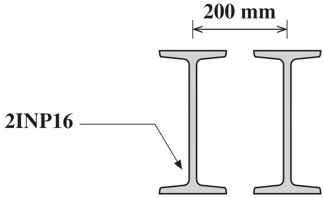
جدول‌های پروفیل‌ها در انتهای کتاب (پیوست ۴) گنجانده شده است.

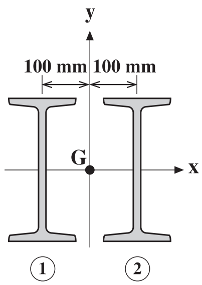
در زیر با شرح و توضیح چند مثال، نحوه‌ی استفاده از جداول را یادآور می‌شویم.

مثال ۱۵: از دو تیرآهن باریک I که به فاصله‌ی محور تا محور ۲۰۰ میلی‌متر از هم قرار گرفته‌اند به‌عنوان یک مقطع ستون استفاده می‌شود. اگر تیرآهن‌ها از نوع INP۱۶ باشند مطلوب است محاسبه‌ی ممان اینرسی نسبت به محورهای x و y .



حل: با مراجعه به جدول مربوط به تیرآهن باریک مشخصات تیرآهن نمره‌ی ۱۶ به‌صورت زیر استخراج می‌شود :

$$\text{INP۱۶}\begin{cases} A = ۲۲۸۰\,mm^{۲} \\ Ix = ۹/۳۵\times ۱۰^{۶}\,mm^{۴} \\ Iy = ۵/۴۷\times ۱۰^{۵}\,mm^{۴} \end{cases}$$



محاسبه‌ی ممان اینرسی جفت تیرآهن نسبت به محور x: با توجه به منطبق بودن مرکز سطح دو تیرآهن بر محور xها جمله‌ی $Ad^{۲}$ حذف می‌شود و ممان اینرسی مجموعه، برابر مجموعه‌ی ممان اینرسی‌های تک‌تک تیرآهن‌ها نسبت به محور x است.

$$I_x = I_{x_{G_۱}} + I_{x_{G_۲}} \Rightarrow \text{چون}\ I_{x_{G_۱}} = I_{x_{G_۲}} \Rightarrow I_x = ۲I_{x_{G_۱}} \Rightarrow I_x = ۲(۹/۳۵\times ۱۰^{۶}) = ۱/۸۷\times ۱۰^{۷}\,mm^{۴}$$

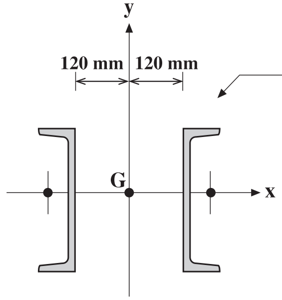
محاسبه‌ی ممان اینرسی جفت تیرآهن نسبت به محور y: چنان که در شکل دیده می‌شود مرکز سطح دو تیرآهن بر محور yها منطبق نیست و ممان اینرسی هر تیرآهن نسبت به محور y برابر مجموع ممان اینرسی نسبت به مرکز سطح و مقدار $Ad^{۲}$ می‌باشد.

از طرفی واضح است که فاصله‌ی دو تیرآهن نسبت به محور yها برابر است و به علت داشتن مشخصات یکسان جفت پروفیل‌ها کافی است ممان اینرسی یکی از آن‌ها را نسبت به محور y محاسبه کرده، سپس آن را دو برابر نماییم تا ممان اینرسی مجموعه نسبت به محور yها محاسبه گردد.

$$I_y = I_{y_۱} + I_{y_۲} \Rightarrow I_{y_۱} = I_{y_۲} \Rightarrow I_y = ۲I_{y_۱}$$

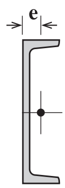
$$I_y = ۲\left[I_{y_{G_۱}} + A_۱d^{۲}\right] = ۲\left[۵/۴۷\times ۱۰^{۵} + ۲۲۸۰\times(۱۰۰)^{۲}\right] = ۴/۶۶۹۴\times ۱۰^{۷}\,mm^{۴}$$

مثال ۱۶: مطلوب است ممان اینرسی، اساس مقطع و شعاع ژیراسیون یک مقطع متشکل از جفت ناودانی (UNP) مطابق شکل نسبت به محور x و y .

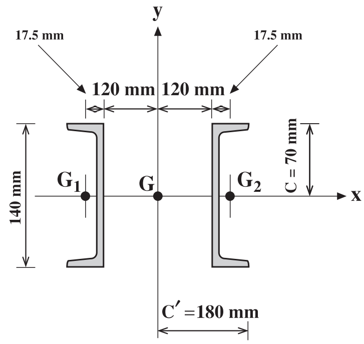


حل: از جدول مربوط به ناودانی‌ها، مشخصات ناودانی ۱۴ را استخراج می‌کنیم :

$$UNP۱۴\begin{cases} A = ۲۰۴۰mm^۲ \\ Ix = ۶۰۵\times۱۰^۴ mm^۴ \\ Iy = ۶۲/۷\times۱۰^۴ mm^۴ \\ e = ۱۷/۵mm \\ b = ۶۰mm \end{cases}$$



توضیح: e فاصله‌ی مرکز سطح تا لبه‌ی خارجی جان ناودانی می‌باشد.



$$c = \frac{\text{ارتفاع ناودانی}}{۲} = \frac{۱۴۰}{۲} = ۷۰mm$$

$$c' = ۱۲۰ + \text{عرض بال ناودانی} = ۱۲۰ + ۶۰ = ۱۸۰mm$$

$$\text{مجموعه } I_x = I_{x_{G_۱}} + I_{x_{G_۲}} = ۲I_{x_{G_۱}} = ۲\times۶۰۵\times۱۰^۴ = ۱۲۱\times۱۰^۵ mm^۴$$

$$\text{مجموعه } I_y = I_{y_۱} + I_{y_۲} = ۲I_{y_۱} = ۲\left[I_{y_{G_۱}} + A_۱ d_۱^۲\right]$$

$$I_y = ۲\left[۶۲/۷\times۱۰^۴ + ۲۰۴۰\times(۱۲۰+۱۷/۵)^۲\right] = ۷۸۳۹۱۵\times۱۰^۲ mm^۴$$

سایر خصوصیات مقطع عبارت‌اند از :

$$W_x = \frac{I_x}{c} = \frac{۱۲۱\times ۱۰^{۵}}{۷۰} = ۱۷۲۸۶۰ mm^{۳}$$

$$W_y = \frac{I_y}{c'} = \frac{۷۸۳۹۱۵\times ۱۰^{۲}}{۱۸۰} = ۴۳۵۵۱۰ mm^{۳}$$

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{۱۲۱\times ۱۰^{۵}}{۴۰۸۰}} = ۵۴/۵ mm$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{۷۸۳۹۱۵\times ۱۰^{۲}}{۴۰۸۰}} = ۱۳۸/۶ mm$$

خلاصه‌ی فصل دهم

۱ــ گشتاور اول سطح یا ممان استاتیک سطح حول یک محور عبارت است از حاصل‌ضرب مساحت در فاصله‌ی مرکزی آن تا محور.

۲ــ برای محاسبه‌ی ممان استاتیک یک سطح مرکّب کافی است سطح را به اجزای منظم تقسیم کرده، سپس مجموع ممان استاتیک تک‌تک اجزا را محاسبه نماییم.

۳ــ ممان استاتیک یک سطح نسبت به محورهای مرکزی سطح برابر صفر است.

۴ــ اگر سطحی دارای دو محور تقارن باشد مرکز سطح آن منطبق بر محورهای تقارن است.

۵ــ اگر سطحی دارای یک محور تقارن باشد مرکز سطح آن بر روی محور تقارن است و فاصله‌ی آن نسبت به محوری عمود بر محور تقارن باید محاسبه شود.

۶ــ سطحی که دارای هیچ محور تقارنی نباشد باید مرکز سطح آن نسبت به محورهای x و y محاسبه شود.

۷ــ اگر سطحی دارای مرکز تقارن باشد، مرکز سطح آن منطبق بر مرکز تقارن است.

۸ــ ممان اینرسی عامل مقاوم در برابر خمش است.

۹ــ ممان اینرسی قطبی برابر مجموع ممان اینرسی‌ها نسبت به محورهای عمود برهم می‌باشد.

۱۰ــ شعاع ژیراسیون معیاری از پراکندگی سطح نسبت به محور موردنظر ماست.

۱۱ــ ممان اینرسی نسبت به یک محور غیرمرکزی بیش‌تر از یک محور مرکزی است.

۱۲ــ اگر مراکز چند سطح بر محوری منطبق باشند ممان اینرسی کل سطح برابر مجموع ممان اینرسی تک‌تک آن‌ها نسبت به محور می‌باشد.

روابط مهم

۱ـ ممان استاتیک یک سطح مرکب

$$Q_x = \sum_{i=۱}^{n} A_i y_i \qquad Q_y = \sum_{i=۱}^{n} A_i x_i$$

۲ـ شعاع ژیراسیون

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad r_p = \sqrt{\frac{I_p}{A}}$$

۳ـ قضیه‌ی محورهای موازی

$$I_x = I_{x_G} + Ad^۲ \qquad I_y = I_{y_G} + Ad^۲ \qquad I_p = I_{p_G} + Ar^۲$$

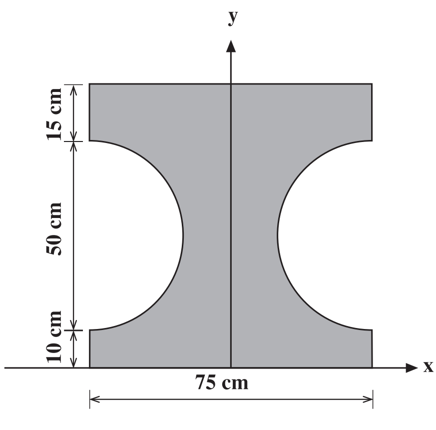
۴ـ ممان اینرسی سطوح مرکب

$$I_x = \sum_{i=۱}^{n}(I_{x_{Gi}} + A_i d_i^۲) \qquad I_y = \sum_{i=۱}^{n}(I_{y_{Gi}} + A_i d_i^۲)$$

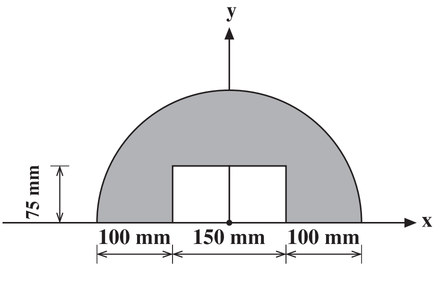
تمرین

مراکز سطح

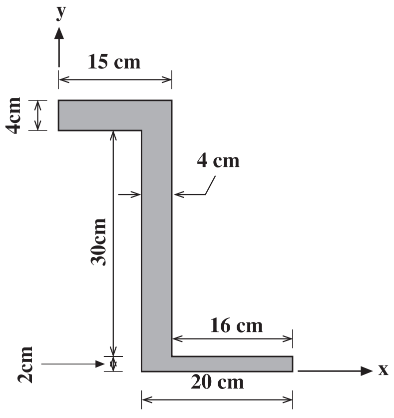
۱ـ مسایل : در شکل‌های زیر موقعیت مراکز سطح را محاسبه کنید.



