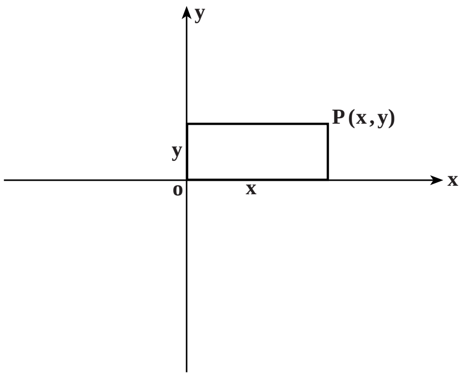
فصل ۵

هندسه مختصاتی و منحنی‌های درجه دوم

۱ــ هندسه مختصاتی

یادآوری و تکمیل

برای تعیین یک نقطه در صفحه از دستگاه‌های مختصات استفاده می‌کنند. یکی از این دستگاه‌ها دستگاه مختصات دکارتی است.



در این دستگاه به هر نقطهٔ P از صفحه یک زوج مرتب (x,y) از اعداد حقیقی متناظر می‌شود، x را طول نقطه و y را عرض آن می‌نامند. محورهای مختصات x و y بر هم عمودند؛ این محورها صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هرکدام از آن‌ها را یک ربع می‌نامند، ربع اوّل ناحیه‌ایست که در آن x و y نقاط هر دو مثبت هستند، در ربع دوم x نقاط منفی است و y نقاط مثبت، در ربع سوم x و y نقاط هر دو منفی هستند، بالاخره ربع چهارم متشکل است از نقاطی است که x آنها مثبت و y شان منفی است.

معادله خطّ

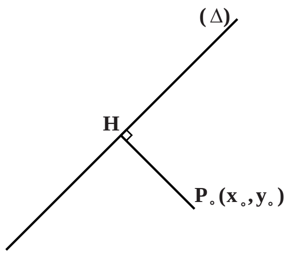
معادله یک خط در دستگاه مختصات دکارتی به شکل $ax \quad by \quad c \quad 0$ است که در آن a و b همزمان صفر نیستند یعنی $a^2 \quad b^2 \neq 0$. اگر $b \neq 0$ با تقسیم طرفین معادلهٔ $ax \quad by \quad c \quad 0$ بر b داریم

c و $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ ، زاویهٔ $-\frac{\pi}{۲}<\alpha<\frac{\pi}{۲}$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\tan\alpha=-\frac{a}{b}$ ، α زاویه‌ایست که خطّ به معادلهٔ $ax \quad by \quad c \quad ۰$ با جهت مثبت محور xها می‌سازد. $-\frac{a}{b}$ را **شیب یا ضریب زاویه** خطّ $ax \quad by \quad c \quad ۰$ می‌نامند. اگر معادله خط به‌صورت $y \quad mx \quad h$ داده شده باشد، m همان شیب خط می‌باشد.

معادلهٔ خطّی که از نقطه $P_۰(x_۰,y_۰)$ می‌گذرد و شیب آن m است عبارتست از : $y \quad y_۰ \quad m(x \quad x_۰)$. شیب خط مستقیمی که از نقاط $A(a_۱,b_۱)$ و $B(a_۲,b_۲)$ می‌گذرد برابر است با $m=\frac{b_۲-b_۱}{a_۲-a_۱}$. بنابراین، معادله خطی که از این دو نقطه می‌گذرد عبارتست از :

$$y-b_۲=\frac{b_۲-b_۱}{a_۲-a_۱}(x-a_۲)$$

فاصله یک نقطه از یک خط



فرض می‌کنیم (Δ) یک خطّ مستقیم باشد که معادله آن $ax \quad by \quad c \quad ۰$ است، نقطهٔ $P_۰(x_۰,y_۰)$ را خارج از خطّ (Δ) درنظر می‌گیریم، از این نقطه خطّی بر (Δ) عمود می‌کنیم، شیب خطّ (Δ) برابر است با $-\frac{a}{b}$ بنابراین، شیب این خط عمود برابر است با $\frac{b}{a}$ درنتیجه معادله این یک عمود عبارتست از :

$$y-y_۰=\frac{b}{a}(x-x_۰)$$

حال مختصات نقطه H محل برخورد این دو خط را تعیین می‌کنیم، برای این کار باید دستگاه دو معادله دو مجهولی $\begin{cases} ax+by+c=۰ \\ y-y_۰=\frac{b}{a}(x-x_۰) \end{cases}$ را حل کنیم. از معادله دوم این دستگاه نتیجه می‌شود

$$y = y_0 + \frac{b}{a}(x - x_0)$$

با قرار دادن در معادله اول دستگاه

$$ax + b(y_0 + \frac{b}{a}(x - x_0)) + c = 0$$

و از آنجا

$$(a + \frac{b^2}{a})x = -by_0 + \frac{b^2}{a}x_0 - c$$

درنتیجه

$$x = \frac{b^2x_0 - aby_0 - ca}{a^2 + b^2}$$

با قرار دادن در معادله اول دستگاه داریم :

$$a(\frac{b^2x_0 - aby_0 - ca}{a^2 + b^2}) + by + c = 0$$

و از آنجا

$$y = \frac{-abx_0 - a^2y_0 - bc}{a^2 + b^2}$$

بنابراین،

$$H = (\frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}, \frac{-abx_0 + a^2y_0 - bc}{a^2 + b^2})$$

حال باید فاصله بین دو نقطه $P_0(x_0, y_0)$ و

$$H = (\frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}, \frac{-abx_0 + a^2y_0 - bc}{a^2 + b^2})$$

را بدست بیاوریم، این فاصله برابر است با؛

$$\boxed{d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

یادآوری می‌کنیم که اگر دو خط (Δ) و (Δ') به معادلات $y \quad mx \quad a$ و $y = m'x + a'$ بر هم عمود باشند آنگاه $mm' = -1$. اگر دو خطّ مستقیم به معادلات $a_1x \quad b_1y \quad c_1 \quad 0$ و $a_2x \quad b_2y \quad c_2 \quad 0$

متعامد باشند آنگاه ∘ $a_1a_2 \quad b_1b_2$.

مثال : اگر $A(\;۱,۲)$ و $B(۳,۰)$ و $C(۱,\;۲)$ سه رأس مثلث ABC باشند، معادلهٔ ارتفاع AH و طول آن را بدست آورید.

حل : ارتفاع AH بر ضلع BC عمود است. ابتدا شیب BC را به‌دست می‌آوریم.

$$m_{BC} = \frac{-۲-۰}{۱-۳} = ۱$$

$$m_{AH} \cdot m_{BC} \quad ۱ \Rightarrow m_{AH} \times ۱ \quad ۱ \Rightarrow m_{AH} \quad ۱$$

AH معادلهٔ ارتفاع : $y \quad ۲ \quad ۱\,(x \quad ۱)$

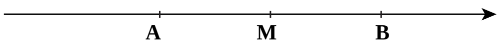
$$y \quad x \quad ۱$$

برای محاسبهٔ طول ارتفاع AH معادلهٔ ضلع BC را به‌دست آورده و فاصلهٔ نقطه A از این خط را محاسبه می‌کنیم.

BC معادلهٔ ضلع : $y \quad ∘ \quad ۱\,(x \quad ۳) \Rightarrow y \quad x \quad ۳ \Rightarrow x \quad y \quad ۳ \quad ∘$

$$AH = \frac{|-۱-۲-۳|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{۶}{\sqrt{۲}} = ۳\sqrt{۲}$$

نقطهٔ وسط یک پاره‌خط : اگر روی محور طول‌ها نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB باشد خواهیم داشت :



$$AM \quad MB$$

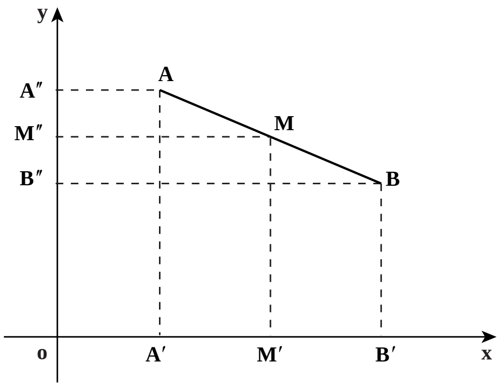
و از آنجا

$$x_M \quad x_A \quad x_B \quad x_M$$

$$۲x_M \quad x_A \quad x_B$$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲}$$

بنابراین، طول مختصات وسط یک پاره‌خط برابر است با میانگین مجموع طول‌های ابتدا و انتهای پاره‌خط. همچنین اگر پاره‌خط AB در صفحهٔ مختصات داده شده باشد مطابق شکل صفحهٔ بعد می‌توان نشان داد :



$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{۲} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{۲} \end{cases}$$

مثال : اگر $A(\ \ ۲,۳)$ و $B(۲,۰)$ و $C(۰,\ \ ۲)$ سه رأس مثلث ABC باشند، طول میانهٔ AM را به‌دست آورید.

