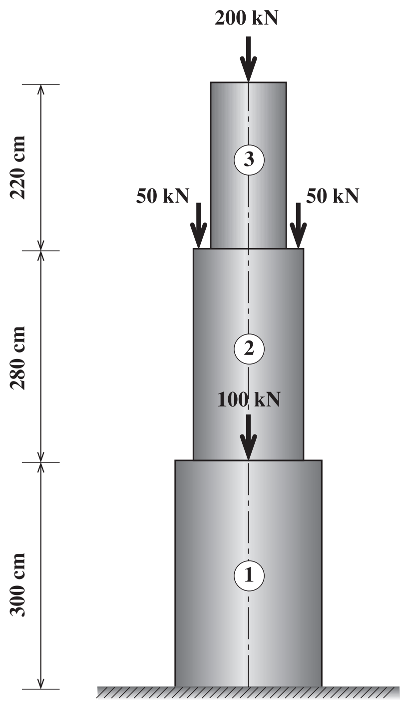
$a=۱۰cm \quad b=۳۰cm \quad h=۴۰۰cm$

۳ــ تغییر قطر یک پیچ فولادی بزرگ را در زمان بستن پیچ به دقت اندازه‌گیری کرده‌ایم. اگر $E=۲/۱\times۱۰^{۵}MPa$ و $\mu=۰/۳$ باشند، مطلوب است محاسبه‌ی نیروی داخلی در پیچ در صورتی که قطر آن به اندازه‌ی ۰/۰۵mm کاهش یافته باشد (فرض کنید اتصال فقط از طریق یک پیچ به عمل آمده باشد).



۴ـ سیستمی متشکل از آهن، چدن و مس مطابق شکل مفروض است. مطلوب است محاسبه‌ی طول و قطر ثانویه‌ی هر قسمت از آن.

① فولاد $\begin{cases} L = ۳۰۰ \\ d = ۲۵cm \\ \mu = ۰/۳ \end{cases}$ ② چدن $\begin{cases} L = ۲۸۰ \\ d = ۲۰cm \\ \mu = ۰/۲۵ \end{cases}$ ③ مس $\begin{cases} L = ۲۲۰cm \\ d = ۱۰cm \\ \mu = ۰/۳۲ \end{cases}$



فصل نهم

تنش‌نهایی، تنش مجاز، ضریب ایمنی

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل، هنرجو باید بتواند :

۱ ــ تفاوت بین تنش‌های موجود و مُجاز را بیان کند ؛

۲ــ تنش‌های ماکزیمم را توضیح دهد ؛

۳ــ تنش مجاز انواع مصالح را براساس روابط و جدول‌های مربوطه استخراج کند* ؛

۴ــ پس از محاسبه‌ی تنش‌های موجود، آن‌ها را با تنش‌های مجاز مقایسه کند.

۱ــ۹ــ تنش‌نهایی، تنش مجاز، ضریب ایمنی (ضریب اطمینان)

هدف از طراحی یک سازه، پایداری و دوام آن در طول عمر سازه است به‌طوری که از ایمنی لازم برخوردار باشد. چنانچه مقاومت واقعی یک سازه به‌طور دقیق مشخص باشد و بتوانیم بارها و عوامل مؤثر بر سازه را با همان دقت اندازه بگیریم، ایمنی و پایداری سازه تنها با ایجاد ظرفیّت باربری مصالح (سازه) به میزان اندکی بالاتر از بارهای وارد شده، قابل تأمین خواهد بود. اما موانع مختلفی وجود دارد که موجب می‌شود مهندس نتواند ارزیابی دقیق و صحیحی از خصوصیّات مصالح و بارهای محیطی و ناشناخته داشته باشد. به همین منظور «**تنش‌های موجود**» در مصالح باید محدود به تنش‌هایی شوند که در شرایط بحرانی و استثنایی، حداکثر تا مقاومت ماکزیمم مصالح، افزایش یابند. به این تنش‌ها که معمولاً کسری از مقاومت ماکزیمم مصالح هستند «**تنش‌های مجاز**» گفته می‌شود. در این کتاب تنش‌های مجاز را با اندیس all[1] نشان می‌دهیم.

$$\boxed{\sigma_{all} < \sigma_{max}}$$

تنش‌های ماکزیمم: تنش‌های ماکزیمم مصالح بستگی به جنس مصالح دارد. در مصالح سخت و شکننده تنش‌های ماکزیمم همان تنش‌های نهایی مصالح (که با σ_u[2] نشان داده می‌شوند) هستند. ولی

---

* در این هدف رفتاری نیازی به حفظ‌کردن روابط نیست.

۱ــ allowable

۲ــ اندیس ــ u ــ مخفف ultimate.