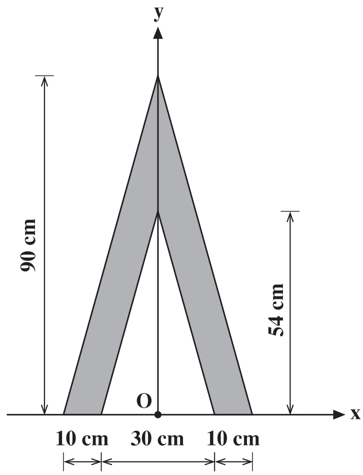
(۲)



(۱)



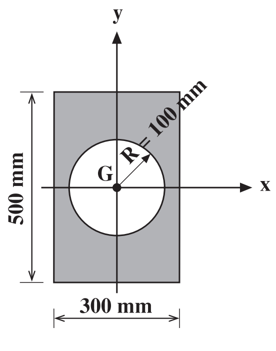
(۳)

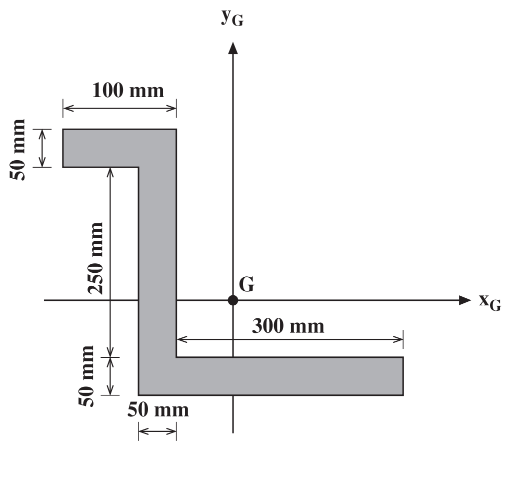


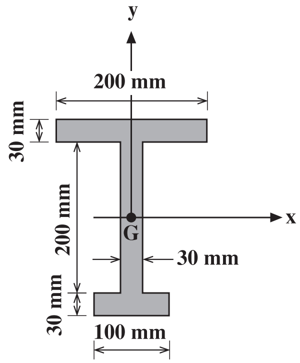
(۴)

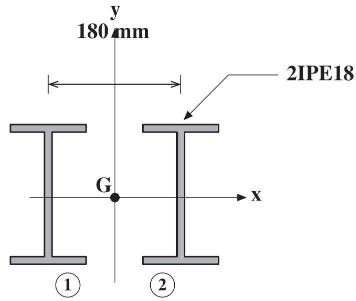
مسئله: ممان اینرسی

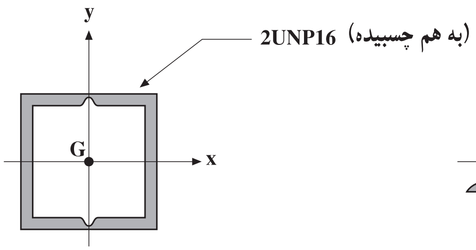
۲ــ ممان اینرسی، مدول مقطع، شعاع ژیراسیون و ممان اینرسی قطبی مقاطع زیر را نسبت به محورهای x و y که از مرکز سطح عبور می‌کنند محاسبه کنید.

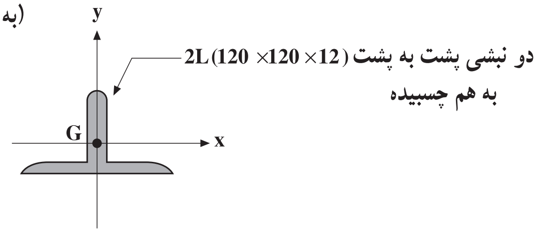





y
200 mm
30 mm
200 mm
G
x
30 mm
30 mm
100 mm


y
180 mm
2IPE18
G
x
1
2


y
2UNP16 (به هم چسبیده)
G
x


y
2L(120 × 120 × 12) دو نبشی پشت به پشت
به هم چسبیده
G
x

فصل یازدهم

تیرها

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل، هنرجو باید بتواند :

۱ــ تیر را تعریف کند.

۲ــ تأثیر ابعاد مقطع، جنس مصالح و موضع بارگذاری در تغییرشکل آن را بیان کند.

۳ــ رابطه‌ی تنش را با ممان اینرسی و ممان خمشی بیان کند.

۴ــ رابطه‌ی تنش را با مدول مقطع و ممان خمشی بیان کند.

۵ــ مراحل حل تیرهای فولادی (انتخاب مقطع مناسب) را توضیح دهد.

۶ــ مقادیر ممان و برش ماکزیمم یک تیر را استخراج یا تعیین کند.

۷ــ مقادیر خیز موجود در یک تیر براساس نوع بارگذاری و نوع تکیه‌گاه‌ها را از جداول مربوط تعیین کند.

۸ــ تنش برشی در حدّ مجاز را کنترل کند.

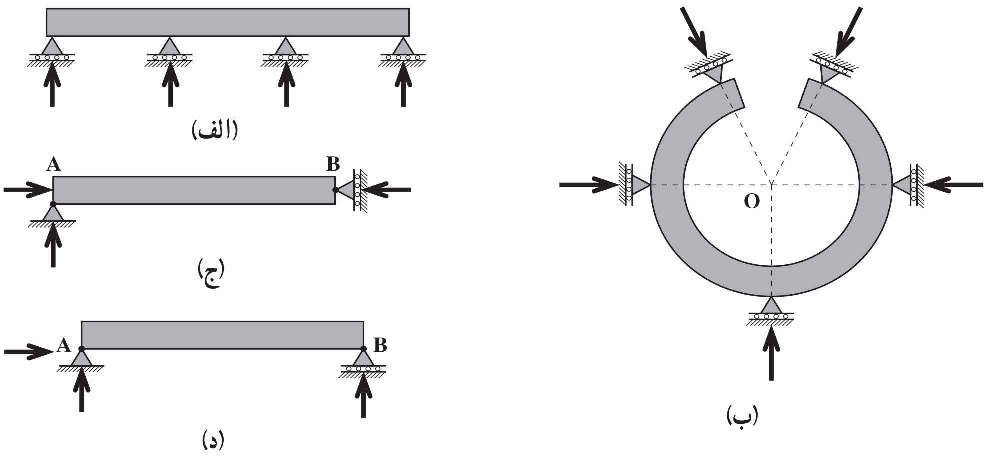
۹ــ خیز تیر را در حدّ مجاز کنترل کند.

۱ــ۱۱ــ تیرها

تیرها از اجزای مهم ساختمانی هستند که برای پوشش استفاده شده و وظیفه‌ی انتقال بارها را به تکیه‌گاه‌های خود برعهده دارند. برای طرح تیرها نیاز به داشتن نیروهایی که بر ذرات داخلی تیرها مؤثر هستند، است.

۲ــ۱۱ــ انواع تیرها ازنظر پایداری

تیرها باید دارای شرایط مناسب تکیه‌گاهی باشند تا بتوان بر روی آن‌ها بارگذاری کرد. در صفحه‌ی بعد چند نوع شرایط تکیه‌گاهی مختلف که واکنش‌های تکیه‌گاهی بر روی آن‌ها مشخص شده است مورد بررسی قرار می‌گیرد.



شکل ۱ــ۱۱ــ انواع تیرها

در شکل ۱ــ۱۱ــ الف تیر دارای ۴ واکنش تکیه‌گاهی موازی است که این تیر با کوچک‌ترین نیروی افقی به‌حرکت درمی‌آید به‌همین دلیل این تیر مناسب برای بارگذاری نیست و اصطلاحاً «ناپایدار» گفته می‌شود.

در شکل ۱ــ۱۱ــ ب تیر مدوری با ۵ مؤلفه‌ی تکیه‌گاهی در نقطه O همرس [1] بوده که حرکت تیر در جهات مختلف (برای بررسی حرکت، دو جهت عمود برهم می‌تواند وضعیت تیر را مشخص کند) محدود شده ولی به دلیل تکیه‌گاه‌های غلتکی و همرس بودن مؤلفه، این تیر با کوچک‌ترین نیرویی می‌تواند به چرخش درآید و به همین دلیل توانایی تحمل نیروهایی که باعث می‌شوند آن را به چرخش درآورند را ندارد و این تیر ناپایدار است.

در شکل ۱ــ۱۱ ــ ج تیر دارای یک تکیه‌گاه مفصلی ثابت و یک تکیه‌گاه غلتکی می‌باشد که مؤلفه‌های آن در تکیه‌گاه A همرس بوده، اگرچه تیر در جهات مختلف جابه‌جایی ندارد اما با کوچک‌ترین نیرویی می‌تواند حول تکیه‌گاه A به چرخش درآید و به همین‌دلیل این تیر ناپایدار است.

در شکل ۱ــ۱۱ــ د تیری مشابه شکل ۱ــ۱۱ ــ ج را مشاهده می‌کنید که با تغییر در تکیه‌گاه سمت راست آن، دیگر تمام واکنش‌های تکیه‌گاهی در نقطه‌ی A همرس نیستند و این تیر علاوه بر این که دارای جابه‌جایی در صفحه نیست بلکه با اعمال هر نیرویی دوران پیدا نمی‌کند، به این تیر «پایدار» گفته می‌شود.

۱ــ **همرس:** متقارب در یک نقطه یا مؤلفه‌هایی که هم‌دیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

نتیجه‌گیری

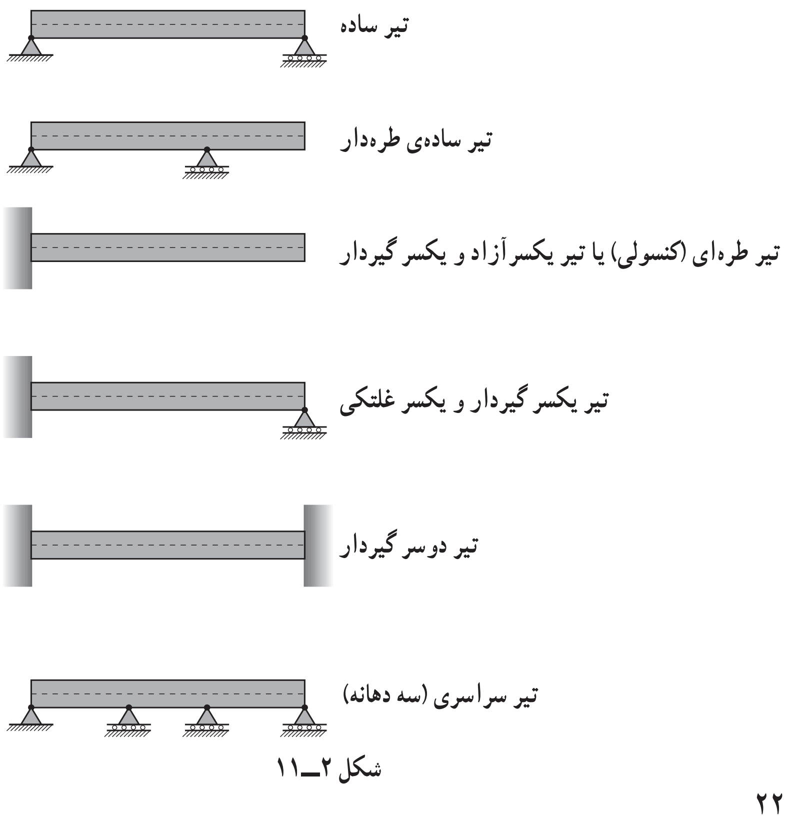
۱ــ اگر تمامی واکنش‌های تکیه‌گاهی یک تیر و یا سازه «موازی» باشند آن تیر دارای جابه‌جایی (در جهت عمود بر واکنش‌ها) است و ناپایدار گفته می‌شود و بارگذاری و به‌کارگیری این تیر و یا سازه مجاز نیست.

۲ــ اگر تمامی واکنش‌های تکیه‌گاهی یک تیر و یا سازه «همرس» باشند آن تیر دارای دوران (حول نقطه‌ای که واکنش‌ها در آن نقطه به‌هم می‌رسند) است و ناپایدار است که بارگذاری بر آن مجاز نیست.

۳ــ تیری و یا سازه‌ای پایدار است که دارای حداقل سه واکنش تکیه‌گاهی باشد به‌طوری که هرسه واکنش موازی و یا همرس نباشند.

۳ــ۱۱ــ انواع تیرها از نظر شرایط تکیه‌گاهی

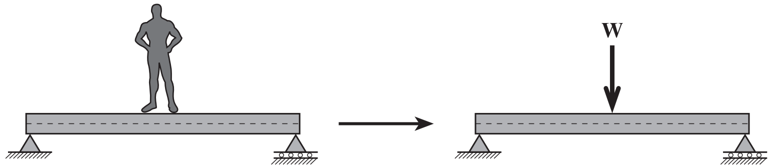
تیرها بسته به نوع مصالح به‌کار رفته در آن‌ها می‌توانند دارای شرایط مختلف تکیه‌گاهی باشند گاهی به دلیل طویل بودن تیرها از تکیه‌گاه‌های بیش‌تری در آن‌ها استفاده می‌شود که این تیر به تیرهای سراسری موسومند. در شکل ۲ــ۱۱ تعدادی تیر با تکیه‌گاه‌های مختلف نمایش داده شده است.



