با ریاضیدانان نامی آشنا شوید

غیاث‌الدین جمشید بن مسعود بن محمود طبیب کاشانی، (غیاث‌الدین جمشید مسعود کاشانی) اگر چه فیزیکدان بود، ولی علاقه‌ی اصلیش متوجه ریاضیات و اخترشناسی بود. این ریاضیدان و ستاره‌شناس مشهور ایرانی در حدود ۷۹۰ هجری قمری در کاشان به دنیا آمد. وی از نوابغ ریاضی قرن نهم محسوب می‌شود. در کتاب‌ها آمده است که این مرد بزرگ و با اراده در روزگاری می‌زیست که ایران، میدان تاخت و تاز و یورش مستبدانی همچون چنگیز، هلاکوخان و تیمور بود. غیاث‌الدین جمشید کاشانی در زمان تیموریان زندگی می‌کرد. زمانی که او در سن جوانی به کار تهیه جدول‌های محاسباتی نجوم مشغول بود، ایران در معرض ویرانی قرارداشت. هنگامی که در اوج خلاقیت ذهنی، برای راحتی کار با سایر منجمان، محاسبات دقیق نجومی را انجام می‌داد و ابزار اختراع می‌کرد، تیمور و پسرش شاهرخ با تجاوز خود به ایران، شهرها را یکی پس از دیگری به ویرانه تبدیل می‌ساختند. در آن موقعیت سخت امکان فعالیت‌ها و تحقیقات جدی برای او وجود نداشت. پسر شاهرخ یعنی الغ بیگ، که حاکم سمرقند بود، او را به رصدخانه دعوت کرد و وی از فرصت خوبی که پیش آمده بود، استقبال کرد. کاشی (کاشانی) برجسته‌ترین مقام را در میان کارکنان علمی «مدرسه» یعنی آموزشگاه الهیات و علم، که در سال ۷۹۹ به همت الغ بیگ بنیاد نهاده شده بود، داشت. تا هنگامی که الغ بیگ در سال ۸۲۸ به قتل رسید، سمرقند مهم‌ترین مرکز علمی در خاور زمین بود. کاشی به سازماندهی رصدخانه کمک کرد و در زیج الغ بیگ همکاری نزدیک داشت. مشهورترین اثرش مفتاح الحساب (۸۰۶) می‌باشد که دایرةالمعارف حساب مقدماتی است که صدها سال به عنوان کتاب راهنما به کار رفت. غیاث‌الدین نمونه عالم مسلمان بود. مسلمانی که نه تنها فهم دینی داشت، بلکه در اخلاق عملی و رفتار هم نمونه بود. در کارهای علمی ملاحظه‌ی هیچ کس را نداشت و انصاف، خصلت بزرگی بود که او در زندگی اجتماعی و علمی داشت. در مدرسه بزرگ سمرقند، نزدیک به پانصد طلبه علم از نقاط مختلف دور هم جمع شده بودند. الغ بیگ بیشتر وقت‌ها در کلاس‌های درس و مباحثه شرکت می‌کرد. برخی از روی ترس و حفظ منافع، گفتار غلطش را تأیید می‌کردند ولی غیاث‌الدین در این موارد هیچ ملاحظه‌ای از خودش نشان نمی‌داد و مصلحت اندیشی نمی‌کرد. در مقدمه کتاب «مفتاح‌الحساب» نوشته است «ستایش خداوندی را سزاست که در آفرینش آحاد یگانه است و در به هم پیوستن اعداد گوناگون بی‌همتاست و درود به بهترین آفریده‌ی او محمد (ص) که والاترین شفاعت‌کننده‌ی روز رستاخیز است و بر خاندان او و فرزندانش که راه‌های رهایی و رستگاری را رهنمودند. اما بعد نیازمندترین بندگان خدای تعالی به آموزش و بخشش او، جمشید پسر مسعود، پسر محمود پزشک کاشی، ملقب به غیاث‌الدین که خدا روزگارش را نیکو گرداند ...

در این کتاب روش ریشه‌گیری از اعداد صحیح را شرح می‌دهد و نخستین روش منظم برای پرداختن به کسرهای دهدهی را به دست می‌دهد که احتمالاً در اشاعه کسرهای دهدهی در اروپا تأثیر داشته است. بزرگ‌ترین آثار ریاضی وی عبارت‌اند از رساله المحیطیه (۸۰۳) و رساله الوتر و الجیب.

در رساله محیطیه مقدار سینوس را تا هفده رقم اعشاری تعیین می‌کند و در اثر دوم مقدار سینوس ۱ را تا ده رقم صحیح شصتگانی حساب می‌کند. در ابتدای کتاب رساله محیطیه این‌طور نوشته است «ستایش خداوندی را سزا که از نسبت قطر به محیط دایره آگاه است و اندازه هر مرکب و بسیط را می‌شناسد و آفریننده‌ی زمین و آسمان‌ها و قرار دهنده‌ی نور در تاریکی است و درود و سلام بر محمد مصطفی که مرکز دایره‌ی رسالت و محیط اقطار راهنمایی و دادگری است و بر خاندان و یاران پاک او باد»

جمشید کاشانی انسانی سختکوش، با هدف و منضبط و پر تلاش بود. عمر نسبتاً کوتاه و تعداد زیاد کتاب و تحقیقات او دلیل این ادعا است. جمشید کاشانی کتاب‌های زیادی در زمینه‌ی ریاضی کاربردی نوشته است که عموماً ارتباط نزدیکی با زندگی مردم و رفع مشکلات آنان داشته است. و همچنین تعداد زیادی ابزار نجومی برای محاسبات دقیق حرکت و وضعیت ستارگان ساخت که در روزگارش نظیر نداشت. روش او در حل عددی معادله‌ی تثلیت یکی از مهم‌ترین روش‌های جبر قرون وسطی است. از کارهای مهم کاشانی در نجوم تدوین زیج خاقانی است که در تکمیل نواقص زیج ایلخانی آن را تهیه کرد. وی در سال ۸۱۸ هـ. ق وسیله جدیدی برای رصد ستاره‌ها به نام طبق المناطق اختراع کرد و درباره‌ی چگونگی استفاده از آن و وسیله‌ی دیگری که پیش از آن ساخته بود (به نام لوح اتصالات) رساله جامع و مفیدی موسوم به نزهة الحدائق نوشت و از آثار دیگر او می‌توان به زیج تسهیلات و سلم السماء نیز اشاره کرد. این ریاضیدان بزرگ در سال ۸۳۲ هـ.ق در شهر سمرقند وفات یافت.

بخش سوم

فصل دوم

کاربردهای مشتق (۱)

هدف کلی

به‌کاربردن مشتق تابع برای رسم خط مماس و قائم در یک نقطه از نمودار یک تابع، تعیین صعودی یا نزولی بودن یک تابع و به‌دست‌آورن نقطه‌های اکسترمم یک تابع

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ــ معادله‌ی خط مماس را در یک نقطه از نمودار یک تابع بنویسد.

۲ــ معادله‌ی خط قائم بر یک منحنی را در نقطه‌ای واقع بر آن بنویسد.

۳ــ به کمک مشتق، صعودی یا نزولی‌بودن یک تابع را مشخص کند.

۴ــ رفتار یک تابع را در بازه‌های مختلف تعیین کند.

۵ــ نقطه‌های اکسترمم یک تابع را تعیین کند.

۶ــ با توجه به جدول رفتار تابع و نقاط اکسترمم، نمودار توابع درجه دوم و سوم را رسم کند.

پیش‌آزمون (۲)

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون

۱ــ فرض کنید نقطه‌ی A روی نمودار تابع زیر باشد :

$$y = f(x) = x^۲ - x + ۱$$

الف) اگر $x_A = ۱$ مقدار y_A را حساب کنید.

ب) مقدار $f'(۱)$ را به‌دست آورید.