حل : ابتدا نقطهٔ M وسط ضلع BC را به‌دست می‌آوریم

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_C}{۲} = \dfrac{۲+۰}{۲} = ۱ \\ y_M = \dfrac{۰+(-۲)}{۲} = -۱ \end{cases} \Rightarrow M(۱,-۱)$$

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^۲ + (y_M - y_A)^۲} = \sqrt{(۱+۲)^۲ + (-۱-۳)^۲}$$

$$= \sqrt{۹+۱۶} = ۵$$

خطوط موازی

دو خط مستقیم به معادلات $a_۱x \quad b_۱y \quad c_۱ \quad ۰$ و $a_۲x \quad b_۲y \quad c_۲ \quad ۰$ موازی هستند اگر و فقط اگر شیبشان یکی باشد و از آنجا $-\dfrac{a_۲}{b_۲} = -\dfrac{a_۱}{b_۱}$ درنتیجه $\dfrac{a_۱}{a_۲} = \dfrac{b_۱}{b_۲}$. به عبارت دیگر $a_۱b_۲ \quad a_۲b_۱$ بدیهی است که اگر $b_۱ \quad b_۲ \quad ۰$ در این‌صورت هر دو خط بر محور xها عمود بوده و با هم موازی خواهند بود.

فاصلهٔ بین دو خط موازی

فرض کنیم دو خطّ موازی $(\Delta_۱)$ و $(\Delta_۲)$ به‌ترتیب به معادلهٔ $ax \quad by \quad c \quad ۰$ و $ax + by + c' = ۰$

باشند، $P_\circ(x_\circ,y_\circ)$ را نقطه‌ای واقع بر خطّ $(\Delta_۱)$ می‌گیریم بنابراین، $ax_\circ \quad by_\circ \quad c \quad \circ$، چنان‌که قبلاً ملاحظه کردیم، فاصلهٔ این نقطه از خطّ $(\Delta_۲)$ از دستور زیر بدست می‌آید :

$$d = \frac{|ax_\circ + by_\circ + c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

در بالا داشتیم $ax_\circ \quad by_\circ \quad c \quad \circ$ و از آنجا $ax_\circ \quad by_\circ \quad\quad c$؛ با قرار دادن این مقدار در رابطه بالا داریم :

$$d = \frac{|c' - c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

این دستور فاصله بین دو خط موازی به معادلات $ax \quad by \quad c \quad \circ$ و $ax + by + c' = \circ$ را به‌دست می‌دهد.

دستگاه معادلات خطی

در کتاب ریاضی (۱) با حل دستگاه دو معادله دومجهولی آشنا شده‌ایم. هرگاه

$$\begin{cases} ۲x - ۳y = ۵ \\ ۵x + y = ۴ \end{cases}$$

یک دستگاه دو معادله دومجهولی باشد، با روش حذفی، یعنی مثلاً ضرب معادله دوم در عدد ۳ و جمع آن با معادله اول، یک معادله یک مجهولی، یعنی

$$۱۷x \quad ۱۷$$

را به‌دست می‌آوریم که از حل آن $x \quad ۱$ حاصل می‌شود. وقتی این مقدار x را در یکی از معادلات دستگاه اولیه‌مان قرار دهیم $y \quad\quad ۱$ به‌دست می‌آید.

به‌طور کلی هر معادله به‌صورت :

$$a_۱x_۱ \quad a_۲x_۲ \quad \dots \quad a_nx_n \quad b \qquad (۱)$$

را، که در آن $a_۱$، $a_۲$،...، a_n و b اعدادی ثابت و $x_۱$، $x_۲$،...، x_n متغیرهایی باشند، یک معادله خطی نامیده می‌شود. $x_۱$، $x_۲$،...، x_nها را مجهول‌های معادله نیز می‌نامند، درحالت $n \quad ۲$، مجموعه $(x_۱,x_۲)$هایی که در معادله

$$a_۱x_۱ \quad a_۲x_۲ \quad b$$

صدق می‌کند یک خط راست در صفحه مختصات تشکیل می‌دهد و دلیل نامگذاری معادلهٔ خطی

روشن می‌شود.

یک جواب معادلهٔ خطی (۱) دنباله‌ای است از n عددی مانند $s_1, s_2, \ldots, s_n$ به‌طوری که وقتی

در (۱) قرار دهیم $x_1 \quad s_1, x_2 \quad s_2, \ldots, x_n \quad s_n$

معادله برقرار باشند. مثلاً $x_1 \quad 2$ ،$x_2 \quad 3$ ،$x_3 \quad 4$ یک جواب معادلهٔ خطی

$$6x_1 \quad 3x_2 \quad 4x_3 \quad 13$$

است، زیرا

$$6(2) \quad 3(3) \quad 4(\ 4) \quad 13$$

به‌طور کلی، یک دستگاه m معادله خطی و n مجهول، یا یک دستگاه خطی مجموعه‌ای است از m معادله خطی n مجهولی. هر دستگاه خطی را می‌توانیم به‌صورت کلی

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \quad a_{12}x_2 \quad \ldots \quad a_{1n}x_n \quad b_1 \\ a_{21}x_2 \quad a_{22}x_2 \quad \ldots \quad a_{2n}x_n \quad b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 \quad a_{m2}x_2 \quad \ldots \quad a_{mn}x_n \quad b_m \end{cases} \qquad (2)$$

بنویسیم معادلهٔ

$$a_{i1}x_1 \quad a_{i2}x_2 \quad \ldots \quad a_{in}x_n \quad b_i$$

را معادله iام دستگاه می‌نامیم $(1 \le i \le m)$. a_{ij}ها و نیز b_1، b_2،...، b_m ثابت‌های معلومی هستند. منظور از حل دستگاه فوق یافتن x_1، x_2، ...، x_nهایی است که در هر معادله دستگاه صدق کنند. یک **جواب** دستگاه (۲) دنباله‌ای است از n عدد مانند $s_1, s_2, \ldots, s_n$ با این ویژگی که وقتی در هر معادله (۲) قرار دهیم $x_1 \quad s_1$، $x_2 \quad s_2$، ... $x_n \quad s_n$ آن معادله برقرار شود (به یک تساوی عددی تبدیل شود).

اگر دستگاه خطی (۲) جواب نداشته باشد می‌گوییم **ناسازگار** است؛ چنانچه جواب داشته باشد، آن را **سازگار** خوانیم. هرگاه $b_1 \quad b_2 \quad \ldots \quad b_m \quad 0$ دستگاه را یک دستگاه **همگن** می‌نامیم.

دستگاه r معادله خطی و n مجهول دیگر

$$\begin{cases} c_{11}x_1 \quad c_{12}x_2 \quad \ldots \quad c_{1n}x_n \quad d_1 \\ c_{21}x_1 \quad c_{22}x_2 \quad \ldots \quad c_{2n}x_n \quad d_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ c_{r1}x_1 \quad c_{r2}x_2 \quad \ldots \quad c_{rn}x_n \quad d_r \end{cases} \qquad (3)$$

را **هم‌ارز** دستگاه (۲) می‌نامیم هرگاه جواب‌های هر دو دستگاه یکسان باشند.

مثال : دستگاه خطی

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -7 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases} \qquad (4)$$

فقط جواب $x_1 \quad 3$، $x_2 \quad 2$ را دارد. دستگاه خطی

$$\begin{cases} 8x_1 \quad 3x_2 \quad 7 \\ 3x_1 \quad 2x_2 \quad 0 \\ 10x_1 \quad 2x_2 \quad 14 \end{cases} \qquad (5)$$

نیز فقط جواب $x_1 \quad 3$، $x_2 \quad 2$ را دارد. پس (۴) و (۵) هم‌ارز هستند.

یکی از رایج‌ترین مسائل عملی تقریباً تمام شاخه علوم، نظیر ریاضیات، فیزیک، زیست‌شناسی، شیمی، اقتصاد، جغرافیا، رشته‌های مختلف مهندسی، تحقیق در عملیات، و علوم اجتماعی حل دستگاه‌های معادلات خطی است.

شما در سال اول با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی خطی آشنا شده‌اید. با ذکر مثال‌هایی مروری بر روش حل این نوع دستگاه‌ها می‌کنیم.

مثال : دستگاه خطی

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -3 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases} \qquad (6)$$

را درنظر می‌گیریم. برای حذف x_2 اگر دو برابر معادله اول را از دوم کم کنیم داریم

$$7x_2 \quad 14$$

که معادله‌ای است بدون جمله شامل x_1. پس مجهول x_1 را حذف کرده‌ایم. حال با حل این معادله نسبت به x_2 داریم :

$$x_2 \quad 2$$

و با گذاشتن این مقدار در معادله اول (۶) خواهیم داشت

$$x_1 \quad 3$$

پس $x_1 \quad 3$، $x_2 \quad 2$ تنها جواب دستگاه خطی فوق است.

مثال : دستگاه خطی

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 7 \\ 2x_1 - 6x_2 = 7 \end{cases} \qquad (7)$$

را درنظر می‌گیریم. باز تصمیم می‌گیریم x_1 را حذف کنیم. برای این کار اگر دو برابر معادله اول را از معادله دوم کم کنیم داریم

$$0 \quad 7$$

که به روشنی برقرار نیست. پس دستگاه (۷) جواب ندارد و ناسازگار است.

مثال : دستگاه خطی

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 14 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases} \qquad (۸)$$

را درنظر می‌گیریم. برای حذف x_1 اگر دو برابر معادلهٔ اول را از معادله دوم و سه برابر معادله اول را از معادله سوم کم کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{cases} -7x_2 - 4x_3 = 2 \\ -5x_2 - 10x_3 = -20 \end{cases} \qquad (۹)$$

این یک دستگاه دو معادله و دو مجهول است، با تقسیم معادله دوم (۹) بر ۵ داریم

$$\begin{cases} -7x_2 - 4x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

که آن را با تعویض جای معادلات، به شکل

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 4 \\ -7x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases} \qquad (۱۰)$$

می‌نویسیم. حال برای حذف x_2 در (۱۰) اگر ۷ برابر معادله اول را به معادله دوم بیافزاییم داریم

$$10x_3 \quad 30$$

یا

$$x_3 \quad 3 \qquad (۱۱)$$

با گذاردن مقدار x_3 در معادله اول (۱۰) معلوم می‌شود که ۲ x_2، و با گذاردن مقادیر x_2 و x_3 در معادله اول (۸) خواهیم داشت ۱ x_1، ملاحظه می‌کنیم که روش حذف در عمل دستگاه خطی

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_3 = 3 \end{cases} \qquad (۱۲)$$

را، که از معادله‌های اول (۸) و (۱۰)، معادله (۱۱) تشکیل شده است، ایجاد می‌کند.

