بخش دوم

فصل سوم

تعمیم حد

هدف کلی

تعیین حد تابع وقتی متغیر به $+\infty$ (یا $-\infty$) میل می‌کند. همچنین بررسی تابع‌هایی که حد آن‌ها، وقتی x به یک عدد حقیقی یا $\pm\infty$ میل می‌کند، $+\infty$ یا $-\infty$ است.

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ــ حد در بینهایت را تعریف کند.

۲ــ حد بینهایت برای یک تابع را تعریف کند.

پیش‌آزمون (۳)

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون

۱ــ فرض کنید $f(x)=\frac{۱}{x-۲}$. اگر x برابر عددهای $۲+۱$ ، $۲+\frac{۱}{۲}$ ، ... یا $۲+\frac{۱}{n}$ باشد مقدار f(x)، ۱، ۲، ...، یا n خواهد شد. مثلاً :

$$f(۲+\frac{۱}{n})=\frac{۱}{(۲+\frac{۱}{n})-۲}=\frac{۱}{\frac{۱}{n}}=n$$

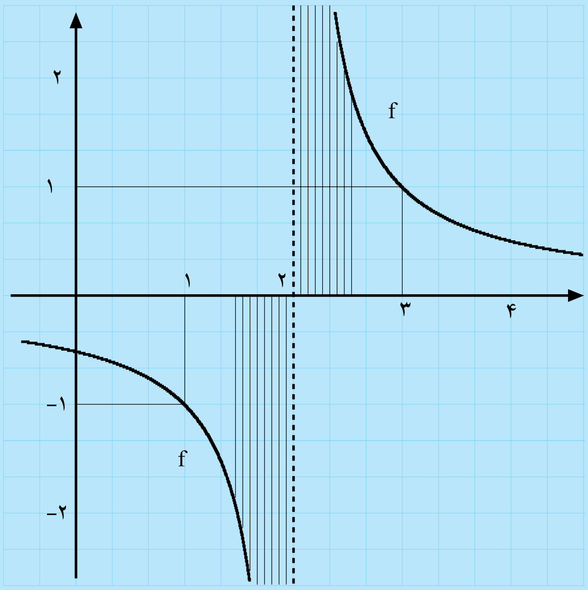
با توجه به شکل ۵۱ــ۲ وقتی n بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود $۲+\frac{۱}{n}$ به چه عددی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود؟ در چنین حالتی برای $f(۲+\frac{۱}{n})$ چه اتفاقی می‌افتد؟

۲ــ اگر در سؤال ۱، x به‌صورت $۲-\frac{۱}{n}$ و با افزایش n، به عدد ۲ نزدیک شود $f(۲-\frac{۱}{n})$ چه وضعیتی دارد؟ توجه کنید که :

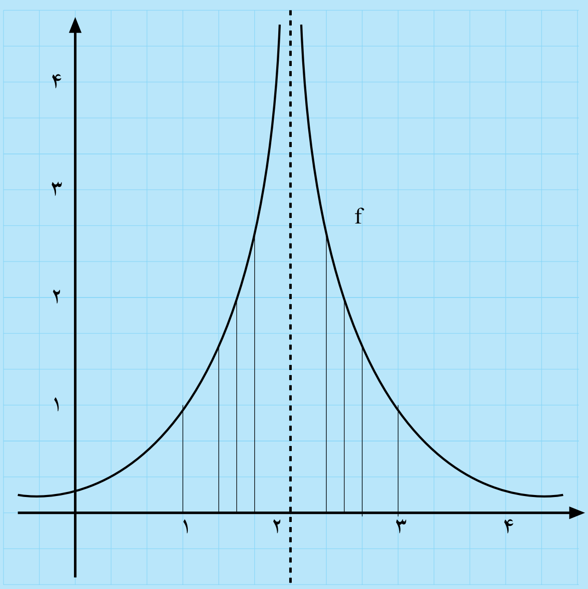
$$f(۲-\frac{۱}{n})=\frac{۱}{(۲-\frac{۱}{n})-۲}=\frac{۱}{-\frac{۱}{n}}=-n$$

۳ــ اگر $f(x)=\frac{۱}{(x-۲)^۲}$ و متغیر x به‌صورت $۲+\frac{۱}{n}$ یا $۲-\frac{۱}{n}$ ، با افزایش n، به عدد ۲ نزدیک و نزدیک‌تر شوند وضعیت f(x) چگونه خواهد بود؟ (راهنمایی : نشان دهید که $f(۲-\frac{۱}{n})=f(۲+\frac{۱}{n})=n^۲$) (شکل ۵۲ــ۲).