پ) معادله‌ی خط (D) را بنویسید که از نقطه‌ی A بگذرد و شیب آن $f'(۱)$ باشد.

ت) نمودار $y = f(x)$ و خط (D) را رسم کنید.

ث) آیا خط (D) بر نمودار $y = f(x)$ مماس است؟

۲ــ فرض کنید $y = x^۳$ در $\mathbb{R}$ تعریف شده باشد.

الف) نمودار y را رسم کنید (از طریق نقطه‌یابی).

ب) دو نقطه‌ی A و B را روی نمودار این تابع چنان انتخاب کنید که $x_A < x_B$. با توجه به نمودار، رابطه‌ی بین y_A و y_B را بنویسید. بدون استفاده از نمودار ثابت کنید $y_A < y_B$.

ت) رفتار این تابع چگونه است؟ نام این تابع چیست؟

۳ــ فرض کنید $f(x) = x^۳ - x$. علامت $f'(x)$ را در $\mathbb{R}$ تعیین کنید.

۴ــ اگر $f(x) = x^۲ - ۲x + ۳$ مینیمم مقدار $f(x)$ را به‌دست آورید. توضیح دهید چگونه مینیمم را به‌دست آوردید. f' در x نقطه‌ی مینیمم چه مقداری دارد؟

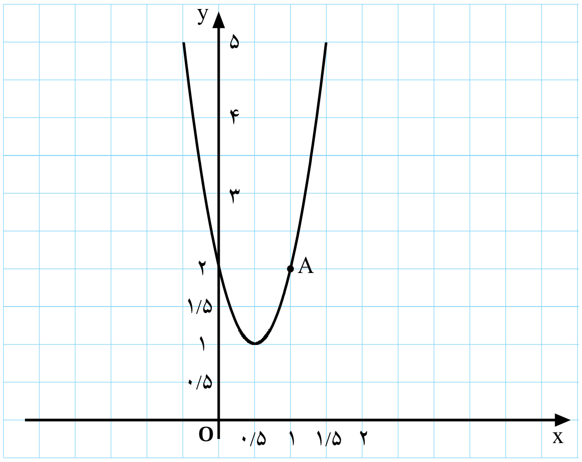
۲ــ۳ــ کاربردهای مشتق (۱)

۱ــ۲ــ۳ــ تعیین معادله‌ی خط مماس و خط قائم:

یکی از کاربردهای مشتق، تعیین معادله‌ی خط مماس و معادله‌ی خط قائم در یک نقطه‌ی دلخواه از نمودار یک تابع است.

فعالیت ۲ــ۳

تابع $y=f(x)=۴x^{۲}-۴x+۲$ و نمودار آن، (شکل ۱۴ــ۳)، داده شده است. برای نوشتن معادله‌ی خط مماس و معادله‌ی خط قائم بر نمودار این تابع در نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}۱\\f(۱)\end{matrix}\right.$ ، کارهای زیر را انجام دهید.



شکل ۱۴ــ۳

۱ــ مقدار $f(۱)$ را حساب کنید.

۲ــ مشتق y را به‌دست آورید.

۳ــ مقدار $f'(۱)$ را حساب کنید.

۴ــ معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی A می‌گذرد و شیب آن $f'(۱)$ است، بنویسید.

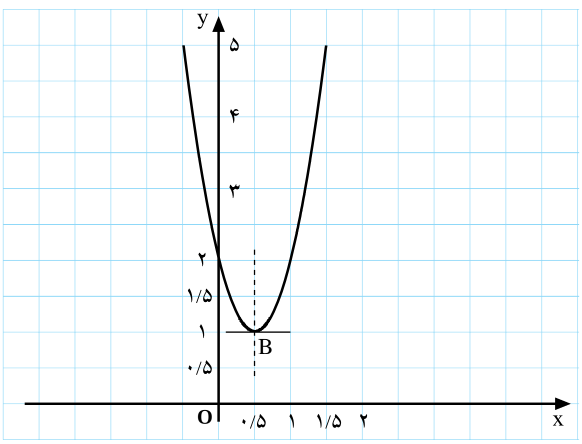
۵ــ آیا $y=۴x-۲$ معادله‌ی خط مماس در نقطه‌ی A است؟

۶ــ با توجه به این که خط قائم بر منحنی در هر نقطه عمود بر خط مماس بر منحنی در آن نقطه است، ابتدا شیب خط قائم و بعد معادله‌ی خط قائم بر نمودار فوق را در نقطه‌ی A بنویسید.

۷ــ خط مماس و خط قائم را در $x=۱$ رسم کنید.

کار در کلاس ۳ــ۳

با انتخاب $B\left|\begin{matrix}\frac{۱}{۲}\\f(\frac{۱}{۲})\end{matrix}\right.$ مراحل ۱ تا ۷ را تکرار کنید (شکل ۱۵ــ۳).



شکل ۱۵ــ۳

مثال ۱: معادله‌ی خط مماس بر تابع $f(x)=-x^{۲}+۶x-۸$ در نقطه‌ی $x=-۱$ واقع بر منحنی را بنویسید.

حل ۱: به‌ازای $x=-۱$، داریم :

$$f(-۱)=-(-۱)^{۲}+۶(-۱)-۸=-۱۵$$

بنابراین، $(-۱,-۱۵)$ نقطه‌ی تماس منحنی است.

از طرفی :

$$f'(x)=-۲x+۶$$

پس، ضریب زاویه‌ی m به‌صورت زیر محاسبه می‌شود :

$$m=f'(-۱)=-۲(-۱)+۶=۸$$

معادله‌ی خط مماس چنین است :

$$y-(-۱۵)=۸(x-(-۱))$$

$$y=۸x-۷$$

مثال ۲: معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع $y=\cos^{۲}x-\sin^{۲}x$، در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۶}$، واقع بر این تابع را بنویسید.

حل ۲: اگر $x=\frac{\pi}{۶}$،

$$y=(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۲}-(\frac{۱}{۲})^{۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$y'=-۲\sin x\cos x-۲\sin x\cos x$$

$$=-۴\cos x\sin x$$

شیب خط مماس $=-۴(\frac{\sqrt{۳}}{۲})(\frac{۱}{۲})=-\sqrt{۳}$

شیب خط قائم $=-\frac{۱}{-\sqrt{۳}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

معادله‌ی خط قائم $\quad y-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}(x-\frac{\pi}{۶})$

تمرین ۳ــ۳

۱) معادله‌ی خط مماس و خط قائم بر نمودار تابع‌های زیر را، در نقطه‌هایی که x آن‌ها داده شده است، بنویسید.

الف) $y=۲x^{۲}-x+۱,\quad x=۲$

ب) $y=x^{۲}+۲x+۲,\quad x=-۱$

پ) $y=\sin^{۲}x,\quad x=\pi$

ت) $y=\frac{x-۱}{x+۱},\quad x=-۲$

ث) $y=\tan x,\quad x=۰$

ج) $y=۲\sqrt{x},\quad x=۱.$

۲) نمودار تابع‌های زیر را در بازه‌ی داده‌شده رسم کنید و معادله‌ی مماس در نقطه‌های داده شده را بنویسید. خط قائم را نیز رسم کنید.