در مصالح نرم که دارای حد جاری شدن قابل توجهی هستند تنش‌های ماکزیمم برابر تنش‌های جاری شدن مصالح (که با σ_y [1] نشان داده می‌شوند) فرض می‌شوند.

در بعضی از آیین‌نامه‌ها تنش‌های مجاز کسری از تنش‌های نهایی و جاری شدن مصالح هستند.

تنش‌های موجود: در بخش‌های گذشته توانستید تنش‌های ناشی از بارهای محوری و برشی را در میله‌ها، تسمه‌ها و واسطه‌ها محاسبه کنید و در فصول بعد خواهید توانست تنش‌های پیچیده‌تری را محاسبه کنید. به تنش‌های مصالح در اثر بارهای وارد شده «**تنش‌های موجود**» گفته می‌شود، که در این کتاب آن را با σ_e [2] نشان می‌دهیم. محاسبه‌ی تنش‌های موجود به تنهایی نمی‌توانند بیانگر پایداری و یا حداقل، قضاوت در مورد پایداری سازه باشند. بلکه زمانی این تنش‌ها مؤثر واقع می‌شوند که آن‌ها را با تنش‌هایی مانند تنش‌های مجاز یا ماکزیمم مصالح مقایسه کنیم. اما محاسبه‌ی این تنش‌ها می‌توانند مهندس را در عوامل عمده‌ی زیر یاری کنند.

۱ــ *آنالیز:* تجزیه و تحلیل سازه و پیش‌بینی عملکرد آن‌ها تحت شرایط بارگذاری و مشخص کردن رفتار واقعی عضو.

۲ــ *طراحی:* انتخاب ابعاد مناسبی که علاوه برداشتن ایمنی کافی و توجّه به مسایل اقتصادی، کارآیی مطلوبی داشته باشد.

در مراحل آنالیز و طراحی باید بدانیم که مصالح موردنظر تحت شرایط مشخص بارگذاری، چه رفتاری از خود نشان می‌دهند (اطّلاعات مربوط به رفتار مصالح توسط آزمایشگاه‌های مقاومت مصالح تعیین می‌شوند).

تنش‌های مجاز: در مصالح نرم مانند فولاد ساختمانی، وقتی نمودار تنش کرنش (شکل ۴ــ۸ در فصل هشتم) مورد بررسی قرار می‌گیرد حدّی دیده می‌شود که به مجرد رسیدن تنش به آن حد، بدون افزایش بار، تغییر شکل در عضو افزایش می‌یابد که به این حد، حد جاری شدن مصالح گفته می‌شود و تنش متناظر آن را با σ_y و یا F_y نمایش می‌دهیم. اگر نیروها باعث شوند تنشی بیش از حدّ جاری شدن در مصالح به‌وجود آید علاوه بر این‌که باعث آسیب‌دیدن مصالح درگیر و شکننده با عضو می‌شوند، موجب بروز تغییر شکل‌های دایمی در مصالح نیز خواهند شد. از طرفی انتظار می‌رود در یک حالت بحرانی (به عنوان مثال اثر زلزله بر یک ساختمان که باعث تغییر شکل جانبی آن شده) سازه به گونه‌ای طرّاحی شود که بعد از تمام شدن اثر زلزله بر ساختمان تغییر شکل جانبی آن حذف شود زیرا هرگونه تغییر شکل جانبی ماندگار در ساختمان، استفاده از آن را مختل می‌سازد، به همین منظور می‌باید تنش‌های بحرانی را به حدی محدود کنیم که پس از برداشتن آن‌ها تغییر شکل‌های حاصل شده

۱ــ اندیس y مخفف yeild. ۲ــ اندیس e مخفف existing.

حذف شوند و این حد که فاقد تغییر شکل‌های ماندگار است به **حدّ الاستیک** موسوم است. امّا چون پیدا کردن این حد در مصالح مشکل است و از نظر کمیّتی حدّ آن نزدیک به حدّ جاری شدن مصالح است از این‌رو آیین‌نامه‌ها حدّ جاری شدن را ملاک قرار می‌دهند.

چنان که توضیح داده شد باید تنش‌های بحرانی مصالح (حتی در وضعیت‌های پیش‌بینی نشده) به حدی، مانند حد جاری شدن، محدود شوند تا تغییر شکل دایمی در سازه به‌وجود نیاید، اما چون تنش‌های بحرانی مصالح به عوامل مختلفی از جمله زمان بستگی دارند لذا این تنش‌ها به سادگی تعیین نمی‌شوند و ما ناچاریم درصدی از ظرفیّت باربری عضو را به عنوان ضریب اطمینان بارگذاری نکنیم و انتظار داشته باشیم بارهای بحرانی و ناشناخته در طول عمر سازه تنها بتوانند این ظرفیت باقی‌مانده را پر کنند. پس کسری از حدّ جاری شدن مصالح نرم به عنوان **تنش مجاز** براساس آیین‌نامه‌های جاری تعیین می‌شود و باید تنش‌های موجود حداکثر به این تنش‌ها محدود شوند.