اهمیت این روش در آن است که علاوه بر اینکه دستگاه‌های خطی (۸) و (۱۲) هم‌ارز هستند، (۱۲) این مزیّت را دارد که ساده‌تر حل می‌شود.

مثال : دستگاه خطی

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases} \qquad (۱۳)$$

را درنظر می‌گیریم. برای حذف x_1 اگر دو برابر معادله اول را از معادله دوم کم کنیم داریم

$$3x_2 \quad 3x_3 \quad 12 \qquad (۱۴)$$

حال باید معادله (۱۴) را برای x_2 و x_3 حل کنیم. یک جواب

$$x_2 \quad x_3 \quad 4$$

است، که در آن x_3 می‌تواند هر عدد حقیقی باشد. پس از معادله اول (۱۳) داریم

$$x_1 \quad 4 \quad 2x_2 \quad 3x_3$$

$$4 \quad 2\,(x_3 \quad 4) \quad 3x_3$$

$$x_3 \quad 4$$

بنابراین، یک جواب دستگاه (۱۳) عبارت است از

$$x_1 \quad x_3 \quad 4$$

$$x_2 \quad x_3 \quad 4$$

x_3 یک عدد حقیقی دلخواه

این به معنی آن است که دستگاه خطی (۱۳) بینهایت جواب دارد. زیرا هر بار که به x_3 مقدار بدهیم جوابی مشخص (عددی) از (۱۳) را به‌دست می‌آوریم. مثلاً اگر ۱ x_3،

$$x_1 \quad 5\,, x_2 \quad 3\,, x_3 \quad 1$$

یک جواب دستگاه است. حال آنکه اگر ۲ x_3،

$$x_1 \quad 2\,, x_2 \quad 6\,, x_3 \quad 2$$

جوابی دیگر از دستگاه خواهد بود. سه جواب دیگر این دستگاه را با مقدار دادن به x_3 حساب کنید.

نتیجه می‌گیریم که :

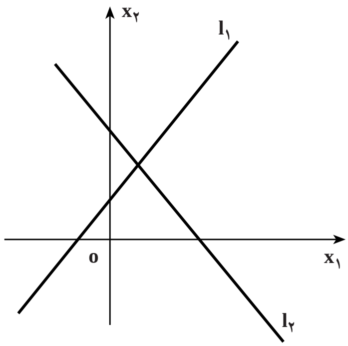
یک دستگاه خطی ممکن است جوابش منحصر به‌فرد باشد (فقط یک جواب داشته باشد) یا آنکه بدون جواب باشد، یا بینهایت جواب داشته باشد.

حل دستگاه دو معادله با دو مجهول از راه هندسی

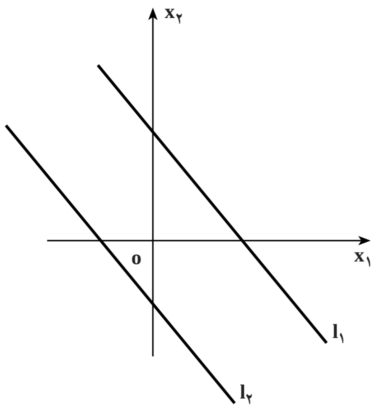
دستگاه خطی دو معادله و دو مجهول x_1 و x_2 به‌صورت کلی

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = c_1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 = c_2 \end{cases} \qquad (۱۵)$$

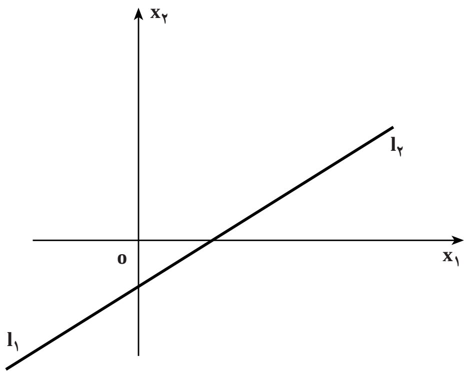
را درنظر می‌گیریم. وقتی در هریک از این معادله‌ها x_1 را مختص اول یعنی طول و x_2 را مختص دوم یعنی عرض یک نقطه در صفحه مختصات تلقی کنیم، نمودار هریک از این معادله‌ها خطی راست است، که به‌ترتیب آن‌ها را با l_1 و l_2 نشان می‌دهیم. اگر نقطه به مختصات (s_1,s_2) محل تلاقی دو خط l_1 و l_2 باشد آنگاه s_2 x_2 و s_1 x_1 یک جواب دستگاه (۱۵) خواهد بود.



(الف) جواب منحصر به فرد است. مختصات نقطه تقاطع جواب دستگاه است.



(ب) دستگاه بدون جواب است.



(پ) دو خط بر هم منطبق و دستگاه بینهایت جواب دارد.

هرگاه دو خط l_1 و l_2 بر هم منطبق باشند دستگاه بینهایت جواب دارد، درحالی که اگر این دو خطی موازی باشند دستگاه بدون جواب است. از راه هندسی نیز به همان سه حالت فوق خواهیم رسید.

مسائل

۱ــ مثلث ABC با سه رأس $A(۱,۴)$ و $B(\ \ ۲,\ \ ۲)$ و $C(۴,۲)$ مفروض است.

الف) معادلهٔ میانهٔ وارد بر ضلع BC را به‌دست آورید.

ب) طول میانهٔ AM را محاسبه کنید.

ج) معادلهٔ ارتفاع BH را محاسبه کنید.

د) نقطه تلاقی میانهٔ AM و ارتفاع BH را به‌دست آورید.

۲ــ طول قطر مربعی که یک ضلع آن واقع بر خط $x \quad y \quad ۵$ و مختصات یک رأس آن $A(\ \ ۲,۱)$ باشد را به‌دست آورید.

۳ــ نقاط $A(۴,۲)$ و $B(۱,\ \ ۱)$ و $C(۶,\ \ ۱)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به‌ترتیب پای ارتفاع AH و میانهٔ AM باشند طول MH را به‌دست آورید.

۴ــ دستگاه‌های خطی زیر را حل کنید.

الف) $\begin{cases} x_۱ + x_۲ = ۵ \\ ۲x_۱ + ۳x_۲ = ۱۰ \end{cases}$

ب) $\begin{cases} ۲x_۱ - ۳x_۲ - ۴x_۳ = -۱۲ \\ x_۱ - ۲x_۲ + x_۳ = -۵ \\ ۳x_۱ + x_۲ + ۲x_۳ = ۱ \end{cases}$

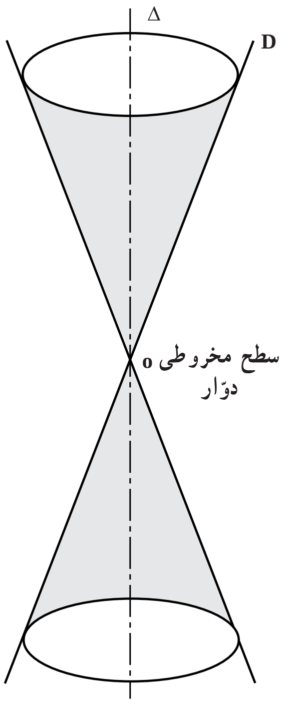
ج) $\begin{cases} ۳x_۱ + ۴x_۲ - x_۳ = ۸ \\ ۶x_۱ + ۸x_۲ - ۲x_۳ = ۳ \end{cases}$

د) $\begin{cases} x + ۴y - z = ۱۲ \\ ۳x + ۸y - ۲z = ۴ \\ x + y + ۳z = ۱۲ \end{cases}$

۲ــ منحنی‌های درجه دوم

نمودار معادلات درجه دوم از x و y را منحنی‌های درجه دوم می‌نامند. این منحنی‌ها از برخورد یک صفحه با یک مخروط دوار نیز قابل به‌دست آوردن هستند، و به همین علت آن‌ها را مقاطع مخروطی نیز می‌نامند.

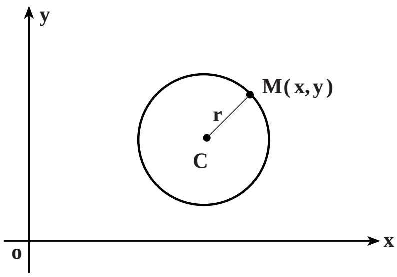
وجه نامگذاری مقاطع مخروطی به زمان کشف تاریخی آن‌ها به‌عنوان محل تقاطع یک صفحه با یک مخروط قائم دوار برمی‌گردد (شکل زیر). هر صفحه که عمود بر محور مخروط باشد مقطعی پدید می‌آورد که **دایره** نامیده می‌شود. صفحه را کمی مایل می‌کنیم، مقطع حاصل یک **بیضی** است. صفحه را باز هم بیشتر کج می‌کنیم تا موازی یکی از یال‌های مخروط شود، مقطع تشکیل شده یک **سهمی** است. به کج کردن صفحه ادامه می‌دهیم تا آنکه صفحه قاطع سطح مخروطی دوار را در دو طرف رأس قطع کند. مقطع حاصل یک **هذلولی** است؛ هذلولی یک منحنی با دو شاخه است.