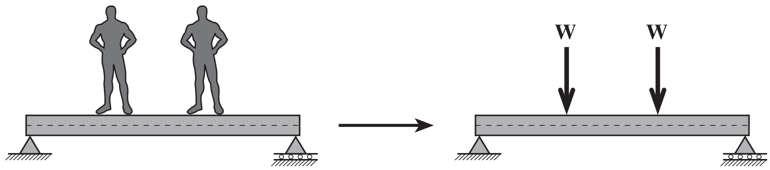
شکل ۲ــ۱۱

۴ــ۱۱ــ انواع تیرها ازنظر بارگذاری

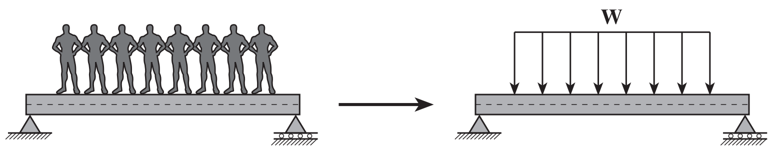
تیرها بسته به محلی که در آن به‌کار گرفته می‌شوند، تحت تأثیر بارهای مختلفی قرار می‌گیرند که این بارها به‌صورت متمرکز، گسترده‌ی یکنواخت، گسترده‌ی خطی و یا ترکیبی از آن‌ها می‌باشند.



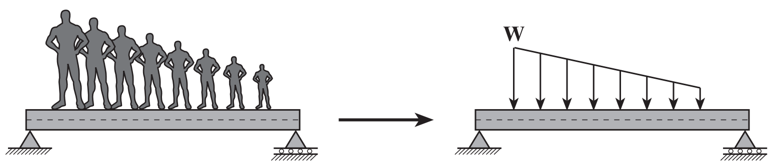
تیر با بار متمرکز یا نقطه‌ای



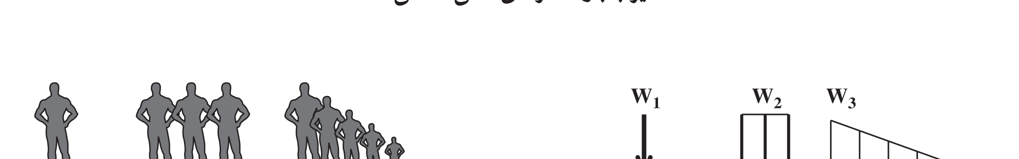
تیر با دو بار متمرکز



تیر با بار گسترده‌ی یکنواخت



تیر با بار گسترده‌ی خطی (مثلثی)

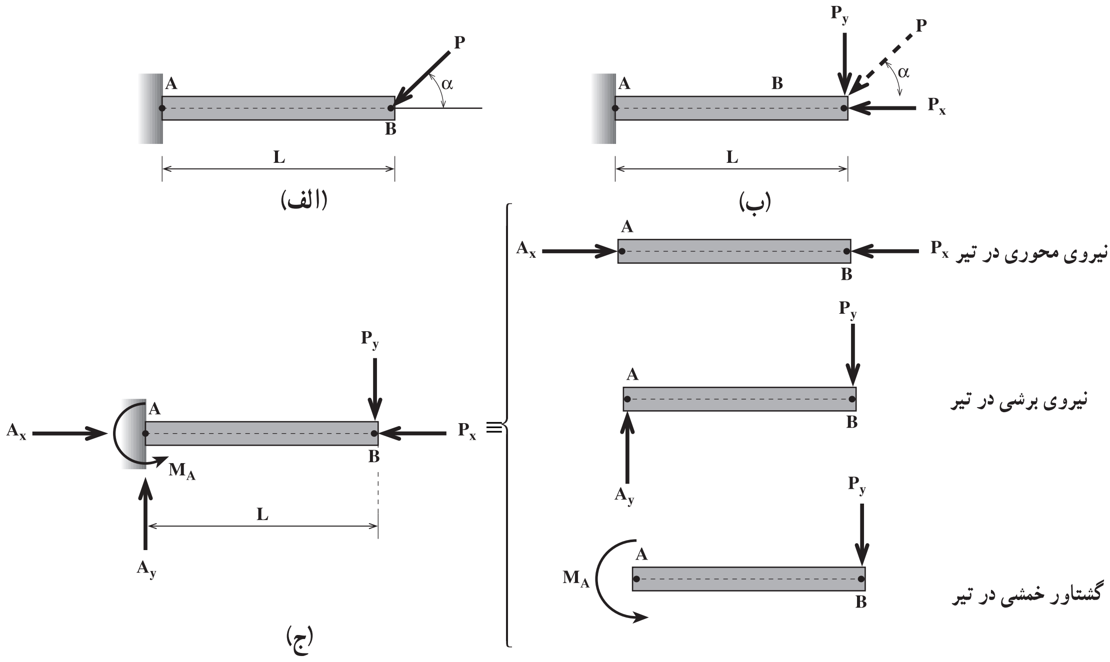


تیر با بارگذاری ترکیبی

شکل ۳ــ۱۱

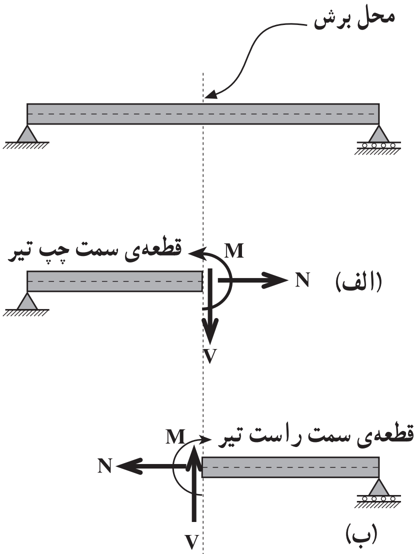
۵ــ۱۱ــ نیروهای داخلی در تیرها

تیرها از اعضایی هستند که می‌توانند تحت تأثیر انواع مختلف بار قرار گیرند در شکل ۴ـ۱۱ـالف تیر طره‌ای با بار مایل P نمایش داده شده است که اثر این بار مایل در اشکال ۴ـ۱۱ ـ ب تا ۴ـ۱۱ـ د نشان داده شده است.

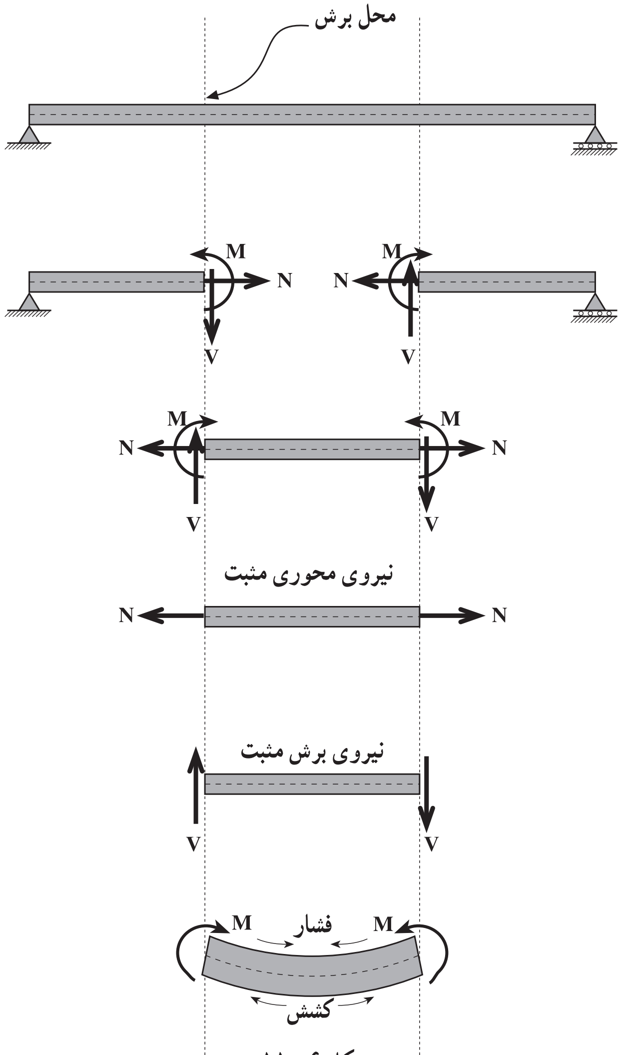


شکل ۴ــ۱۱

به‌طور کلی نیروهای داخلی در یک تیر تحت تأثیر بارگذاری خارجی می‌تواند به‌صورت «نیروی محوری»، «نیروی برشی» و گشتاور خمشی و یا ترکیبی از این‌ها ظاهر شود. این نیروهای داخلی برخلاف نیروهای داخلی در اعضای خرپا در طول تیر متغیر هستند و یکی از گام‌های اساسی در حل تیرها مشخص کردن نیروهای مذکور در طول تیر می‌باشد. برای تعیین نیروهای داخلی در تیرها و به جهت هماهنگی در نتایج، قراردادی برای جهات مثبت آن‌ها وضع می‌کنیم. جهات مثبت نیروها در شکل‌های ۵ــ۱۱ و ۶ــ۱۱ نشان داده شده است.



شکل ۵ــ۱۱



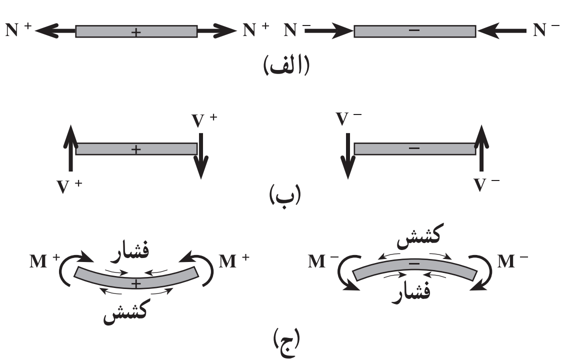
شکل ۶ــ۱۱

نتیجه‌گیری

۱ــ نیروی محوری وقتی مثبت است که کششی باشد (شکل ۷ــ۱۱ــ الف).

۲ــ نیروی برشی وقتی مثبت است که در ابتدای تیر به سمت بالا و در انتهای تیر به سمت پایین باشد (شکل ۷ــ۱۱ــ ب).

