فصل ۴

احتمال: اندازه گیری شانس

با توجّه به آشنایی که با مفاهیم پدیده‌های تصادفی، فضاهای نمونه‌ای و پیشامدهای تصادفی پیدا کردیم، اکنون می‌توانیم احتمال وقوع یک پیشامد تصادفی را مورد مطالعه قرار دهیم. به‌عبارت دیگر، می‌خواهیم شانس وقوع یک پیشامد تصادفی را اندازه‌گیری کنیم. برای این منظور احتمال وقوع پیشامدهایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در تمام فضای نمونه‌ای به‌طور یکسان در نظر گرفته می‌شوند مانند پرتاب سکه که در آن احتمال آمدن پشت یا رو یکسان است.

۴ــ۱ــ احتمال هم‌شانس در فضاهای گسسته

فضای گسسته را فضایی گرفتیم که تعداد عناصر آن متناهی باشند، و بنابراین هر زیرمجموعهٔ آن دارای تعداد معینی عضو است که قابل شمارش می‌باشد و چون هر زیرمجموعه یک فضای نمونه‌ای، یک پیشامد می‌باشد، بنابراین، با تعیین تعداد اعضای متناظر با هر پیشامد خاص و تقسیم آن بر تعداد کل عناصر فضای نمونه‌ای، می‌توان شانس وقوع آن پیشامد یا احتمال وقوع آن را اندازه گرفت. به‌زبان ریاضی برای به‌دست آوردن $P(A)$، احتمال وقوع پیشامد A، رابطهٔ زیر را به‌کار می‌بریم.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

که $n(A)$ تعداد عضوهای A و $n(S)$ تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای S است. احتمال در فضاهای گسستهٔ هم‌شانس، احتمال **کلاسیک** نیز نامیده می‌شود.

مثال ۱: در ریختن یک تاس سالم[۱]، احتمال آمدن عدد ۴ چقدر است؟

حل: فضای نمونه آزمایش مورد بحث عبارت است از :

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

۱ــ تاس سالم تاسی است که متقارن بوده و شانس آمدن هر وجه آن یکسان باشد.

احتمال ظاهر شدن عدد ۴ یا به‌عبارت دیگر احتمال وقوع پیشامد $A=\{۴\}$ عبارت است از :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۶}$$

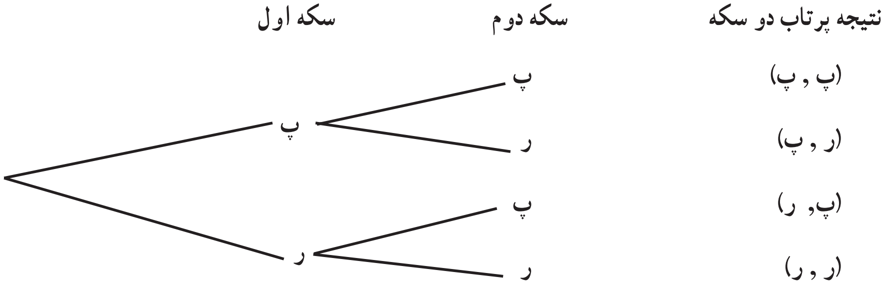
مثال ۲: دو سکه سالم را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال وقوع پدیده‌های زیر را محاسبه کنید.

الف ــ هر دو سکه به‌پشت بیفتد.

ب ــ یکی از دو سکه به‌پشت، و دیگری به‌رو بیفتد.

پ ــ حداقل یکی از سکه‌ها به‌پشت بیفتد.

حل: فضای نمونه‌ای آزمایش مورد بحث بااستفاده از نموداردرختی به‌قرار زیر است :



به‌عبارت دیگر فضای‌نمونه‌ای‌عبارت است از{ (ر, ر), (پ , ر), (ر ,پ),(پ ,پ) } = S پیشامد وقوع دو سکه به پشت زیرمجموعه { (پ , پ) } = $A_۱$ از S است، پس :

$$P(A_۱)=\frac{n(A_۱)}{n(S)}=\frac{۱}{۴}$$

پیشامد این‌که یکی از دو سکه به پشت و دیگری به رو بیفتد زیرمجموعهٔ { (ر, پ) ,(پ,ر) } = $A_۲$ از S می‌باشد، در نتیجه :

$$P(A_۲)=\frac{n(A_۲)}{n(S)}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

و بالاخره پیشامد این‌که حداقل یک سکه به‌پشت بیفتد زیرمجموعهٔ $A_۳$ از S است که { (ر, پ), (پ , ر), (پ , پ) } = $A_۳$ ، زیرا کافی است یکی از سکه‌ها به‌پشت بیفتد یا هر دو سکه به‌پشت بیفتند، پس :

$$P(A_۳)=\frac{n(A_۳)}{n(S)}=\frac{۳}{۴}$$

مثال ۳: در ریختن یک جفت تاس قرمز و سبز، احتمال این‌که مجموع ارقام ظاهر شده برابر ۷

باشد را محاسبه کنید.

حل: در این آزمایش، فضای نمونه‌ای عبارت است از

$$S=\{(a,b)\mid a,b\in K\}=K\times K$$

که $K=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$، پس S دارای ۳۶ عضو می‌باشد. پیشامد مورد نظر عبارت است از :

$$A=\{(۱,۶)،(۲,۵)،(۳,۴)،(۴,۳)،(۵,۲)،(۶,۱)\}$$

پس :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

مثال ۴: تمام ترکیبات دو رقمی مجموعهٔ اعداد $\{۱,۲,۳\}$ را روی کارت‌های مختلف نوشته (هرترکیب روی یک کارت) و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، یک کارت را به‌طور تصادفی برمی‌داریم احتمال آن که روی این کارت عدد ۲ باشد چیست؟

حل: فضای نمونه آزمایش مورد نظر عبارت است از :

$$S=\{۱۲,۱۳,۲۱,۲۳,۳۱,۳۲\}$$

و پیشامد مطلوب زیرمجموعهٔ A از فضای نمونه است :

$$A=\{۱۲,۲۱,۲۳,۳۲\}$$

در نتیجه احتمال آن برابر است با :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

مثال ۵: از مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,\ \ldots,۱۰۰۰\}$، عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد انتخاب شده بر ۳ بخش‌پذیر باشد چقدر است؟

حل: فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی شامل هزار عضو است. پس $n(S)=۱۰۰۰$.
فرض می‌کنیم A مجموعهٔ همهٔ اعدادی باشد که بین ۱ تا ۱۰۰۰ هستند و بر ۳ نیز بخش‌پذیرند، پس :

$$A=\{۳m:\ ۱\le m\le ۳۳۳\}$$

و $n(A)=۳۳۳$. در نتیجه احتمال این‌که عدد انتخابی بر ۳ بخش‌پذیر باشد برابر $\frac{۳۳۳}{۱۰۰۰}$ است.

مثال ۶: از مجموعهٔ اعداد طبیعی $\{۱,۲,۳,\ \ldots,N\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال این‌که عدد انتخابی بر عدد k، $(۱\le k\le N)$ بخش‌پذیر باشد چقدر است؟

حل: فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی شامل N عضو است. فرض کنید A پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخابی بر عدد k باشد، در این‌صورت :

$$A = \left\{ km: \quad ۱ \le m \le \left[\frac{N}{k}\right] \right\}$$

که در آن، $[x]$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی با x است. پس

$$n(A) = \left[\frac{N}{k}\right]$$

$$P(A) = \frac{\left[\frac{N}{k}\right]}{N}$$

مثال ۷: از یک سبد محتوی ۴ سیب سالم و ۵ سیب فاسد، ۲ سیب به‌طور تصادفی بیرون می‌آوریم. مطلوب است احتمال آن‌که هر دو سیب سالم باشند.

حل: در بسیاری از موارد اصولاً نوشتن پیشامدهای مطلوب و فضای نمونه‌ای به‌صورت فهرست‌وار، کاری وقت‌گیر و دشوار است و باید از راه دیگری تعداد عناصر مورد نیاز را شمارش کنیم. در این مثال فضای نمونه عبارت است از همهٔ ترکیبات دوتایی از سیب‌ها که می‌توان آن‌ها را از یک سبد محتوی ۹ سیب خارج کرد. با استفاده از **آنالیز ترکیبی** از ریاضی (۲) می‌دانیم که تعداد این ترکیبات چنین به‌دست می‌آید :

$$n(S) = \binom{۹}{۲} = \frac{۹!}{۲!\ ۷!} = ۳۶$$

پیشامد مطلوب A، آن است که هر دو سیبی که خارج کرده‌ایم سالم باشند، ۴ سیب سالم داریم، با توجه به‌این‌که سیب‌های خروجی باید حتماً یک جفت از این ۴ سیب باشند، داریم :

$$n(A) = \binom{۴}{۲} = \frac{۴!}{۲!\ ۲!} = ۶$$

پس :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

مثال ۸: از بین ۲۲ دانش‌آموز قرار است به‌طور تصادفی ۸ نفر برای تشکیل تیم کوهنوردی دبیرستان انتخاب شوند. اگر ۱۰ نفر از این دانش‌آموزان در سال اول و ۱۲ نفر دیگر در سال دوم مشغول به‌تحصیل باشند، مطلوب است احتمال آن‌که ۴ نفر از سال اول و ۴ نفر از سال دوم انتخاب شوند.

حل: در اینجا فضای نمونه‌ای عبارت است از تمام حالات ممکن برای انتخاب ۸ نفر از ۲۲

نفر، یعنی $\binom{۲۲}{۸}$. پیشامد مطلوب حالت‌هایی است که ۴ نفر از دانش‌آموزان سال اول (که تعداد آن‌ها ۱۰ نفر است) و ۴ نفر از دانش‌آموزان سال دوم (که تعداد آن‌ها ۱۲ نفر است) انتخاب شوند. تعداد حالت‌های انتخاب ۴ نفر از ۱۰ نفر عبارت است از $\binom{۱۰}{۴}$ و تعداد انتخاب‌های ممکن ۴ نفر از ۱۲ نفر مساوی است با $\binom{۱۲}{۴}$. طبق اصل اساسی شمارش (یا اصل ضرب که در ریاضی (۲) خوانده‌اید)، تعداد تمام حالت‌های این پیشامد مساوی با حاصلضرب این دو عدد $\binom{۱۲}{۴}$ و $\binom{۱۰}{۴}$ می‌باشد. پس :

$$n(A)=\binom{۱۰}{۴}\binom{۱۲}{۴}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۱۰}{۴}\times\binom{۱۲}{۴}}{\binom{۲۲}{۸}}=\frac{۲۱۰}{۳۲۳}$$

مثال ۹: n نفر را در نظر می‌گیریم احتمال این‌که روز تولد هیچ دو نفری از آن‌ها یک روز نباشد را مشخص کنید (برای سادگی کار، از احتمال وقوع تولد افراد در روز آخر سال‌های کبیسه صرف‌نظر می‌کنیم).