دایره، بیضی، سهمی و هذلولی از قرن چهارم قبل از میلاد (مسیح) توسط هندسه‌دان یونانی به نام آپولونیوس مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته‌اند. آپولونیوس به‌طور کامل این منحنی‌ها را مورد تحقیق قرار داد و حاصل کارهای خود را در مجموعه‌ای متشکل از هشت کتاب ارائه کرد. کاربردهای عملی مقاطع مخروطی توسط ریاضیدان و دانشمند آلمانی یوهانز کپلر شروع شده است. کپلر فرضیه‌ای ارائه کرد که بیان می‌داشت که سیاره‌ها در مدارهایی بیضی شکل به دورخورشید می‌چرخند که خورشید در یکی از کانون‌های این بیضی‌ها قرار دارد. امروزه تئوری مقاطع مخروطی در مطالعه مدار سیاره‌ها، ستاره‌های دنباله‌دار، و قمرهای مصنوعی کاربردهای فراوانی دارند. مدارهای بسته شامل دایره و بیضی‌اند، درحالی که مدارهای باز (یا مدارهای فرّار) شامل سهمی‌ها و هذلولی‌ها می‌باشند. مقاطع مخروطی در مطالعه ساختار اتم‌ها، سیستم‌های راهنمای هواپیماها، ساختن عدسی‌ها، وسایل نوری و وسایل پیش‌بینی هوا، ارتباطات قمرهای مصنوعی، و نیز در ساختن پل‌ها به‌کار می‌روند. سطوحی که از دوران مقاطع مخروطی تشکیل می‌شوند نیز دارای کاربردهایی در شاخه‌هایی از علوم هستند که با نور، صدا و امواج رادیویی سروکار دارند.

در این بخش از دستگاه مختصات دکارتی به‌عنوان چارچوبی برای مطالعه سهمی، دایره، بیضی و هذلولی استفاده می‌کنیم. معادله این منحنی‌ها به‌صورت عبارت درجه دومی از x و y هستند.

دایره



دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله آن‌ها از یک نقطه ثابت مفروض در صفحه، مقداری ثابت باشد.

نقطه ثابت را مرکز و مقدار ثابت فاصله را شعاع دایره می‌نامند.

معادله دایره : فرض کنیم نقطه ثابت C(h,k) مرکز دایره و فاصله ثابت r شعاع دایره باشد. همچنین فرض کنیم M(x,y) یکی از نقاط دایره باشد. در این صورت

$$CM \quad r$$

یا

$$\sqrt{(x-h)^{۲}+(y-k)^{۲}}=r$$

بنابراین

$$(x \quad h)^{۲} \quad (y \quad k)^{۲} \quad r^{۲} \qquad (۱)$$

(۱) معادله دایره با ویژگی‌های داده شده می‌باشد.

نامعادله

$$(x \quad h)^{۲} \quad (y \quad k)^{۲} < r^{۲} \qquad (۲)$$

نقاطی از صفحه را مشخص می‌کند که فاصله آن‌ها تا نقطه C(h,k) کوچکتر از r است. بنابراین (۲) قسمت درونی دایره به مرکز C(h,k) و شعاع r را توصیف می‌کند. به عبارت دیگر، مختصات مجموعه نقاط درون دایره در رابطه (۲) صدق می‌کنند.

مثال : معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقطه O(۰,۰) گذشته و C(۲, ۱) مرکز آن باشد.

حل : با محاسبه CO شعاع دایره را حساب می‌کنیم.

$$CO=\sqrt{(۲)^{۲}+(-۱)^{۲}}=\sqrt{۵}$$

بنابراین معادله دایره عبارت است از :

$$(x-۲)^{۲}+[y-(-۱)]^{۲}=(\sqrt{۵})^{۲}$$

یا

$$(x \quad 2)^2 \quad (y \quad 1)^2 \quad 5$$

نکته : معادله (۱) را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$x^2 \quad y^2 \quad 2hx \quad 2ky \quad h^2 \quad k^2 \quad r^2 \quad 0$$

هرگاه قرار دهیم $D \quad 2h$ ، $E \quad 2k$ و $F \quad h^2 \quad k^2 \quad r^2$، معادله دایره را به‌صورت

$$x^2 \quad y^2 \quad Dx \quad Ey \quad F \quad 0 \qquad (3)$$

نیز می‌توانیم بیان کنیم. هرگاه معادله دایره به صورت (۳) عرضه شده باشد، مرکز آن نقطهٔ $C(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2})$ و شعاع آن از دستور $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$ به‌دست می‌آید.

مثال : مقدار F را طوری تعیین کنید که معادله $x^2 \quad y^2 \quad 2x \quad 6y \quad F \quad 0$ دایره‌ای به شعاع ۲ را مشخص کند.

داریم $r \quad 2$. پس

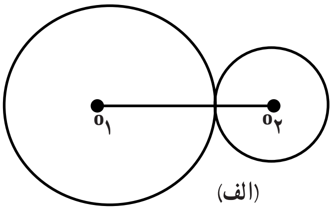
$$2 = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 36 - 4F}$$

$$40 \quad 4F \quad 16$$

$$F \quad 6$$

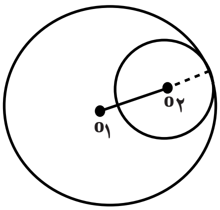
وضع دو دایره نسبت به‌هم : می‌دانیم هر دایره با مرکز و شعاع آن مشخص می‌شود. فرض کنیم (C_1) دایره‌ای به مرکز O_1 و شعاع r_1، و (C_2) دایره‌ای به مرکز O_2 و شعاع r_2 باشد.

هرگاه $r_1 \quad r_2 \quad O_1O_2$، یعنی فاصله مراکز دو دایره برابر حاصل‌جمع شعاع‌های آن‌ها باشند، این دو دایره **مماس خارج** هستند (شکل الف).



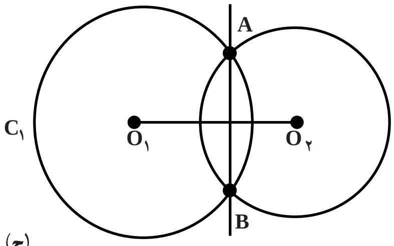
(الف)

هرگاه $r_1 > r_2$ و $r_1 \quad r_2 \quad O_1O_2$، یعنی فاصله مراکز دو دایره برابر تفاضل شعاع‌های آن‌ها باشند، این دو دایره بر هم **مماس داخل** هستند (شکل ب).



(ب)

هرگاه $r_2 \quad r_1 < O_1O_2 < r_2 \quad r_1$ دو دایره **متقاطع**اند. دو دایره متقاطع یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. خط گذرنده



(ج)

$|r_1 \quad r_2| < O_1O_2 < r_1 + r_2$

بر این دو نقطه را **وتر مشترک** دو دایره می‌نامیم (شکل ج).

هرگاه $O_1O_2 > r_1 \quad r_2$ دو دایره را متخارج و درحالتی $O_1O_2 < r_1 \quad r_2$ دو دایره را متداخل می‌گویند.

سؤال : اکنون این سؤال پیش می‌آید که با معلوم بودن مشخصات جبری دو دایره (مختصات مرکز و شعاع، یا معادله دایره) چگونه می‌توانیم معادله وتر مشترک را به‌دست آوریم.

فرض کنیم $x^2 \quad y^2 \quad a_1x \quad b_1y \quad d_1 \quad 0$ معادله دایره (C_1) و $x^2 \quad y^2 \quad a_2x \quad b_2y \quad d_2 \quad 0$ معادله دایره (C_2) باشد. همچنین فرض کنیم این دو دایره متقاطع باشند. چون نقاط A و B (شکل ج) روی هر دو دایره هستند، مختصات این نقاط در معادله هر دو دایره صدق می‌کند. درنتیجه مختصات نقاط A و B در دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + d_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + d_2 = 0 \end{cases}$$

صدق می‌کنند. پس مختصات A وB در معادلهٔ

$$(x^2 \quad y^2 \quad a_1x \quad b_1y \quad d_1) \quad (x^2 \quad y^2 \quad a_2x \quad b_2y \quad d_2) \quad 0$$

نیز صدق می‌کند. بنابراین مختصات این نقاط در معادله

$$(a_1 \quad a_2)\,x \quad (b_1 \quad b_2)\,y \quad d_1 \quad d_2 \quad 0$$

صدق می‌کند. امّا این معادله نسبت به x و y از درجه اول است، و معادله یک خط مستقیم است. پس این معادله، معادله وتر مشترک دو دایره است. چون از نقاط A وB فقط یک خط مستقیم می‌گذرد، که وتر مشترک می‌باشد،

معادله

$$\boxed{(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + d_1 - d_2 = 0}$$

(*)

معادله وتر مشترک دو دایره به معادله‌های زیر می‌باشد.

$$x^2 \quad y^2 \quad a_1x \quad b_1y \quad d_1 \quad 0$$

$$x^2 \quad y^2 \quad a_2x \quad b_2y \quad d_2 \quad 0$$

مثال : معادلهٔ وتر مشترک دو دایره به معادله‌های صفحهٔ بعد را به‌دست آورید.