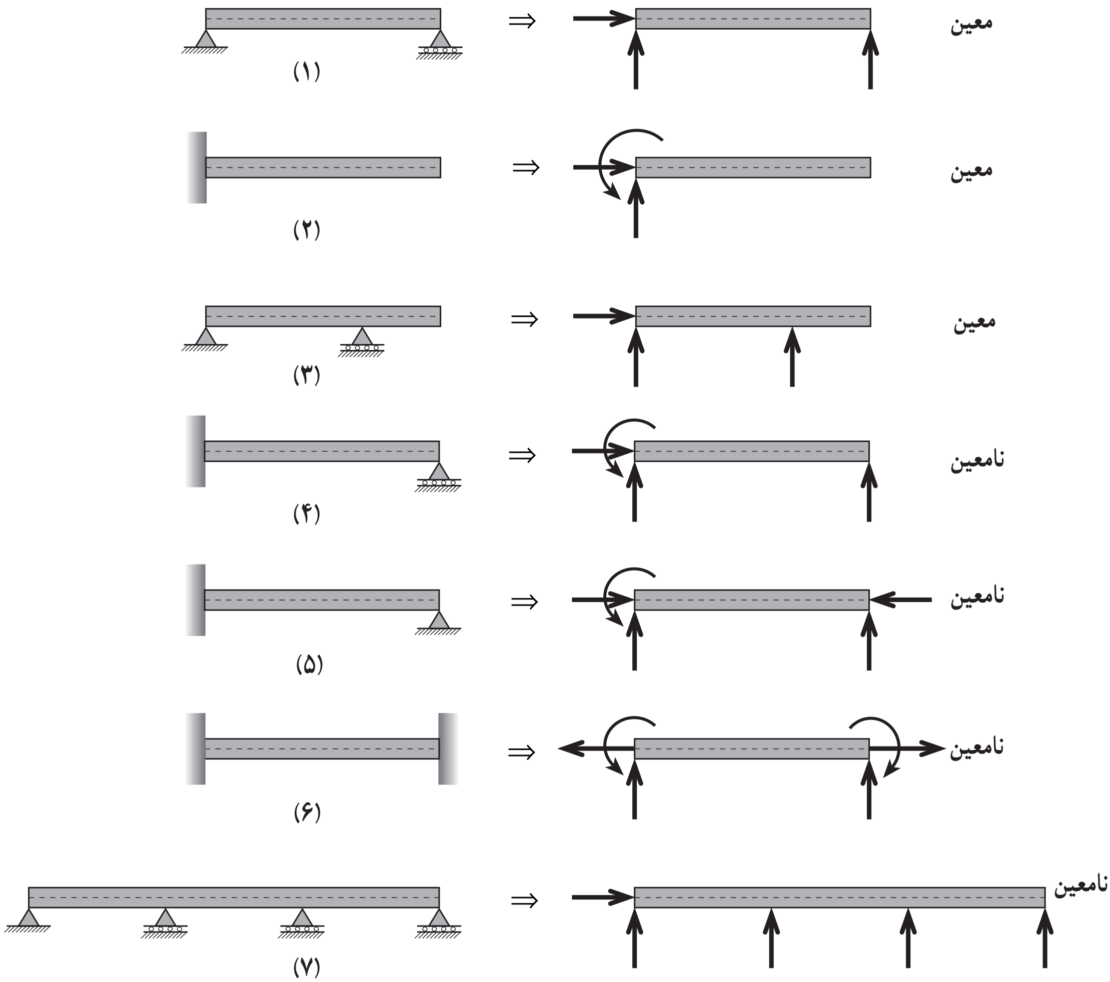
۳ــ گشتاور خمشی وقتی مثبت است که انحنای تیر به سمت پایین باشد و تارهای تحتانی تیر کشیده شوند (شکل ۷ــ۱۱ــ ج).



شکل ۷ــ۱۱

۶ــ۱۱ــ معادلات تعادل در تیرها

همان‌طوری که در بخش‌های نخستین کتاب یادآور شدیم برای اجسام صلب سه رابطه‌ی تعادل وجود دارد که در مورد تیرها هم صدق می‌کند. روابط سه‌گانه‌ی تعادل می‌توانند سه مجهول (واکنش تکیه گاهی) را تعیین کنند به همین دلیل اگر تعداد واکنش‌های تکیه‌گاهی در یک تیر پایدار سه و کم‌تر باشد آن تیر با استفاده از روابط سه‌گانه‌ی تعادل قابل حل خواهد بود که اصطلاحاً به آن «معین» گفته می‌شود و اگر مجهولات تکیه‌گاهی بیش از سه تا باشد آن تیر با استفاده از روابط سه‌گانه‌ی تعادل قابل حل نخواهد بود و نیاز به تشکیل معادلات اضافی دارد که خارج از موضوع این کتاب است. به‌تیرهایی که دارای واکنش‌های بیش از سه باشند تیرهای «نامعین» گفته می‌شود. در شکل ۸ــ۱۱ تعدادی تیر معین و نامعین نمایش داده شده است.



شکل ۸ــ۱۱

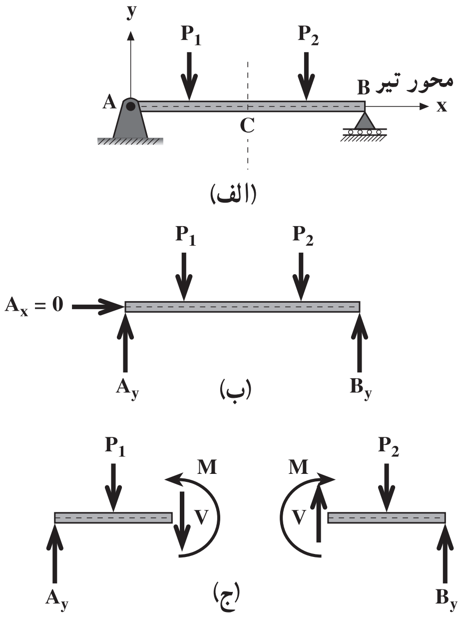
۷ــ۱۱ــ تیرها تحت بار متمرکز

مطابق شکل ۹ــ۱۱ــ الف، تیر ساده‌ای را درنظر بگیرید که تحت اثر نیروهای متمرکز P_1 و P_2 قرار دارد. نمودار آزاد تیر در شکل ۹ــ۱۱ــ ب رسم شده است. با استفاده از سه معادله‌ی تعادل زیر :

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum M = 0$$

می‌توان واکنش‌های تکیه‌گاهی A_x ، A_y و B_y را تعیین نمود. دقت شود که $A_x = 0$ است.

برای بررسی نیروهای داخلی، مقطع فرضی C از تیر عبور داده شده و نمودارهای آزاد قطعات سمت چپ و راست آن مطابق شکل ۹ــ۱۱ ــ ج رسم می‌گردد. به علت عدم وجود نیروهای افقی خارجی، در محل مقطع نیروی محوری داخلی وجود ندارد و نیروهای داخلی فقط شامل نیروی برشی V (مماس بر مقطع تیر) و لنگر خمشی M می‌شود. نیروی برشی تمایل به بریدن تیر در امتداد عمود بر محور و لنگر خمشی تمایل به خمیده کردن تیر دارد. همان‌طور که قبلاً گفته شد، در تحلیل تیرها هدف تعیین تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی در طول دهانه و همچنین بررسی ارتباط موجود بین بار خارجی، نیروی برشی، و لنگر خمشی می‌باشد.



شکل ۹ــ۱۱

نیروی برشی V و لنگر خمشی M را می‌توان با اعمال معادلات تعادل بر نمودار آزاد یکی از قطعات سمت چپ و یا راست مقطع تعیین نمود (شکل ۹ــ۱۱ ــ ج). برای مثال اگر تعادل قطعه‌ی چپ درنظر گرفته شود، معادله‌ی $\sum F_y = 0$ مقدار نیروی برشی V و معادله‌ی $\sum M_c = 0$ مقدار لنگرخمشی M را

به‌دست می‌دهد. با این روش می‌توان مقادیر نیروهای داخلی (تلاش‌ها) را در هر مقطع دلخواه تعیین نمود. می‌توان به این نتیجه رسید که مقدار نیروهای داخلی، بستگی به محل مقطع انتخابی دارد. به‌عنوان مثال اگر مقطعی در حدفاصل تکیه‌گاه A و نیروی $P_۱$ انتخاب شود، بدون شک به مقادیر دیگری از نیروی برشی و لنگر خمشی دست خواهیم یافت.

در تعیین نیروهای داخلی در مقطع مورد نظر، همواره جهت نیروهای مجهول داخلی مطابق شکل ۵ــ۱۱ در جهت مثبت قراردادی انتخاب می‌شود. اگر نتیجه حاصل مثبت به‌دست آید، نشان می‌دهد که جهت انتخابی صحیح بوده و نیروی داخلی مثبت است و اگر نتیجه حاصل منفی به‌دست آید، نشان می‌دهد که جهت انتخابی عکس بوده و جهت واقعی نیروهای داخلی در خلاف جهت مثبت اختیاری است. به‌این‌ترتیب ملاحظه می‌شود که روش انتخابی توافق کامل با قرارداد علامت نیروهای داخلی دارد.

۸ــ۱۱ــ نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی

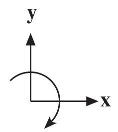
قبلاً اشاره شد که مقادیر نیروهای داخلی در طول دهانه‌ی تیر تغییر می‌نمایند. بهترین روش برای ثبت این تغییرات، رسم نمودار تغییرات نیروهای داخلی در طول دهانه است. برای نشان دادن این روش، تیر شکل ۱۰ــ۱۱ــ الف را درنظر بگیرید. برای رسم نمودار تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی، ابتدا لازم است نمودار آزاد کل تیر رسم شده و واکنش‌های تکیه‌گاهی محاسبه شود. این امر در شکل ۱۰ــ۱۱ــ ب انجام شده و نتیجه‌ی حاصل $A_y = B_y = \frac{P}{۲}$ و $A_x = ۰$ می‌باشد.

برای تعیین نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی لازم است مقاطع مناسبی در طول دهانه انتخاب شده و نیروهای داخلی در آن‌ها محاسبه شوند. وقتی که تیر تحت نیروهای متمرکز قرار دارد، انتخاب مقاطعی در حدفاصل نیروهای متمرکز (اعم از بار خارجی و واکنش تکیه‌گاهی) کفایت می‌کند. در مثال موردنظر مطابق شکل ۱۰ــ۱۱ــ ب، مطالعه‌ی دو مقطع ① و ② برای رسم نمودار کافی خواهد بود.

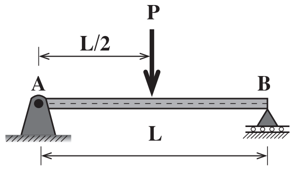
ابتدا نمودار آزاد قطعه‌ی سمت چپ مقطع ① مطابق شکل ۱۰ــ۱۱ــ ج رسم می‌شود. با درنظر گرفتن مبدأ x در تکیه‌گاه چپ تیر، فاصله‌ی مقطع ① از تکیه‌گاه چپ مساوی x خواهد بود. با توجه به‌این که مقطع ① در حد فاصل تکیه‌گاه چپ و نیروی متمرکز P انتخاب شده، نتایج حاصل از مطالعه‌ی این مقطع در حدفاصل $۰ < x < \frac{L}{۲}$ معتبر خواهد بود. با نشان دادن جهت نیروهای داخلی در جهت مثبت قراردادی، اقدام به محاسبه‌ی مقادیر آن‌ها می‌نماییم. با اعمال معادله‌ی تعادل نیروها در امتداد قائم به‌دست می‌آید :

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow \frac{P}{۲} - V = ۰$$

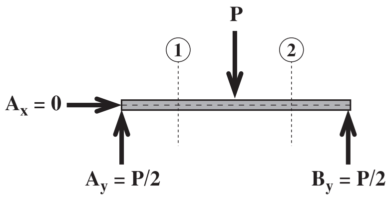
$$V = \frac{P}{۲} \qquad (۱ــ۱۱)$$



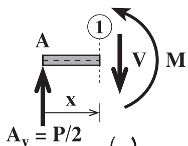
(جهات مثبت اختیاری برای تشکیل معادلات تعادل)



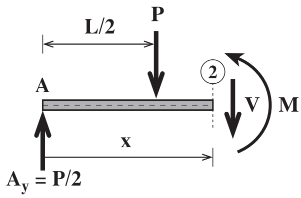
(الف)



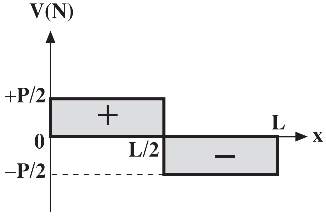
(ب)



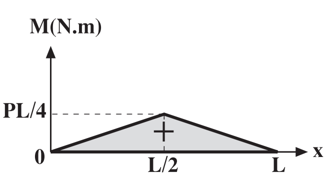
(ج)



(د)