الف) $y=\sin x,\quad x=۰,\quad -\pi\le x\le\pi$

ب) $y=\cos x,\quad x=۰,\quad -\frac{\pi}{۲}\le x\le\frac{۳\pi}{۲}.$

۲ــ۲ــ۳ــ رفتار تابع: مصرف آب یک مجتمع مسکونی، بین ساعت ۸ صبح تا ساعت ۲۰ از رابطه‌ی زیر تبعیت می‌کند (x برحسب ساعت و f(x) برحسب مترمکعب است) :

$$f(x) = ۲۸x - x^۲ - ۱۵۵, \quad x \in [۸,۲۰]$$

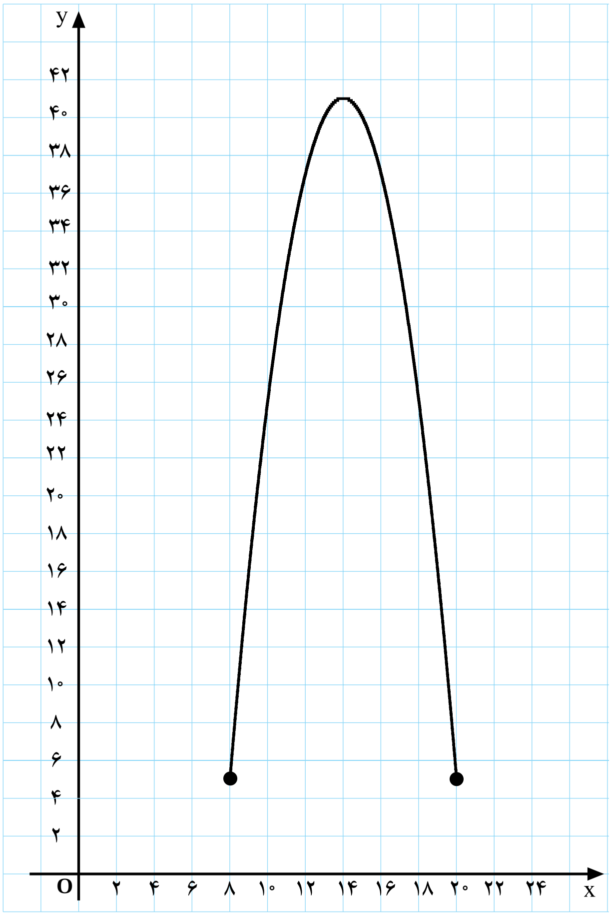
معین کنید در چه بازه‌ی زمانی مصرف آب در حال افزایش (صعود) و در چه بازه‌ی زمانی در حال کاهش (نزول) است؟

در چه زمانی مصرف آب حداکثر است؟ و این حداکثر چند مترمکعب است؟

حل: نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل ۱۶ــ۳ رسم شده است، البته با استفاده از جدول ۲ــ۳ زیر :

جدول ۲ــ۳

x	۸	۱۲	۱۶	۲۰
f(x)	۵	۳۷	۳۷	۵



شکل ۱۶ــ۳

با توجه به شکل ۱۶ــ۳ بگویید حداکثر مصرف آب در چه زمانی رخ می‌دهد؟

درست است، در ساعت ۱۴.

آیا بدون رسم شکل هم این عدد به‌دست می‌آید؟

$$f(۱۴) = ?$$

عدد ۱۴ با اطلاعات قبلی چنین به‌دست می‌آید (امتحان کنید) :

$$f(x) = ۲۸x - x^۲ - ۱۵۵ = ۴۱ - (x - ۱۴)^۲$$

واضح است که حداکثر f(x) مساوی ۴۱ و در $x = ۱۴$ به‌دست می‌آید.

امّا، اگر قرار دهید $f'(x) = ۰$ آنگاه :

$$f'(x) = ۲۸ - ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۱۴$$

تابع f در بازه‌ی [۸,۱۴] صعودی و در بازه‌ی [۱۴,۲۰] نزولی است.

فعالیت ۳ــ۳

تابع $y=f(x)=\frac{۱}{۲}x^{۲}$ و نمودار آن، در شکل ۱۷ــ۳، داده شده است. می‌خواهیم رفتار این تابع را در بازه‌های $(۰,+\infty)$ و $(-\infty,۰)$ بررسی کنیم.

۱ــ دو مقدار $x_{۱}=۱$ و $x_{۲}=۱/۵$ متعلق به بازه‌ی $(۰,+\infty)$ را در نظر بگیرید. آیا، $x_{۱}<x_{۲}$ می‌باشد؟

۲ــ مقدارهای $f(x_{۱})$ و $f(x_{۲})$ را به‌دست آورید.

آیا $f(x_{۱})<f(x_{۲})$ می‌باشد؟

۳ــ قرار دهید $x_{۱}=۲$ و $x_{۲}=۲/۵$

آیا $f(x_{۱})<f(x_{۲})$ می‌باشد؟

۴ــ دو عدد دلخواه $x_{۱}$ و $x_{۲}$ را در بازه‌ی $(۰,+\infty)$ در نظر بگیرید. با تشکیل عبارت $f(x_{۱})-f(x_{۲})=\frac{۱}{۲}x_{۱}^{۲}-\frac{۱}{۲}x_{۲}^{۲}$ نشان دهید که :

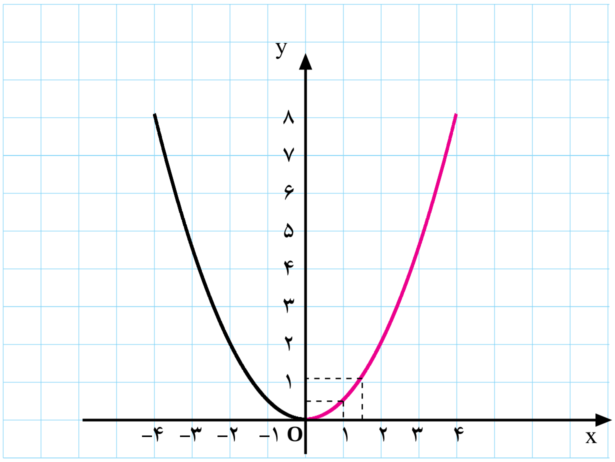
اگر $x_{۱}<x_{۲}$ آنگاه $f(x_{۱})<f(x_{۲})$ (*)

۵ــ با توجه به (*) اگر $x_{۱}$ و $x_{۲}$ دو عدد دلخواه متعلق به بازه‌ی $(۰,+\infty)$ باشند علامت کسر زیر چیست؟

$$\frac{f(x_{۲})-f(x_{۱})}{x_{۲}-x_{۱}}$$

۶ــ با محاسبه‌ی y'، علامت y' را در $(۰,+\infty)$ تعیین کنید.

با توجه به (*) تابع $y=\frac{۱}{۲}x^{۲}$ را بر $(۰,+\infty)$ **صعودی** گوییم.



شکل ۱۷ــ۳ــ نمودار $f(x)=\frac{۱}{۲}x^{۲}$

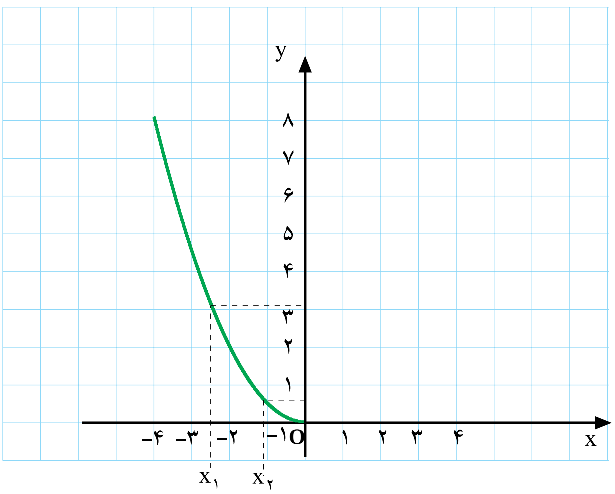
کار در کلاس ۴ــ۳

مشابه فعالیت ۳ــ۳ را در مورد تابع $y=\frac{۱}{۲}x^{۲}$ بر بازه‌ی $(-\infty,۰)$ انجام دهید (شکل ۱۸ــ۳).