۴ــ فرض کنید $f(x)=\sqrt{x}$ و x عددهای ۱، ۴، ۹، ۱۶، ...، $n^۲$ را اختیار کند، مقدار f(x) چه عددهایی خواهد بود؟ وقتی n بزرگ و بزرگ‌تر شود f(x) چگونه تغییر می‌کند؟ نمودار $y=\sqrt{x}$ را در $[۰ , +\infty)$ رسم کنید و رفتار این تابع را، وقتی x بزرگ می‌شود، ملاحظه کنید.



شکل ۵۱ــ۲



شکل ۵۲ــ۲

۳ـ۲ـ تعمیم حد

تاکنون در حدهایی که مورد بررسی قرار داده‌ایم، عدد a و عدد L هر دو، عدد حقیقی بوده‌اند. در این قسمت می‌خواهیم ببینیم اگر a یا L بینهایت شوند چگونه باید عمل کرد.

فعالیت ۱۰ـ۲

تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱}{x^۲}\ (x\neq ۰)$، را درنظر بگیرید.
(به مثال روبه‌رو نیز توجه کنید.)

۱) جدول ۲۰ـ۲ را کامل کنید.

۲) در جدول ۲۰ـ۲، x به چه عددی میل می‌کند؟

۳) با نزدیک شدن x به صفر، f(x)ها چگونه تغییر می‌کنند؟

۴) آیا می‌توان گفت که اگر x به عدد صفر بسیار نزدیک باشد، f(x) می‌تواند از هر عدد مثبت بزرگی بزرگ‌تر شود؟

۵) با توجه به آنچه در مورد $+\infty$ می‌دانید، درست است که بگوییم حد f(x)، وقتی $x\to ۰$، $+\infty$ است؟

۶) آیا درست است که بنویسیم؟ $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{x^۲}=+\infty$

۷) نمودار $y=f(x)$ در شکل ۵۳ـ۲ رسم شده است آیا از این نمودار هم معلوم می‌شود که وقتی x به عدد صفر میل می‌کند f(x) به $+\infty$ میل می‌کند؟

۸) آیا درست است که بگوییم :

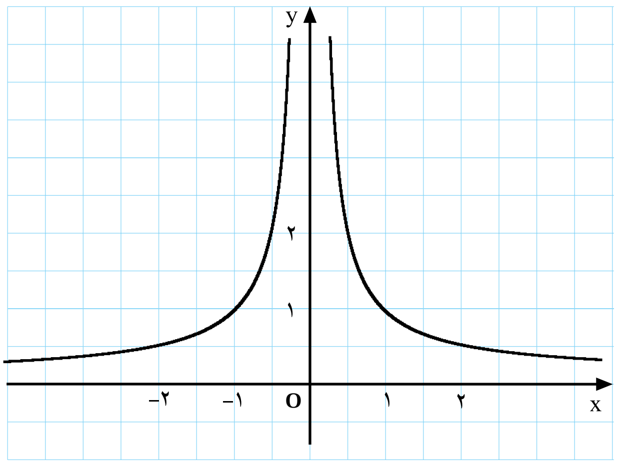
> $\frac{۱}{x^۲}$ را هرچه بخواهیم می‌توانیم بزرگ کنیم به شرط آن‌که x را به‌قدر کافی به صفر نزدیک کنیم.

مثال: فرض کنید استوانه‌ای به شعاع r و ارتفاع h داریم که حجم آن عدد ثابت ۱۰۸ است. یعنی $۳۶\simeq r^۲h \Leftarrow \pi r^۲h=۱۰۸$

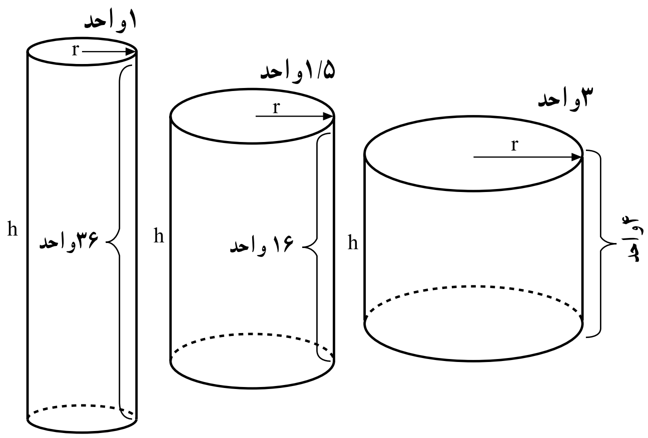
واضح است که با تغییر شعاع، ارتفاع استوانه تغییر خواهد کرد. شکل ۵۴ـ۲ این بستگی را نشان می‌دهد.