حل: چون تعداد افراد مورد بررسی n است و هریک از آن‌ها ممکن است در ۳۶۵ روز مختلف سال به‌دنیا آمده باشد، بنابراین در این مسأله با یک فضای نمونه‌ای ۳۶۵^n عضوی روبه‌رو هستیم، (با استدلالی مشابه وقتی که دو تاس را با هم می‌اندازیم و فضای نمونه‌ای ما $۶^۲$ عضو دارد) پس داریم $n(S)=۳۶۵^n$ ، از میان n نفر مورد نظر، نفر اول احتمال دارد که در یکی از ۳۶۵ روز سال به‌دنیا آمده باشد. چون فرض بر یکسان نبودن روز تولد افراد است پس نفر دوم ممکن است در یکی از ۳۶۴ روز باقیمانده سال متولد شده باشد و به‌همین ترتیب نفر سوم در یکی از ۳۶۳ روز باقیمانده و بالاخره نفر nام در یکی از $۳۶۵-n+۱$ روز ممکن است متولد شده باشد. بدین ترتیب، با توجه به‌اصل اساسی شمارش، nنفر ممکن است $۳۶۵\times۳۶۴\times\ldots\times(۳۶۵-n+۱)$ روز تولد متفاوت داشته باشند. بنابراین اگر A پیشامد مورد نظر باشد داریم :

$$n(A)=۳۶۵\times۳۶۴\times\ldots\times(۳۶۵-n+۱)$$

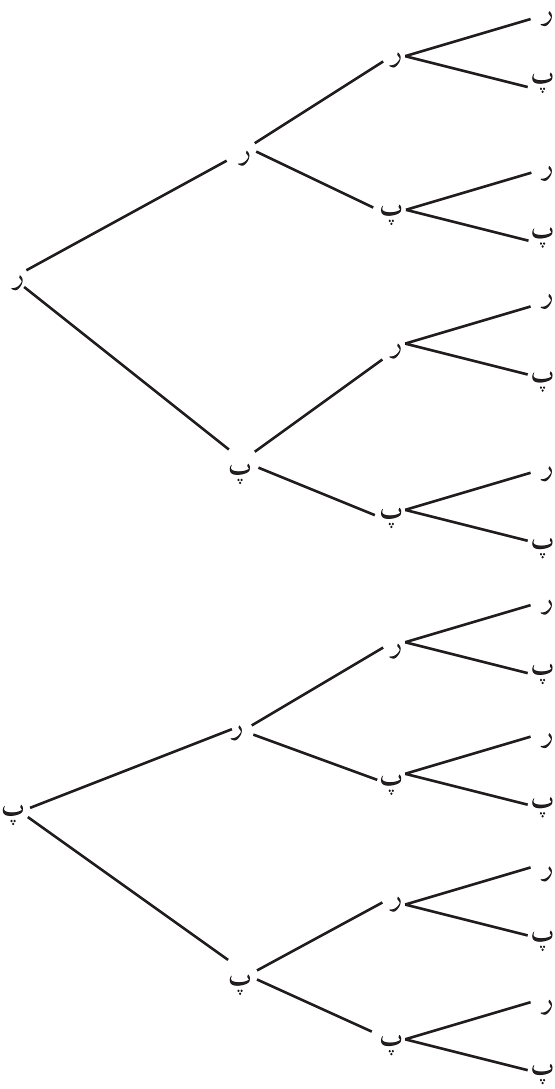
پس :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۶۵\times۳۶۴\times\ldots\times(۳۶۵-n+۱)}{۳۶۵^n}$$

دقت کنید که اگر $n>۳۶۵$ آنگاه طبق اصل لانهٔ کبوتری حتماً دو نفر در یک روز متولد شده‌اند، که در این حالت $P(A)=۰$.

۴ــ۲ــ احتمال دو جمله‌ای

اگر یک سکهٔ سالم یک بار پرتاب شود هرکدام از برآمدها دارای احتمال $\frac{۱}{۲}$ است. اگر سکه را دو،سه یا چهار بار پرتاب کنیم، به ترتیب چهار، هشت یا شانزده حالت هم شانس وجود دارد که در نمودار درختی زیر نشان داده شده است :



(ر،ر،ر،ر)
(پ، ر،ر،ر)
(ر، پ، ر،ر)
(پ، پ، ر،ر)
(ر،ر، پ، ر)
(پ، ر، پ، ر)
(ر، پ، پ، ر)
(پ، پ، پ، ر)
(ر، ر، ر، پ)
(پ، ر، ر، پ)
(ر، پ، ر ، پ)
(پ، پ، ر، پ)
(ر، ر، پ، پ)
(پ، ر، پ، پ)
(ر، پ، پ، پ)
(پ، پ، پ، پ)

بدین ترتیب جدول زیر را برای پرتاب ۱، ۲، ۳ و ۴ سکه به‌دست می‌آوریم.

احتمال	تعداد رو آمدن‌ها	پرتاب ... سکه
۱/۲	۰	یک سکه
۱/۲	۱	
۱/۴	۰	دو سکه
۲/۴	۱	
۱/۴	۲	
۱/۸	۰	سه سکه
۳/۸	۱	
۳/۸	۲	
۱/۸	۳	
۱/۱۶	۰	چهار سکه
۴/۱۶	۱	
۶/۱۶	۲	
۴/۱۶	۳	
۱/۱۶	۴	

حال صورت کسرهای احتمال در جدول فوق را به‌صورت نمودار زیر درمی‌آوریم :

۱ ۱

۱ ۲ ۱

۱ ۳ ۳ ۱

۱ ۴ ۶ ۴ ۱

این اعداد یک مثلث تشکیل می‌دهند که به‌مثلث خیام ــ پاسکال موسوم است. هر عدد در یک سطر مثلث از جمع کردن جفت اعداد چپ و راست آن در سطر بالایی به‌دست می‌آید. این مثلث را تا بی‌نهایت می‌توان ادامه داد. اگر به‌ضرایب حاصل از بسط توان‌های طبیعی دوجمله‌ای $a+b$ نگاه کنیم، همین اعداد موجود در مثلث فوق را می‌یابیم :

$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^3$$

و در حالت کلی از آنالیز ترکیبی در ریاضی (۲) می‌دانیم که :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

بنابراین :

$$P\,(\text{آمدن } k \text{ رو}) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

مثال ۱۰ : تاس سالمی را ۱۵ بار می‌ریزیم. احتمال این‌که ۶ بار برآمد تاس یک عدد فرد باشد، چیست؟ احتمال این‌که ۱۰ بار برآمد تاس یک عدد زوج باشد، چقدر است؟

حل: چون در ریختن یک تاس سالم، برآمد مشاهده شده یا زوج است و یا فرد، بنابراین می‌توان گفت $S=\{\text{فرد و زوج}\}$ و $P(\text{زوج آمدن تاس}) = P(\text{فرد آمدن تاس}) = \frac{1}{2}$ و مانند مثال پرتاب سکهٔ سالم، خواهیم داشت

$$P(\text{۶بار مشاهدهٔ عدد فرد}) = \frac{\binom{15}{6}}{2^{15}} = 0/15$$

$$P(\text{۱۰ بار مشاهدهٔ عدد زوج}) = \frac{\binom{15}{10}}{2^{15}} = 0/09$$

تمرین

۱ــ در یک خانواده با دو فرزند احتمال این‌که بچه‌ها از دو جنس مخالف ویا هردو دختر باشند را پیدا کنید.

۲ــ رمز یک قفل، عددی سه رقمی است که تنها با تنظیم سه رقم آن به‌طور صحیح می‌توان قفل را باز کرد. با علم به‌تکراری نبودن ارقام رمز، احتمال کشف کردن تصادفی رمز قفل فقط با یک بار تنظیم ارقام را پیدا کنید.

۳ــ مسألهٔ فوق را با فرض وجود یک رمز پنج رقمی حل کنید.

۴ــ اگر یک عدد ۴ رقمی کمتر از ۵۰۰۰ به طور تصادفی با ترکیب ارقام ۹،۷،۵،۳،۱ به‌وجود آید، احتمال این‌که عدد ساخته شده بر ۵ بخش‌پذیر باشد را پیدا کنید.

۵ ــ یک کلمه چهار حرفی به‌طور تصادفی با استفاده از حروف کلمهٔ «**خوارزمی**» ساخته شده است. احتمال این‌که این کلمه دارای حرف نقطه‌دار نباشد را پیدا کنید. مسأله را با فرض تکراری بودن حروف و نیز بدون این فرض حل کنید.

۶ ــ یک جفت تاس مخصوص داریم که در هرکدام از آن‌ها به‌جای ارقام ۱ تا ۶ دو عدد ۱، دو عدد ۲ و دو عدد ۳ نمایش داده شده است. این دو تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال وقوع مجموع‌های زیر را پیدا کنید :

الف) ۵   ب) عددی فرد

۷ــ ۵ نفر زن و ۶ نفر مرد برای شغلی تقاضا کرده‌اند. با این حال، امکان استخدام تنها برای ۵ نفر از آن‌ها وجود دارد احتمال انتخاب ۵ نفر را در حالت‌های زیر پیدا کنید :

الف) ۳ زن و ۲ مرد انتخاب شوند.

ب) ۵ زن انتخاب شوند.

پ) حداقل ۴ مرد انتخاب شوند.

۸ ــ یک تاس و یک سکه با هم انداخته می‌شوند، مطلوب است :

الف) احتمال آن که تاس عدد زوج و سکه رو بیاید.

ب) احتمال آن که تاس عدد زوج یا سکه رو بیاید.

۹ ــ یک کیسه محتوی ۲۰ مهره قرمز، ۱۰ مهره سفید و ۱۵ مهره سبز است. یک مهره را به‌طور تصادفی از کیسه بیرون می‌آوریم. مطلوب است :

الف) احتمال آن که این مهره سفید باشد.

این مهره را به‌کیسه برگردانده ۲ مهره را به طور تصادفی بیرون می‌آوریم.

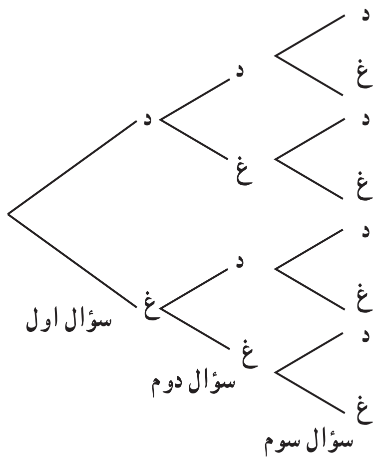
ب) احتمال آن که یک مهره قرمز و یک مهره سفید باشد.

۱۰ــ نمودار درختی زیر راه‌های پاسخ دادن به‌سه سؤال در یک آزمون دو گزینه‌ای (درست ــ غلط) را نشان می‌دهد. حرف «د» یعنی درست و حرف «غ» یعنی غلط. اگر سؤالها به تصادف انتخاب شوند، مطلوب است احتمال :

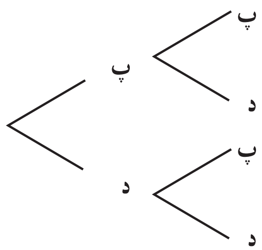
الف) این‌که هر سه سؤال صحیح جواب داده شده باشند ؛

ب) هیچ یک از سؤالات صحیح جواب داده نشده باشند ؛

پ) تعداد سؤالات صحیح پاسخ داده شده بیشتر باشند.



۱۱ــ نمودار درختی زیر حالات ممکن تولد پسر و دختر را در یک خانوادهٔ دو فرزندی نشان می‌دهد. فرض می‌کنیم احتمال پسر بودن فرزند $\frac{۱}{۲}$ باشد.



الف) با توجه به‌نمودار درختی جدول زیر را کامل کنید :

تعداد پسرها	۰	۱	۲
تعداد حالات	۱	۲	۱
احتمال	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$
درصد احتمال	۰/۲۵	۰/۵۰	۰/۲۵

ب) احتمال این‌که دو فرزند هم جنس باشند چیست؟

پ) احتمال این‌که دست کم یک فرزند پسر باشد چیست؟

۱۲ــ نمودار درختی زیر احتمال‌های باریدن برف را طی چهار روز متوالی در یک محوطهٔ اسکی نشان می‌دهد. («ن» یعنی نباریدن برف و «ب» یعنی باریدن برف) فرض می‌کنیم احتمال آمدن برف در یک روز مفروض $\frac{۱}{۲}$ باشد.