۱ــ با تشکیل عبارت $f(x_{۱})-f(x_{۲})$ نشان دهید که، به‌ازای هر $x_{۱}$ و $x_{۲}$ از $(-\infty,۰)$،

اگر $x_{۱}<x_{۲}$ آنگاه $f(x_{۱})>f(x_{۲})$ (†)

۲ــ آیا رابطه‌ی (†) از روی شکل ۱۸ــ۳ به‌وضوح دیده می‌شود؟



شکل ۱۸ــ۳ــ نمودار $y=\frac{۱}{۲}x^{۲}$ برای $x\leq ۰$

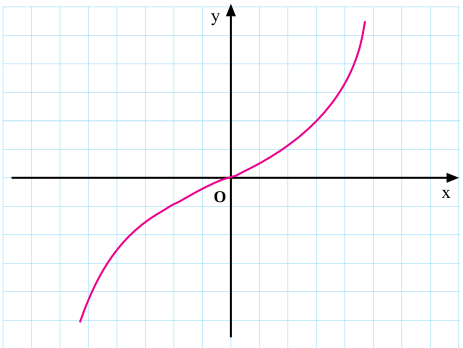
۳ــ علامت عبارت زیر را در بازه‌ی $(-\infty,0)$ تعیین کنید.

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

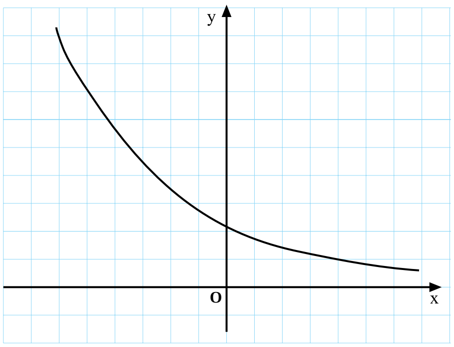
۴ــ با محاسبه‌ی y'، علامت y' را در $(-\infty,0)$ تعیین کنید.

با توجه به (†) تابع $y=\frac{1}{2}x^2$ را بر $(-\infty,0)$ **نزولی** می‌نامیم.

فرض کنید I یک بازه و $y=f(x)$ یک تابع باشد و $I\subset D_f$.



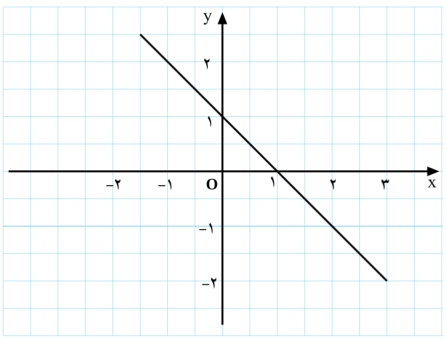
شکل ۱۹ــ۳ــ نمودار یک تابع صعودی



شکل ۲۰ــ۳ــ نمودار یک تابع نزولی

> تعریف ۱. تابع f را بر I صعودی نامیم درصورتی که برای هر x_1 و x_2 متعلق به I، اگر $x_1<x_2$ آنگاه $f(x_1)\le f(x_2)$.

> تعریف ۲. تابع f را بر I نزولی نامیم درصورتی که برای هر x_1 و x_2 متعلق به I، اگر $x_1<x_2$ آنگاه $f(x_1)\ge f(x_2)$.

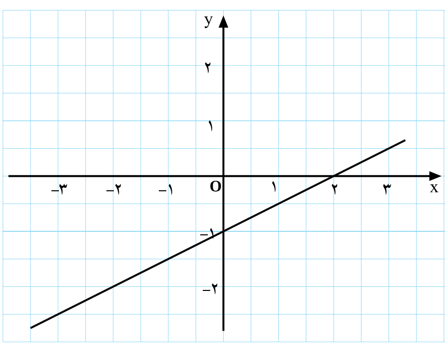


$y=1-x$

شکل ۲۱ــ۳

کار در کلاس ۵ــ۳

۱ــ با استفاده از تعریف صعودی یا نزولی بودن یک تابع معین کنید در شکل‌های ۲۱ــ۳ و ۲۲ــ۳ کدام تابع صعودی و کدام نزولی است؟



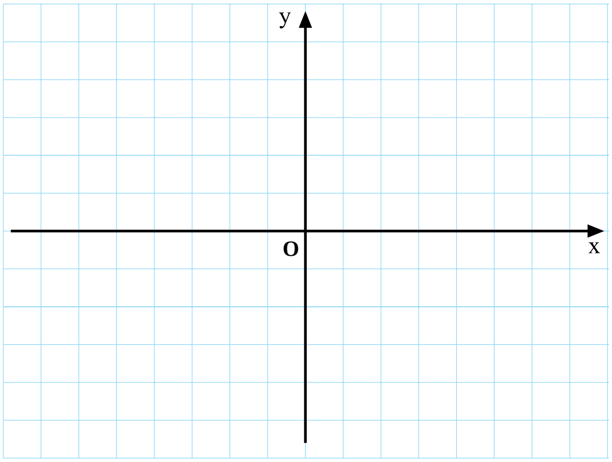
$y=\frac{1}{2}x-1$

شکل ۲۲ــ۳

آیا با استفاده از مشتق این تابع‌ها هم می‌توان در مورد صعودی یا نزولی‌بودن آن‌ها نظر داد؟

تمرین ۴ـ۳

۱ـ تابع $y = x^3$ داده شده است. در رفتار این تابع تحقیق کنید. (ابتدا نمودار این تابع را در شکل ۲۳ـ۳ رسم کنید.)

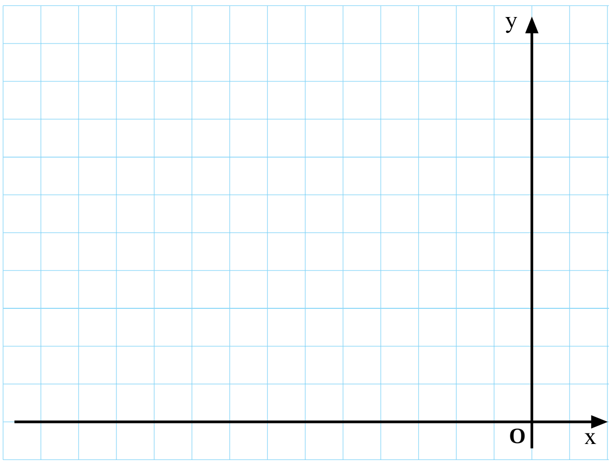


شکل ۲۳ـ۳

۲ـ تابع‌های زیر را در بازه‌ی $(-\infty, 0]$ و در شکل ۲۴ـ۳ رسم کنید و نشان دهید که این تابع‌ها نزولی هستند.

الف) $f(x) = x^2$

ب) $f(x) = x^4$

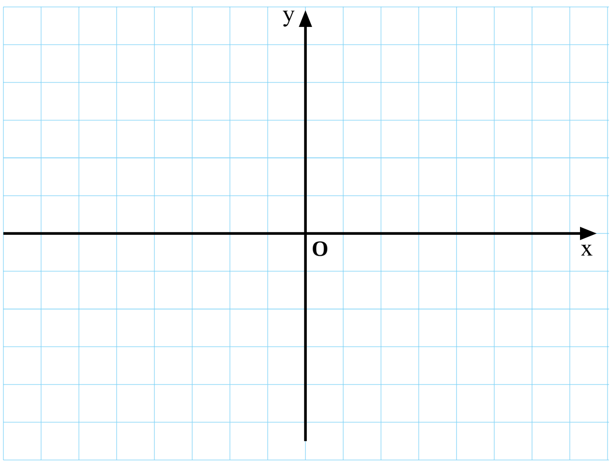


شکل ۲۴ـ۳

۳ـ نمودار تابع‌های زیر را در $\mathbb{R}$ در شکل ۲۵ـ۳، رسم کنید و نشان دهید که این تابع‌ها صعودی هستند.

الف) $f(x) = x$

ب) $f(x) = x^5$



شکل ۲۵ـ۳

۳ــ۲ــ۳ــ مشتق و رفتار تابع:

با توجه به ویژگی یک تابع صعودی (یا نزولی)، درصورتی که این تابع در هر نقطه از دامنه‌اش مشتق داشته باشد، می‌توان با استفاده از علامت مشتق در مورد صعودی یا نزولی‌بودن آن، بدون رسم نمودارش، نظر داد.