(هـ) نمودار نیروی برشی



(و) نمودار لنگر خمشی

شکل ۱۰ــ۱۱

همچنین اعمال معادله‌ی تعادل لنگر نسبت به مقطع ۱ نتیجه می‌دهد :

$$\sum M_{①} = ۰ \; +\circlearrowright \qquad -M + \frac{P}{۲} \times x = ۰$$

$$\Rightarrow M = \frac{Px}{۲} \qquad (۱۱\text{ـ}۲)$$

معادله‌ی ۱ــ۱۱ در دستگاه مختصات شکل ۱۰ــ۱۱ــ هـ که اختصاص به نمودار نیروی برشی و معادله‌ی ۲ــ۱۱ در دستگاه مختصات شکل ۱۰ــ۱۱ــ و که اختصاص به نمودار لنگر خمشی دارد، درحدفاصل ۰ تا $L/۲$ رسم می‌شود. با توجه به این که معادلات ۱ــ۱۱ و ۲ــ۱۱ خطی هستند، تعیین دو نقطه‌ی ابتدایی و انتهایی توابع برای رسم نمودار کفایت می‌کند. حال نمودار آزاد قطعه‌ی چپ مقطع ۲، مطابق شکل ۱۰ــ۱۱ــ د رسم شده و فاصله‌ی این مقطع از تکیه‌گاه چپ مساوی x انتخاب می‌شود. توجه شود که در این حالت نتایج حاصل برای فاصله‌ی $L/۲ < x < L$ معتبر می‌باشند. نیروهای داخلی را در جهت مثبت قراردادی نشان داده و معادلات تعادل بر این قطعه اعمال می‌شوند (اعمال معادله‌ی تعادل نیروها در امتداد افق به‌صورت چشمی، مقدار نیروی داخلی محوری را صفر نتیجه می‌دهد).

$$\sum F_y = ۰ \; \overset{+}{\uparrow} \Rightarrow \frac{P}{۲} - P - V = ۰$$

$$V = -\frac{P}{۲} \qquad (۱۱\text{ـ}۳)$$

و برای تعیین لنگر خمشی داخلی :

$$\sum M_۲ = ۰ \; +\circlearrowright \Rightarrow -M + \frac{P}{۲} \times x - P(x - \frac{L}{۲}) = ۰$$

$$M = P(\frac{L}{۲} - \frac{x}{۲}) \qquad (۱۱\text{ـ}۴)$$

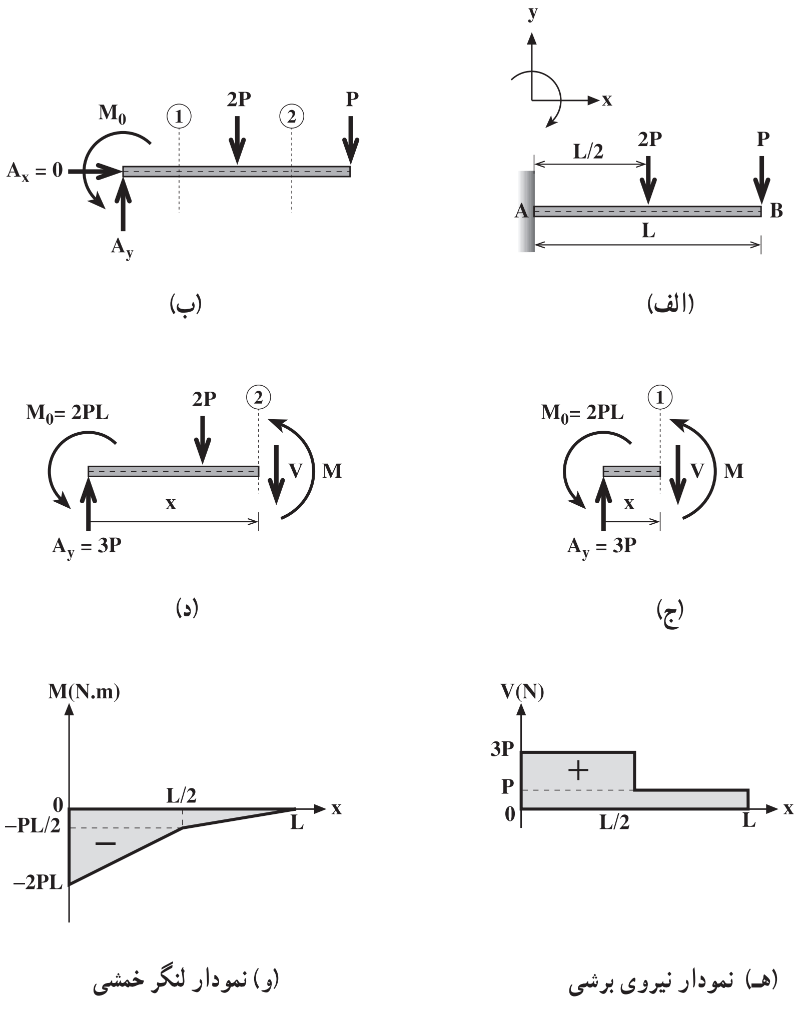
معادله‌ی ۳ــ۱۱ در ادامه‌ی نمودار نیروی برشی در شکل ۱۰ــ۱۱ــ هـ و معادله‌ی ۴ــ۱۱ در ادامه‌ی نمودار لنگر خمشی در شکل ۱۰ــ۱۱ــ و در حدفاصل $L/۲ < x < L$ رسم می‌شوند تا نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی کامل شود.

ملاحظه می‌شود که نمودار نیروی برشی (شکل ۱۰ــ۱۱ــ هـ)، در محل نیروی متمرکز، یک ناپیوستگی (پله) به اندازه‌ی P دارد که همان مقدار نیروی متمرکز می‌باشد.

مطالعه‌ی نمودار لنگر خمشی در شکل ۱۰ــ۱۱ــ و نشان می‌دهد که حداکثر لنگر خمشی در وسط دهانه مساوی $PL/۴$ است و مقادیر لنگر خمشی در تکیه‌گاه مساوی صفر می‌باشد که با شرایط مرزی تکیه‌گاه‌های مفصلی و غلتکی سازگار است.

مثال ۱: برای تیر طره‌ای نشان داده شده در شکل ۱۱ــ۱۱ــ الف مطلوب است تعیین رابطه‌ی تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی و رسم نمودارهای آن‌ها با علم به این‌که در تیرهای طره‌ای تحت اثر بارهای ثقلی ممان تکیه‌گاه از نوع منفی است.[1]

(جهات مثبت اختیاری برای تشکیل معادلات)



شکل ۱۱ــ۱۱

۱ــ تحقیق این موضوع به هنرجویان واگذار می‌شود. برای اطلاعات بیش‌تر به شکل ۷ــ۱۱ مراجعه شود.

حل: ابتدا نمودار آزاد تیر مطابق شکل ۱۱ــ۱۱ــب رسم شده و واکنش‌های تکیه‌گاهی محاسبه می‌شوند :

$$\sum F_x = ۰ \rightarrow + \quad \Rightarrow A_x = ۰$$

$$\sum F_y = ۰ \uparrow \Rightarrow A_y = ۳P$$

$$\sum M_A = ۰ \; \circlearrowright + \quad \Rightarrow -M_۰ + ۲P(\frac{L}{۲}) + P(L) = ۰$$

$$M_۰ = ۲PL$$

طبق توضیحات ارائه شده، برای تعیین روابط و رسم نمودارهای نیروهای داخلی، مطالعه‌ی دو مقطع ۱ و ۲ درحدفاصل نیروهای متمرکز لازم می‌باشد.

مقطع ۱ : $(۰ < x < \frac{L}{۲})$

نمودار آزاد قطعه‌ی سمت چپ مقطع ۱ مطابق شکل ۱۱ــ۱۱ــج رسم شده و نیروهای داخلی مجهول در مقطع ۱ در جهت مثبت قراردادی در روی این نمودار قرار داده می‌شوند. با اعمال معادلات تعادل بر این نمودار، به‌دست می‌آید :

$$\sum F_y = ۰ \quad ۳P - V = ۰$$

پاسخ: $V = ۳P$

و

$$\sum M_۱ = ۰ \; \circlearrowright + \quad \Rightarrow -M - ۲PL + ۳Px = ۰$$

پاسخ: $M = ۳Px - ۲PL$

مقطع ۲ : $(\frac{L}{۲} < x < L)$

نمودار آزاد قطعه‌ی سمت چپ مقطع ۲ مطابق شکل ۱۱ــ۱۱ــد رسم شده و نیروهای داخلی مجهول در مقطع ۲ در جهت مثبت قراردادی در روی این نمودار قرار داده می‌شوند. با اعمال معادلات تعادل بر این نمودار، به‌دست می‌آید :

$$\sum F_y = ۰ \uparrow \Rightarrow ۳P - ۲P - V = ۰$$

پاسخ: $V = P$

و

$$\sum M_۲ = ۰ \; \circlearrowright + \quad \Rightarrow -M - ۲PL + ۳Px - ۲P(x - \frac{L}{۲}) = ۰$$

پاسخ: $M = P(x - L)$

معادلات به‌دست آمده برای V در دستگاه مختصات شکل ۱۱ــ۱۱ــ هـ و معادلات به‌دست آمده برای M در دستگاه مختصات شکل ۱۱ــ۱۱ــ و در نواحی مربوطه رسم می‌شوند. مطالعه‌ی نمودار نیروی برشی نشان می‌دهد که این نمودار دارای ۲ ناپیوستگی (پله) در زیر نیروهای متمرکز می‌باشد که مقدار ناپیوستگی مساوی مقدار نیروی متمرکز می‌باشد (همان نتیجه‌ای که در مثال قبل به‌دست آمد). این نتیجه‌گیری کلی است و در تمام موارد صحت دارد. مطالعه‌ی نمودار لنگر خمشی نیز نشان می‌دهد که در $x=\circ$ مقدار لنگر مساوی $-۲PL$ است که با شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار منطبق است. در انتهای آزاد تیر، یعنی در $x=L$ ، مقدار لنگر خمشی از روی نمودار مساوی صفر به‌دست می‌آید که آن نیز با شرایط مرزی سازگار است.

مثال ۲: برای تیر نشان داده شده در شکل ۱۲ــ۱۱ــ الف، مطلوب است تعیین روابط و رسم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی.

حل: ابتدا نمودار آزاد تمام تیر مطابق شکل ۱۲ــ۱۱ــ ب رسم شده و با اعمال معادلات تعادل، واکنش‌های تکیه‌گاهی به‌دست می‌آید:

$$\sum M_A = \circ \curvearrowright^{+} \Rightarrow -۱\circ B_y + ۱\circ(۲\circ) = \circ$$

$$B_y = ۲\circ kN$$

$$\sum F_y = \circ \overset{+}{\uparrow} \Rightarrow -A_y + B_y - ۱\circ = \circ$$

$$A_y = ۱\circ kN$$

برای تعیین روابط و رسم نمودار، مقاطع ① و ② در حدفاصل نیروهای متمرکز مطابق شکل ۱۲ــ۱۱ــ ب انتخاب می‌شود.