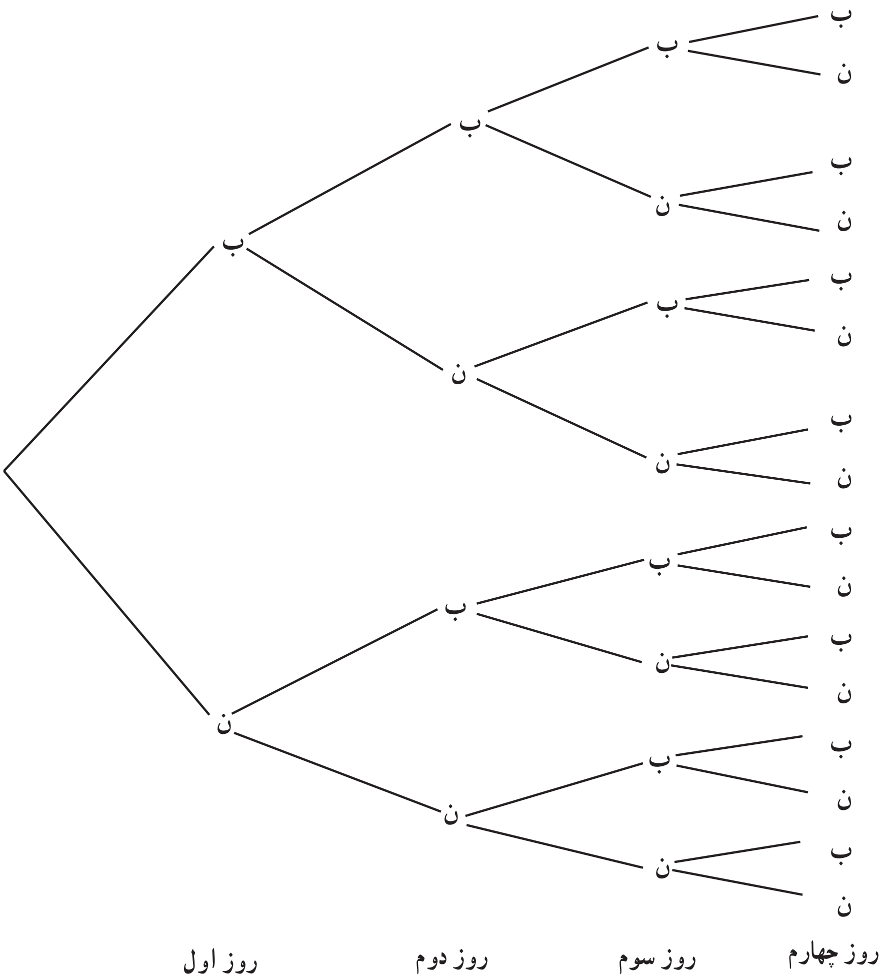
الف) با توجه به‌نمودار درختی جدول زیر را کامل کنید :

تعداد روزهای باریدن برف	۴	۳	۲	۱	۰
تعداد امکان‌های مختلف	۱	۴	۶	۴	۱
احتمال	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۴}{۱۶}$	$\frac{۶}{۱۶}$	$\frac{۴}{۱۶}$	$\frac{۱}{۱۶}$
درصد احتمال	٪۶/۲۵	۲۵-		۲۵-	

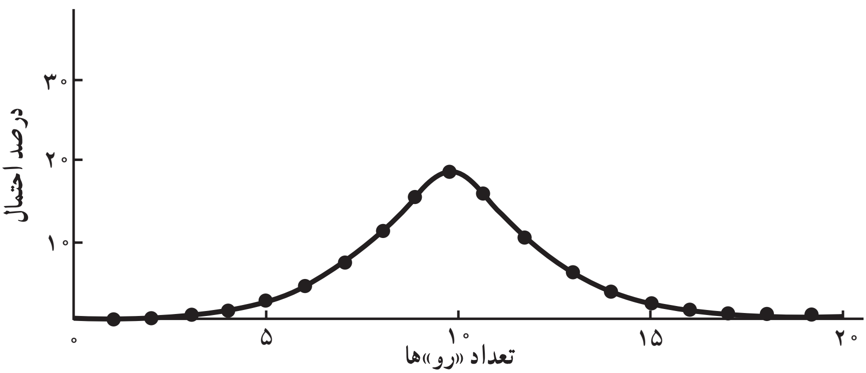
ب) درصد احتمال این‌که طی چهار روز متوالی دست کم دو روز برف ببارد چیست؟ $\frac{۸}{۱۶}=$ ۵۰ -

پ) کدام محتملتر است؟ دقیقاً یک روز برف ببارد یا دقیقاً سه روز.

$\frac{۱}{۴}=\frac{۴}{۱۶}$ دقیقاً سه روز $\frac{۱}{۴}=\frac{۴}{۱۶}$ دقیقاً یک روز



۱۳ــ نمودار زیر احتمال‌های رخ دادن پیشامد «رو» در پرتاب ۲۰ سکه‌را نشان‌می‌دهد.



به‌نمودار صفحهٔ قبل رجوع کنید و به‌این سؤالات پاسخ دهید :

الف) اگر هر بیست سکه پرتاب شوند آمدن چند «رو» محتملتر است؟

ب) با توجه به فرض الف احتمال آن‌که آن تعداد «رو» بیاید چقدر است؟ (به‌کمک نمودار تقریب بزنید)

پ) کدامیک عجیبتر است؟ این‌که در پرتاب ۱۰ سکه تعداد «رو»ها و «پشت»ها مساوی باشد یا در پرتاب ۲۰ سکه؟

ت) اگر تعداد سکه‌هایی که پرتاب می شود را افزایش دهیم،احتمال مساوی بودن تعداد «ر» و «پ»ها چه تغییری می کند؟

۴ــ۳ــ احتمال غیر هم‌شانس در فضاهای گسسته

در بخش قبل فرض کرده بودیم احتمال وقوع پیشامدهای مورد بررسی در تمام نقاط فضای نمونه‌ای یکسان باشد. مثلاً در پرتاب سکه، احتمال آمدن «پشت» یا «رو» هر دو $\frac{۱}{۲}$ بود. اما این فرض همیشه یک فرض واقع‌بینانه نیست و برای سادگی مطلب در بندهای قبل گذاشته شده بود. یکی از راه‌های محاسبه احتمال، استفاده کردن از محاسبهٔ فراوانی است.

مثال ۱: در مورد مثال بالا اگر یک سکه را ۱۰۰ بار پرتاب کنیم و در این ۱۰۰ بار، ۴۵ بار «رو» بیاید، طبیعی است که کسر $\frac{۴۵}{۱۰۰}$ و یا ۴۵٪ و یا ۰/۴۵ را احتمال آمدن «رو» در نظر بگیریم. واضح است با این استدلال احتمال آمدن پشت ۵۵٪ می‌باشد. بنابراین در فضای $S=\{$ پ , ر $\}$، داریم

$$P\{ر\}=۰/۴۵ \quad و \quad P\{پ\}=۰/۵۵$$

مجموعه‌های تک عضوی {پ} و {ر} را مجموعه‌های ساده می گوییم. و احتمال هر مجموعهٔ تک عنصری $\{x\}$ را با $P(x)$ یا $P(\{x\})$ نشان می‌دهیم.

*هرزیرمجموعهٔ تک‌عضوی‌ازفضای‌نمونه‌ای‌را یک **پیشامدساده** گوییم.*

می‌بینیم که :

$$P(ر)+P(پ)=۰/۴۵+۰/۵۵=۱$$

یعنی احتمال پیشامدهای ساده بزرگتر یا مساوی صفر و کوچکتر یا مساوی یک می‌باشد و مجموع احتمال‌های پیشامدهای ساده ۱ می‌باشد.

مثال ۲: در مسألهٔ پرتاب سه سکه بخش قبل، اگر فضای نمونه‌ای را $\{۰,۱,۲,۳\}$ بگیریم که در آن هرعضو این فضا تعداد «رو» آمدن‌های سه سکه باشد، آن گاه با استفاده از احتمال دوجمله‌ای می‌دانیم که :

$$P(۰) = P\{\text{هیچ رو نیاید}\} = \frac{۱}{۸}$$

$$P(۱) = P\{\text{یک بار رو آمده باشد}\} = \frac{۳}{۸}$$

$$P(۲) = P\{\text{دو بار رو آمده باشد}\} = \frac{۳}{۸}$$

$$P(۳) = P\{\text{سه بار رو آمده باشد}\} = \frac{۱}{۸}$$

ملاحظه می‌کنیم که :

$$P(۰)+P(۱)+P(۲)+P(۳) = \frac{۱}{۸}+\frac{۳}{۸}+\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۸} = ۱$$

در حالت کلی فرض کنیم فضای نمونه‌ای ما $S=\{e_۱,e_۲,\dots,e_n\}$ شامل n عضو باشد. به‌هر پیشامد ساده $\{e_k\}$ یک عدد حقیقی $P\{e_k\}$ که احتمال پیشامد $\{e_k\}$ است را نسبت می‌دهیم. این عدد باید تحت شرایط زیر انتخاب گردد :

۱) احتمال یک پیشامد ساده عددی بین ۰ و ۱ است ؛ یعنی

$$۰ \le P(e_k) \le ۱$$

۲) مجموع احتمالات تمام پیشامدهای ساده در فضای نمونه‌ای برابر ۱ است ؛ یعنی :

$$P(e_۱)+P(e_۲)+\dots+P(e_n) = ۱$$

اعداد $P(e_۱)$ ، $P(e_۲)$ ، ...، $P(e_n)$ را که در شرط بالا صدق می‌کنند «تخصیص احتمال مقبول» می‌نامیم.

فرض کنیم یک تخصیص احتمال مقبول به‌پیشامدهای ساده در فضای نمونه‌ای S داده شده باشد. چگونه می‌توان یک احتمال برای پیشامد دلخواه A در S تعریف نمود؟

۴ــ۴ــ احتمال یک پیشامد اختیاری

اگر یک تخصیص احتمال مقبول به‌پیشامدهای ساده در فضای نمونه‌ای S داده شده باشد، به‌پیشامد A احتمالی را که با P(A) نشان می‌دهیم به‌صورت زیر نسبت می‌دهیم :

الف) اگر A پیشامد غیرممکن (یعنی مجموعهٔ .) باشد آنگاه

$$P(A) = ۰$$

ب) اگر A یک پیشامد ساده باشد P(A) خودبه‌خود تعریف شده است.

ج) اگر A پیشامد مرکب باشد، یعنی A اجتماعی از پیشامدهای ساده باشد، آنگاه P(A) مجموع احتمالات تمام پیشامدهای ساده در A می‌باشد.

د) اگر Aخود فضای نمونه‌ای S باشد، آنگاه :

$$P(A) = P(S) = ۱$$

در واقع این قسمت حالت خاصی از (ج) است.

حال اگر حالت هم‌شانس بخش قبل رادر نظر بگیریم، یعنی :

$$P(e_۱) = P(e_۲) = \ \dots\ = P(e_n)$$

آنگاه چون $۱ = P(e_۱) + P(e_۲) + \ \dots\ + P(e_n)$ داریم :

$$P(e_۱) = P(e_۲) = \ \dots\ = P(e_n) = \frac{۱}{n}$$

حال اگر مجموعهٔ A دارای m عضو $\{f_۱, f_۲, \dots, f_m\}$ باشد طبق تعریف فوق داریم :

$$P\ \{f_۱, f_۲, \dots, f_m\}! = P\{f_۱\} + \ \dots\ + P\{f_m\} = \underbrace{\frac{۱}{n} + \dots + \frac{۱}{n}}_{\text{m بار}} = \frac{m}{n}$$

یعنی :

$$P(A) = \frac{\text{تعداد اعضای A}}{\text{تعداد اعضای S}}$$

که همان فرمول بخش قبل است. یعنی ملاحظه می‌کنیم که مطالب این بخش در واقع تعمیم بخش قبل است.

مثال ۳: فرض کنیم فضای نمونه‌ای ما $S = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ باشد. در هر دو حالت زیر به‌پیشامدهای سادهٔ S اعدادی را نسبت داده‌ایم. بررسی کنید که آیا این نسبت‌ها که آن‌ها را تخصیص

دادن احتمال می‌نامیم مجاز هستند و یا نه، دلیل پاسخ خود را بیان کنید.

الف) $P(۱)=۰/۱۲ \;,\; P(۲)=۰/۶۳ \;,\; P(۳)=۰/۴۵ \;,\; P(۴)=-۰/۲۰$

ب) $P(۱)=\frac{۹}{۱۲۰} \;,\; P(۲)=\frac{۴۵}{۱۲۰} \;,\; P(۳)=\frac{۲۷}{۱۲۰} \;,\; P(۴)=\frac{۴۶}{۱۲۰}$

حل: در مورد (الف) چون $P(۴)=-۰/۲۰$ ناقض فرض (۱) در مورد پیشامدهای ساده است، یعنی احتمال باید نامنفی باشد، بنابراین تخصیص احتمال مجاز نیست. اما در مورد (ب) داریم

$$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)=\frac{۹}{۱۲۰}+\frac{۴۵}{۱۲۰}+\frac{۲۷}{۱۲۰}+\frac{۴۶}{۱۲۰}=\frac{۱۲۷}{۱۲۰}>۱$$

و این خاصیت (۲) در مورد پیشامدهای ساده را نقض می‌کند بنابراین، این تخصیص احتمال هم مجاز نیست.