فرض کنید تابع $y=f(x)$ بر بازه‌ی I صعودی باشد. در این صورت، اگر x_1 و x_2 متعلق به I باشند:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq 0$$

پس، با فرض $x_1=x$ و $x_2=x+h$، داریم:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0$$

لذا، اگر تابع f در هر نقطه‌ی داخلی از I مشتق داشته باشد، داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)\geq 0$$

به عکس، اگر برای هر نقطه‌ی داخلی x از بازه‌ی I داشته باشیم $f'(x)\geq 0$، آنگاه f بر I صعودی است.

لذا، قضیه‌ی زیر را داریم:

قضیّه‌ی ۱: فرض کنید تابع f بر بازه‌ی باز I مشتق‌پذیر باشد و برای هر نقطه‌ی داخلی x متعلق به I داشته باشیم $f'(x)\geq 0$، در این صورت تابع f بر I صعودی است.

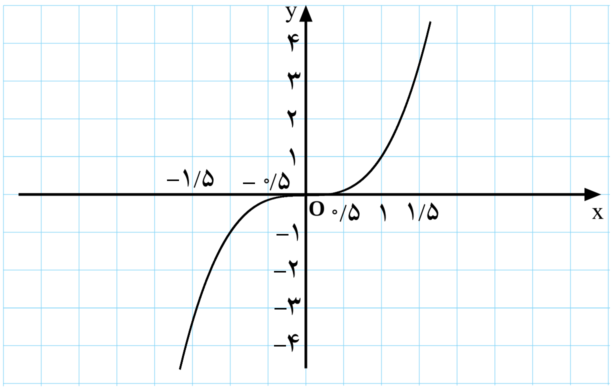
در ستون مقابل کاربرد این قضیه را، برای اثبات صعودی‌بودن چند تابع، ملاحظه می‌کنید.

مثال‌ها(در رابطه با قضیه‌ی۱)

الف) $y=x^3,\ x\in\mathbb{R}$

$$y'=3x^2\geq 0,\ x\in\mathbb{R}$$

لذا، تابع $y=x^3$ بر $\mathbb{R}$ صعودی است.

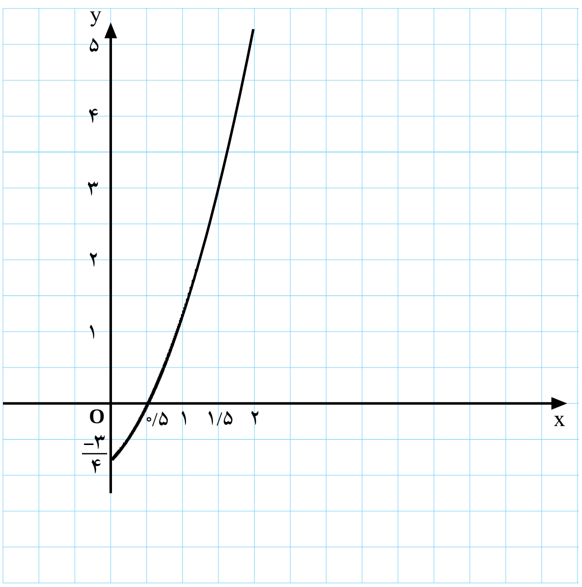


شکل ۲۶ــ۳ــ نمودار $y=x^3$

ب) $y=x^2+x-\frac{3}{4},\ (x\geq 0)$

$$y'=2x+1>0,(x\geq 0)$$

لذا، تابع $y=x^2+x-\frac{3}{4}$ بر $[0,+\infty)$ صعودی است (شکل ۲۷ــ۳).



شکل ۲۷ــ۳ــ نمودار $y=x^2+x-\frac{3}{4}$

به طریق مشابه داریم :

قضیّه‌ی ۲ : اگر تابع f بر بازه‌ی I مشتق‌پذیر باشد و برای هر نقطه‌ی داخلی x متعلق به I داشته باشیم $f'(x) \leq 0$ آنگاه تابع f بر I نزولی است.

قضیه‌های ۱ و ۲ در تعیین رفتار یک تابع (یعنی نزولی یا صعودی بودن آن) بسیار مفیدند.

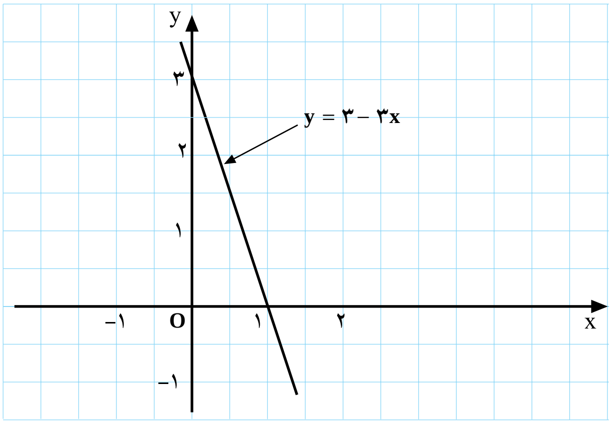
در ستون مقابل، نزولی‌بودن چهار تابع، با استفاده از مشتق آن‌ها، نشان داده شده است.

مثال‌ها (در رابطه با قضیه‌ی ۲)

الف) $y = 3 - 3x, \quad x \in \mathbb{R}$

$$y' = -3 < 0$$

بنابراین، تابع $y = 3 - 3x$ نزولی است (شکل ۲۸ـ۳).



شکل ۲۸ـــ۳ـــ نمودار $y = 3 - 3x$

تعریف ۳. تابع f را بر بازه‌ی I **یکنوا** گوییم درصورتی که f بر I صعودی یا نزولی باشد.

کار در کلاس ۶ـــ۳

با استفاده از قضیه‌های ۱ و ۲ رفتار تابع‌های زیر را در بازه‌های مشخص شده تعیین کنید.

۱) $y = 2x - 100, \qquad x \in (-\infty, +\infty)$

۲) $y = x^2 - 10x + 8, \qquad x \in (-\infty, 0)$

۳) $y = \frac{1}{x}, \qquad x \in (0, +\infty)$

۴) $y = \frac{1}{x}, \qquad x \in (-\infty, 0)$

۵) $y = \tan x, \qquad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

۶) $y = \cos x, \qquad x \in (0, \pi)$

۷) $y = \cot x, \qquad x \in (0, \pi)$

۸) $y = \cos x + x, \qquad x \in \mathbb{R}$

ب) $y = 1 - x - x^2, \quad x \in (0, +\infty)$

$$y' = -1 - 2x < 0, \quad x \in (0, +\infty)$$

بنابراین، تابع $y = 1 - x - x^2$ بر $(0, +\infty)$ نزولی است.

نمودار این تابع را رسم کنید و صحت نتیجه را بررسی کنید.

پ) $y = \frac{1-x}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$

$$y' = \frac{-1(x) - 1(1-x)}{x^2} = \frac{-1}{x^2} < 0, \quad (x > 0)$$

بنابراین، تابع $y = \frac{1-x}{x}$ بر $(0, +\infty)$ نزولی است.

ت) $y = \sin x - x, \quad x \in \mathbb{R}$

$$y' = \cos x - 1 \leq 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

بنابراین، تابع $y = \sin x - x$ نزولی است.