مقطع ① : $(\circ < x < ۱\circ)$

نمودار آزاد قطعه‌ی سمت چپ مقطع ① مطابق شکل ۱۲ــ۱۱ــ ج رسم شده و نیروهای داخلی در محل مقطع ① در جهت مثبت قراردادی در روی این نمودار قرار داده می‌شوند. با اعمال معادلات تعادل در امتداد قائم داریم:

$$\sum F_y = \circ \overset{+}{\uparrow} \Rightarrow -V - ۱\circ = \circ$$

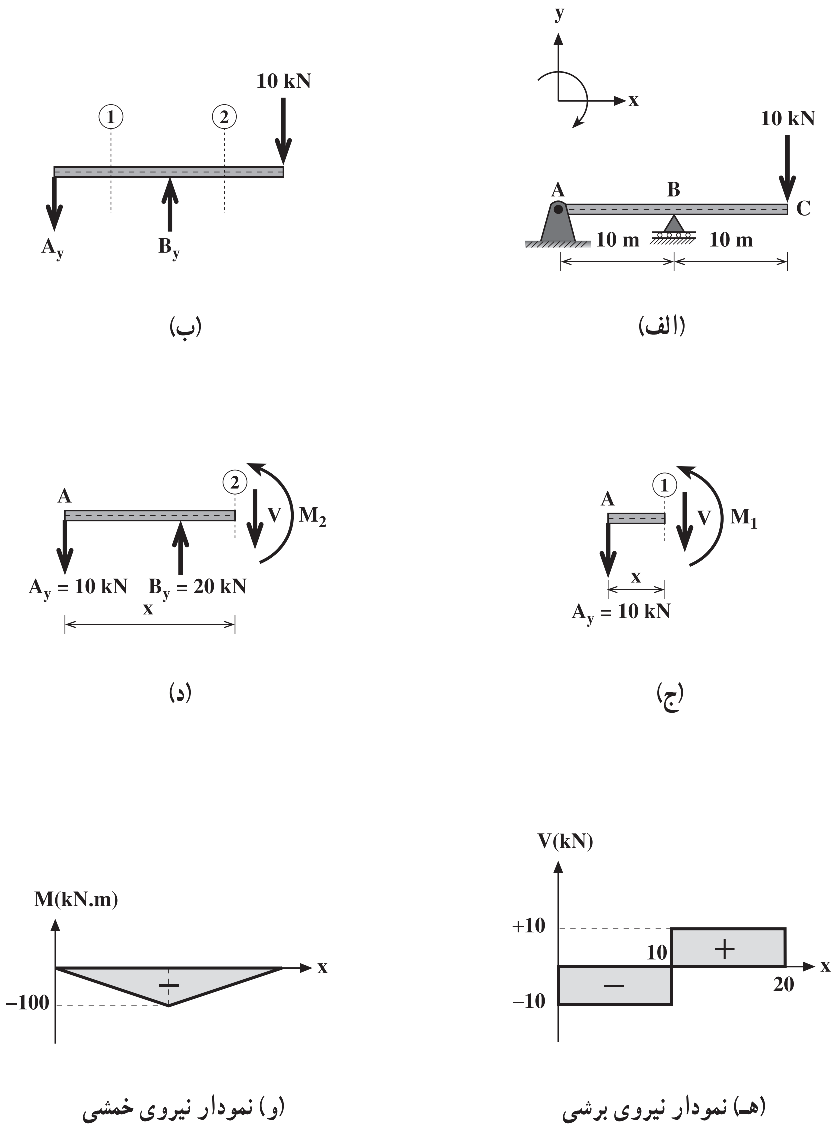
$$V = -۱\circ kN$$

و نوشتن معادله‌ی تعادل لنگر نسبت به نقطه‌ی ① نتیجه می‌دهد:

$$\sum M_۱ = \circ \curvearrowright^{+} \Rightarrow -M_۱ - ۱\circ x = \circ$$

$$M_۱ = -۱\circ x \ kN.m$$

(جهات مثبت اختیاری برای تشکیل معادلات تعادل)



شکل ۱۲ــ۱۱

مقطع ②: $(۱۰ < x < ۲۰)$

نمودار آزاد قطعه‌ی سمت چپ مقطع ② مطابق شکل ۱۲ــ۱۱ــ د رسم شده و نیروهای داخلی در محل مقطع ② در جهت مثبت قراردادی در روی این نمودار قرار داده می‌شوند. با اعمال معادلات تعادل در امتداد قائم داریم :

$$\sum F_y = ۰ \; \uparrow^{+} \Rightarrow -V - ۱۰ + ۲۰ = ۰$$

$$V = ۱۰ kN$$

و نوشتن معادله‌ی تعادل لنگر نسبت به نقطه‌ی ② نتیجه می‌دهد :

$$\sum M_۲ = ۰ \; \curvearrowright^{+} \Rightarrow -M_۲ - ۱۰x + ۲۰(x - ۱۰) = ۰$$

$$M_۲ = (۱۰x - ۲۰۰) kN.m$$

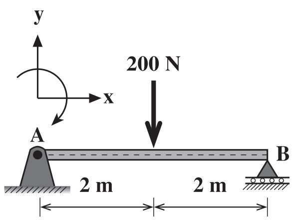
معادلات به‌دست آمده برای نیروی برشی V در دستگاه مختصات شکل ۱۲ــ۱۱ــ هـ و معادلات به‌دست آمده برای لنگر خمشی M در دستگاه مختصات شکل ۱۲ــ۱۱ــ و در نواحی مربوطه رسم می‌شوند تا نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی به‌دست آیند.

تمرین

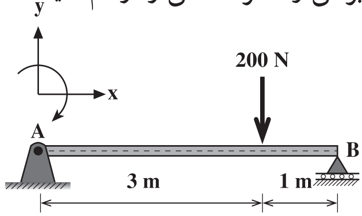
در تیرهای نشان داده شده در شکل، معادلات نیروی برشی و لنگر خمشی را تعیین کرده و توسط آن‌ها نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی را رسم کنید.

۱ــ شکل مسئله‌ی ۱

۲ــ شکل مسئله‌ی ۲



شکل مسئله‌ی ۱

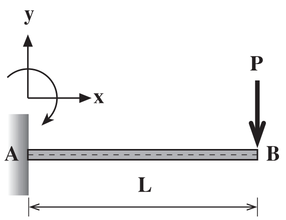


شکل مسئله‌ی ۲

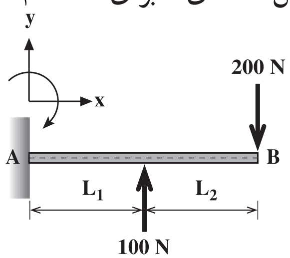
۳ــ شکل مسئله‌ی ۳ برای $P = ۱۰۰N$ ، $L = ۲/۵m$

۴ــ شکل مسئله‌ی ۳ برای $P = ۲kN$ و $L = ۲m$

۵ــ شکل مسئله‌ی ۴ برای $۲L_۱ = L_۲ = ۲m$



شکل مسئله‌ی ۳

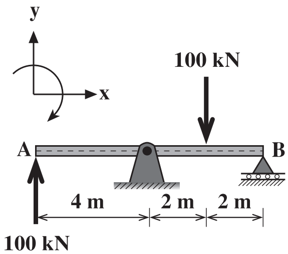


شکل مسئله‌ی ۴

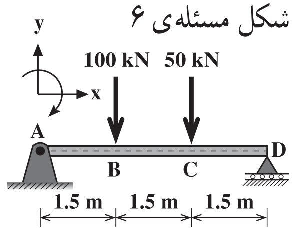
۶ــ شکل مسئله‌ی ۴ برای $L_1 = 2m$ و $L_2 = 10m$

۷ــ شکل مسئله‌ی ۵

۸ــ شکل مسئله‌ی ۶



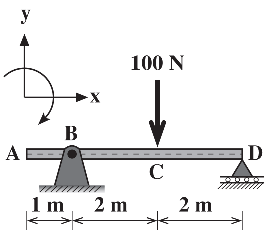
شکل مسئله‌ی ۵



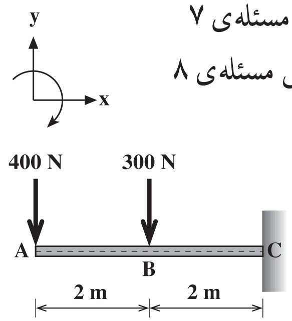
شکل مسئله‌ی ۶

۹ــ شکل مسئله‌ی ۷

۱۰ــ شکل مسئله‌ی ۸



شکل مسئله‌ی ۷



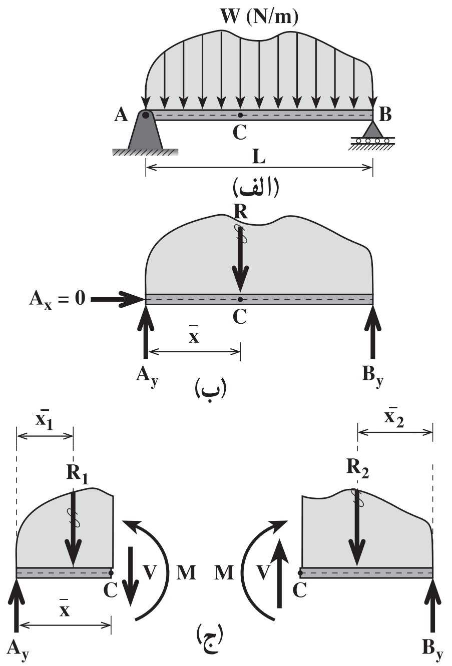
شکل مسئله‌ی ۸

۹ــ۱۱ــ تیر تحت بار گسترده

قبل از بررسی روش رسم نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر تحت بار گسترده، روش تعیین واکنش‌های تکیه‌گاهی تیر تحت بار گسترده به‌طور خلاصه مورد توجه قرار می‌گیرد. شکل ۱۳ــ۱۱ــ الف تیری را تحت بار گسترده نشان می‌دهد. نمودار آزاد تیر در شکل ۱۳ــ۱۱ــ ب نشان داده شده که در آن بار گسترده با برآیند متمرکز R در فاصله‌ی $\bar{x}$ از تکیه‌گاه چپ جایگزین شده است به‌طوری که :

R = (برآیند یا سطح شدت بار گسترده)

$\bar{x}$ = (محل برآیند از تکیه‌گاه A)



شکل ۱۳ــ۱۱

بعد از تعیین برآیند R و محل آن، با توجه به نمودار آزاد شکل ۱۳ـ۱۱ـ ب می‌توان واکنش‌های A_x ، A_y و B_y را محاسبه نمود.

برای تعیین نیروهای داخلی، مقطع فرضی از نقطه‌ی C عبور داده شده و نمودارهای آزاد قطعات سمت چپ و راست آن در شکل ۱۳ـ۱۱ـ ج رسم می‌شود. به‌منظور اعمال معادلات تعادل بر هر یک از این قطعات و تعیین نیروهای داخلی، لازم است بار گسترده‌ی مؤثر بر هر قطعه با بار متمرکز معادل آن جایگزین شود. به همین منظور بار گسترده‌ی مؤثر بر قطعه‌ی سمت چپ با برآیند $R_۱$ به فاصله‌ی $\bar{x}_۱$ از نقطه‌ی A و بار گسترده‌ی مؤثر بر قطعه‌ی سمت راست با برآیند $R_۲$ به فاصله‌ی $\bar{x}_۲$ از نقطه‌ی B جایگزین می‌گردد. حال می‌توان معادلات تعادل را بر هریک از قطعات سمت چپ و یا راست (بسته به سهولت) اعمال نمود و نیروهای داخلی را محاسبه کرد.

مثال ۳: برای تیر نشان داده شده در شکل ۱۴ـ۱۱ـ الف، مطلوب است رسم نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی.