مثال ۴: تاسی به‌گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد فرد دو برابر احتمال وقوع هر عدد زوج است. اگر در یک پرتاب این تاس، A پیشامد وقوع عددی بزرگتر از ۳ باشد، P(A) را بیابید.

حل: فضای نمونه‌ای عبارت است از $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$. حال اگر به‌هر عدد زوج احتمال w نسبت دهیم، آنگاه احتمال عدد فرد برابر ۲w است ؛ یعنی :

$$P(۱)=P(۳)=P(۵)=۲w \text{ و } P(۲)=P(۴)=P(۶)=W$$

و چون مجموع این پیشامدهای ساده باید ۱ باشد، بنابراین :

$$۲w+w+۲w+w+۲w+w=۹w=۱$$

و از آنجا $w=\frac{۱}{۹}$ ، حال قرار می‌دهیم $A=\{۴,۵,۶\}$ طبق خاصیت (ج) داریم :

$$P(A)=P(۴)+P(۵)+P(۶)=\frac{۱}{۹}+\frac{۲}{۹}+\frac{۱}{۹}=\frac{۴}{۹}$$

مثال ۵: سه اسب a، b و c با هم مسابقه می‌دهند. فرض کنیم احتمال برد a دو برابر احتمال برد b و احتمال برد b دو برابر احتمال c است.

الف) مطلوب است احتمال برد هر کدام از اسب‌ها.

ب) مطلوب است احتمال این‌که a یا b ببرند.

حل: گیریم $P(c)=p$ ، چون شانس برد b دو برابر شانس برد c است. پس : $P(b)=۲p$ و چون شانس برد a دو برابر شانس برد b است پس: $P(a)=۲(۲p)=۴p$. حال چون مجموع

احتمال‌های فوق باید برابر ۱ باشد پس :

$$p+۲p+۴p=۱$$

یا $۷p=۱$. در نتیجه $p=\frac{۱}{۷}$ و از آنجا داریم :

$$P(a)=۴p=\frac{۴}{۷}$$

$$P(b)=۲p=\frac{۲}{۷}$$

$$P(c)=p=\frac{۱}{۷}$$

پیشامد این‌که یا a ببرد یا b، مجموعهٔ $\{a,b\}$ است. طبق تعریف :

$$P(\{a,b\})=P(a)+P(b)=\frac{۴}{۷}+\frac{۲}{۷}=\frac{۶}{۷}$$

مثال ۶: گیریم $S=\{a_۱,a_۲,a_۳,a_۴\}$ ، مطلوب است محاسبهٔ

الف) $P(a_۱)$ ، اگر $P(a_۲)=\frac{۱}{۳}$ ، $P(a_۳)=\frac{۱}{۶}$ ، $P(a_۴)=\frac{۱}{۹}$

ب) $P(a_۱)$ و $P(a_۲)$ اگر $P(a_۳)=P(a_۴)=\frac{۱}{۴}$ و $P(a_۱)=۲P(a_۲)$

ج) $P(a_۱)$ اگر $P(\{a_۲,a_۳\})=\frac{۲}{۳}$ و $P(\{a_۲,a_۴\})=\frac{۱}{۲}$ و $P(a_۲)=\frac{۱}{۳}$

حل: الف) فرض کنیم $p=P(a_۱)$. آنگاه چون P تخصیص احتمال مقبول به‌فضای S است بنابراین :

$$P(a_۱)+P(a_۲)+P(a_۳)+P(a_۴)=۱$$

و از آنجا :

$$p+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۹}=۱ \Rightarrow p=\frac{۷}{۱۸}$$

ب) گیریم $p=P(a_۲)$. آنگاه $P(a_۱)=۲p$. و از آنجا :

$$۲p+p+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}=۱$$

و یا $p=\frac{۱}{۶}$. بنابراین $P(a_۲)=\frac{۱}{۶}$ و $P(a_۱)=\frac{۱}{۳}$.

ج) گیریم $P(a_۱)=p$. آنگاه چون

$$P(a_۳)=P(\{a_۲,a_۳\})-P(a_۲)=\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

و

$$P(a_۴)=P\ \{a_۲,a_۴\}!-P(a_۲)=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶}$$

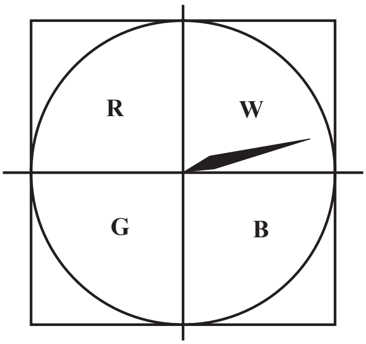
در نتیجه :

$$p+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}=۱$$

و یا $p=\frac{۱}{۶}$. یعنی $P(a_۱)=\frac{۱}{۶}$.

تمرین

۱ــ دردستگاه زیر دایره را به‌چهار رنگ سبز (G)، قرمز (R)، آبی (B)، سفید (W) رنگ‌آمیزی کرده‌ایم. عقربه رابه‌چرخش درمی‌آوریم. اگر احتمال‌های ایستادن عقربه روی رنگ‌های مختلف، متفاوت باشند، کدامیک از تخصیص احتمال‌های زیر غیرمجازند؟



الف) $P(R)=۰/۳۲$ و $P(G)=۰/۲۸$ و $P(W)=۰/۲۴$ و $P(B)=۰/۳۰$

ب) $P(R)=۰/۲۶$ و $P(G)=۰/۱۴$ و $P(W)=۰/۳۰$ و $P(B)=۰/۳۰$

۲ــ یک سکهٔ ناسالم را پرتاب می‌کنیم. فرض کنیم شانس آمدن «رو» دو برابر شانس آمدن «پشت» باشد. مطلوب است محاسبهٔ P(ر) و P(پ).

۳ ــ سه شناگر a، b و c با هم مسابقه می‌دهند. a و b دارای احتمال بردن مساوی هستند و شانس بردن هرکدام از آن‌ها دو برابر c است. مطلوب است احتمال این‌که b یا c ببرد.

۴ــ ۵ ــ احتمال در فضاهای پیوسته

در این بخش به محاسبهٔ احتمال در فضاهای پیوسته می‌پردازیم. فضاهای پیوسته، برخلاف فضاهای گسسته که از تعدادی متناهی نقطه تشکیل شده‌اند، مجموعه‌هایی نامتناهی می‌باشند نظیر بازه‌ها در محور اعداد حقیقی یا سطوح در صفحه و غیره. واضح است که در این حالت دیگر شمارش تعداد عناصر فضای نمونه‌ای یا پیشامد میسر نیست ولی آنچه که می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد «اندازه» طول بازه‌ها، مساحت سطوح، و حجم شکل‌های فضایی است. در این حالت نسبت «اندازهٔ» فضای پیشامد به «اندازهٔ» فضای نمونه‌ای، **احتمال** وقوع پیشامد را مشخص می‌کند. به عبارت دیگر اگر پیشامد مطلوب را با A نمایش دهیم، داریم :[1]

اگر $S \subset \mathbb{R}$ و A داریم :
$$P(A)=\frac{\text{طول } A}{\text{طول } S}=\frac{l_A}{l_S}$$

اگر $S \subset \mathbb{R}^۲$ و A داریم :
$$P(A)=\frac{\text{مساحت } A}{\text{مساحت } S}=\frac{a_A}{a_S}$$

اگر $S \subset \mathbb{R}^۳$ و A داریم :
$$P(A)=\frac{\text{حجم } A}{\text{حجم } S}=\frac{v_A}{v_S}$$

حال به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۱: در مثال تیراندازی به هدف دایره‌ای شکل فرض می‌کنیم شعاع صفحهٔ هدف ۲۰ سانتیمتر و شعاع دایرهٔ کوچکتر ۱۰ سانتیمتر است. فرض می‌کنیم تیر حتماً به صفحهٔ هدف برخورد می‌کند، احتمال برخورد تیر به دایرهٔ کوچکتر را محاسبه کنید.

حل: فضای نمونه، مساحت دایرهٔ بزرگتر و پیشامد A مساحت دایرهٔ کوچکتر است، بنابراین :

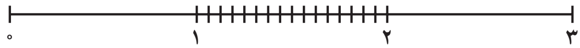
$$P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{\pi \times ۱۰^۲}{\pi \times ۲۰^۲}=\frac{۱}{۴}$$

مثال ۲: از بین اعداد حقیقی بین ۰ و ۳ یک عدد به تصادف انتخاب می‌شود، مطلوب است محاسبهٔ احتمال آن‌که این عدد بین ۱ و ۲ انتخاب شده باشد.

۱ــ در این قسمت فرض بر این است که احتمال روی طول، سطح و حجم یکسان توزیع شده است.

حل: فضای نمونهٔ بازهٔ $S=[0,3]$ و پیشامد مطلوب بازهٔ $A=[1,2]$ است، پس :

$$P(A)=\frac{l_A}{l_S}=\frac{1}{3}$$



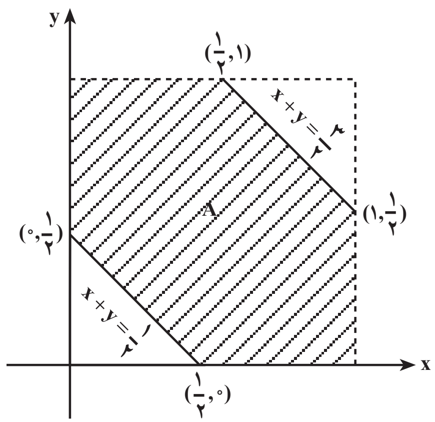
مثال ۳: فرض می‌کنیم دو عدد حقیقی بین ۰ و ۱ به تصادف انتخاب شوند، مطلوب است احتمال آن که مجموع این دو عدد بین ۰/۵ و ۱/۵ باشد.

حل: فضای نمونه‌ای مناسب عبارت است از :

$$S=\{(x,y)\mid 0<x<1, 0<y<1\}$$

و پیشامد مطلوب مجموعهٔ زیر است :

$$A=\left\{(x,y)\mid \frac{1}{2}<x+y<\frac{3}{2}\right\}$$



بنابراین :

$$P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{\frac{3}{4}}{1}=\frac{3}{4}$$

مثال ۴: فرض می‌کنیم دو قطعه چوب داریم که طول‌های آن‌ها به ترتیب ۱ و ۰/۵ متر می‌باشد. قطعه بزرگتر را با ارّه دو قسمت می‌کنیم که در نتیجه سه قطعه چوب حاصل می‌شود، احتمال این‌که سه قطعه چوب تشکیل یک مثلث را بدهند، چقدر است؟

حل: فرض می‌کنیم قطعه چوب یک متری، در نقطه E بریده شود که به فاصله x از یک سر چوب قرار دارد.