تنش‌های مجاز از حاصل تقسیم تنش‌های نهایی (در مصالح سخت) و یا تنش‌های جاری شدن (در مصالح نرم) بر یک عدد بزرگ‌تر از واحد (n) که گاهی با .F.S[1] نشان داده می‌شوند به دست می‌آیند.

$$n = F.S. = \frac{\text{بار نهایی}}{\text{بار مجاز}} \qquad (۱\_۹)$$

$$\text{یا}\ \ n = F.S. = \frac{\text{تنش ماکزیمم}}{\text{تنش مجاز}} \qquad (۲\_۹)$$

$$n = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{all}} \rightarrow \boxed{\sigma_{all} = \frac{\sigma_{max}}{n}} \qquad (۳\_۹)$$

تنش‌های مجاز در مصالح مختلف

الف ــ تنش مجاز فولاد (مقاطعی که توسط کارخانه نورد شده‌اند)

۱ ــ *تنش مجاز در کشش*: اعضای منشوری که تحت اثر نیروی محوری کششی هستند.

$$\sigma_{all} = ۰/۶F_y$$

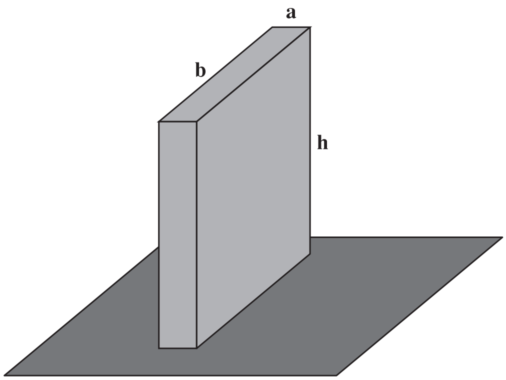
۲ ــ *تنش مجاز در فشار*: اعضای منشوری که تحت اثر نیروی محوری فشاری هستند، در صورتی که مسئله‌ی کمانش در آن‌ها مطرح نباشد.

---

۱ ــ Factor of Safety

$\sigma_{all} = ۰/۶F_y$

تذکر: در یک عضو فشاری توپُر وقتی مسئله‌ی کمانش مطرح نیست که نسبت ارتفاع به بُعد حداقل مقطع کوچکتر از ۳ باشد.



اگر a بُعد کوچکتر و $\frac{h}{a} < ۳$ باشد در این صورت عضو کوتاه است و پدیده‌ی کمانش در مورد آن مطرح نیست.

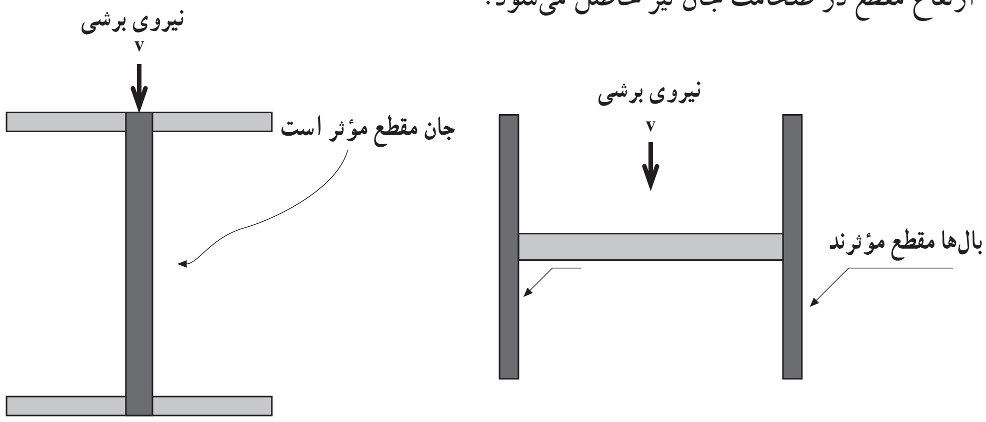
توجه: در مورد اعضایی که مسئله‌ی کمانش در مورد آن‌ها مطرح است جدولی در انتهای کتاب گنجانده شده که در آن، براساس فاکتور کمانشی $\frac{KL}{r_{min}}$، مقادیر تنش‌های مجاز تعیین شده است. در فصل مربوط به ستون‌ها به جزییّات K، L و r_{min} پرداخته می‌شود.