جدول ۲۰ـ۲

x	...	−۰/۵	−۰/۱	−۰/۰۱	...	۰	...	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵	...
$f(x)=\frac{۱}{x^۲}$	...	۴								۴	...



شکل ۵۳ـ۲



شکل ۵۴ـ۲

فعالیت ۱۱ ــ ۲

تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱}{x}\,(x\neq ۰)$ ، را درنظر بگیرید.

۱) جدول ۲۱ــ۲ را کامل کنید.

جدول ۲۱ ــ ۲

x	...	−۰/۲	−۰/۱	−۰/۰۱	−۰/۰۰۱	...	۰	...	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	...
$f(x)=\frac{۱}{x}$	...			−۱۰۰						۱۰۰۰			...

۲) در جدول ۲۱ــ۲ متغیر x به چه عددی میل می‌کند؟

۳) با نزدیک شدن x به عدد صفر مقدارهای f(x) چگونه تغییر می‌کنند؟

۴) آیا می‌توان گفت وقتی x از چپ به عدد صفر نزدیک می‌شود f(x) به $-\infty$ میل می‌کند؟

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{۱}{x}=\cdots$$

۵) آیا رابطه‌ی زیر درست است؟

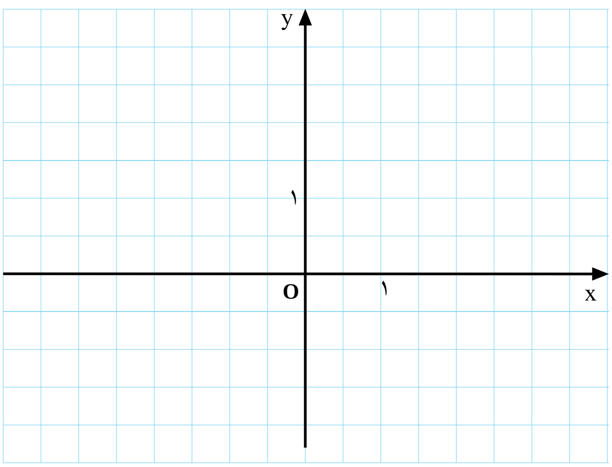
$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x}=+\infty$$

۶) جدول ۲۲ــ۲ را کامل کنید.

جدول ۲۲ ــ ۲

x	−۲	−۱	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲
f(x)					تعریف نشده				

۷) نمودار $y=\frac{۱}{x}$ را در دستگاه شکل ۵۵ ــ ۲ رسم کنید.



شکل ۵۵ ــ ۲

۸) به کمک نمودار $f(x)=\frac{۱}{x}$ رفتار این تابع را، وقتی $x\to ۰$ ، بررسی کنید.

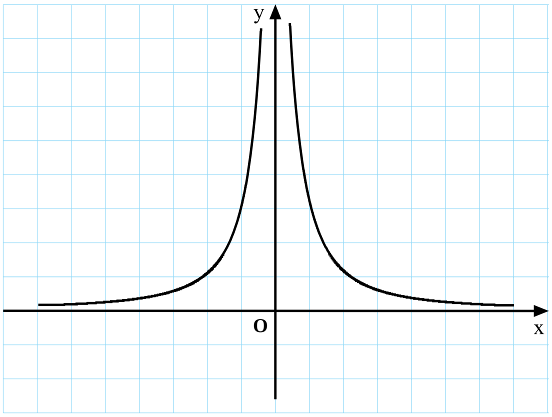
۹) آیا نمودار نیز درستی نتایج مرحله‌های ۵ و ۶ را تأیید می‌کند؟

۱۰) آیا تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ ، وقتی $x\to ۰$ حد دارد؟ چرا؟

> تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ ، وقتی $x\to ۰$ ، حد ندارد.

۱ــ۳ــ۲ــ تعریف (حدّ بینهایت): فرض کنید تابع f دربازه‌ی باز I که شامل عدد a است، مگر احتمالاً در a، تعریف شده باشد.

الف) حد تابع f، وقتی $x \to a$ ، $+\infty$ است هرگاه بتوانیم f(x) را از هر عدد بزرگی، بزرگ‌تر کنیم، به شرط آن‌که x را به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.