بنابراین فضای نمونه‌ای را می‌توان خط AB به طول ۱ متر در نظر گرفت، در این‌جا پیشامد مطلوب آن است که پاره‌خط‌های AE و EB و پاره‌خط دیگر که آن را CD می‌نامیم (همان چوب به طول ۰/۵ متر) مثلثی تشکیل دهند. ولی اگر سه پاره خط بخواهند تشکیل مثلث بدهند باید طول هر پاره‌خط از مجموع طول‌های دو پاره‌خط دیگر کمتر باشد یعنی :

$$AE + EB > CD$$

$$AE + CD > EB$$

$$EB + CD > AE$$

چون $CD = \frac{۱}{۲}$ و $AE = x$ و $EB = ۱ - x$ ، پس داریم :

$$x + (۱ - x) > \frac{۱}{۲}$$

$$x + \frac{۱}{۲} > ۱ - x$$

$$(۱ - x) + \frac{۱}{۲} > x$$

با ساده کردن سه نامساوی بالا :

$۱ > \frac{۱}{۲}$ (به طور بدیهی درست است)

$$x > \frac{۱}{۴}$$

$$x < \frac{۳}{۴}$$

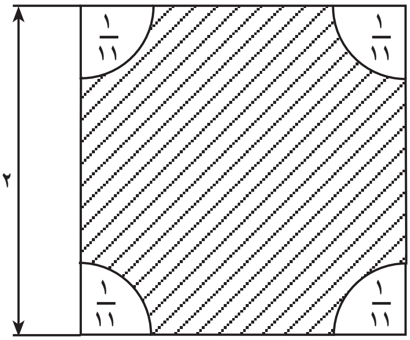
در نتیجه پیشامد مطلوب به صورت زیر قابل بیان خواهد بود :

$$A = \left\{ x \mid \frac{۱}{۴} < x < \frac{۳}{۴} \right\}$$

$$P(A) = \frac{l_A}{l_S} = \frac{\frac{۱}{۲}}{۱} = \frac{۱}{۲}$$

مثال ۵: یک چترباز از داخل هواپیما بر روی زمین مربع شکلی به طول ضلع ۲ کیلومتر می‌پرد. در چهارگوشهٔ زمین، مناطقی پوشیده از درخت وجود دارند که می‌توان آن‌ها را به‌صورت ربع دایره‌هایی به شعاع $\frac{۱}{۱۱}$ کیلومتر و به مرکز رأس‌های مربع تصور کرد. (به شکل صفحهٔ بعد نگاه کنید.) اگر چترباز در یکی از مناطق مزبور فرود بیاید چتر او به درختان گیر خواهد کرد. اگر فرض کنیم

که چترباز حتماً در نقطه‌ای از قطعه زمین مورد بحث فرود آید و با فرض این‌که مختصات مکان فرود نیز تصادفی باشد،مطلوب است محاسبهٔ احتمال این‌که فرود او بدون گیر کردن به درخت‌ها انجام بگیرد.



حل: فضای نمونه‌ای مربعی به ضلع ۲ کیلومتر می‌شود و پیشامد موردنظر مجموعهٔ هاشور زده شده است.بنابراین احتمال برابر است با :

$$\frac{۴-\frac{\cdot}{۱۲۱}}{۴} \ (\ ۰/۹۹$$

( ) علامت تقریب است.)

یادداشت: در این مسأله احتمال این‌که چترباز در یک نقطه فرود آید صفر است حتی احتمال این‌که چترباز روی یک خط فرود آید صفر است،زیرا سطح این نوع مجموعه‌ها صفر می‌باشد.

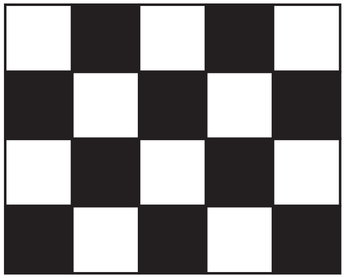
*پیشامدهایی که احتمال وقوع آن‌ها صفر است را پیشامدهای **تقریباً غیرممکن** می‌نامیم.*

مثال ۶: در مثال (۱۴) فصل قبل احتمال برنده شدن چقدر است؟

حل: در مثال (۱۴) فصل قبل فضای نمونه‌ای و پیشامد مطلوب را مشخص کردیم. فضای نمونه‌ای مربعی به طول ۲۵ و پیشامد مطلوب مربع کوچکی در داخل آن به طول ۵ بود.اگر A پیشامد موردنظر باشد،احتمال برابر است با :

$$P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{(۵)^۲}{(۲۵)^۲}=\frac{۱}{۲۵}$$

یادداشت: اگر سکه را به جای مربع مطرح شده در مسأله بر روی صفحه‌ای شطرنجی شکل متشکل از مربع‌های بسیار نیز پرتاب کنیم، باز احتمال آن‌که سکه بر روی مرز مشترک بین هیچ دو مربعی نیفتد، برابر با مقداری خواهد بود که به دست آوردیم.



توجیه این مطلب با توجه به شکل فوق بدیهی به نظر می‌رسد.

مرکز سکهٔ پرتاب شده ممکن است در داخل هر کدام از مربع‌های هم اندازه با مربع Q واقع شود و در آن صورت همان‌طور که در مسأله مشاهده کردید، پیشامد ما مربع Q' خواهد بود (شکل صفحه ۸۱). بنابراین در داخل هر یک از مربع‌های بزرگتر مجموعه‌ای به اندازهٔ مربع هاشور خوردهٔ داخل آن وجود دارد که اگر سکه داخل آن بیفتد، بازی را خواهیم برد. در نتیجه اگر پیشامد آن‌که سکه بر روی محیط هیچ کدام از مربع‌ها نیفتد را A بنامیم، داریم:

$$P(A) = \frac{\text{مساحت مربع‌های هاشور خورده}}{\text{مساحت کل صفحه}} = \frac{۱}{۲۵}$$

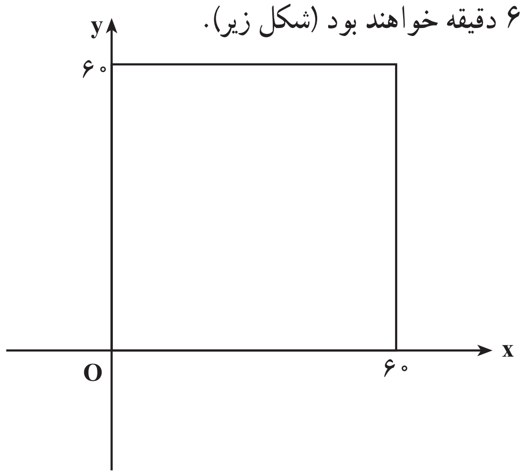
مثال ۷: اتوبوس‌های شرکت واحد از ساعت ۷ صبح شروع به کار می‌کنند و هر ۱۵ دقیقه یک‌بار به ایستگاه می‌رسند. اگر شخصی در لحظه‌ای بین ساعت ۷ تا ۷:۳۰ به یک ایستگاه وارد شود، احتمال این‌که کمتر از ۵ دقیقه معطّل بماند چقدر است؟ احتمال این‌که بیشتر از ۱۰ دقیقه معطل بماند تا اتوبوس برسد چقدر است؟

حل: چون شخص در لحظه‌ای بین ۷ تا ۷:۳۰ به ایستگاه می‌رسد، فضای نمونه‌ای مربوط به آزمایش تصادفی رسیدن به ایستگاه اتوبوس فاصلهٔ (۷ و ۷:۳۰) است. برای این‌که شخص کمتر از ۵ دقیقه منتظر اتوبوس شود باید در یکی از لحظات بین ۷:۱۰ تا ۷:۱۵ یا ۷:۲۵ تا ۷:۳۰ به ایستگاه برسد. بنابراین پیشامد مورد نظر از دو فاصلهٔ زمانی (۷:۱۰ و ۷:۱۵) و (۷:۲۵ و ۷:۳۰) تشکیل

یافته است. لذا احتمال این پیشامد برابر است با $\frac{۱}{۳}=\frac{۱۰}{۳۰}=\frac{۵+۵}{۳۰}$. برای این‌که شخص بیشتر از ۱۰ دقیقه منتظر اتوبوس بماند، باید در یکی از لحظات بین ۷ تا ۷:۵ یا ۷:۱۵ تا ۷:۲۰ به ایستگاه برسد، لذا در این حالت پیشامد مطلوب عبارت است از اجتماع دو فاصلهٔ (۷:۵ و ۷) و (۷:۲۰ و ۷:۱۵)، در نتیجه، احتمال آن برابر است با $\frac{۱}{۳}=\frac{۱۰}{۳۰}=\frac{۵+۵}{۳۰}$. ملاحظه می‌کنید که احتمال‌های هر دو پیشامد مساوی هستند. این مطلب عجیب نیست؟

مثال ۸ : مسئله‌ی روبه‌رو شدن دو دوست: حسن و احمد قرار گذاشتند که هنگام بازدید از نمایشگاه کتاب یکدیگر را بین ساعت ۴ تا ۵ بعد از ظهر در بخش کتاب‌های مرجع ببینند. قرار آن‌ها به‌این‌صورت بود که هر کدام زودتر سر قرار حاضر شد ۱۵ دقیقه منتظر دیگری بماند و بعد از آن، به‌بازدید از نمایشگاه ادامه دهد. با فرض این‌که زمان سر قرار رسیدن هریک به‌طور تصادفی بین ۴ تا ۵ بعدازظهر است، احتمال این‌که این دو یک دیگر را ملاقات کنند، چقدر است؟

حل: فرض کنیم حسن x دقیقه بعد از ساعت ۴ بعد از ظهر و احمد y دقیقه بعد از ساعت ۴ بعد از ظهر سر قرار حاضر شوند. می‌توانیم زمان‌های رسیدن هریک را به‌صورت زوج‌های مرتب (x,y) درنظر بگیریم به‌طوری که $۰<x<۶۰$ و $۰<y<۶۰$. عضوهای فضای نمونه‌ای، نقاط داخل مربعی به ضلع ۶۰ دقیقه خواهند بود (شکل زیر).



برای این‌که حسن و احمد بتوانند یک دیگر را ملاقات کنند، باید موقع سر قرار رسیدنشان در فاصلهٔ زمانی ۱۵ دقیقه از یک‌دیگر رُخ دهد. زیرا قرار گذاشته بودند که فقط ۱۵ دقیقه برای یک‌دیگر صبر کنند. این شرط را می‌توان با نامساوی قدرمطلق

$$|x-y|<۱۵$$

بیان کرد. برای مثال، اگر احمد ۱۴ دقیقه بعد از حسن برسد هم‌دیگر را ملاقات می‌کنند. یعنی

$$y-x=۱۴$$

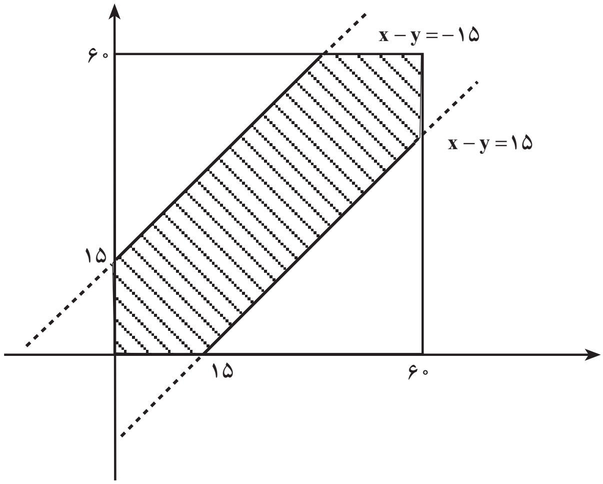
یا

$$x-y=-۱۴$$

در نتیجه $\quad |x-y|=۱۴$

بنابراین، نامساوی برقرار است.

نمودار $|x-y|<۱۵$ که در داخل فضای نمونه‌ای محصور است، ناحیهٔ موفقیت را نشان می‌دهد.



اگر ناحیهٔ موفقیت (ناحیهٔ هاشور خورده) را با r و فضای نمونه‌ای را با R نشان دهیم، آنگاه احتمال مطلوب یعنی $P(r)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید :

$$P(r)=\frac{\text{مساحت ناحیهٔ } r}{\text{مساحت مربع}}$$

$$=\frac{\left(\begin{matrix}\text{مساحت مربع}\\ \text{به ضلع ۶۰}\end{matrix}\right)-\left(\begin{matrix}\text{دو مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین}\\ \text{به ضلع قائمه ۴۵}\end{matrix}\right)}{۶۰^{۲}}$$

$$=\frac{۶۰^{۲}-\left[\frac{۱}{۲}(۴۵)^{۲}+\frac{۱}{۲}(۴۵)^{۲}\right]}{۶۰^{۲}}$$

$$\simeq ۰/۴۴$$

تمرین

۱ــ نقطه‌ای مانند x را به طور تصادفی در بازهٔ $[0,3]$ انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که داشته باشیم $1 < x < 2/5$ را تعیین کنید.

۲ــ بر روی مربع Q با مشخصات $Q=\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1 \, , \, 0 \le y \le 1\}$ یک نقطه را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که داشته باشیم $x \le y \le 1-x$ را تعیین کنید.

۳ــ دو نقطه را به طور تصادفی در بازهٔ $[0,1]$ انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که $|x-y| < \frac{1}{2}$ را پیدا کنید.