تمرین ۵ـ۳

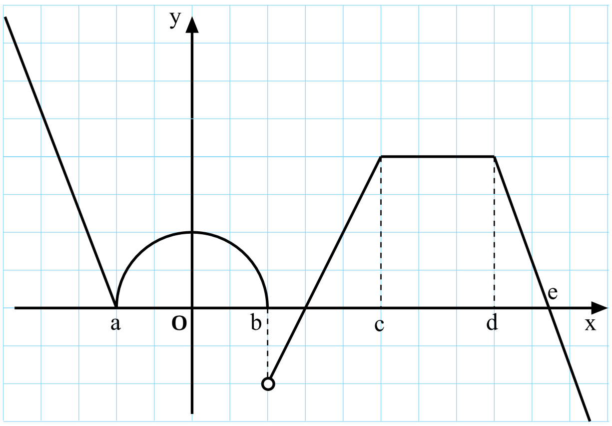
۱ـ تابع f در روبه‌رو تعریف شده است. بازه‌هایی را که f در آن‌ها صعودی یا نزولی است مشخص کنید. آیا f در $\mathbb{R}$ صعودی است؟ (نمودار f را رسم کنید.)

$$f(x)=\begin{cases}x^{2}+1, & x>0\\ 2x-1, & x\le 0\end{cases}$$

۲ـ تابع g در روبه‌رو تعریف شده است. ثابت کنید g بر $\mathbb{R}$ یکنواست. نمودار تابع g را رسم کنید. آیا نمودار هم همین نتیجه را می‌دهد؟

$$g(x)=\begin{cases}-2x-1, & x\ge 0\\ x^{2}-1, & x<0\end{cases}$$

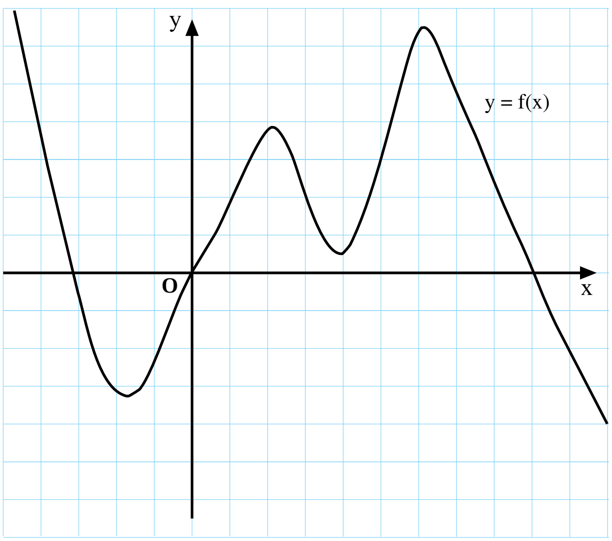
۳ـ با توجه به نمودار تابع $y=h(x)$ (شکل ۲۹ـ۳) بازه‌های یکنوایی آن را تعیین کنید.



شکل ۲۹ـ۳ـ نمودار $y=h(x)$

۴ـ تابع $y=\dfrac{2x+a}{x+a-2}$ داده شده است. حدود a را چنان تعیین کنید که $y'>0$ باشد.

۴ـ۲ـ۳ـ تغییرات تابع: منظور از بررسی تغییرات تابع، معین کردن قسمت‌هایی از دامنه‌ی تابع است که تابع در آن‌ها صعودی یا نزولی است. این مطلب در رسم دقیق‌تر نمودار تابع مفید است و باعث دقت و سرعت در رسم نمودار می‌شود. در شکل ۳۰ـ۳ بازه‌هایی را که تابع f در آن‌ها صعودی یا نزولی است مشخص کنید.



شکل ۳۰ـ۳

مثال: تابع $y=-۲x^۲+۴x$ مفروض است، تغییرات این تابع را مورد بررسی قرار دهید.

حل: ابتدا y' را حساب می‌کنیم.

$$y'=-۴x+۴$$

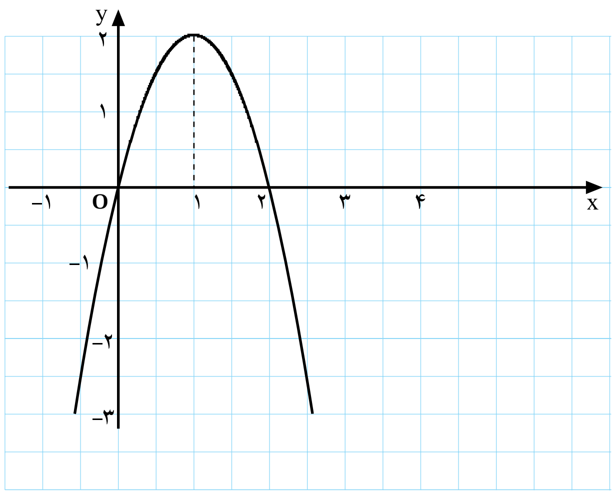
سپس y' را در جدول۳ــ۳ تعیین علامت می‌کنیم، برای این منظور قرار می‌دهیم $y'=۰$.

$$y'=۰\Rightarrow -۴x+۴=۰\Rightarrow x=۱$$

با توجه به آنچه در مورد تابع‌های یکنوا گفته شد، جدول تغییرات، (جدول۳ــ۳) و نمودار تابع در شکل ۳۱ــ۳ ملاحظه می‌شود. نمودار تابع، تنها به کمک جدول و نقاطی که نمودار محورها را قطع می‌کند، رسم شده است.

جدول ۳ــ۳

x	$-\infty$		۱		۲		$+\infty$
y'	+		۰	−		−	
y	$-\infty$	↗	۲	↘	۰	↘	$-\infty$



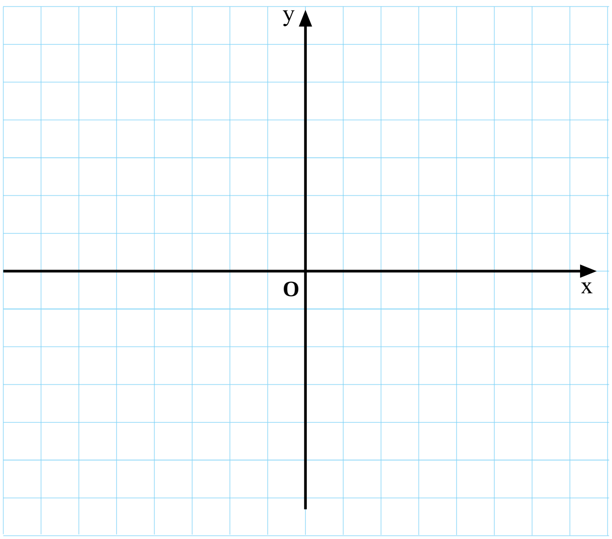
شکل ۳۱ــ۳

کار در کلاس ۷ــ۳

با توجه به مثال بالا، تغییرات تابع‌های زیر را بررسی کنید (از نمودار نیز می‌توانید استفاده کنید.) (شکل۳۲ــ۳).

الف) $y=x^۲-۴x+۳$

ب) $y=۲x-۸x^۳$.



شکل ۳۲ــ۳

تمرین ۶ــ۳

تغییرات تابع‌های زیر را بررسی کنید (بدون رسم نمودار).

الف) $y=(x-۳)^۲$

ب) $y=\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۲}{۲}-۲x+۱$

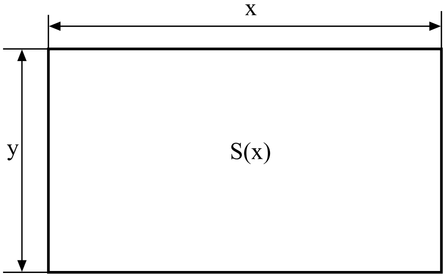
پ) $y=x(۲-x)$

ت) $y=-x$

ث) $y=۲$.