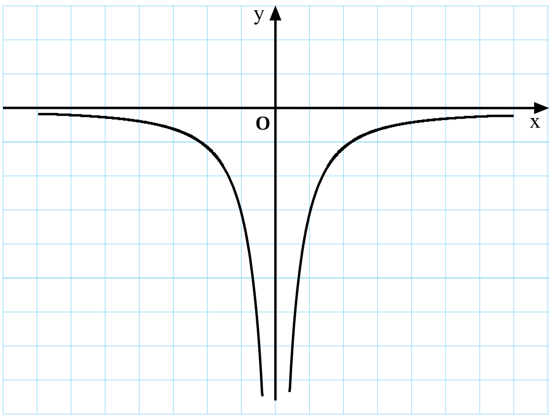
شکل ۵۶ــ۲

ب) حد تابع f، وقتی $x \to a$ ، $-\infty$ است هرگاه بتوانیم f(x) را از هر عدد منفی با قدر مطلق بزرگ، کوچک‌تر کنیم، به شرط آن که x را به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

مثلاً،

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۱}{x^۲} = +\infty \qquad \text{(شکل ۵۶ــ۲)}$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{-۱}{x^۲} = -\infty \qquad \text{(شکل ۵۷ــ۲)}$$



شکل ۵۷ــ۲

مثال‌ها

۱. نشان دهید که

$$\lim_{x\to ۱} \frac{۱}{(x-۱)^۲} = +\infty$$

حل ۱: فرض کنید $X = x-۱$ واضح است که $x \to ۱$ معادل است با $X \to ۰$ بنابراین،

$$\lim_{x\to ۱} \frac{۱}{(x-۱)^۲} = \lim_{X\to ۰} \frac{۱}{X^۲} = +\infty$$

۲. نشان دهید که

$$\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}} \frac{-۴}{(۲x+۱)^۲} = -\infty$$

حل ۲: می‌دانیم که $۲x+۱ = ۲(x+\frac{۱}{۲})$ و $x \to \frac{-۱}{۲}$ معادل است با $X = x+\frac{۱}{۲} \to ۰$ بنابراین،

$$\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}} \frac{-۴}{(۲x+۱)^۲} = \lim_{x\to -\frac{۱}{۲}} \frac{-۴}{۴(x+\frac{۱}{۲})^۲} =$$

$$\lim_{X\to ۰} \frac{-۱}{X^۲} = -\infty$$

تمرین ۸ ــ ۲

حدهای زیر را بررسی کنید، در صورت وجود حد نامتناهی، آن حد را تعیین کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-1}{(x-2)^2}$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{9}{(1-3x)^2}$

پ) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-1}{x-4}$

ت) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2x+1}$

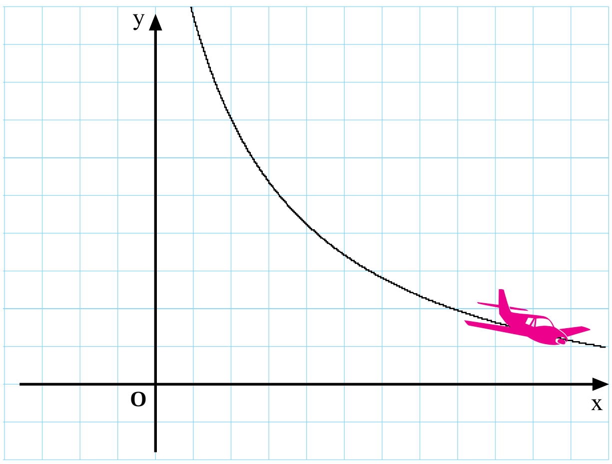
۲ــ۳ــ۲ــ حد در بینهایت: اینک می‌خواهیم مفهوم حد یک تابع را، وقتی $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$، بررسی کنیم.

فعالیت ۱۲ــ۲

تابع f با ضابطه‌ی زیر را درنظر می‌گیریم :

$$f(x)=\frac{1}{x},\quad x\neq 0$$

می‌خواهیم رفتار این تابع را وقتی $x\to+\infty$ بررسی کنیم.



شکل ۵۸ ــ ۲

۱) جدول ۲۳ــ۲ را کامل کنید.

جدول ۲۳ ــ ۲

x	...	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	...
$f(x)=\frac{1}{x}$	...						...

۲) در جدول ۲۳ــ۲ متغیر x چگونه تغییر کرده است؟

۳) وقتی x به $+\infty$ میل می‌کند، f(x) به چه عددی میل می‌کند؟

۴) آیا با میل کردن x به $+\infty$ ، f(x) به صفر میل می‌کند؟

۵) آیا رابطه‌ی زیر برقرار است؟

$$(*)\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}=۰$$

۶) نمودار $y=\frac{۱}{x}$ را در بازه‌ی $(۰,+\infty)$ رسم کنید.

۷) با استفاده از نمودار $y=\frac{۱}{x}$ حد $\frac{۱}{x}$ را وقتی $x\to+\infty$ بررسی کنید.

۸) آیا نمودار هم تساوی رابطه‌ی(*) را تأیید می‌کند؟

کار در کلاس ۴ــ۲

تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱}{x},(x\neq ۰)$ را درنظر می‌گیریم.