۴ــ در بازهٔ $[0,1]$ دو نقطه به طور تصادفی طوری انتخاب می‌شوند که بازه را به سه پاره‌خط تقسیم کنند. احتمال این را پیدا کنید که سه پاره‌خط تشکیل یک مثلث بدهند.

۵ــ یک نقطه (x,y) را به طور تصادفی بر روی مثلثی به رأسهای $(0,0)$، $(4,0)$ و $(3,2)$ انتخاب می‌کنیم. احتمال پیشامدهای زیر چیست؟

الف) $x < 2$ ب) $x < 2y$

پ) (x,y) درون یک مستطیل به رأس‌های $(1,0)$، $(1,2)$، $(2,2)$ و $(2,0)$، قرار داشته باشد.

۶ــ یک نقطه به طور تصادفی درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ انتخاب می‌شود، مطلوب است احتمال آن که فاصله آن نقطه از هر رأس بیشتر از ۱ باشد.

۷ــ روی محور اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$، نقاط a و b به طور تصادفی انتخاب شده‌اند به‌طوری که: $-2 \le b \le 0$ و $0 \le a \le 3$، مطلوب است محاسبهٔ احتمال آن که فاصلهٔ بین a و b بزرگتر از ۳ باشد.

۸ــ دو عدد حقیقی به طور تصادفی بین ۰ و ۲ انتخاب می‌شوند. مطلوب است احتمال آن که:

الف) مجموع دو عدد کمتر از ۲ باشد.

ب) مجموع دو عدد بیشتر از ۱ باشد.

پ) مجموع دو عدد بین ۱ و ۲ باشد.

۹ــ دو عدد به طور تصادفی بین ۰ و ۲ انتخاب می شوند.

الف) مطلوب است احتمال آن که نسبت دو عدد مساوی ۱ باشد.

ب) مطلوب است احتمال آن که نسبت دو عدد کمتر از ۱ باشد.

پ) مطلوب است احتمال آن که نسبت دو عدد بین ۰/۴ و ۰/۵ باشد.

۱۰ــ در مثال ۴ این بخش فرض می‌کنیم پاره‌خط بزرگتر AB برابر $2l$ و پاره‌خط کوچکتر CD مساوی l باشد. نقطه E را به طور تصادفی روی AB انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که AE، EB و CD تشکیل یک مثلث بدهند.

۱۱ــ مسأله ۱۰ را در حالات زیر حل کنید.

الف) اگر $AB = 4l$ و $CD = l$.

ب) اگر $AB = nl$ و $CD = l$ ، که در آن n یک عدد طبیعی است.

۱۲ــدر عبارت $2p - q$ مقدار ضریب p را به طور تصادفی بین ۱و ۲ و مقدار ضریب q را به طور تصادفی بین ۱- و ۳ انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال این‌که حاصل عبارت بالا کمتر از $\frac{1}{2}$ باشد.

۱۳ــ در مثال (۵) مسألهٔ چترباز، به جای شعاع $\frac{1}{11}$ ،عدد $\frac{1}{9}$ قرار دهید و مسأله را حل کنید. در حالت کلی مسأله را برای مربعی به ضلع l و شعاع R حل کنید.

۱۴ــ اتوبوس‌های شرکت واحد از ساعت ۷ صبح شروع به کار می‌کنند و هر ۱۵ دقیقه یکبار به ایستگاه خاصی می‌رسند. اگر شخصی در لحظه‌ای بین ساعت ۸ تا ۸:۳۰ به این ایستگاه وارد شود، احتمال این‌که کمتر از ۵ دقیقه معطل بماند چقدر است؟ احتمال این‌که بیشتر از ۱۰ دقیقه صبر کند تا اتوبوس برسد چقدر است؟

۱۵ــ تجربه قبلی نشان می‌دهد که هر کتاب جدید از ناشر خاصی می‌تواند بین ۴ تا ۱۲درصد بازار کتاب را به خود اختصاص دهد. مطلوب است محاسبه احتمال این‌که کتاب بعدی این ناشر حداکثر ۶/۳۵ درصد بازار کتاب را به خود اختصاص دهد.

۱۶ــ زمان تصادفی برحسب دقیقه که حیوان خاصی نسبت به داروی خاصی عکس‌العمل نشان دهد بین ۲ و ۴/۳ دقیقه می‌باشد مطلوب است احتمال این‌که عکس‌العمل این حیوان نسبت به آن دارو کمتر از ۳/۲۵ دقیقه طول بکشد.

۱۷ــ بار دیگر مسألهٔ ملاقات حسن و احمد را درنظر بگیرید. احتمال این‌که زمان رسیدن احمد به زمان رسیدن حسن نزدیکتر از ساعت ۴ بعد از ظهر باشد، چقدر است؟

۱۸ــ در معادلهٔ $ax + b = ۰$، ضریب a به‌طور تصادفی عددی در بازهٔ [۱,۲] و ضریب b نیز به‌طور تصادفی عددی از بازهٔ [۱,۱−] انتخاب شده است. احتمال این‌که جواب معادله بزرگتر از ۰/۲۵ باشد چقدر است؟

۱۹ــ یک تاجر منتظر دو تماس تلفنی از علی و رضا است. احتمال این‌که علی در فاصلهٔ زمانی بین ۲ تا ۴ بعد از ظهر با او تماس بگیرد به اندازه احتمال تماس تلفنی رضا در فاصلهٔ زمانی بین ساعت ۲:۳۰ تا ۳:۳۰ بعد از ظهر است. احتمال در حالت‌های زیر را محاسبه نمایید :

الف) علی قبل از رضا تلفن بزند ؛

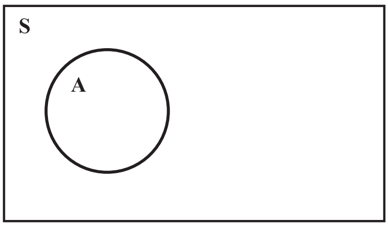
ب) فاصلهٔ دو تماس تلفنی کمتر از ۱۰ دقیقه باشد ؛

پ) علی اوّل تماس بگیرد، فاصلهٔ تلفن‌ها کمتر از ۱۰ دقیقه باشد و هر دو تلفن قبل از ساعت ۳ بعد از ظهر باشد.

۴ــ۶ــ قوانین احتمال

می‌دانیم که از تقسیم کردن اندازهٔ پیشامد ؛یعنی طول، سطح و حجم پیشامد بر اندازهٔ فضای نمونه‌ای در حالت پیوسته،احتمال به دست می آید. با توجه به این‌که فضای پیشامد A همواره زیرمجموعهٔ فضای نمونه‌ای S است،پس اگر P(A) احتمال وقوع پیشامد A باشد، همیشه داریم :

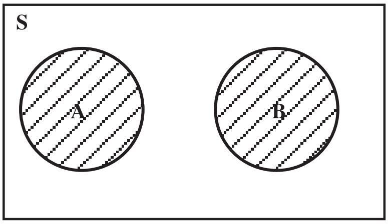
اصل ۱	$۰ \le P(A) \le ۱$



در این‌جا در واقع چون A زیرمجموعهٔ S است پس نسبت «اندازهٔ»A به «اندازهٔ» S، کوچکتر یا مساوی ۱ می‌باشد و واضح است که وقتی مساوی ۱ است که $A = S$ ، پس :

اصل۲	$P(S) = ۱$

حال اگر A و B را پیشامدهایی در فضای نمونه‌ای S بگیریم که هر دو با هم اتفاق نمی‌افتند



یعنی در واقع $A\cap B=\varnothing$ ، که در این صورت دو پیشامد را **ناسازگار** می‌نامیم، می‌خواهیم احتمال وقوع هر دو پیشامد A و B یعنی $A\cup B$ را بررسی کنیم.

در واقع برای پیدا کردن $P(A\cup B)$ می‌توانیم مجموع «اندازه‌های» A و B را بر «اندازهٔ» S تقسیم کنیم که در نتیجه در این حالت احتمال $A\cup B$ برابر حاصل جمع احتمال A و احتمال B خواهد بود.

اصل ۳	$P(A\cup B)=P(A)+P(B) \quad , \quad A\cap B=\varnothing$

برای حالت گسسته با احتمال کلی نیز می‌توان سه اصل بالا را ثابت کرد. (این مطلب به عنوان تمرین آورده شده است.) سه اصل فوق در واقع اصول علم احتمالات هستند که نخستین بار ریاضیدان برجسته **آندره کولموگروف**[1] در سال ۱۹۳۳ آن‌ها را بیان کرد و علم احتمالات را مبتنی بر یک **دستگاه اصولی** مدون ساخت. حال می‌توان به کمک این سه اصل بقیهٔ قوانین احتمال را استنتاج نمود.

قضیه ۱: اگر A، B و C سه پیشامد دو بدو مجزا باشند، یعنی اشتراک هر جفت از آن‌ها تهی باشد، آن‌گاه

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C).$$

برهان: با استفاده از خاصیت شرکت‌پذیری مجموعه‌ها داریم :

$$P(A\cup B\cup C)=P((A\cup B)\cup C) \qquad (۱)$$

در رابطهٔ فوق $A\cup B$ و C مجموعه‌های از هم جدا هستند زیرا :

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$$

بنابراین رابطهٔ (۱) را به این صورت می‌توان نوشت :

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P[(A\cup B)\cup C]\\&=P(A\cup B)+P(C)\\&=P(A)+P(B)+P(C)\end{aligned}$$

رابطهٔ اخیر به واسطهٔ $A\cap B=\varnothing$ برقرار است. ▨

۱ــ A.Kolmogorov

قضیه ۲: اگر داشته باشیم $A \ . \ B$، آنگاه

الف) $P(A) \leq P(B)$.

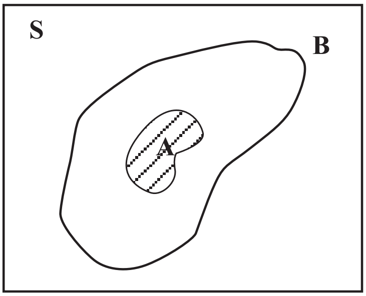
ب) $P(B-A) = P(B) - P(A)$.

برهان: می‌دانیم که $B = (B-A) \quad A$. (به شکل زیر رجوع کنید.) همچنین A و $B-A$ از هم جدا هستند، زیرا $A \quad (B-A) = \ .$. بنابراین طبق اصل ۳ احتمال $P(B) = P(B-A) + P(A)$. حال

اثبات الف) چون $P(B-A) \geq 0$ بنابراین $P(A) \leq P(B)$ ؛

اثبات ب) $-P(A)$ را به دو طرف تساوی فوق اضافه می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$P(B-A) = P(B) - P(A)$$ ▨



توجه: در قضیهٔ ۲، شرط $A \ . \ B$ لازم است و بدون آن نتایج (الف) و (ب) در حالت کلی برقرار نیستند. مثلاً تاس سالمی را می‌ریزیم. پیشامدهای

$A =$ «عدد تاس بیشتر از ۵ نباشد»

$B =$ «عدد تاس زوج باشد»

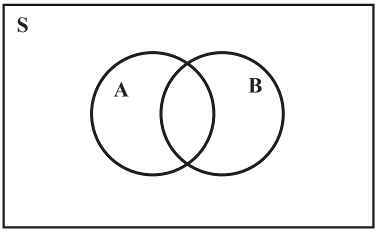
را درنظر می‌گیریم. در این صورت $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $B = \{۲, ۴, ۶\}$ می‌باشد. روشن است که $A \underline{+} B$، $A - B = \{۱, ۳, ۵\}$ و داریم:

$$P(A) = \frac{۵}{۶} \ , \ P(B) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲} \quad , \quad P(A-B) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین

$$P(A) - P(B) = \frac{۵}{۶} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۳} \neq \frac{۱}{۲} = P(A-B)$$

و (ب) برقرار نیست. همچنین نامساوی (الف) نیز در این حالت برقرار نیست. به‌طور کلی دلیلی ندارد که برای دو پیشامد داده شدهٔ A و B، همواره $P(A)$ کوچکتر یا مساوی $P(B)$ باشد.