۵ــ۲ــ۳ــ نقطه‌های ماکسیمم و مینیمم نسبی یک تابع:

تابع: فرض کنید می‌خواهیم مستطیلی رسم کنیم که محیط آن ۸ سانتی‌متر و مساحت آن ماکسیمم باشد. مطابق شکل ۳۳ــ۳ اگر طول و عرض مستطیل را x و y بنامیم داریم:



شکل ۳۳ــ۳

$$۲(x+y)=۸$$

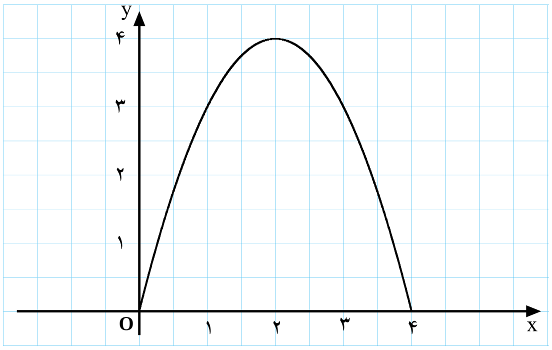
و یا

$$x+y=۴$$

و اگر مساحت مستطیل را با s(x) نمایش دهیم:

$$s(x)=xy=x(۴-x)=۴x-x^{۲}$$

در شکل ۳۴ــ۳ نمودار تابع s(x) را دربازه‌ی $(۰,۴)$ و جدول تغییرات آن را در جدول ۴ــ۳ ملاحظه می‌کنید.



شکل ۳۴ــ۳ــ نمودار $s(x)=۴x-x^{۲}$ در بازه‌ی $(۰,۴)$

$$s'(x)=۴-۲x=۰\Rightarrow x=۲$$

$s(۲)=۸-۴=۴$ سانتی‌متر مربع

جدول ۴ــ۳

x	۰		۲		۴
s′(x)		+	۰	−	
s(x)	۰	↗	۴	↘	۰

ملاحظه می‌کنید که تابع s(x) در $(۰,۲)$ صعودی و در $(۲,۴)$ نزولی است. ضمناً، مشتق آن در $(۰,۲)$ مثبت و در $(۲,۴)$ منفی است.

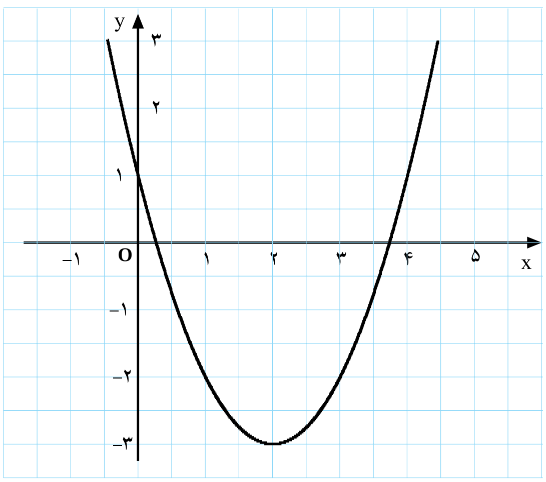
s(x) به ازای $x=۲$ بیشترین مقدار را دارد و ماکسیمم آن ۴ است. این تابع در نقطه‌ی $(۲,۴)$ دارای ماکسیمم نسبی است.

درشکل ۳۵ــ۳ نمودار $y=x^{۲}-۴x+۱$ در $(-\infty,+\infty)$ رسم شده است و جدول تغییرات آن، جدول ۵ــ۳ نیز ملاحظه می‌شود. این تابع در $(-\infty,۲)$ نزولی و در $(۲,+\infty)$ صعودی است. لذا، در $x=۲$ کمترین مقدار یعنی ۳ − را داراست.

$$y=x^{۲}-۴x+۱$$

$$y'=۲x-۴=۰\Rightarrow x=۲$$

$$y(۲)=-۳$$



شکل ۳۵ــ۳

جدول ۵ــ۳

x	−∞		۰		۱		۲		۳		+∞
y′		−		−		−	۰	+		+	
y	+∞	↘	۱	↘	−۲	↘	−۳	↗	−۲	↗	+∞

تعریف ۴. گوییم تابع f در نقطه‌ی $(x_{۰},f(x_{۰}))$ دارای مینیمم نسبی است در صورتی که بازه‌ای باز شامل $x_{۰}$، مانند $(a,b)\subset D_f$ باشد به قسمی که برای هر x از این بازه:

$$f(x_{۰})\le f(x)$$

$f(x_{۰})$ را **اندازه‌ی مینیمم نسبی** نامیم.

تعریف ۵. گوییم تابع f در نقطه‌ی $(x_{۰},f(x_{۰}))$ دارای ماکسیمم نسبی است در صورتی که بازه‌ای باز شامل $x_{۰}$، مانند $(a,b)\subset D_f$ باشد به قسمتی که برای هر x از این بازه:

$$f(x_{۰})\ge f(x)$$

$f(x_{۰})$ را **اندازه‌ی ماکسیمم نسبی** نامیم.

در شکل ۳۶ــ۳ نمودار $y=f(x)$ را ملاحظه می‌کنید که دارای چند نقطه‌ی ماکسیمم و مینیمم نسبی است.

تعریف ۶. نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی یک تابع را نقاط **اکسترمم** تابع نامند.

با توجه به آنچه در صفحه‌ی قبل گفته شد نقطه‌های ماکسیمم و مینیمم نسبی یک تابع را، که در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق دارد، به طریق زیر حساب می‌کنیم.

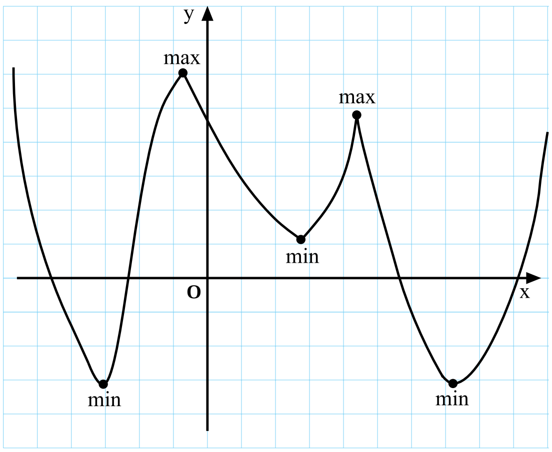
الف) y' را حساب می‌کنیم.

ب) ریشه‌های معادله‌ی $y'=۰$ را به‌دست می‌آوریم.

پ) اگر y' در یک طرف یک ریشه مثبت (منفی) و در طرف دیگر آن منفی (مثبت) باشد تابع در آن نقطه ماکسیمم (مینیمم) نسبی است.

ت) در صورتی که y' در $x_{۰}$ صفر باشد ولی در دو طرف $x_{۰}$ دارای یک علامت باشد تابع در $x_{۰}$ ماکسیمم یا مینیمم نسبی ندارد. (به فعالیت ۴ــ۳ مراجعه کنید.)

در روبه‌رو دو مثال حل شده است.



شکل ۳۶ــ۳ــ نمودار $y=f(x)$

مثال‌ها:

۱) $y=x^{۳}-x^{۲}-۵x+۲$

$$y'=۳x^{۲}-۲x-۵$$

$$y'=۰\Rightarrow ۳x^{۲}-۲x-۵=۰\Rightarrow \begin{matrix} x_{۱}=-۱ \\ x_{۲}=\frac{۵}{۳}\end{matrix}$$

جدول ۶ــ۳

x	$-\infty$		-۲		-۱		$\frac{۵}{۳}$		۲		$+\infty$
y'		$+$	۱۱	$+$	۰	$-$	۰	$+$	۳		
y	$-\infty$	$\nearrow$	۰	$\nearrow$	۵	$\searrow$	$\frac{-۱۲۱}{۲۷}$	$\nearrow$	-۴		$+\infty$

تابع $y=x^{۳}-x^{۲}-۵x+۳$ در $(-۱,۵)$ ماکسیمم نسبی و در $(\frac{۵}{۳},\frac{-۱۲۱}{۲۷})$ مینیمم نسبی دارد.