۳ــ *تنش مجاز در برش*: تنش مجاز برشی تیرهای فولادی حداکثر به مقدار زیر محدود می‌شود:

$\tau_{all} = ۰/۴F_y$

تنش مجاز برشی در تیرها بر اساس سطح مؤثر به مقدار فوق محدود می‌شود.

توجه: در تیرهای فلزی که حول محور قوی خودکار می‌کنند مقطع مؤثر از حاصل‌ضرب ارتفاع مقطع در ضخامت جان تیر حاصل می‌شود.



خمش حول محور قوی
(سطح مؤثر در برابر برش سطح جان است)

خمش حول محور ضعیف
(سطح مؤثر در برابر برش سطح بال‌ها است)

۴ــ تنش مجاز در خمش: در مقاطع خمشی (تیرها) که دارای حداقل محور تقارن عمودی باشند و حول محور قوی خود خم شده باشند تنش قائم در دورترین تار فشاری ناشی از لنگر خمشی[1] برابر است با :

$$\boxed{\sigma_{all} = ۰/۶F_y}$$

ب ــ تنش‌های مجاز بتن: تنش‌های مجاز در بتن، کسری از تنش‌های نهایی بتن هستند که در زیر به آن‌ها اشاره می‌شود. گفتنی است که مقاومت نهایی بتن در بعضی از آیین‌نامه‌ها براساس آزمایش روی نمونه‌ی استوانه‌ای بتن (ارتفاع = دو برابر قطر) در سن ۲۸ روزه انجام می‌گیرد و مقاومت متناظر سن ۲۸ روزه‌ی آن را با f_c نشان می‌دهند. مقاومت نهایی بتن تابع عوامل مختلفی از قبیل درصد مصالح تشکیل دهنده‌ی آن، نسبتِ آب به سیمان، درجه حرارت محیط، عمل آوردن بتن و غیره می‌باشد که در کتاب فن‌آوری ساختمان‌های بتنی به‌طور مفصل شرح داده شده است. معمولاً در طراحی سازه‌های بتنی اگر شرایط بتن تحت کنترل نباشد حداقل مقاومت را به‌کار می‌گیرند. سعی می‌شود حداقل مقاومت بتن ۲۸ روزه در شرایط عادی $f_c = ۲۱MPa$ باشد.

۱ــ تنش مجاز لهیدگی یا فشاری بتن: تنش مجاز بتن در فشار با f_{cb} نشان داده می‌شود و برابر است با :

$$\boxed{f_{cb} = ۰/۳f_c\sqrt{\frac{A_۲}{A_۱}} \le ۰/۶f_c MPa}$$

f_c ــ مقاومت ۲۸ روزه‌ی فشاری بتن بر روی نمونه‌ی استوانه‌ای استاندارد برحسب $N/mm^۲$

$A_۱$ ــ سطح ورق زیر ستون در تماس با شالوده بر حسب $mm^۲$ (مساحت تأثیر بار).

$A_۲$ ــ حداکثر سطحی از شالوده هم مرکز و متشابه با ورق زیر ستون بر حسب $mm^۲$.

۲ــ تنش مجاز خمشی بتن: تنش مجاز در دورترین تار فشاری بتن برابر است با :

$$\boxed{f_{cb} = ۰/۴۵f_c MPa}$$

ج ــ تنش مجاز در سنگ‌ها

ــ* تنش مجاز در فشار: تنش مجاز فشاری بر روی سنگ آهکی و ماسه‌ی متراکم در ملات ماسه‌سیمان برابر است با :

$$\boxed{\sigma_{all} = ۲/۲MPa}$$

۱ــ تنش مجاز برای مقاطع خمشی که حول محور ضعیف خود خم شده‌اند (مانند صفحات زیرسری) برابر است با $\sigma_{all} = ۰/۷۵F_y$

* باید دقت کرد که تنش این بند مختص دیوارهای سنگی است که مسئله‌ی کمانش در آن‌ها مطرح نیست

$$\left(\frac{\text{ارتفاع}}{\text{عرض حداقل یا ضخامت}} < ۳\right).$$

د ــ تنش مجاز دیوارهای آجری کوتاه

ــ ***تنش مجاز در فشار:*** تنش مجاز فشاری بر روی آجر کاری با ملات ماسه سیمان برابر است با :

$$\boxed{\sigma_{all} = ۱/۴\text{MPa}}$$

مثال ۱: عضوی فلزی با سطح مقطع $A = ۲۰\text{cm}^۲$ تحت اثر بار محوری کششی برابر $P = ۲۸۰\text{kN}$ قرار دارد. تعیین کنید که بار مذکور در محدوده‌ی ظرفیت مجاز مصالح است یا خیر؟ (فرض کنید فولاد مصرفی از نوع st۳۷ باشد.)