$x^2 \quad y^2 \quad 6x \quad 8y \quad 0$ و $x^2 \quad y^2 \quad 4x \quad 6y \quad 14 \quad 0$

حل : مطابق دستور (*) داریم

$(6 \quad (\quad 4))\,x \quad (8 \quad (\quad 6))\,y \quad 0 \quad (\quad 14) \quad 0$

که پس از ساده کردن می‌توانیم آن را به‌صورت زیر بنویسیم

$5x \quad 7y \quad 7 \quad 0$

این معادله وتر مشترک دو دایره مفروض می‌باشد.

مسائل

۱ــ مرکز و شعاع دایره‌های زیر را پیدا کنید. سپس دایره را در صفحه مختصات رسم کنید.

(الف) $x^2 \quad y^2 \quad 2x \quad 2y \quad 1 \quad 0$ (ب) $3x^2 \quad 3y^2 \quad 6x \quad 1 \quad 0$

(ج) $x^2 \quad y^2 \quad 6x \quad 2y \quad 1 \quad 0$ (د) $7x^2 \quad 7y^2 \quad 143y \quad 0$

۲ــ چه نقاطی در نابرابری‌های زیر صدق می‌کنند؟

(الف) $x^2 \quad 4x \quad y^2 \quad 12 \leq 0$ (ب) $2x^2 \quad 2y^2 \quad x \quad y > 0$

۳ــ معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $(1,0)$ و $(6,0)$ گذشته و برخط $y \quad 1$ مماس باشد.

۴ــ اگر فاصله نقطه $M(x,y)$ تا نقطه $A(6,0)$ دو برابر فاصله‌اش تا نقطه $B(0,3)$ باشد، نشان دهید که مکان M یک دایره خواهد بود. مرکز و شعاع این دایره را تعیین کنید.

۵ــ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکزش $C(1,2)$ و بر خط به معادله $3x \quad 4y \quad 1 \quad 0$ مماس باشد.

۶ــ معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $(0,0)$ و $(17,7)$ گذشته و مرکزش بر خط $6x \quad 5y \quad 0$ واقع باشد.

۷ــ معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $(7,1)$ و $(0,0)$ و $(\quad 1,6)$ بگذرد. مرکز و شعاع این دایره را بیابید.

۸ــ معادله وتر مشترک دو دایره به معادله زیر را به‌دست آورید :

$x^2 \quad y^2 \quad 8x \quad 2y \quad 82 \quad 0$ و $x^2 \quad y^2 \quad 4x \quad 6y \quad 10 \quad 0$

۹ــ ابتدا معادله وتر مشترک دو دایره به معادله‌های زیر را به‌دست آورید.

$x^2 \quad y^2 \quad 4x \quad 2y \quad 10 \quad 0$ و $x^2 \quad y^2 \quad 2x \quad 2y \quad 24 \quad 0$

سپس با استفاده از معادله وتر مشترک مختصات نقاط تقاطع دو دایره را به‌دست آورید.

۱۰ــ برای هر دسته از معادله دایره‌های زیر مشخص کنید که آیا این دایره‌ها بر هم مماس داخل، مماس خارج، یا متقاطع‌اند؟

(الف) $x^{۲} \quad y^{۲} \quad ۲x \quad ۴y \quad ۰$ و $x^{۲} \quad y^{۲} \quad ۲x \quad ۴y \quad ۴۰$

(ب) $x^{۲} \quad y^{۲} \quad ۲x \quad ۴y \quad ۰$ و $x^{۲} \quad y^{۲} \quad ۲x \quad ۴y \quad ۰$

(ج) $x^{۲} \quad y^{۲} \quad ۲x \quad ۴y \quad ۹$ و $x^{۲} \quad y^{۲} \quad ۲x \quad ۴y \quad ۴$

(د) $x^{۲} \quad (y \quad ۵)^{۲} \quad ۵$ و $(x \quad ۲)^{۲} \quad (y \quad ۳)^{۲} \quad ۷$

۱۱ــ معادله دو دایره را بنویسید که برای آن‌ها یکی از حالت‌های زیر برقرار باشد.

(الف) $O_{۱}O_{۲} \quad ۰$ (دو دایره هم‌مرکز)

(ب) $O_{۱}O_{۲} > r_{۱} \quad r_{۲}$ (دو دایره متخارج)

سهمی

در طبیعت تعداد زیادی از توابع خطی و درجه دوم مشاهده می‌شود. شیئی که به‌طور مستقیم به‌سوی بالا پرتاب می‌شود چنانچه دارای سرعت اوّلیه‌ای برابر ۱۲۸ متر بر ثانیه باشد، فاصله آن پس از t ثانیه از مدل $d \quad ۱۶t^{۲} \quad ۱۲۸t$ (یا آنکه چنانچه ثانیه را به x و مسافت را به y نشان دهیم $y \quad ۱۶x^{۲} \quad ۱۲۸x$ خواهد بود) به‌دست می‌آید. همچنین فرمول $C \quad ۲۰t^{۲} \quad ۲۰۰t \quad ۶۴۰$ نشان‌دهنده تعداد باکتری‌های یک جمعیّت در یک سانتیمتر مکعب آب پس از t روز از کنترل رشد باکتری‌ها می‌باشد. ما با معادله درجه دوم به اختصار در فصل دوم آشنا شدیم. نمودار هر معادله به‌صورت $y \quad ax^{۲} \quad bx \quad c$ را **سهمی** می‌نامیم. ابتدا با پیدا کردن نقاطی خاصّ از نمودار چنین توابعی سعی می‌کنیم طریقه رسم نمودار آن‌ها را به روشی سریعتر توضیح دهیم.

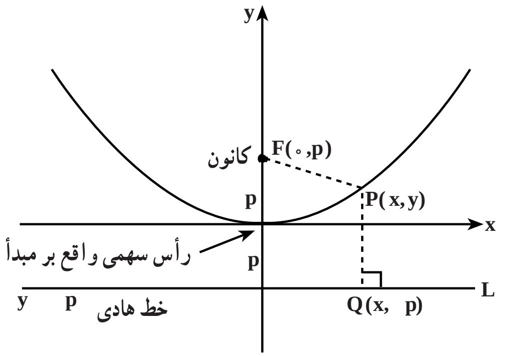
مجموعهٔ تمام نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از یک نقطهٔ ثابت داده شده و یک خط ثابت داده شده یکسان می‌باشد، سهمی نامیده می‌شود. نقطهٔ ثابت، **کانون سهمی** و خط ثابت، **خط هادی سهمی** نامیده می‌شود.

در شکل صفحهٔ‌بعد سهمی به کانون $F(۰ \,, p)$ و خط هادی L به معادله $y \quad p$ رسم شده است. طبق تعریف، نقطهٔ $P(x,y)$ واقع بر سهمی است اگر و فقط اگر $PF \quad PQ$. با محاسبه پاره‌خط‌های

$$PF = \sqrt{(x-۰)^{۲}+(y-p)^{۲}} = \sqrt{x^{۲}+(y-p)^{۲}}$$

و

$$PQ=\sqrt{(x-x)^{۲}+(y-(-p))^{۲}}=\sqrt{(y+p)^{۲}}$$



سهمی به معادلهٔ $x^{۲} = ۴py$

و با توجه به تساوی PF PQ داریم :

$$\sqrt{(y+p)^{۲}}=\sqrt{x^{۲}+(y-p)^{۲}}$$

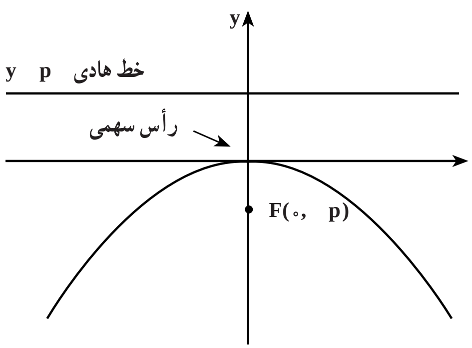
طرفین رابطه بالا را به توان ۲ می‌رسانیم و پس از ساده کردن داریم :

معادلهٔ (۱) $\quad x^{۲} \quad ۴py$ و یا $y=\dfrac{x^{۲}}{۴p}$

این معادله‌ها نشان می‌دهند که سهمی نسبت به محور y تقارن دارد. محور y **محور سهمی** یا **محور تقارن** سهمی نامیده می‌شود.

نقطه تلاقی سهمی و محور تقارن را **رأس سهمی** می‌نامیم. عدد مثبت P را **فاصلهٔ کانونی سهمی** می‌نامند.