حال اگر A و B دو پیشامدی باشند که $A\cap B\neq \varnothing$. یعنی مجزا از یکدیگر نباشند، احتمال وقوع $A\cup B$ یعنی $P(A\cup B)$ چه مقداری خواهد بود ؟با توجه به رابطهٔ زیر

$$A\cup B=(A-A\cap B)\cup(B-A\cap B)\cup(A\cap B)$$

که به کمک نمودار وِن قابل بررسی است.و از طرف دیگر چون $(A-A\cap B)$، $(B-A\cap B)$ و $(A\cap B)$ مجزا از یکدیگرند در نتیجه :

$$P(A\cup B)=P(A-A\cap B)+P(B-A\cap B)+P(A\cap B)$$

ولی چون $A\cap B\subseteq A$ و $A\cap B\subseteq B$ ، پس :

$$P(A-(A\cap B))=P(A)-P(A\cap B)$$

$$P(B-(A\cap B))=P(B)-P(A\cap B)$$

حال با جایگذاری دو رابطهٔ اخیر در رابطهٔ قبلی نتیجه می‌شود :

قضیه ۳:اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند،آنگاه

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

حال به دو مثال توجه می‌کنیم :

مثال ۱:اگر احتمال وجود تلویزیون رنگی در یک خانه ۴۱٪،سیاه و سفید ۸۵٪ و از هر دو نوع ۳۲٪ باشد، احتمال این‌که در این خانه لااقل یکی از دو نوع تلویزیون موجود باشد،چقدر است؟

حل:اگر A پیشامد وجود تلویزیون رنگی،B وجود تلویزیون سیاه و سفید و C وجود هر دو نوع تلویزیون باشد، طبق فرض داریم :

$$P(A)=۰/۴۱\ ,\ P(B)=۰/۸۵\ ,\ P(C)=۰/۳۲$$

حال با استفاده از قضیهٔ (۳)می‌نویسیم :

$$P(A\cup B)=۰/۸۵+۰/۴۱-۰/۳۲$$

$$=۱/۲۶-۰/۳۲=۰/۹۴$$

مثال ۲: احتمال این‌که شخصی ناراحتی کلیه داشته باشد،۰/۲۳ ، ناراحتی قلبی داشته باشد ۰/۲۴ و دست کم یکی از این دو نوع بیماری را داشته باشد ۰/۳۸ است.احتمال این‌که هر دو نوع بیماری را دارا باشد چقدر است ؟

حل: اگر A پیشامد بیماری کلیوی داشتن و B پیشامد بیماری قلبی داشتن باشد، طبق فرض

داریم :

$$P(A)=۰/۲۳$$

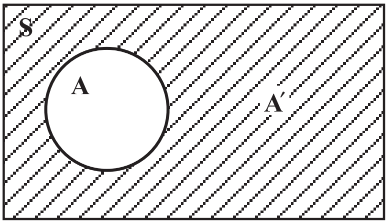
$$P(B)=۰/۲۴$$

$$P(A \quad B)=۰/۳۸$$

بنابراین :

$$P(A \quad B)=P(A)+P(B)-P(A \quad B)=۰/۰۹$$

فرض کنید A پیشامدی در فضای نمونه‌ای S باشد،یعنی A & S ،مکمل A نسبت به S را که با A' نشان می‌دهیم **پیشامد مکمل A** می‌نامیم. در واقع رخ دادن A' به معنای رخ ندادن پیشامد A است.



اجتماع A و A' برابر فضای نمونه‌ای S است ولی از طرف دیگر A و A' مجزا از یکدیگرند یعنی $A \quad A'=.$ ،پس داریم :

$$P(A)+P(A')=P(A \quad A')=P(S)=۱$$

در نتیجه :

$$\boxed{P(A')=۱-P(A)}$$

مثال ۳: قبلاً احتمال این‌که n نفر در یک میهمانی روز تولد متفاوتی داشته باشند را محاسبه کرده‌ایم :

$$P(A)=\frac{۳۶۵\times۳۶۴\times\ldots\times(۳۶۵-n+۱)}{۳۶۵^n}$$

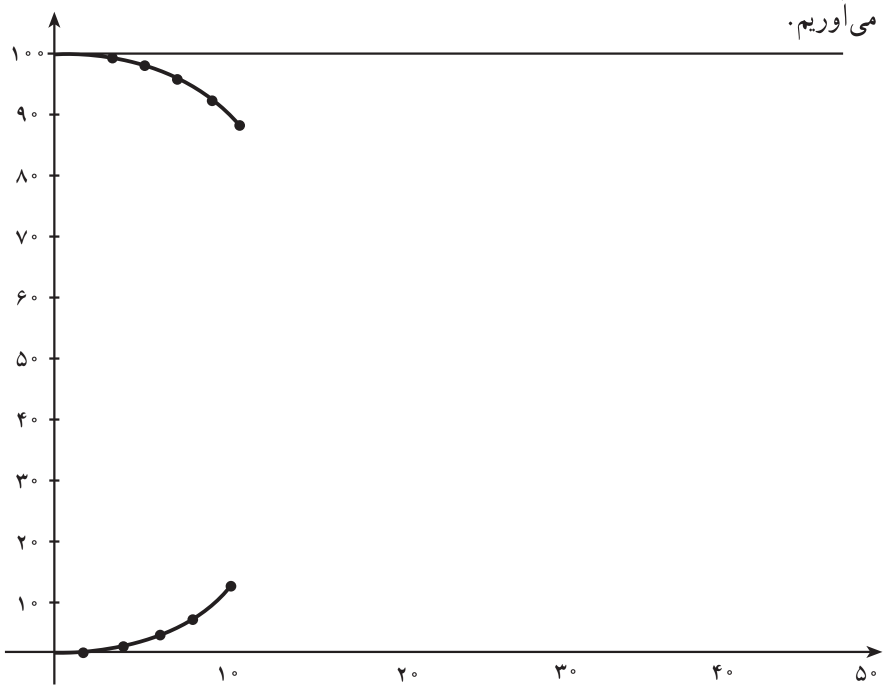
که A همان پیشامد روزهای تولد متفاوت برای n نفر بود. حال اگر بخواهیم احتمال این‌که حداقل دو نفر روز تولد یکسانی داشته باشند را پیدا کنیم چون پیشامد یکسان بودن روز تولد حداقل دو نفر، متمم پیشامد A است،پس

$$P(A')=۱-\frac{۳۶۵\times۳۶۴\times\ldots\times(۳۶۵-n+۱)}{۳۶۵^n}$$

احتمال‌های این‌که حداقل دو نفر در یک گروه موجود باشند که روز تولدشان یکسان باشد و نیز این‌که هیچ دو نفری روز تولد یکسان نداشته باشند در صفحهٔ بعد آورده شده است. هر کدام از این احتمال‌ها به نزدیکترین درصد گرد شده است.

احتمال وجود دو نفر با روز تولد یکسان	احتمال متفاوت بودن همهٔ روز تولدها	تعداد افراد در گروه
٪۰	٪۱۰۰	۲
٪۲	٪۹۸	۴
٪۴	٪۹۶	۶
٪۷	٪۹۳	۸
٪۱۲	٪۸۸	۱۰
٪۱۷	٪۸۳	۱۲
٪۲۲	٪۷۸	۱۴
٪۲۸	٪۷۲	۱۶
٪۳۵	٪۶۵	۱۸
٪۴۱	٪۵۹	۲۰
٪۴۸	٪۵۲	۲۲
٪۵۴	٪۴۶	۲۴
٪۶۰	٪۴۰	۲۶
٪۶۵	٪۳۵	۲۸
٪۷۱	٪۲۹	۳۰
٪۷۵	٪۲۵	۳۲
٪۸۰	٪۲۰	۳۴
٪۸۳	٪۱۷	۳۶
٪۸۶	٪۱۴	۳۸
٪۸۹	٪۱۱	۴۰
٪۹۱	٪۹	۴۲
٪۹۳	٪۷	۴۴
٪۹۵	٪۵	۴۶
٪۹۶	٪۴	۴۸
٪۹۷	٪۳	۵۰

حال اگر این جدول را روی نموداری که محور xهای آن نمایندهٔ تعداد اعضای موجود در گروه و محور yهای آن درصد احتمال‌های مزبور به ترتیب مشخصی باشد،پیاده کنیم نمودار زیر را به دست می‌آوریم.



لازم به تذکر است که با توجه به مثال ۷ بخش ۹ــ۱. وقتی $n > ۳۶۵$ است $P(A) = ۰$ خواهد بود.

در مورد جدول و نمودار بالا یک تمرین در تمرین‌ها آورده شده است.

مثال ۴: از مجموعهٔ اعداد $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۰۰۰\}$ ، عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد انتخابی بر۳ یا بر ۵ یاهر دو بخش‌پذیر باشد چقدر است؟

حل: تعداد اعداد صحیح بین ۱ و N که بر k بخش‌پذیرند از تقسیم N بر k و سپس $\left[\frac{N}{k}\right]$ به‌دست می‌آید (به مثال ۶ در قسمت ۴ــ۱ مراجعه کنید). بنابراین اگر A پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخابی بر ۳ و B پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخابی بر ۵ باشد، آنگاه

$$P(A) = \frac{۳۳۳}{۱۰۰۰}$$

$$P(B) = \frac{۲۰۰}{۱۰۰۰}$$

و $A \quad B$ پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخابی بر هر دو عدد ۳ و ۵ است. برای محاسبهٔ احتمال پیشامد $A \quad B$ ، چون ۳ و ۵ نسبت به هم اول هستند پس اگر عددی بر۳ و ۵ بخش‌پذیر باشد، بر ۱۵ نیز بخش‌پذیر است. برعکس، اگر عددی بر ۱۵ بخش‌پذیر باشد، همزمان بر۳ و بر ۵ نیز بخش‌پذیر است.

بنابراین $$P(A \quad B)=\frac{\left[\frac{۱۰۰۰}{۱۵}\right]}{۱۰۰۰}=\frac{۶۶}{۱۰۰۰}$$

در نتیجه بنا به قضیهٔ ۳، احتمال مطلوب برابر است با :

$$\begin{aligned} P(A \quad B) &= P(A)+P(B)-P(A \quad B) \\ &= \frac{۳۳۳}{۱۰۰۰}+\frac{۲۰۰}{۱۰۰۰}-\frac{۶۶}{۱۰۰۰} \\ &= \frac{۴۶۷}{۱۰۰۰} \end{aligned}$$

مثال ۵: با توجه به مثال ۴ و قضیهٔ ۳، برای محاسبهٔ احتمال سه پیشامد یعنی $P(A \quad B \quad C)$ فرمولی پیدا کنید.

حل: بر اساس خواص مجموعه‌ها داریم

$$A \quad B \quad C=(A \quad B) \quad C$$

و در نتیجه $$P(A \quad B \quad C)=P[(A \quad B) \quad C]$$

اگر $A \quad B$ را یک مجموعه فرض کنیم، آنگاه از قضیهٔ ۳ خواهیم داشت :

(۱) $$P[(A \quad B) \quad C]=P[(A \quad B)]+P(C)-P[(A \quad B) \quad C]$$

اما مجدداً از قضیهٔ ۳ به‌دست می‌آوریم

(۲) $$P[(A \quad B)]=P(A)+P(B)-P(A \quad B)$$

و طبق خاصیتِ بخش‌پذیری اشتراک نسبت بر اجتماع

$$(A \quad B) \quad C=(A \quad C) \quad (B \quad C)$$

اما طبق قضیهٔ ۳

$$\begin{aligned} P[(A \quad B) \quad C] &= P[(A \quad C) \quad (B \quad C)] \\ &= P(A \quad C)+P(B \quad C)-P[(A \quad C) \quad (B \quad C)] \end{aligned}$$

چون $$(A \quad C) \quad (B \quad C)=A \quad B \quad C$$

پس

$$P[(A\cup B)\cap C]=P(A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C) \qquad (۳)$$

از جایگذاری رابطه‌های (۲) و (۳) در رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C).$$

در این مثال و قضیهٔ ۳ می‌بینید که بعضی از احتمال‌ها جمع می‌شوند و بعضی دیگر، از مجموع احتمال‌ها، کم می‌شوند. جمع و تفریقِ احتمال‌ها **اصل شمول و عدم شمول** نامیده می‌شود. در واقع، «شمول» مربوط به احتمال‌هایی است که جمع می‌شوند و عدم شمول مربوط به احتمال‌هایی است که کم می‌شوند.