توضیح: منظور از فولاد st۳۷، فولاد معمولی ساختمانی است که تنش‌نهایی آن $\sigma_u = ۳۷۰\text{N/mm}^۲$ می‌باشد. خصوصیات دیگر این فولاد به شرح زیر است.

$$\text{فولاد}\ \ \text{st}۳۷ \Rightarrow \begin{cases} \sigma_y = F_y = ۲۴۰\text{MPa} \\ \sigma_u = f_u = ۳۷۰\text{MPa} \end{cases}$$

اطلاعات مسئله

$$P = ۲۸۰۰۰۰\text{N}$$

$$A = ۲۰\text{cm}^۲ = ۲۰۰۰\text{mm}^۲$$

$$F_y = ۲۴۰\text{MPa}$$

حل:

$$\text{تنش موجود}\ \ \sigma_e = \frac{P}{A} = \frac{۲۸۰۰۰۰}{۲۰۰۰} = ۱۴۰\text{MPa}$$

$$\text{تنش مجاز مطابق آیین‌نامه}\ \ \sigma_{all} = ۰/۶F_y = ۰/۶ \times ۲۴۰ = ۱۴۴\text{MPa}$$

چنان‌که ملاحظه می‌شود چون تنش موجود از تنش مجاز کم‌تر است بار در حدّ مجاز است.

$$\sigma_e < \sigma_{all} \Rightarrow P = \ \text{مجاز}$$

اگر خواسته باشیم بار مجاز این عضو را محاسبه کنیم کافی است در رابطه‌ی $\sigma = \frac{P}{A}$ به جای σ مقدار تنش مجاز را قرار دهیم.

$$\sigma = \sigma_{all}$$

$$\sigma_{all} = \frac{P}{A} \Rightarrow P = \sigma_{all} \times A = ۱۴۴ \times ۲۰۰۰ = ۲۸۸۰۰۰\text{N} = ۲۸۸\text{kN}$$

چنان که دیده می‌شود بار مجاز ۲۸۸kN از بار موجود بیش‌تر است یعنی ظرفیّت مقطع تا بار مجاز ۸۰۰۰N دیگر خواهد بود.

مثال ۲: در نظر داریم باری معادل $P = ۵۰۰\text{kN}$ را با یک صفحه‌ی فلزی به فنداسیونی که مقاومت نهایی آن برابر ۲۱ نیوتن بر میلی‌متر مربع است منتقل کنیم. اگر تنش مجاز فنداسیون حداقل

فرض شود مطلوب است محاسبه‌ی ابعاد صفحه به طوری که یک ضلع آن دو برابر ضلع دیگر باشد.

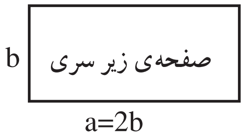
اطلاعات مسئله

$P = ۵۰۰۰۰۰ N$

$f'_c = ۲۱ N/mm^۲$

$\frac{a}{b} = ۲$ ابعاد صفحه

حل: فرض می‌کنیم بُعد بزرگ‌تر صفحه a و بُعد کوچک‌تر آن b باشد.



مساحت صفحه $A = a \times b$ از طرفی $\frac{a}{b} = ۲ \Rightarrow a = ۲b$

$A = (۲b) \times b = ۲b^۲$

تنش مجاز حداقل بتن $f_{cb} = ۰/۳f_c = ۰/۳ \times ۲۱ = ۶/۳ N/mm^۲$

ابعاد صفحه باید طوری باشد که حداکثر تنش در زیر صفحه $۶/۳ N/mm^۲$ باشد.

$$\sigma_{all} = f_c = \frac{P}{A} \Rightarrow A = \frac{P}{f_c}$$

$$A = ۲b^۲ = \frac{۵۰۰۰۰۰}{۶/۳} \quad b^۲ = \frac{۵۰۰۰۰۰}{۲ \times ۶/۳} = ۳۹۶۸۲/۵۴ mm^۲$$

$$b = +\sqrt{۳۹۶۸۲/۵۴} = ۱۹۹/۲ mm$$

$$\Rightarrow$$

$$b \cong ۲۰۰ mm \quad a = ۲ \times b = ۲ \times ۲۰۰ = ۴۰۰ mm$$

ابعاد نهایی صفحه برابر است با $PL۴۰۰ \times ۲۰۰ mm$

کنترل

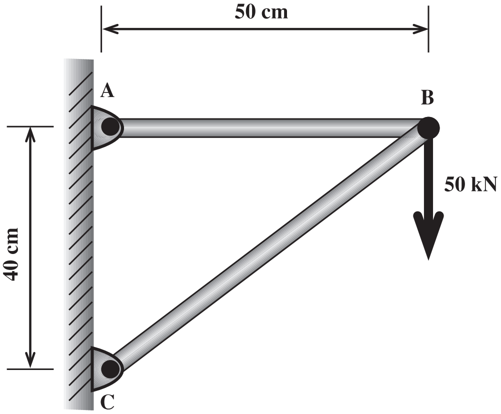
$$\sigma_e = \frac{P}{A} = \frac{۵۰۰۰۰۰}{۲۰۰ \times ۴۰۰} = ۶/۲۵ N/mm^۲ < f_{cb} = ۶/۳ N/mm^۲$$

چون تنش موجود از تنش مجاز کم‌تر است لذا ابعاد درست انتخاب شده است.