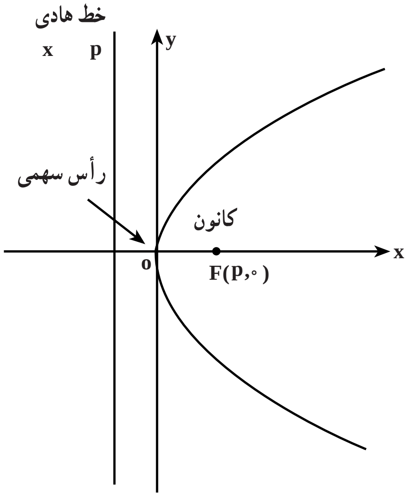
رأس سهمی ۴py $x^{۲}$ (در شکل فوق) بر مبدأ مختصات واقع است. در حالتی که رأس سهمی بر مبدأ مختصات واقع باشد، سهمی ساده‌ترین معادلهٔ خود را دارد. اگر سهمی رو به پایین باز شود و کانون (p , ۰) و خط هادی به معادلهٔ p y باشد، معادلهٔ ۱ به شکل زیر خواهد بود :

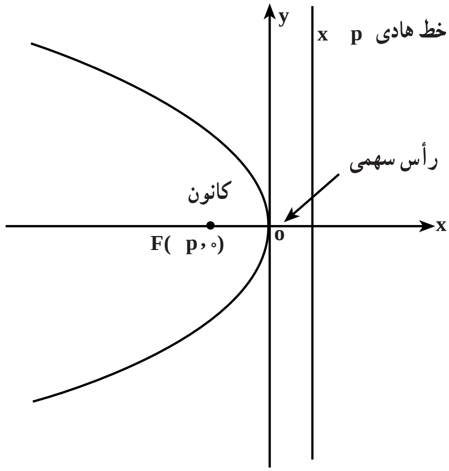


سهمی به معادلهٔ $x^{۲} = \quad ۴py$

معادله (۲) $x^۲ \quad ۴py$ یا $y = -\frac{x^۲}{۴p}$

می‌توان معادله‌های مشابهی برای سهمی‌هایی که رو به راست، یا رو به چپ باز می‌شوند، به‌دست آورد.





سهمی به معادلهٔ $y^۲ = ۴px$ سهمی به معادلهٔ $y^۲ = \quad ۴px$

فرم‌های استاندارد معادلهٔ سهمی با رأس واقع در مبدأ $(p > ۰)$

دهانهٔ سهمی	محور سهمی	خط هادی	کانون	معادله
رو به بالا	محور y	$y = -p$	$(\ , p)$	$x^۲ = ۴py$
رو به پایین	محور y	$y = p$	$(\ , -p)$	$x^۲ = -۴py$
رو به راست	محور x	$x = -p$	$(p , \ )$	$y^۲ = ۴px$
رو به چپ	محور x	$x = p$	$(-p , \ )$	$y^۲ = -۴px$

مثال : کانون و خط هادی سهمی به معادلهٔ $y^۲ \quad ۱۰x$ را پیدا کنید.

حل : ابتدا مقدار p را از معادلهٔ استاندارد $y^۲ \quad ۴px$ پیدا می‌کنیم.

$$۴p = ۱۰ \Rightarrow p = \frac{۱۰}{۴} = \frac{۵}{۲}$$

در نتیجه کانون و خط هادی به صورت زیر به دست می‌آید :

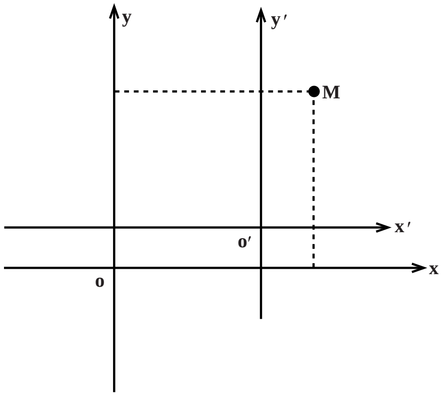
کانون : $(p,0)=(\frac{5}{2},0)$

خط هادی : $x \quad p$ یا $x=\frac{-5}{2}$

انتقال محورها

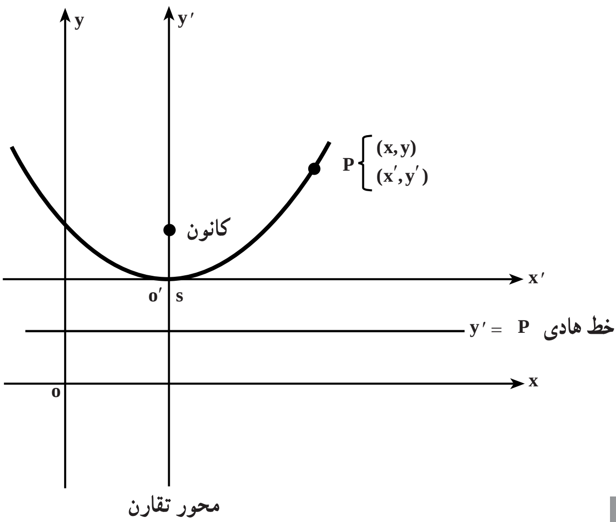
در دستگاه مختصات xoy نقطه $M(x,y)$ را در نظر می‌گیریم، اگر محورهای مختصات را به موازات خود انتقال داده تا مبدأ جدید $O'(h,k)$ باشد در این صورت مختصات M در دستگاه مختصات جدید می‌شود :

$$X' = x - h \quad ، \quad Y' = y - k$$



حال فرض کنیم یک سهمی با رأس $S(h,k)$ داده شده باشد که رو به بالا باز شود (نظیر شکل زیر)، معادله سهمی در مختصات $x'o'y'$ می‌شود :

$$X'^2 = 4pY'$$



بنابراین معادله اخیر در دستگاه مختصات xoy به صورت زیر در می‌آید :

$(x \quad h)^۲ \quad ۴p\,(y \quad k)$

محور تقارن سهمی خط $x \quad h$ است و کانون سهمی $F(h,k \quad p)$ و خط هادی آن $y \quad k \quad p$.

صورت‌های دیگر معادلات سهمی (معادلات متعارف سهمی‌ها)

خط هادی		کانون		معادله سهمی
$y \quad k \quad p$	و	$F(h,k \quad p)$	،	۱) $(x \quad h)^۲ \quad ۴p\,(y \quad k)$
$x \quad h \quad p$	و	$F(h \quad p\,,k)$	،	۲) $(y \quad k)^۲ \quad ۴p\,(x \quad h)$
$x \quad h \quad p$	و	$F(h \quad p\,,k)$	،	۳) $(y \quad k)^۲ \quad ۴p\,(x \quad h)$

مثال : معادله سهمی به رأس $S(۱,۳)$ و کانون $F(۵,۳)$ را بیابید. معادله خط هادی آن را به‌دست آورید.

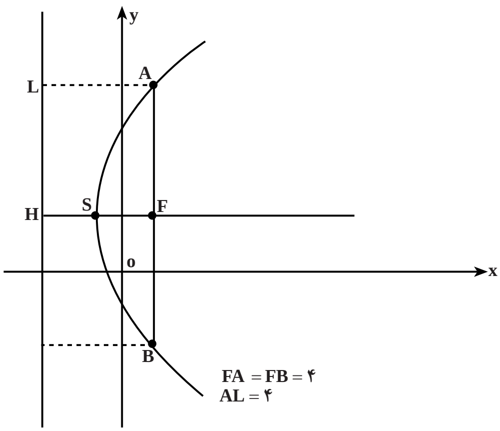
چون سهمی رو به راست باز می‌شود، (چرا؟) معادله آن می‌شود :

$(y \quad ۳)^۲ \quad ۴p\,(x \quad ۱)$

عدد p فاصله بین F و S است بنابراین ۴ p و معادله سهمی به‌صورت $(y \quad ۳)^۲ \quad ۱۶(x \quad ۱)$ درمی‌آید و خط هادی آن به صورت ۳ x است.

مثال : برای سهمی با رأس $S(۲,۳)$ و خط هادی ۴ y، معادله‌ای بیابید. مختصات کانون آن چه هستند؟

حل : سهمی رو به پایین باز می‌شود و معادله آن به صورت $(x \quad ۲)^۲ \quad ۴p(y \quad ۳)$ می‌باشد. پس ۱ ۳ ۴ p و معادله مطلوب چنین است $(x \quad ۲)^۲ \quad ۴(y \quad ۳)$ و کانون به فاصله ۱ p واحد در پایین رأس $(۲,۳)$، در نقطه $F(۲,۲)$ قرار دارد.



تبدیل معادله سهمی به صورت متعارف

متعارف : ویژگی معادله سهمی واقع در صفحه xoy، این است که نسبت به یکی از مختص‌ها، درجه اوّل و نسبت به دیگری از درجه دوم است. هرگاه چنین معادله‌ای در دست باشد، می‌توان طی مراحلی مانند مثال صفحهٔ بعد آن

را به یکی از چهار صورت متعارف تبدیل نمود.

مثال : سهمی به معادله $y^{۲} \quad ۴y \quad ۸x \quad ۴ \quad ۰$ داده شده کانون و معادله خط هادی سهمی را مشخص نمایید.

$$y^{۲} \quad ۴y \quad ۸x \quad ۴ \Rightarrow (y \quad ۲)^{۲} \quad ۸(x \quad ۱)$$

$$۴p \quad ۸ \Rightarrow p \quad ۲$$

بنابراین $S(\ ۱,۲)$ رأس سهمی و معادله خط هادی ۳ x می‌باشد.

رسم سهمی : برای رسم سهمی ابتدا معادلهٔ آن را به‌صورت استاندارد نوشته و کانون، رأس و خط هادی آن را به‌دست می‌آوریم. و برحسب نوع سهمی (قائم یا افقی) محور کانونی، کانون و رأس سهمی و خط هادی را رسم می‌کنیم سپس در طرفین محور کانونی و از نقطهٔ کانون F به اندازهٔ $۲p$ واحد به سمت چپ و راست (بالا و پایین) جدا کرده A و B می‌نامیم در صورت امکان محل تلاقی نمودار با محورهای مختصات را هم به‌دست آورده و نقاط به‌دست آمده را با توجه به نوع سهمی به هم وصل کرده و شکل را کامل می‌کنیم.