با استفاده از قضیهٔ ۳ و مثال ۵ می‌توان اصل شمول و عدم شمول را در حالت کلی (برای n پیشامد) یعنی $P(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n)$ به‌دست آورد.

برای این کار، ابتدا همهٔ اشتراک‌های ممکن پیشامدهای A_1 ، A_2 ، ... ، A_n را پیدا کرده و احتمال آن‌ها را به‌دست می‌آوریم. پس از آن، احتمال اشتراک‌هایی که دارای تعداد فردی از پیشامدها هستند را با علامت مثبت و احتمال اشتراک‌هایی که دارای تعداد زوجی از پیشامدها هستند را با علامت منفی به آن‌ها اضافه می‌کنیم که به این فرآیند، اصل شمول و عدم شمول می‌گوییم.

تمرین زیر، به پیدا کردن این الگو کمک می‌کند.

تمرین: اصل شمول و عدم شمول را برای ۴ پیشامد اثبات کنید.

مثال ۶: فرض کنید ۲۰٪ مردم یک شهر روزنامهٔ الف، ۲۵٪ روزنامهٔ ب، ۱۳٪ روزنامه پ، ۱۰٪ روزنامه‌های الف و ب، ۸٪ روزنامه‌های الف و پ، ۵٪ روزنامه‌های ب و پ و بالاخره ۴٪ هر سه روزنامه را می‌خوانند.

احتمال این‌که شخصی به تصادف از اهالی این شهر انتخاب شود که هیچ‌یک از این روزنامه‌ها را نخواند، چقدر است؟

حل: اگر E، F و G به ترتیب پیشامدهای خواندن روزنامه‌های الف، ب و پ باشد، پیشامد این که فرد انتخاب شده دست‌کم یکی از روزنامه‌های الف، ب و پ را بخواند، $E\cup F\cup G$ است. در نتیجه احتمال این‌که فرد انتخاب شده هیچ‌یک از روزنامه‌ها را نخواند، برابر $1-P(E\cup F\cup G)$ است. پس طبق اصل شمول و عدم شمول

$$P(E \cup F \cup G)=P(E)+P(F)+P(G)-P(E \cap F)$$
$$-P(E \cap G)-P(F \cap G)+P(E \cap F \cap G)$$
$$=٠/٢٥+٠/٢٠+٠/١٣-٠/١٠$$
$$-٠/٠٨-٠/٠٥+٠/٠٤$$
$$=٠/٣٩$$

بنابراین، احتمال مطلوب برابر است با :

$$١-٠/٣٩=٠/٦١$$

تمرین

١ــ برای انتخاب یک نفر جهت عضویت در انجمن خانه و مدرسه یک دبیرستان، چهار نفر کاندید شده‌اند. اگر احتمال انتخاب شدن A دو برابر احتمال انتخاب شدن B باشد وB و C شانس برابر در انتخاب شدن داشته باشند،ولی احتمال انتخاب شدن C دو برابر احتمال انتخاب شدن D باشد،مطلوب است :

الف)احتمال این‌که C موفق به انتخاب شود ؛

ب)A موفق به انتخاب نشود.

٢ــ یک شرکت بازرگانی فقط به یک کارمند نیاز دارد. از بین متقاضیان خانم اکبری، خانم معینی و خانم حیدری واجد شرایط هستند. به دلیل مهارت‌های حرفه‌ایِ خانم معینی، احتمال این که ایشان استخدام شوند ٢٠٪ بیشتر از خانم اکبری و ٢٠٪ بیشتر از خانم حیدری است. احتمال این که خانم معینی استخدام شود چقدر است؟

٣ــ آمار نشان می‌دهد که در یکی از شهرهای بزرگ، ٢٥٪ جرائم در طول روز و ٢٠٪ جرائم در درون شهر صورت می‌گیرد. اگر تنها ٢٠٪ جرائم در حومهٔ شهر و در طول روز اتفاق بیفتند، در این صورت چند درصد جرم‌ها درون شهر و در طول شب رخ می‌دهند؟ چند درصد جرم‌ها در حومهٔ شهر و در طول شب اتفاق می‌افتد؟

٤ــ سه خاصیت احتمالات را برای احتمال غیرهم شانس ثابت کنید.

٥ ــ برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S ثابت کنید :

الف) $P(A \quad B')=P(A)-P(A \quad B)$

ب) $P(A' \quad B')=۱-P(A)-P(B)+P(A \quad B)$

۶ــ برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S داریم : $P(A)=P(B)=۱$ ، نشان دهید : $P(A \quad B)=۱$.

۷ــ فرض کنیم که شخصی از شهر اصفهان دیدن کند،احتمال این‌که از عالی‌قاپو بازدید کند۰/۷۴،احتمال این‌که از بازار اصفهان بازدید کند ۰/۷۰،احتمال این‌که از مسجد جامع بازدید کند ۰/۶۴،احتمال این‌که از عالی قاپو و بازار هر دو دیدن کند ۰/۴۶،احتمال این‌که بازار اصفهان و مسجد جامع را ببیند ۰/۴۴ و احتمال این‌که از عالی‌قاپو و مسجد جامع دیدن کند ۰/۷۲ است. احتمال این‌که به بازدید هر سه مکان برود ۰/۳۴ است. احتمال این‌که این شخص لااقل یکی از این سه مکان را دیدن کند چقدر است؟

۸ ــ نشان دهید که :

الف) $P(A)\geq P(A \quad B)$

ب) $P(A)\leq P(A \quad B)$

۹ــ با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید اگر $A_۱$ ، $A_۲$ ، ... ، A_n ، n پیشامد دو به‌دومجزا باشند، آنگاه :

$$P(A_۱ \quad A_۲ \quad ... \quad A_n)=P(A_۱)+P(A_۲)+ ... +P(A_n)$$

۱۰ــ با استفاده از قضیه ۳ ثابت کنید که برای دو پیشامد دلخواه A و B

$$P(A \quad B)\geq P(A)+P(B)-۱$$

۱۱ــجدول و نمودار مربوط به روز تولد را به‌یاد بیاورید و به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) نقطهٔ برخورد دو نمودار بالا و پایین چه اهمیتی دارد ؟

اگر نمودار را به راست ادامه دهیم :

ب) نمودار مربوط به وجود دو نفر با روز تولد یکسان چه تغییری می‌کند؟

پ) نمودار مربوط به عدم وجود دو نفر با روز تولد یکسان چه تغییری می‌کند؟

۱۲ــ عددی به تصادف از مجموعه $\{۱,۲,۳, \quad ,۱۰۰۰\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال این که :

الف) عدد انتخابی بر ۳ بخش‌پذیر باشد، امّا بر ۵ بخش‌پذیر نباشد، چقدر است؟

ب) عدد انتخابی نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش‌پذیر باشد، چقدر است؟

۱۳ــ از مجموعهٔ $\{1,2,3, \quad ,1000\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد انتخابی بر ۴ بخش‌پذیر و بر ۵ و ۷ بخش‌پذیر نباشد چقدر است؟

۱۴ــ رابطه‌های زیر همیشه درست نیستند. برای اثبات این ادعا، برای هر حالت یک مثال نقض بزنید.

الف) $$P(A \quad B)=P(A)+P(B)$$

ب) $$P(A \quad B)=P(A)P(B)$$

۱۵ــ تعداد بیماران یک بیمارستان ۶۳ نفر است که از این افراد، ۳۷ نفر مرد و ۲۰ نفر برای عمل جراحی بستری شده‌اند. اگر ۱۲ نفر از بین بستری شدگان برای عمل جراحی مرد باشند، در این صورت چند نفر از ۶۳ بیمار نه مرد هستند و نه برای عمل جراحی بستری شده‌اند.

۱۶ــ A ، B و C سه پیشامد هستند. ثابت کنید رابطهٔ

$$P(A \quad B \quad C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

درست است **اگر و تنها اگر** رابطهٔ زیر درست باشد؛

$$P(A \quad B)=P(A \quad C)=P(B \quad C)=0$$

۱۷ــ ثابت کنید

$$P(A \quad B \quad C)\leq P(A)+P(B)+P(C)$$

۱۸ــ به کمک استقرای ریاضی، نامساوی تمرین ۱۷ را برای n پیشامد ثابت کنید.

منابع

۱ــ شووینگ تی ــ لین ویو ــ فنگ لین. **نظریهٔ مجموعه‌ها و کاربردهای آن**، (ترجمهٔ : حمید رسولیان). مرکز نشر دانشگاهی، تهران، چاپ ۱۳۶۸.

۲ــ ایان استیوارت ــ دیوید تال. **مبانی ریاضیات** (ترجمهٔ : محمدمهدی ابراهیمی)، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، چاپ ۱۳۶۵.

۳ــ مصاحب، غلامحسین. **آنالیز ریاضی**، جلد اوّل، مؤسسه انتشارات فرانکلین، تهران، ۱۳۴۸.

۴ــ ظهوری زنگنه، بیژن، گویا، مریم ؛ گویا، زهرا ؛ **دوره‌های کوتاه مدت عملی یا کارگاهی آموزش ریاضی**، اداره کل آموزش‌های ضمن خدمت، تهران، ۱۳۷۲.

۵ ــ پولیا، جورج. **چگونه مسأله را حل کنیم**. (ترجمهٔ : احمد آرام). انتشارات کیهان، تهران، چاپ دوم، ۱۳۶۹.

۶ــ چانک، کای، لای. **نظریهٔ مقدماتی احتمال و فرآیندهای تصادفی**، (ترجمه : ابوالقاسم میامئی، قاسم وحیدی)، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۵.

۷ــ فروند، جان. و. والپول، رونالد. **آمار ریاضی**، (ترجمه : علی عمیدی و محمد قاسم وحید اصل) مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۱.

۸ ــ بلایس، تی. اس. رابرتسون، ای. اف. **جبر به روش تمرین**، (ترجمه : حسین دوستی) ناشر مبتکران، تهران، ۱۳۷۰.

۹ــ لیانگ شین هان، **اعداد مختلط و هندسه**، (ترجمه : محمد بهفروزی)، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۶.

۱۰ــ جهانی پور، روح‌الله. **احتمال** (جلد دوم)، از سری کتاب‌های موضوعی انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۷۹.

۱۱ــ قهرمانی، سعید. **مبانی احتمال** (ترجمه : غلامحسن شاهکار و ابوالقاسم بزرگ‌نیا)، مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۷۷.

۱۲ــ راس، شلدون، **مبانی احتمال**، (ترجمه : علی همدانی و احمد پارسیان)، انتشارات شیخ بهایی، ۱۳۷۵.

13- Albert D.polimeni H.Joseph. **Straight Foundations. of Discrete. Mathematics.** State University of New York-Fredonia 1990.

14- Billstein R.,Libeskind, S., Lott J., **A Problem Solving Approach to Mathematics for Elementary School Teachers,** (2nd ed.) Benjamin-Cummings Publish.Co. 1904.

15- Churchill R .V . , Brown J .W . , Verhey R . F . , **Complex Variables and Applications,** Mc-Graw Hill 1990.

16- Feller,W. **An Introduction to Probability Theory and its Applications,** John Wiley & Sons, 1968.

17- Graham R., Knuth D., Pathshinik O., **Concrete Mathematics,** Addison-Wesley 1989.

18- Jacob.H.R.**Mathematics,a human endeavor,** W.H.Freeman, (1982 2nd ed.)

19- Larson L.C., **Problem Solving Through Problems,** Springer Verlag, 1983.

20- Ghahramani,S. **Fundamentals of probability**, Prentic-Hall, Inc,(2000 2nd ed.)

21- Grimmett G., Stirzaker D., **Probability and random processes.** Clarendon press. Oxford, 1982.

معلمان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیای آنان می توانند نظر اصلاحی خود را درباره مطالب
این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۱۵۸۵۵/۳۶۳ - گروه درسی مربوط و یا پیام نگار (**Email**)
talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر تألیف کتاب های درسی ابتدایی و متوسطه نظری