۱) جدول ۲۴ــ۲ را کامل کنید.

جدول ۲۴ــ۲

x	...	−۱۰۰۰۰۰۰	−۱۰۰۰۰۰	−۱۰۰۰۰	−۱۰۰۰	−۱۰۰	−۱۰
$f(x)=\frac{۱}{x}$	...						

۲) در جدول ۲۴ــ۲ متغیر x چگونه تغییر می‌کند؟

۳) آیا x به $-\infty$ میل می‌کند؟

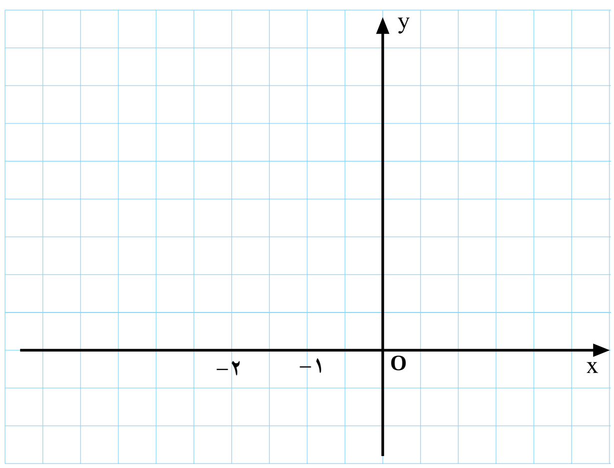
۴) با میل کردن x به $-\infty$ ، f(x) چگونه تغییر کرده است؟

۵) آیا f(x) به صفر میل کرده است؟

۶) آیا رابطه‌ی زیر درست است؟

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}=۰$$

۷) نمودار $y=\frac{۱}{x}$ را در بازه‌ی $(-\infty,۰)$ و در شکل ۵۹ــ۲ رسم کنید.



شکل ۵۹ــ۲

۸) آیا نمودار هم نشان می‌دهد وقتی $x\to-\infty$ ، f(x) به صفر میل می‌کند؟

بنابراین آنچه مورد بررسی قرار گرفت :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}=۰=\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}}$$

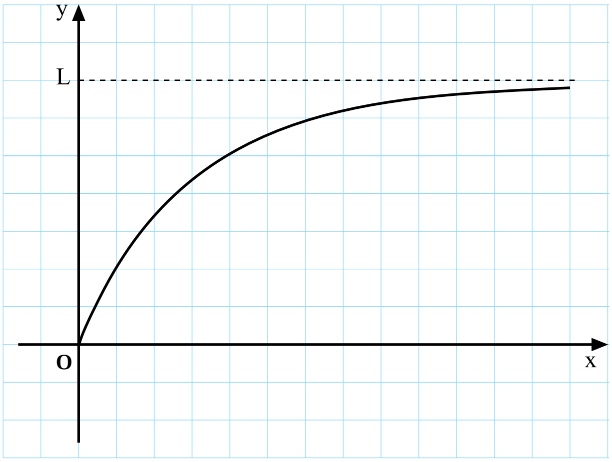
۳ــ۳ــ۲ــ تعریف (حد در بینهایت)

الف) حد یک تابع وقتی $x \to +\infty$:

فرض کنید تابع f برای $x > a$ تعریف شده باشد. گوییم حد f(x) وقتی $x \to +\infty$ مساوی عدد حقیقی L است در صورتی که بتوانیم f(x) را هر چه‌قدر بخواهیم به L نزدیک کنیم به شرط آن‌که x را به قدر کافی بزرگ اختیار کرده باشیم.

ب) حد یک تابع وقتی $x \to -\infty$:

فرض کنید تابع f برای $x < a$ تعریف شده باشد. گوییم حد f(x)، وقتی $x \to -\infty$ ، مساوی عدد حقیقی L است در صورتی که بتوانیم f(x) را هرچه‌قدر بخواهیم به L نزدیک کنیم به شرط آن‌که x را از هر عدد منفی با قدر مطلق بزرگ، کوچکتر کنیم (شکل ۶۰ــ۲).



شکل ۶۰ــ۲

مثلاً،

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}=۰ \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}=۰$$

لذا، اگر قرار دهیم $t=\frac{۱}{x}$ آن‌گاه (جدول‌های ۲۵ــ۲ و ۲۶ــ۲ ملاحظه شوند)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}=\lim_{t\to ۰^+}t=۰$$

همچنین،

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}=\lim_{t\to ۰^-}t=۰$$

از این مطلب می‌توان استفاده کرد و بسیاری از حدهای کسری را حساب کرد.