حل: برای تعیین واکنش‌های تکیه‌گاهی، مطابق شکل ۱۴ـ۱۱ـ ب، بار گسترده با نیروی برآیند متمرکز R به مقدار :

$$R = ۵۰(۵) = ۲۵۰N$$

مقدار برآیند در مرکز هندسی بار گسترده، یعنی وسط دهانه، جایگزین می‌گردد. با اعمال معادلات تعادل ایستایی، مقادیر واکنش‌های تکیه‌گاهی به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$A_y = B_y = ۱۲۵N$$

حال برای رسم نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی لازم است مقاطع مناسبی در طول دهانه انتخاب گردد. قبلاً اشاره شد که مقاطع باید در حدفاصل بارهای متمرکز انتخاب شوند. درصورت وجود بار گسترده، نقاط زیر باید به‌عنوان حدود انتخاب مقطع مورد توجه قرار گیرند :

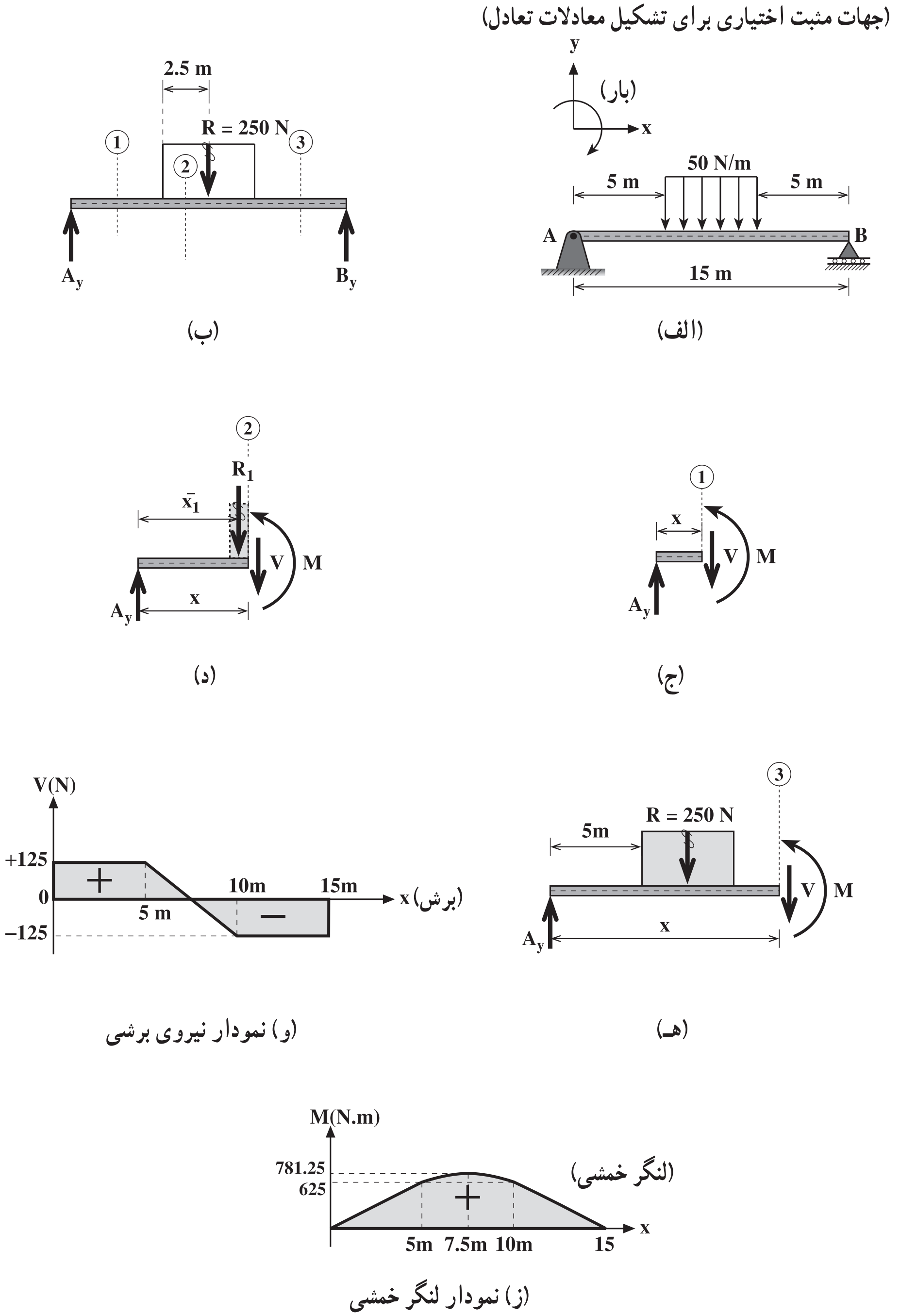
۱ــ نقطه‌ی تأثیر بار متمرکز ؛

۲ــ شروع بار گسترده ؛

۳ــ ختم بار گسترده ؛

۴ــ نقطه‌ی شکستگی بار گسترده (محل جهش بار گسترده).

با توجه به نکات فوق،برای مطالعه‌ی کامل این مسئله، سه مقطع ① و ② و ③ مطابق شکل ۱۴ـ۱۱ـ ب لازم می‌باشد (برآیند R به‌عنوان بار متمرکز واقعی درنظر گرفته نمی‌شود). نمودار آزاد قسمت چپ مقاطع ① و ② و ③ به ترتیب در اشکال ۱۴ـ۱۱ـ ج تا هـ رسم شده است.



شکل ۱۴ــ۱۱

مقطع ①: $(۰ < x < ۵)$ (شکل ۱۴ــ۱۱ــ ج)

پاسخ:

$$\sum F_y = 0 \uparrow^{+} \Rightarrow V = A_y = 125\text{N}$$

$$\sum M_1 = 0 + \circlearrowright \Rightarrow -M + 125x = 0$$

پاسخ:

$$M = 125x \ \text{N.m}$$

مقطع②: $(5 < x < 10)$ (شکل ۱۴ـ۱۱ـ د)

در این حالت قسمتی از بار گسترده به طول $x-5$ متر در محدوده‌ی مطالعه قرار می‌گیرد. برآیند این قسمت برابر است با :

$$R_1 = 50(x-5)$$

و نقطه‌ی تأثیر آن :

$$\bar{x}_1 = 5 + \frac{x-5}{2} = \frac{x+5}{2}$$

حال با اعمال معادلات تعادل به‌دست می‌آید :

$$\sum F_y = 0 \uparrow^{+} \Rightarrow A_y - V - R_1 = 0$$

$$V = 125 - 50(x-5)\ \text{N}$$

$$\sum M_2 = 0 + \circlearrowright \Rightarrow -M - R_1(x - \bar{x}_1) + A_y x = 0$$

$$M = 125x - 50(x-5)(x - \frac{x+5}{2})$$

$$= (-25x^2 + 375x - 625)\text{N.m}$$

مقطع③: $(10 < x < 15)$

در این حالت تمام بار گسترده در محدوده‌ی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در نتیجه از کل برآیند بار گسترده استفاده می‌شود (شکل ۱۴ـ۱۱ـ هـ).

$$\sum F_y = 0 \uparrow^{+} \Rightarrow A_y - 250 - V = 0$$

$$V = -125\text{N}$$

$$\sum M_3 = 0 + \circlearrowright \Rightarrow -M - 250(x - 7/5) + 125x = 0$$

$$M = (125x + 1875)\text{N.m}$$

نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی[1] به ترتیب در اشکال ۱۴ـ۱۱ـ و، و ۱۴ـ۱۱ـ ز رسم شده است.

مثال ۴: مطلوب است رسم نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر نشان داده شده در شکل ۱۵ـ۱۱ـ الف.

۱ـ نمودارها با دادن مختصات در محدوده‌های مشخص شده براساس معادلات V و M مربوطه ترسیم شده‌اند.

حل: برای تعیین واکنش‌های تکیه‌گاهی، نمودار آزاد کل تیر مطابق شکل ۱۵ــ۱۱ــ ب رسم می‌شود. در این نمودار نیروی گسترده با برآیند $R = wL$ در فاصله‌ی $\bar{x} = \frac{L}{۲}$ از سمت چپ جایگزین شده است. با اعمال معادلات تعادل به‌دست می‌آید :

$$\sum M_A = ۰ + \Rightarrow -B_y L + R\frac{L}{۲} = ۰$$

$$B_y = \frac{wL}{۲}$$

$$\sum F_y = ۰ \uparrow \Rightarrow A_y - R + B_y = ۰$$

$$A_y = \frac{wL}{۲}$$

برای بررسی نیروهای داخلی این تیر، مطالعه‌ی مقطع ① به تنهایی کفایت می‌کند. چرا؟ نمودار آزاد قطعه‌ی سمت چپ مقطع در شکل ۱۵ــ۱۱ــ ج رسم شده است. برآیند قسمتی از بار گسترده که در محدوده‌ی x قرار دارد، برابر است با :

$$R_۱ = wx \quad \text{و} \quad \bar{x}_۱ = \frac{x}{۲}$$

با اعمال معادلات تعادل به دست می‌آید :

$$\sum F_y = ۰ \uparrow \Rightarrow \frac{wL}{۲} - R_۱ - V = ۰$$

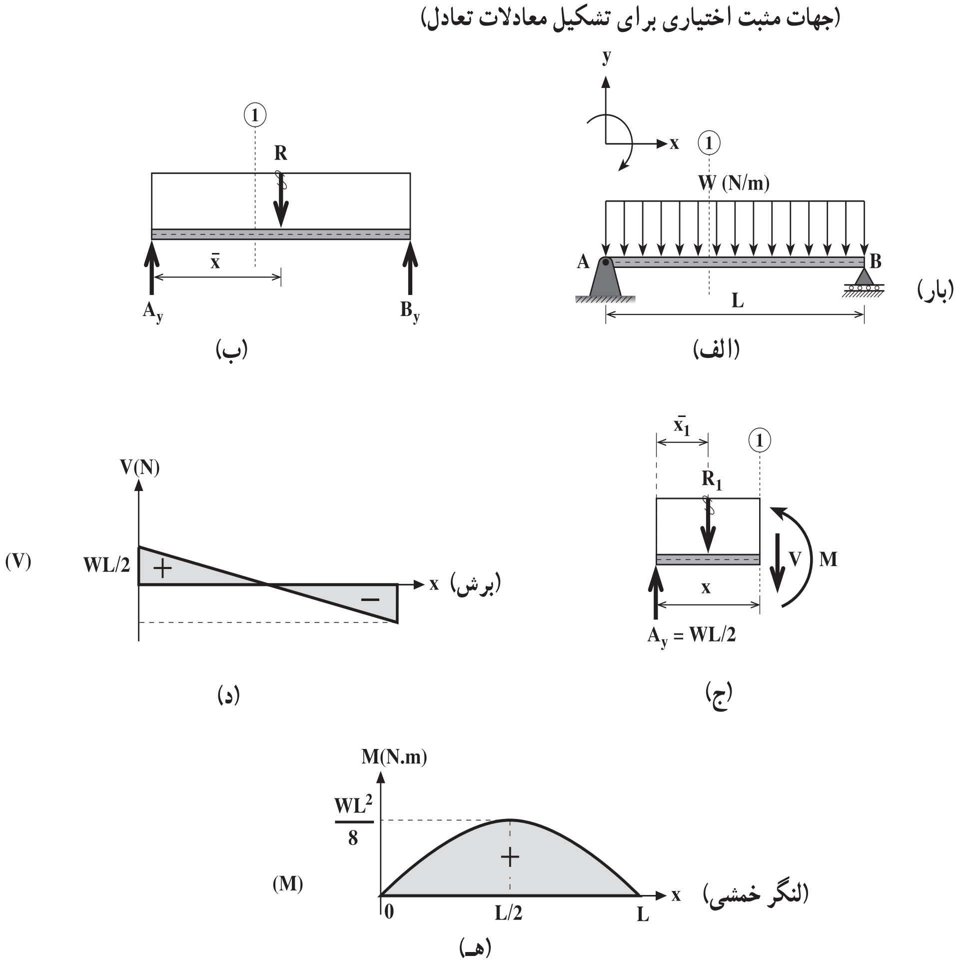
پاسخ: $$V = \frac{wL}{۲} - wx$$

$$\sum M_x = ۰ + \Rightarrow -M + \frac{wL}{۲}x - R_۱\frac{x}{۲} = ۰$$

پاسخ: $$M = \frac{wLx}{۲} - \frac{wx^۲}{۲}$$

با توجه به معادلات به‌دست آمده، نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی مطابق اشکال ۱۵ــ۱۱ــ د و هـ رسم می‌گردد. به علت تقارن بار نسبت به وسط تیر، لنگر خمشی در وسط تیر ($x = \frac{L}{۲}$) ماکزیمم است که با وارد نمودن $x = \frac{L}{۲}$ در معادله‌ی لنگر خمشی، مقدار لنگر خمشی ماکزیمم به‌دست می‌آید :

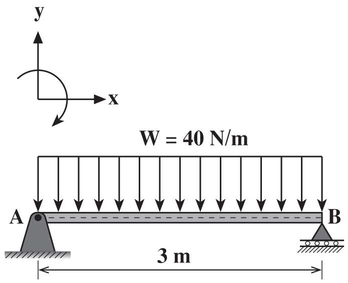
$$x = \frac{L}{۲} \Rightarrow M_{max} = \frac{wL}{۲}\left(\frac{L}{۲}\right) - \frac{w}{۲}\left(\frac{L}{۲}\right)^۲ = \frac{wL^۲}{۸}$$



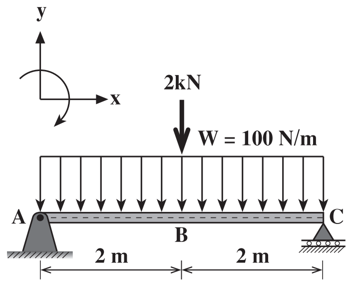
شکل ۱۵ــ۱۱

تمرین

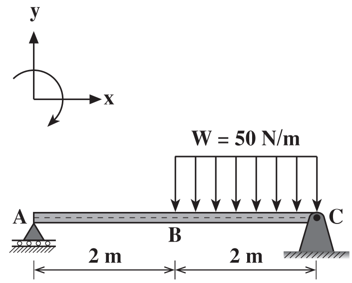
شکل‌های ۱ تا ۵ در تیرهای نشان داده شده، معادلات نیروی برشی و لنگر خمشی را به‌دست آورده و نمودارهای آن‌ها را رسم کنید.