تمرین

خرپایی مطابق شکل صفحه‌ی بعد موجود است. اگر مسئله‌ی کمانش عضوها مطرح نباشد مطلوب است محاسبه‌ی سطح مقطع آن‌ها براساس تنش‌های مجاز در کشش و فشار (با فرض این‌که

پدیده‌ی کمانش در مورد اعضای فشاری مد نظر نباشد).



فصل دهم

خواص هندسی سطوح

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل، هنرجو باید بتواند :

۱ــ گشتاور اول سطح را تعریف کند.

۲ــ روابط مربوط به محاسبه‌ی مراکز سطح را به کار گیرد.

۳ــ محورهای تقارن را توضیح دهد.

۴ــ مرکز تقارن را توضیح دهد.

۵ــ گشتاور دوم سطح را توضیح دهد.

۶ــ شعاع ژیراسیون را توضیح دهد و رابطه‌ی آن را اثبات کند.

۷ــ نحوه‌ی استفاده از قضیه‌ی محورهای موازی را بداند.

۸ــ ممان اینرسی سطوح مرکب هندسی را با استفاده از قضیه‌ی محورهای موازی محاسبه کند.

۹ــ ممان اینرسی اشکال مختلف را از جدول مربوط استخراج کند.

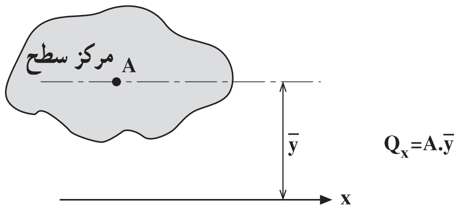
۱۰ــ مشخصات پروفیل‌های فولادی را از جداول مربوط استخراج کند.

۱۱ــ ممان اینرسی پروفیل‌های مرکب را با استفاده از جداول مربوط و قضیه‌ی محورهای موازی محاسبه کند.

۱ــ۱۰ــ گشتاور اول سطح (گشتاور استاتیک) یا ممان استاتیک

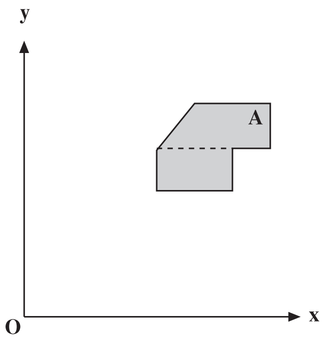
گشتاور اول سطح یکی از خواص مهم هندسی است که براساس آن می‌توان تعادل سطح مقطع را مورد بررسی قرار داد و موقعیت تار خنثی را تعیین نمود.

گشتاور اول سطح عبارت است از حاصلضرب مساحت در فاصله‌ی مرکز آن تا محور مورد بررسی و با Q نمایش می‌دهند.



شکل ۱ــ۱۰

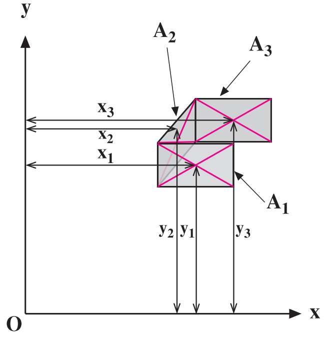
ممان استاتیک یک سطح مرکب هندسی: ممان استاتیک را با Q نمایش می‌دهند و بسته به محور، اندیس‌های x و y می‌گیرد و عبارت است از حاصلضرب مساحت اجزا در فاصله‌ی مرکزی آن‌ها تا محوری که ممان استاتیک نسبت به آن محاسبه می‌شود.