جدول ۲۵ــ۲

x	$t=\frac{۱}{x}$
۱	۱
۱۰	۰/۱
۱۰۰	۰/۰۱
۱۰۰۰	۰/۰۰۱
۱۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۱
۱۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۱

$$\boxed{\begin{array}{l} x \longrightarrow +\infty \\ t \longrightarrow ۰^+ \end{array}}$$

جدول ۲۶ــ۲

x	$t=\frac{۱}{x}$
۱-	۱-
۱۰-	۰/۱-
۱۰۰-	۰/۰۱-
۱۰۰۰-	۰/۰۰۱-
۱۰۰۰۰-	۰/۰۰۰۱-
۱۰۰۰۰۰۰-	۰/۰۰۰۰۰۱-
$-۱۰^{۱۰}$	$-۱۰^{-۱۰}$

$$\boxed{\begin{array}{l} x \longrightarrow -\infty \\ t \longrightarrow ۰^- \end{array}}$$

الف) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x-۱}{۳+۴x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(۲-\frac{۱}{x})}{x(\frac{۳}{x}+۴)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲-\frac{۱}{x}}{\frac{۳}{x}+۴}$$

$$=\lim_{t\to ۰^+}\frac{۲-t}{۳t+۴}=\frac{۲-۰}{۰+۴}=\frac{۱}{۲}$$

ب) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲}{x^۳+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۱}{x}}{۱+\frac{۱}{x^۳}}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{t}{۱+t^۳}$$

$$=\frac{۰}{۱+۰}=۰$$

پ) ممکن است حد یک تابع وقتی $x \to +\infty$ و یا $x \to -\infty$ عددی حقیقی نباشد بلکه $+\infty$ یا $-\infty$ باشد. به فعالیت زیر توجه کنید.

فعالیت ۱۳ـ۲

تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=۲x+۵$ را درنظر می‌گیریم.

۱) مقدارهای $f(x)$ را، برای xهایی که در جدول (۲۷ـ۱) داده شده است، محاسبه کنید و در جدول بنویسید.

جدول ۲۷ـ۲

x	...	−۱۰۰۰۰۰	−۱۰۰۰۰	−۱۰۰	−۱۰	۰	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	...
f(x)=۲x+۵	...									۲۰۰۰۰۵	...

۲) هنگامی که متغیر x به قدر کافی بزرگ اختیار شود مقدار $f(x)$ چگونه است؟

۳) آیا با میل کردن x به $+\infty$، $f(x)$ به $+\infty$ میل می‌کند؟

۴) آیا با میل کردن x به $-\infty$، $f(x)$ هم به $-\infty$ میل می‌کند؟

۵) آیا رابطه‌های زیر صحیح است؟

$$\lim_{x\to+\infty}(۲x+۵)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}(۲x+۵)=-\infty$$

کار در کلاس ۵ ـ ۲

فعالیت ۱۳ـ۲ را برای تابع $f(x)=-۳x+۵$ تکرار کنید.

فعالیت ۱۴ـ۲

تابع $f(x)=۲x^{۲}+۱۰$ را درنظر بگیرید.

۱) جدول ۲۸ـ۲ را کامل کنید.

جدول ۲۸ـ۲

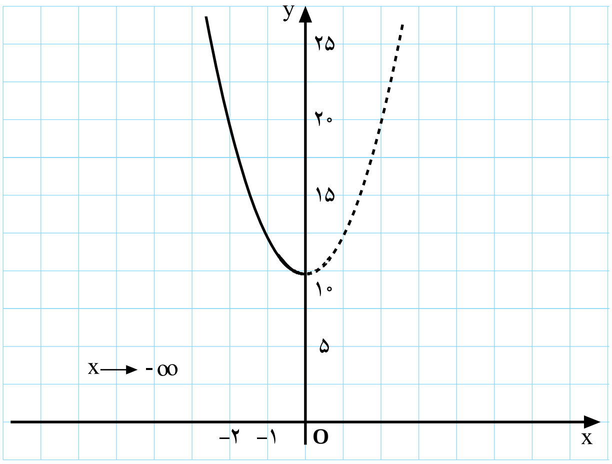
x	...	−۱۰۰۰۰۰	−۱۰۰۰۰	−۱۰۰۰	−۱۰۰	−۱۰	...
f(x)=۲x²+۱۰	...						...

۲) وقتی $x \to -\infty$ مقدارهای $f(x)$ چگونه تغییر می‌کنند؟

۳) آیا وقتی $x \to -\infty$، $f(x)$ به $+\infty$ میل می‌کند؟

۴) آیا رابطه‌ی زیر درست است؟

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (2x^2+10) = +\infty$$



شکل ۶۱ـ۲

۵) جدول ۲۹ـ۲ را کامل کنید.