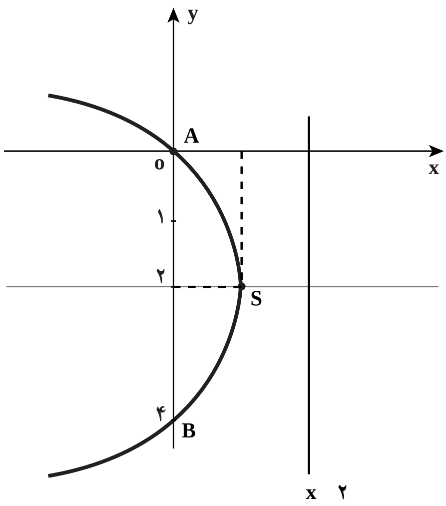
مثال : نمودار سهمی $y^{۲} \quad ۴y \quad ۴x \quad ۰$ را رسم کنید.

حل : ابتدا معادلهٔ سهمی را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم

$$(y \quad ۲)^{۲} \quad ۴x \quad ۴ \Rightarrow (y \quad ۲)^{۲} \quad ۴(x \quad ۱)$$

رأس سهمی نقطهٔ $S(۱,\ ۲)$ و $p \quad ۱$ و نوع سهمی افقی و دهانهٔ آن به سمت چپ باز می‌شود.

کانون سهمی $F\Big|_{-۲}^{۰}$ و خط هادی ۲ x است (در این‌جا نقاط A و B همان نقاط محل تلاقی محور yها و نمودار است).



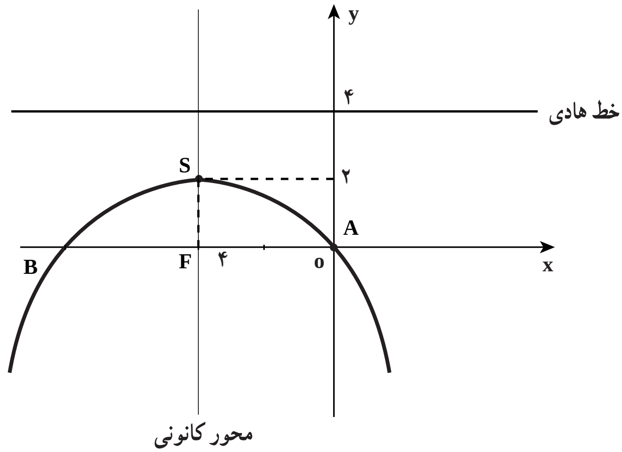
مثال : نمودار سهمی $x^{۲}\quad ۸x\quad ۸y\quad ۰$ را رسم کنید.

حل :

$x^{۲}\quad ۸x\quad ۱۶\qquad ۸y\quad ۱۶$

$(x\quad ۴)^{۲}\qquad ۸\,(y\quad ۲)$

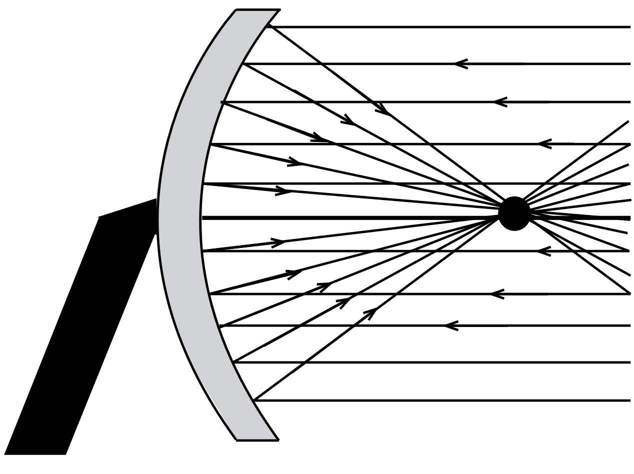
رأس سهمی $S(\;۴,۲)$ و $p\quad ۲$ همچنین کانون $F(\;۴,۰)$ و خط هادی $y\quad ۴$ می‌باشند.



آنتن‌های سهموی

آنتن‌های سهموی امواج رادیویی یا تلویزیونی ورودی را در کانون خود منعکس می‌کنند. با نصب دریافت‌کننده (گیرنده) در کانون امواج دریافت می‌شوند.

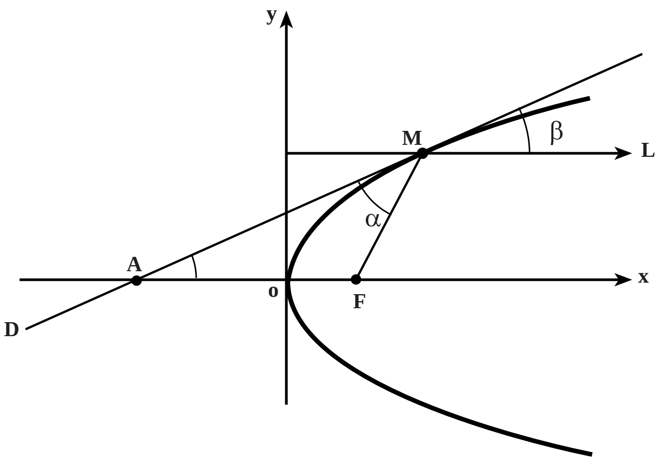
انرژی و قدرت سهموی



نقطه نشان داده شده کانون سهمی است. اشعه‌های نور که موازی محور سهمی به جسم سهموی می‌تابد پس از انعکاس در کانون سهمی متمرکز می‌شوند. از این ایده برای استفاده از انرژی خورشیدی استفاده می‌شود.

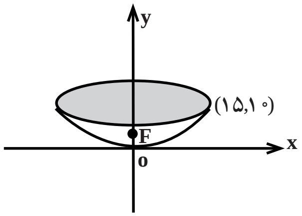
ویژگی بازتابندگی سهمی‌ها

سهمی‌ها ویژگی جالبی دارند که در ساختن انواع آینه‌های سهموی، تلسکوپ‌ها، چراغ‌های جلوی اتومبیل، آنتن‌های سهموی رادار و میکروویو و در گیرنده‌های «بشقابی» تلویزیون استفاده می‌شود و کاربرد عمدهٔ سهمی بازتاباندن نور و امواج رادیویی است. پرتوهایی که از کانون سهمی به سهمی برخورد کنند، موازی با محور از سهمی خارج می‌شوند و پرتوهایی که موازی که موازی با محور به سهمی می‌تابند در کانون سهمی جمع می‌شوند. در شکل زیر سهمی به معادله $y^{۲}$ ‌ ۴px را در نظر گرفته و خط D در نقطه $M(x_{\circ}, y_{\circ})$ بر سهمی مماس شده است ثابت می‌شود که α و β برابرند، پس هر پرتویی که از F به نقطه‌ای از سهمی مانند M بتابد در امتداد ML خارج می‌شود و به همین ترتیب، هر پرتویی که در امتداد ML به سهمی بتابد، به طرف F باز می‌تابد.



مثال : عمق یک آینه سهموی در مرکز آن ۱۰ سانتیمتر و قطر قاعده آن (در بالای آینه) ۳۰ سانتیمتر است فاصله رأس تا کانون را حساب کنید.

حل : محورهای مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که رأس سهمی در مبدأ و محور تقارن سهمی در امتداد محور yها، و دهانه سهمی به طرف بالا باشد. بنابراین معادله سهمی می‌شود $x^{۲}$ ‌ ۴py و از طرفی نقطه (۱۵,۱۰) متعلق به سهمی است بنابراین ۱۰ × ۴p ‌ ۲۲۵ و $p = \frac{۴۵}{۸}$ بنابراین فاصله رأس تا کانون سهمی $۵\frac{۵}{۸}$ سانتیمتر است.



مسائل

۱ــ مختصات کانون و رأس و خط هادی هریک از سهمی‌های زیر را به‌دست آورده و نمودار آن‌ها را رسم کنید.

الف) $y^{۲} \quad ۲y \quad x \quad ۱ \quad ۰$

ب) $۸y \quad ۴ \quad ۴x \quad x^{۲}$

پ) $y^{۲} \quad ۸x \quad ۸ \quad ۰$

ت) $۳y^{۲} \quad ۶x \quad ۴y \quad ۰$

۲ــ معادله یک سهمی را بنویسید که $x \quad ۴$ خط هادی و $y \quad ۴$ محور تقارن آن و از نقطه $A(۹,۷)$ بگذرد.

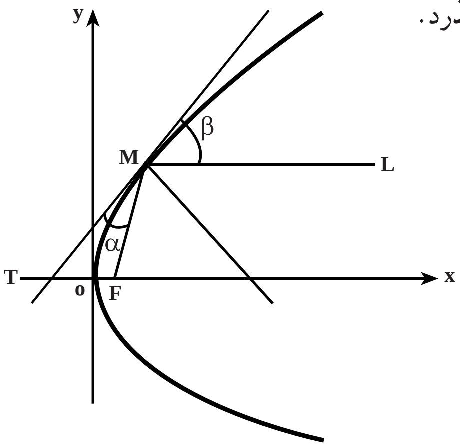
۳ــ معادله سهمی را بنویسید که کانون آن $F(۳,۵)$ و معادلهٔ خط هادی آن $x \quad ۳$ باشد.

۴ــ معادلهٔ سهمی قائم مماس بر محور xها که دارای کانون $F(۳,۱)$ باشد را بنویسید. سپس نمودار آن را رسم کنید.

۵ــ چه نواحی‌ای از صفحه در نابرابری‌های $y^{۲} < x$ و $y^{۲} > x$ صدق می‌کنند؟ «با رسم شکل».