شکل ۲ــ۱۰

در این حالت که سطح مرکب هندسی است می‌توان سطح را به اجزای مختلف هندسی منظم تقسیم کرد، سپس با محاسبه‌ی مساحت هر جزء و فاصله‌ی مرکزی آن تا محور مورد بررسی با جمع‌زدن ممان استاتیک تک‌تک اجزا، نسبت به محاسبه‌ی ممان استاتیک کلّی سطح اقدام کرد.

$$\boxed{Q_x = \sum_{i=۱}^{n} A_i y_i} \quad (۱ــ۱۰)$$



شکل۳ــ۱۰

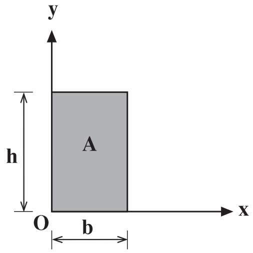
$$\boxed{Q_y = \sum_{i=۱}^{n} A_i x_i} \qquad (۲ـ۱۰)$$

در شکل ۳ـ۱۰ تعداد تقسیمات ۳ است. از این‌رو روابط ۱ـ۱۰ و ۲ـ۱۰ به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$Q_x = A_۱ y_۱ + A_۲ y_۲ + A_۳ y_۳$$

$$Q_y = A_۱ x_۱ + A_۲ x_۲ + A_۳ x_۳$$

مثال۱: ممان استاتیک شکل زیر را نسبت به محور x و y محاسبه کنید.

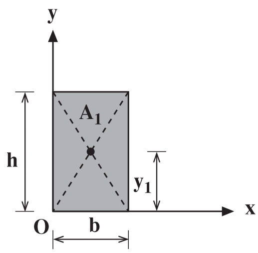


شکل ۴ــ۱۰

حل: برای محاسبه‌ی ممان استاتیک نسبت به محور x می‌توان به صورت زیر عمل کرد.

$$Q_x = \sum_{i=۱}^{n} A_i y_i \qquad (۱ـ۱۰ \text{ تکراری})$$

در این روش شکل یک جزء هندسی منظم است ؛ پس کافی است مساحت و فاصله‌ی مرکزی آن تا محورها استخراج شود.



شکل۵ ــ۱۰

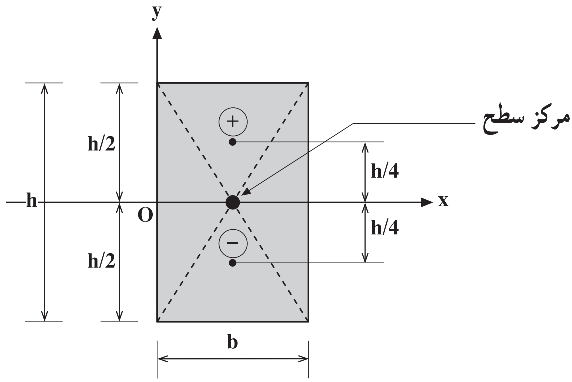
$$A_۱ = b.h$$

$$y_۱ = \frac{h}{۲}$$

$$Q_x = A_۱ y_۱ = b.h \times \frac{h}{۲} = A\frac{h}{۲} \quad \boxed{Q_x = A\frac{h}{۲}}$$

اثبات Q_y به روش فوق به هنرجویان واگذار می‌شود.

نکته: ممان استاتیک یک سطح نسبت به محورهای مرکزی آن (محورهایی که از مرکز سطح عبور می‌کنند) برابر صفر است.



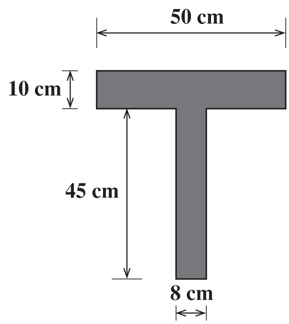
شکل ۶ــ۱۰

اثبات: برای این منظور، محور x را که از مرکز سطح عبور می‌کند در نظر می‌گیریم. همان‌طور که دیده می‌شود سطح بالای محور گذرا از مرکز سطح، مثبت و سطح پایین آن منفی خواهد بود، به همین جهت ممان استاتیک ناحیه‌ی فوقانی مثبت و ممان استاتیک ناحیه‌ی تحتانی منفی است.

$$Q_x = Q^+ + Q^- = +\frac{h}{۲}\times b\times\frac{h}{۴} - \frac{h}{۲}\times b\times\frac{h}{۴} = \frac{bh^۲}{۸} - \frac{bh^۲}{۸} = ۰$$

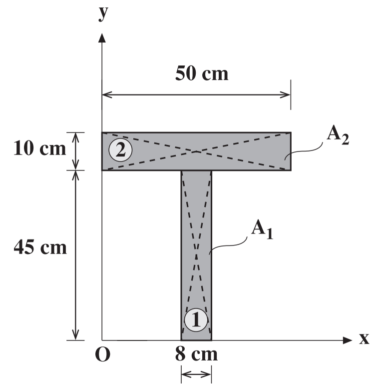
ممان استاتیک کل سطح نسبت به محور x

مثال ۲: مطلوب است محاسبه‌ی مرکز سطح یک مقطع T، مطابق جزئیات داده شده در شکل ۷ــ۱۰.



شکل ۷ــ۱۰

حل: ابتدا یک‌دستگاه مبنا به گونه‌ای فرض می‌کنیم که هیچ کدام از اجزا، **مختصات منفی** نداشته باشند. معمولاً موقعیت این دستگاه مبنا در سمت پایین و چپ مقطع مناسب‌تر خواهد بود.