جدول ۲۹ـ۲

	x	...	-۱۰	۰	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	...
$f(x)=2x^2+10$		...				۲۰۰۱۰		...

۶) وقتی $x \to +\infty$ مقدارهای $f(x)$ چگونه تغییر می‌کنند؟

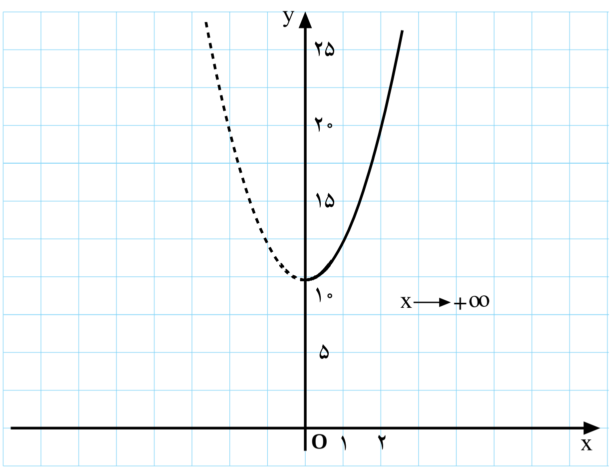
۷) آیا رابطه‌ی زیر درست است؟

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x^2+10) = +\infty$$

۸) آیا درست است که بنویسیم؟

$$\lim_{x\to\pm\infty} (2x^2+10) = +\infty$$

(منظور از $x \to \pm\infty$ آن است که x به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند.)



شکل ۶۲ـ۲

با توجه به فعالیت‌های ۱۲ـ۲، ۱۳ـ۲ و ۱۴ـ۲ می‌توان نشان داد که اگر m یک عدد صحیح مثبت و a عددی حقیقی و غیرصفر باشد آن‌گاه :

$$\lim_{x\to+\infty} ax^m = \begin{cases} +\infty \ , & a>0 \\ -\infty \ , & a<0 \end{cases}$$

(این حکم برای هر عدد حقیقی مثبت m نیز برقرار است).

و همچنین

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a}{x^m} = 0 \qquad (a\in\mathbb{R})$$

(وقتی $x\to+\infty$ ،حکم برای هر عدد حقیقی مثبت m نیز برقرار است).

ضمناً، اگر m عدد مثبت زوج باشد داریم :

$$\lim_{x\to-\infty} ax^m = \begin{cases} +\infty \ , & a>0 \\ -\infty \ , & a<0 \end{cases}$$

ولی اگر m عدد مثبت فرد باشد داریم :

$$\lim_{x\to-\infty} ax^m = \begin{cases} -\infty \ , & a>0 \\ +\infty \ , & a<0 \end{cases}$$

واضح است که

$$\lim_{x\to\pm\infty} ax^0 = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a}{x^0} = a$$

از مطالب بالا برای تعیین حد عبارت‌های کسری که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای هستند استفاده می‌شود.

در زیر، مثال‌هایی در این مورد ملاحظه می‌کنید.

مثال‌های حل شده

الف) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5-x+7}{x^3-2x^2+3x} = ?$

حل: در صورت و مخرج کسر از جمله‌ی با بزرگ‌ترین درجه فاکتور می‌گیریم :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5-x+7}{x^3-2x^2+3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^4}+\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x^5})}{x^3(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (2x^2) = +\infty$$

ب) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-7x^2+1}{x-3x^2} = ?$

حل:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-7x^2+1}{x-3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4(1-\frac{7}{x^2}+\frac{1}{x^4})}{-3x^2(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{1}{3}x^2 = -\infty$$

پ) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x^5+x}{1+x^7-x^3} = ?$

حل: مانند دو مثال قبل عمل می‌کنیم :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x^5+x}{1+x^7-x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^5(-\frac{1}{x^3}+1-\frac{1}{x^4})}{x^7(\frac{1}{x^7}+1-\frac{1}{x^4})}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$$

ت) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^5-x^4+x^2+3}{2-2x^5+x^4-x^2} = ?$

حل:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^5-x^4+x^2+3}{2-2x^5+x^4-x^2} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^5(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5})}{-2x^5(-\frac{1}{x^5}+1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3})}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} (-\frac{3}{2}) = -\frac{3}{2} = -1/5$$

ث) عدد a را چنان تعیین کنید که داشته باشیم :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-ax^2+1}{2x^2+1} = 3$$

حل:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-ax^2+1}{2x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}-a+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}} = -\frac{a}{2}$$

پس باید $\frac{-a}{2} = 3$ و یا $a=-6$.