۲) $y=۲x^{۴}-x^{۲}+۱$

$$y'=۸x^{۳}-۲x=۲x(۴x^{۲}-۱)$$

$$y'=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ \ x=\pm\frac{۱}{۲}$$

جدول ۷ــ۳

x	$-\infty$		$\frac{-۱}{۲}$		۰		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{۷}{۸}$	$\nearrow$	۱	$\searrow$	$\frac{۷}{۸}$	$\nearrow$	$+\infty$

لذا، تابع y در $(-\frac{۱}{۲},\frac{۷}{۸})$ مینیمم نسبی، در $(۰,۱)$ ماکسیمم نسبی و در $(\frac{۱}{۲},\frac{۷}{۸})$ مینیمم نسبی دارد.

فعالیت ۴ــ۳

تابع $y=(x-1)^3$ داده شده است.

۱ــ مشتق y را حساب کنید.

$y' =$

۲ــ ریشه‌های معادله‌ی $y'=0$ را به دست آورید.

$y'=0 \Rightarrow$

۳ــ جدول تغییرات (جدول ۸ــ۳)، تابع را کامل کنید.

۴ــ آیا در نقطه‌ای که y' صفر می‌شود، y' تغییر علامت می‌دهد؟

۵ــ نمودار تابع را رسم کنید.

۶ــ علت این که تابع ماکسیمم یا مینیمم نسبی ندارد چیست؟

جدول ۸ــ۳

x	$-\infty$	$+\infty$
y'		
y	$-\infty$	$+\infty$

کار در کلاس ۸ــ۳

تابع $y=\frac{2x-1}{x+2}$ داده شده است.

۱ــ y' را حساب کنید.

۲ــ y' را تعیین علامت کنید.

۳ــ آیا این تابع نقطه‌ی اکسترمم دارد؟ چرا؟

جدول ۹ــ۳

x	
y'	
y	

مثال ۱: تابع f با ضابطه‌ی $y=ax^2+bx+3$ داده شده است، a و b را چنان بیابید که به ازای $x=2$ تابع دارای ماکسیمم یا مینیمم نسبی به اندازه‌ی (-1) باشد.

حل ۱: اولاً مختصات نقطه‌ی اکسترمم $(2,-1)$ باید در ضابطه‌ی تابع صدق کند. پس :

$$-1=4a+2b+3 \Rightarrow 2a+b=-2 \qquad (1)$$

ثانیاً، باید $y'(2)=0$. بنابراین،

$$y'=2ax+b \Rightarrow 4a+b=0 \qquad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=-2 \\ 4a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=1} \ , \ \boxed{b=-4}$$

مثال ۲: در تابع $y=ax^۲+bx+c$ ضریب‌های a، b و c را چنان بیابید که نمودار تغییرات تابع محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند و به ازای $x=۱$ تابع دارای ماکسیمم یا مینیمم نسبی به اندازه‌ی ۴ باشد.

حل ۲: نقطه‌ی برخورد نمودار تغییرات تابع با محور عرض‌ها نقطه‌ی $(۰,۳)$ و نقطه‌ی اکسترمم این تابع $(۱,۴)$ است. بنابراین، نقطه‌ی $(۰,۳)$ روی نمودار تابع است:

$$(۰,۳)\Rightarrow \boxed{۳=c}$$

نقطه‌ی $(۱,۴)$ روی نمودار تابع است:

$$(۱,۴)\Rightarrow ۴=a+b+c\Rightarrow a+b=۱ \qquad (۳)$$

باید $y'(۱)=۰$:

$$y'=۲ax+b\Rightarrow ۲a+b=۰ \qquad (۴)$$

$$(۳) \text{ و } (۴) \Rightarrow \boxed{a=-۱}\ ,\ \boxed{b=۲}$$

تمرین ۷ــ۳

۱ــ نقاط اکسترمم تابع‌های زیر را در بازه‌هایی که مشخص شده تعیین کنید.

الف) $y=\sin x,\quad x\in[۰,\pi]$

ب) $y=\cos x,\quad x\in\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$

پ) $y=x-۲x^۲,\quad x\in\mathbb{R}$

۲ــ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=ax^۳+(a-۱)x^۲+۴x$ داده شده است. مقدار a را چنان بیابید که در $x=-۲$ تابع ماکسیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد.

۳ــ اگر $y=ax^۳+bx^۲+cx+d$ ضریب‌های a، b، c و d را چنان تعیین کنید که برای $x=-۱$ تابع دارای ماکسیمم یا مینیمم نسبی به اندازه‌ی ۸ باشد و نمودار تابع محور xها را در نقطه‌ی $(۱,۰)$ و محور yها را در نقطه‌ی $(۰,۵)$ قطع کند.

آزمون پایانی (۲)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱ــ معادله‌ی خط مماس و خط قائم بر نمودار تابع $y=x^{2}+2x+3$ را در $x=1$ بنویسید.

۲ــ معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع $y=\cos^{2}x+2$ را در $x=\frac{\pi}{2}$ بنویسید.

۳ــ صعودی یا نزولی بودن تابع‌های زیر را به کمک تعیین علامت مشتق تابع مشخص کنید.

الف) $y=2-x^{3},\quad x\in\mathbb{R}$

ب) $y=x^{2}-1\ ,\quad x\in[0,+\infty)$

۴ــ تغییرات تابع زیر را معین کنید. سپس نمودار آن را رسم نمایید.

$$y=x^{3}-3x^{2}+2$$

۵ــ نقاط اکسترمم تابع زیر را تعیین کنید.

$$y=x^{3}+x^{2}-x-1$$

۶ــ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=ax^{3}+2ax^{2}+2x$ داده شده است. مقدار a را چنان تعیین کنید که تابع در $x=-1$ دارای ماکسیمم یا مینیمم نسبی باشد.

منابع

1- Joshi, N. A. , Diwan, M. J. , Joshi, Vigay V. , Vaida, A. S. & Krishnann, S. (2000) Differential Equations and Calculus. Sheth Publishers PVT. LTD.

2- Barnett, Raymond A. (1979) College Algebra, Second Edition. McGraw - Hill Book Company.

3- Bradley Gerald L. and Smith Karl J. (1995) Single Variable Calculus. Prentice Hall, Inc.

4- Marsden Jerrold and Weinstein Alan (1980) Calculus 1, Springer- Verlag.

۵ــ روبرت الیس، دنی گولیک، (۱۳۷۳) **حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسه‌ی تحلیلی**. ترجمه‌ی دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده، انتشارات پژوهش ۱۳۷۳

۶ــ بابلیان، اسماعیل و همکاران (۱۳۸۰)، **ریاضیات ۱ و ریاضیات ۲** : نظری (رشته‌های علوم تجربی ــ ریاضی و فیزیک ــ فنی و حرفه‌ای). سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش

۷ــ رستمی، محمد هاشم و همکاران (۱۳۸۱)، **ریاضیات ۳** : نظری (رشته‌ی علوم تجربی). سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش

۸ــ گویا، زهرا و گویا، مریم (۱۳۸۰)، **ریاضی** : نظری (رشته‌های ادبیات و علوم انسانی ــ علوم و معارف اسلامی). سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش

۹ــ پاریاب، خلیل و همکاران (۱۳۸۰)، **ریاضی ۵** : فنی وحرفه‌ای (کلیه‌ی رشته‌های زمینه صنعت و رشته‌های کامپیوتر و ماشین‌های کشاورزی). سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش

۱۰ــ بابلیان، اسماعیل (۱۳۷۷)، **ویژگی‌ها و تولید فرکتال‌ها**. بیست و نهمین کنفرانس ریاضی کشور، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱۱ــ بابلیان، اسماعیل (۱۳۷۹)، **استفاده از کامپیوتر در اثبات احکام ریاضی**. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌های ۵۹ و ۶۰

۱۲ــ رستمی، محمدهاشم (۱۳۷۷)، **جبر پایه**، انتشارات مدرسه