شکل ۸ــ۱۰

پس از وضع یک دستگاه مختصات مناسب سطح را به اجزای منظم هندسی تقسیم می‌کنیم و مساحت و مختصات مرکزی هر جزء را براساس دستگاه وضع شده استخراج می‌نماییم.

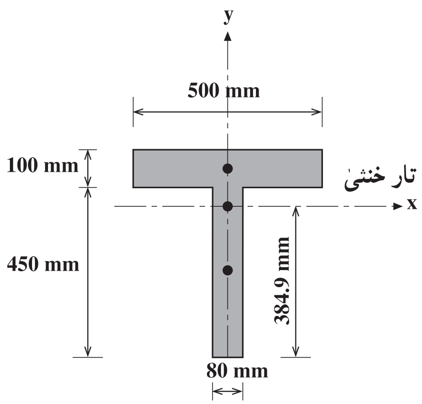
مشخصات سطح ۱ $A_۱ = ۸۰ \times ۴۵۰ = ۳۶۰۰۰ mm^۲ \quad \bar{y}_۱ = ۲۲۵ mm \quad \bar{x}_۱ = \frac{۵۰۰}{۲} = ۲۵۰ mm$

مشخصات سطح ۲ $A_۲ = ۵۰۰ \times ۱۰۰ = ۵۰۰۰۰ mm^۲ \quad \bar{y}_۲ = ۴۵۰ + \frac{۱۰۰}{۲} = ۵۰۰ mm$

$\bar{x}_۲ = \frac{۵۰۰}{۲} = ۲۵۰ mm$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} A_i y_i}{\sum_{i=۱}^{n} A_i} = \frac{A_۱ \bar{y}_۱ + A_۲ \bar{y}_۲}{A_۱ + A_۲} = \frac{۳۶۰۰۰ \times ۲۲۵ + ۵۰۰۰۰ \times ۵۰۰}{۳۶۰۰۰ + ۵۰۰۰۰} = ۳۸۴/۹ mm$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} A_i x_i}{\sum_{i=۱}^{n} A_i} = \frac{A_۱ \bar{x}_۱ + A_۲ \bar{x}_۲}{A_۱ + A_۲} = \frac{۳۶۰۰۰ \times ۲۵۰ + ۵۰۰۰۰ \times ۲۵۰}{۳۶۰۰۰ + ۵۰۰۰۰} = ۲۵۰ mm$$

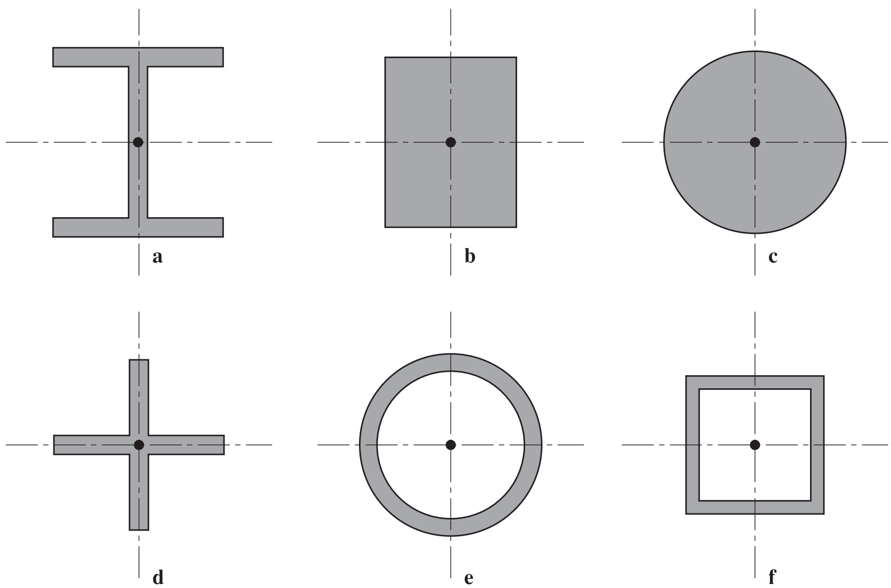


شکل ۹ــ۱۰

چنان که دیده می‌شود مرکز سطح روی خط واصل از مراکز سطح جزء ۱ و جزء ۲ است.

توضیح: در بررسی‌های زیر، محورها نمایانگر محور تقارن و نقطه، نمایانگر مرکز سطح یا مرکز تقارن است.

نکته‌ی ۱: اگر سطحی دارای دو محور تقارن باشد مرکز سطح، محلّ تلاقی محورهای تقارن است.



شکل ۱۰ــ۱۰