تمرین ۹ــ۲

۱) حدهای زیر را تعیین کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+5x+1}{x+2}$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x-2}{5x^2+2}$

پ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2+x-3}{3x^2+7x-1}$

ت) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+5}{-\frac{1}{2}x+6}$

ث) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3+1}{x-2x^3}$

ج) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x-x^2+1)$

۲) تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{x^m+x^2+1}{x^2+3x-1}$ داده شده است. عدد m را چنان بیابید که :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=2$$

(**راهنمایی:** عبارت‌های صورت و مخرج کسر مساوی f(x) را بر x^2 تقسیم کنید.)

۳) تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است.

$f(x)=\dfrac{ax^2+3x^2-1}{x^2-2x+4}$ مقدار a را طوری تعیین کنید که داشته باشیم :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=-4$$

۴) تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است :

$f(x)=\dfrac{x^2-3x+7}{x^m+x^2-3}$ حدود m را طوری تعیین کنید که داشته باشیم :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

۵) تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است :

$f(x)=\dfrac{x^n-2x^{n-1}+5}{x^3-2x^2+7x+1}$ حدود n را طوری تعیین کنید که داشته باشیم :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

۶) فرض کنید $f(x)=\dfrac{3x^m+1}{x^2+x+1}$. m را چنان تعیین کنید که

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

پ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

آزمون پایانی (۳)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱ــ اگر $f(x)=\frac{x^{2}-2x-3}{x^{2}-9}$ در $x=3$ پیوسته باشد، مقدار $f(3)$ را به‌دست آورید.

۲ــ اگر m عددی طبیعی باشد و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^{m}+x+1}{x^{2}+2}=+\infty$، کمترین مقدار m چیست؟

۳ــ اگر n عددی طبیعی باشد و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^{n}-3x+14}{x^{3}+6}=0$ ، بیشترین مقدار n چیست؟

۴ــ اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^{n}+2x^{2}+1}{ax^{3}+2}=2$ ، مقدار n و a را به‌دست آورید.

۵ــ اگر به ازای مقدارهای بزرگ x، $\frac{x+2}{2x-1}\le f(x)\le\frac{4x^{2}+3x+1}{8x^{2}+1}$ ، مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ را به‌دست آورید.

۶ــ اگر $f(x)=2ax^{3}+x-a+20$ بر $(x+2)$ بخش‌پذیر باشد، مقدار $f(0)$ برابر چیست؟

۷ــ اگر $f(x)=\frac{x}{x+1}$ مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(f(x))}{2x+1}$ را به‌دست آورید.

تمرین‌های تکمیلی بخش دوم

۱)تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ باضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ۳+۲x, & x \geq ۱ \\ x+۴, & x < ۱ \end{cases}$

داده شده است.

الف) با توجه به ضابطه‌ی f جدول زیر را کامل کنید.

x	۰/۸	۰/۹	۰/۹۹	... ۱ ...	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
f(x)							

ب) $\lim\limits_{x \to ۱} f(x)$ را با استفاده از جدول به دست آورید و درستی آن را بررسی کنید.

۲) حد راست و حد چپ تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \dfrac{۴x^۲-۹}{۲x-۳}, & x \neq \dfrac{۳}{۲} \\ ۲x+۴, & x = \dfrac{۳}{۲} \end{cases}$ را وقتی $x \to \dfrac{۳}{۲}$ به دست آورید. آیا $\lim\limits_{x \to \frac{۳}{۲}} f(x)$ وجود دارد؟

۳) تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$f(x) = \begin{cases} x^۲ + \dfrac{۱}{x}, & x \geq \dfrac{۱}{۲} \\ ۲-x-x^۲, & x < \dfrac{۱}{۲} \end{cases}$ داده شده است.

پیوستگی این تابع را در نقطه‌ی $x = \dfrac{۱}{۲}$ بررسی کنید.

۴) مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ax+۴, & x < -۲ \\ \dfrac{۲}{x}+b, & x > -۲ \\ ۶, & x = -۲ \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = -۲$ پیوسته باشد.

۵) حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to -۲^+} \dfrac{-۱}{(x+۲)^۲}$

ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{۳x+۲}{۱-۲x}$

پ) $\lim\limits_{x \to -۱} \dfrac{x^۲+۲x+۱}{x^۳+۴x^۲+۵x+۲}$

ت) $\lim\limits_{x \to ۵} \dfrac{\sqrt{۲x-۱}}{۲+\sqrt{x-۱}}$

ث) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۶}} (\sin x + \sin ۲x + \sin ۳x)$

ج) $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{\sin ۳x \sin x}{۲x^۲}$

چ) $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{\tan ۳x \sin^۲ ۲x}{۵x^۳}$

ح) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos \frac{x}{۲}}{\pi - x}$