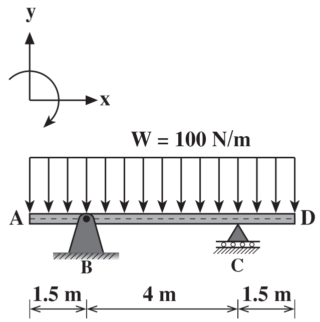
شکل مسئله‌ی ۱



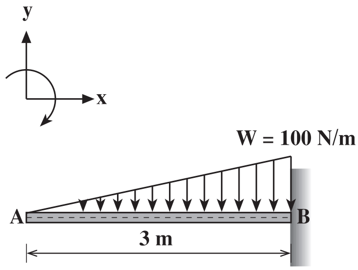
شکل مسئله‌ی ۲



شکل مسئله‌ی ۳



شکل مسئله‌ی ۴



شکل مسئله‌ی ۵

۱۰ــ۱۱ــ روابط بار، نیروی برشی و لنگر خمشی

در مثال‌هایی که در ادامه ارائه می‌شود، کاربرد روش جمع‌زدن برای رسم نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی ارائه می‌شود. حل این مثال‌ها بر مبنای اصول زیر قرار دارد :

۱ــ در ابتدای کار لازم است کلیه‌ی واکنش‌های تکیه‌گاهی محاسبه شوند و برای ادامه‌ی کار با جهت صحیح روی نمودار آزاد تیر قرار داده می‌شوند.

۲ــ جهت مثبت بار به سمت بالا (جهت مثبت yها) انتخاب می‌شود. بنابراین بار روبه پایین منفی است.

۳ــ شیب نمودار نیروی برشی در هر نقطه مساوی شدت بار وارده در آن نقطه است. اگر شدت بار مثبت (روبه بالا) باشد، نمودار برش صعودی و اگر شدت بار منفی (روبه پایین) باشد، نمودار برش نزولی است. اگر شدت بار وارده صفر باشد، نمودار برش به‌صورت افقی درمی‌آید.

۴ــ تغییرات نیروی برشی بین دو مقطع از طول تیر، مساوی مقدار بار وارده (با درنظر گرفتن علامت) بین آن‌دو مقطع می‌باشد.

۵ــ شیب نمودار لنگر خمشی در هر نقطه مساوی نیروی برشی در آن نقطه است. اگر نیروی برشی مثبت باشد، نمودار لنگر صعودی و اگر برش منفی باشد، نمودار لنگر نزولی است. اگر برش

صفر باشد، شیب نمودار لنگر افقی است.

۶ــ تغییرات لنگر خمشی بین دو مقطع از طول تیر برابر است با سطح زیر نمودار برش بین آن دو مقطع.

۷ــ بار متمرکز یک پله در نمودار نیروی برشی[1] و لنگر متمرکز یک پله در نمودار لنگر خمشی[2] ایجاد می‌کند.

مثال ۵: مطلوب است رسم نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر شکل ۱۶ــ۱۱ــ الف

حل: تعیین واکنش‌های تکیه‌گاهی (شکل ۱۶ــ۱۱ــ ب)

$$\sum M_A = ۰ \; + \Rightarrow -۲۰D_y + ۲۰۰۰(۵) + ۱۰۰۰(۱۵) = ۰$$

$$D_y = ۱۲۵۰\,\text{N}\uparrow$$

$$\sum F_y = ۰ \; \overset{+}{\uparrow} \Rightarrow A_y - ۲۰۰۰ - ۱۰۰۰ + D_y = ۰$$

$$A_y = ۱۷۵۰\,\text{N}\uparrow$$

نمودار برش: با معلوم بودن واکنش A_y ، رسم نمودار برش از سمت چپ شروع می‌شود. از این به بعد واکنش‌های تکیه‌گاهی نیز جزء نیروهای خارجی معلوم فرض می‌شوند. در نقطه‌ی A یک بار متمرکز روبه‌بالا (مثبت) مساوی ۱۷۵۰ نیوتن وجود دارد. در نتیجه نمودار برش یک صعود پله‌ای به طرف بالا به مقدار ۱۷۵۰ نیوتن در نقطه‌ی A خواهد داشت. در حدفاصل A تا B نمودار بار یکنواخت و با شدت ثابت و روبه پایین است. در نتیجه نمودار برش خطی و نزولی است. تغییرات برش از A تا B مساوی مقدار بار وارده در این حدفاصل است:

$$\boxed{V_B = V_A + (\text{سطح زیر بار ناحیه‌ی A تا B})}$$

$$V_B = ۱۷۵۰ - ۲۰۰۰ = -۲۵۰\,\text{N}$$

با توجه به هندسه، نمودار برش در نقطه‌ای به فاصله‌ی ۸/۷۵ متر محور تیر را قطع می‌کند[3] (نقطه‌ی E).

۱ــ بار متمرکز یک شکستگی عمودی در نمودار برش به اندازه‌ی بار و در جهت بار ایجاد می‌کند.

۲ــ لنگر متمرکز یک شکستگی عمودی در نمودار لنگر به اندازه‌ی لنگر و متناسب جهت لنگر ایجاد می‌کند.

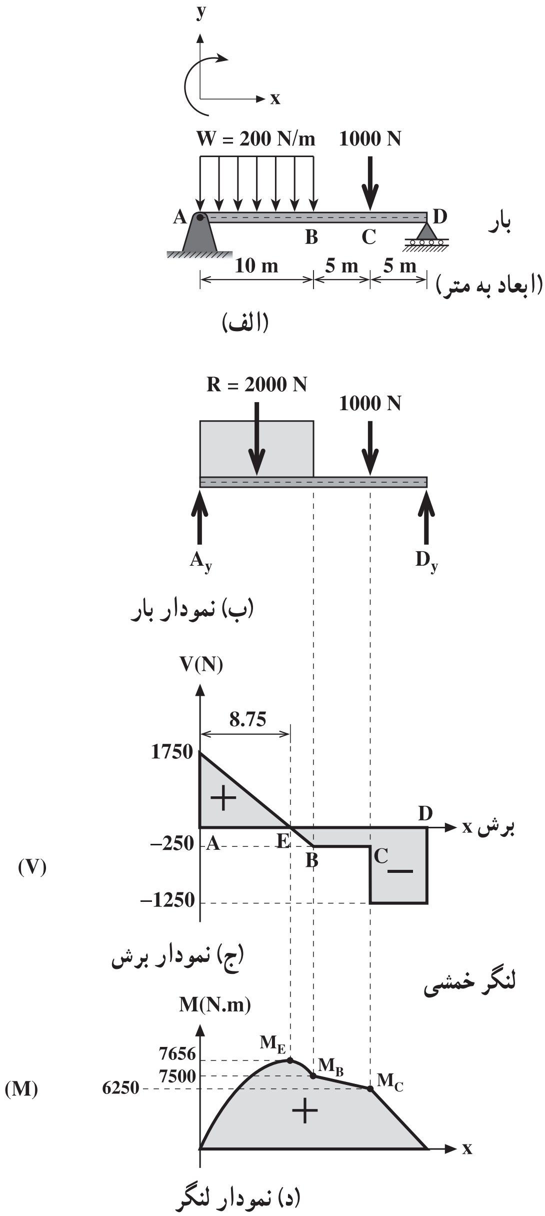
۳ــ فاصله‌ی نقطه‌ی E تا تکیه‌گاه‌ها براساس تشابه مثلث به دست می‌آید. همچنین می‌توان از رابطه‌ی زیر اقدام به محاسبه‌ی این فاصله نمود.

(برش نقطه‌ی A)= (فاصله‌ی نقطه‌ی E تا نقطه‌یA) × (شدت بار)

اگر فاصله‌ی برش صفر (E) تا A را x بنامیم خواهیم داشت:

$$۲۰۰ \times x = ۱۷۵۰ \qquad x = \frac{۱۷۵۰}{۲۰۰} = ۸/۷۵\,\text{m}$$

(جهات مثبت اختیاری برای تشکیل معادلات تعادل)



شکل ۱۶ــ۱۱

تعیین این نقطه لازم است، زیرا نقطه‌ی برش صفر جایی است که نمودار لنگر حداکثر می‌باشد.

در حدفاصل B تا C شدت بار وارده صفر است، در نتیجه شیب نمودار برش در این فاصله مساوی صفر و مقدار برش ثابت می‌باشد در نقطه‌ی C بار روبه‌پایین ۱۰۰۰ نیوتنی باعث نزول پله‌ای نمودار برش به مقدار ۱۰۰۰ نیوتن می‌شود. از این نقطه تا انتهای تیر نمودار برش افقی است و در نقطه‌ی D بار روبه بالای $D_y = ۱۲۵۰N$ باعث صعود پله‌ای و بسته شدن نمودار برش می‌شود.

نمودار لنگر ناحیه‌ی A تا E : در این ناحیه نمودار برش مثبت و خطی است. درنتیجه نمودار لنگر از درجه‌ی دوم و صعودی با شیب ابتدایی ۱۷۵۰+ نیوتن و شیب انتهایی صفر خواهد بود. در نتیجه تقعر منحنی به سمت پایین است با توجه به این که لنگر در نقطه‌ی A صفر است، لنگر نقطه‌ی E مساوی سطح زیر نمودار برش در حدفاصل A تا E می‌باشد.

$$\boxed{M_E = M_A + (\text{سطح زیر نمودار برش از ناحیه‌ی A تا E})}$$

$$M_E = ۰ + \text{سطح زیر نمودار برش در حدفاصل A تا E}$$

$$= \frac{۱}{۲}(۱۷۵۰)(۸/۷۵) = ۷۶۵۶/۲۵N.m$$

در این نقطه حداکثر لنگر خمشی رخ می‌دهد. چرا؟

ناحیه‌ی E تا B : در این ناحیه نمودار برش خطی و مقدار برش منفی است. بنابراین در این فاصله نمودار لنگر سهمی و نزولی با شیب ابتدایی صفر و شیب انتهایی ۲۵۰− نیوتن می‌باشد. مقدار لنگر در نقطه‌ی B برابر است با :

$$M_B = M_E + \text{سطح زیر نمودار برش در حدفاصل E تا B}$$

$$= ۷۶۵۶/۲۵ - \frac{۱}{۲}(۲۵۰)(۱/۲۵) = ۷۵۰۰N.m$$

ناحیه‌ی B تا C : در این ناحیه برش ثابت و منفی است. در نتیجه نمودار لنگر خطی و نزولی می‌باشد. لنگر نقطه‌ی C برابر است با :

$$M_C = M_B + \text{سطح زیر نمودار برش در حدفاصل B تا C}$$

$$= ۷۵۰۰ - ۲۵۰(۵) = ۶۲۵۰N.m$$

ناحیه‌ی C تا D : در این ناحیه برش ثابت و منفی است. در نتیجه نمودار لنگر خطی و نزولی می‌باشد. لنگر نقطه‌ی D برابر است با :

$$M_D = M_C + \text{سطح زیر نمودار برش در حدفاصل C تا D}$$

$$= ۶۲۵۰ - ۱۲۵۰(۵) = ۰ \; ☑ \; (\text{کنترل})$$

مشاهده‌ی نمودار لنگر نشان می‌دهد که لنگر در نقطه‌ی E (محل برش صفر)، حداکثر است.

نتیجه: لنگر ماکزیمم در محل برش صفر است.