۶ــ ثابت کنید معادله خط مماس بر سهمی به معادله $y^{۲} \quad ۴px$ در نقطه $M(x_{۰}, y_{۰})$ واقع بر آن به صورت $yy_{۰} \quad ۲p(x \quad x_{۰})$ می‌باشد.

۷ــ از نقطه $M(x_{۰}, y_{۰})$ روی سهمی به معادله $y^{۲} \quad ۴px$ مماس و قائم بر سهمی را رسم کرده‌ایم (شکل زیر). ثابت کنید $\alpha \quad \beta$. از اینجا نتیجه بگیرید که هر پرتویی که موازی محور سهمی بر سهمی بتابد از کانون سهمی می‌گذرد.

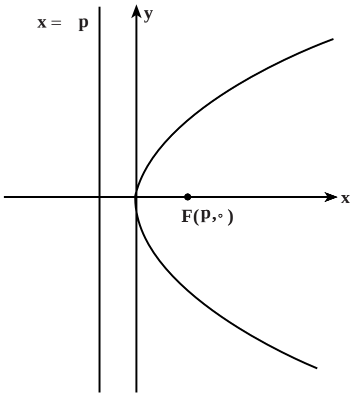


[**راهنمایی** : از مسأله ۶ و این ویژگی سهمی که فاصله هر نقطه آن تا کانون برابر فاصله آن از خط هادی است استفاده کنید.]

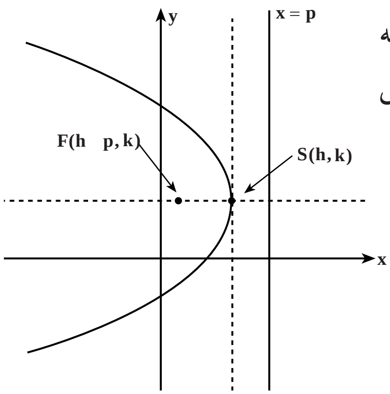
۸ــ یک تلسکوپ انعکاسی دارای آینه‌ای سهموی است که فاصله رأس آن تا کانونش ۷۵ سانتیمتر می‌باشد. اگر قطر قاعدهٔ آینه ۱۶۰ سانتیمتر باشد، عمق آینه در مرکز آن چقدر است؟

۹ــ ثابت کنید دایره‌ای که قطرش وتری از سهمی است که از کانون بر محور تقارن آن عمود است، مماس بر خط هادی این سهمی است.

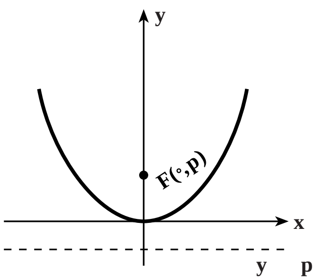
۱۰ــ با توجه به شکل مقابل نشان دهید $y^{2}\quad 4px$ معادلهٔ سهمی است که رأس آن واقع بر مبدأ مختصات است و دهانهٔ آن رو به راست باز می‌شود.



۱۱ــ با توجه به شکل مقابل نشان دهید که $(y\quad k)^{2}\quad 4p(x\quad h)$ معادلهٔ سهمی است به رأس $S(h\,,k)$ و دهانهٔ آن رو به چپ باز می‌شود.

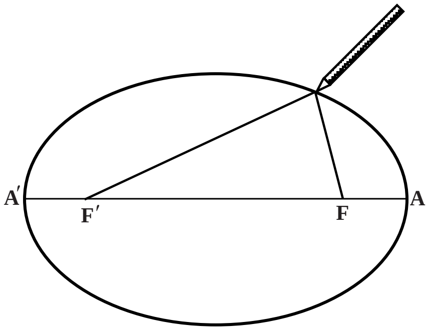


۱۲ــ به شکل مقابل توجه کنید. کانون F را به خط هادی L نزدیک و نزدیکتر می‌کنیم. در حالتی که F بر خط L منطبق شود، شکل سهمی چگونه تغییر می‌یابد؟



بیضی

تعریف : بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن نقطه از دو نقطه ثابت واقع در صفحه مقدار ثابتی باشد. دو نقطه ثابت را کانون‌های بیضی می‌نامند.



رسم بیضی : اگر نقاط F و F′ کانون‌های بیضی اختیار شوند، دو سر نخی را به دو سنجاق می‌بندیم و دو سنجاق را در نقاط F و F′ نصب می‌کنیم (شکل‌مقابل) نوک مدادی را به نخی متکی کرده و آن را طوری حرکت می‌دهیم که نخ همواره کشیده باشد، از حرکت نوک مداد بر روی کاغذ، بیضی رسم می‌شود، زیرا نوک مداد در هر وضعی مانند M باشد، همواره $MF+MF'$ برابر طول نخ یعنی مساوی مقدار ثابتی است. واضح است که باید طول نخ، از فاصلهٔ دو کانون بیضی بیشتر باشد.

معادله بیضی : اگر کانون‌های بیضی نقاط $F(c,۰)$ و $F'(\ c,۰)$ باشند و مجموع فواصل نقطه M متعلق به بیضی از دو کانون با $۲a$ نمایش داده شود؛ داریم :

$$\sqrt{(x+c)^۲+y^۲}+\sqrt{(x-c)^۲+y^۲}=۲a$$

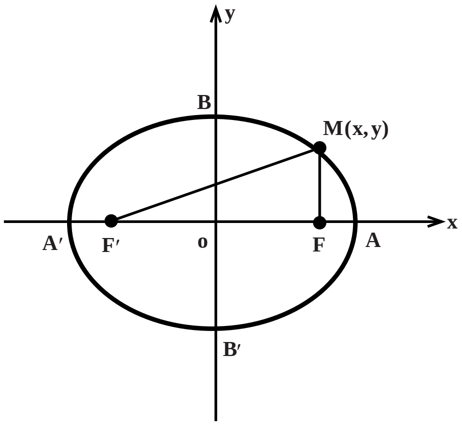
پس از دو بار به توان دو رسانیدن و خلاصه کردن نتیجه می‌گیریم :

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{a^۲-c^۲}=۱$$

چون در مثلث MFF' ، $MF+MF'=۲a$ از $FF'=۲c$ بزرگتر است عبارت $a^۲ \quad c^۲$ مثبت است و قرار می‌دهیم $b=\sqrt{a^۲-c^۲}$ ، بنابراین :

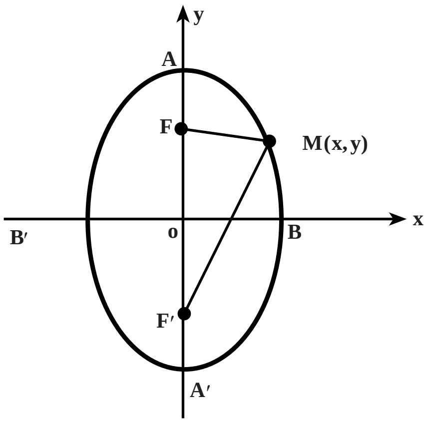
$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱ \qquad (۱)$$

معادله (۱) نشان می‌دهد که این منحنی نسبت به هر دو محور مختصات متقارن است و داخل مستطیلی محصور به خطوط $x \quad a$ و $x \quad a$ و $y \quad b$ و $y \quad b$ قرار دارد.



نقاط تقاطع بیضی با محور xها $(\pm a, 0)$ و با محور yها $(0, \pm b)$ است $2a$ AA' قطر بزرگ بیضی و $BB' = 2b$ قطر کوچک بیضی است.

نکته : اگر در معادله بیضی افقی یعنی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ جای x و y را با هم عوض کنیم، معادله یک بیضی به دست می‌آید که مرکزش همان مبدأ مختصات و قطر بزرگش (AA') بر محور عرض‌ها منطبق خواهد بود (بیضی قائم).



با توجه به $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ همواره رابطه $c^2 \quad b^2 \quad a^2$ برقرار است نظیر سهمی اگر مرکز بیضی نقطه (h,k) و اقطارش با محورهای مختصات موازی باشند با استفاده از انتقال محورهای مختصات معادلات متعارف بیضی به صورت زیرند.

۱ــ بیضی افقی

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

کانون‌ها $(h \pm c , k)$، رأس‌های A و A' $(h \pm a, k)$

۲ــ بیضی قائم

$$\frac{(x-h)^۲}{b^۲}+\frac{(y-k)^۲}{a^۲}=۱$$

کانون‌ها $(h\,,\,k\pm c)$، رأس‌های A و A' $(h,k\pm a)$

مثال : معادله یک بیضی به صورت زیر نوشته شده است. مرکز، رأس‌های A و A' و کانون‌های بیضی را بیابید و سپس نمودار بیضی را رسم کنید.

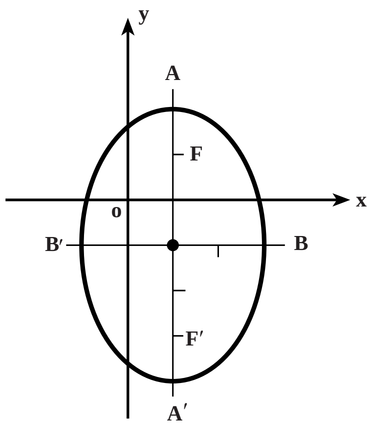
حل :

$$۹x^۲ \quad ۴y^۲ \quad ۱۸x \quad ۸y \quad ۲۳ \quad ۰$$

$$۹(x^۲ \quad ۲x \quad ۱) \quad ۴(y^۲ \quad ۲y \quad ۱) \quad ۹ \quad ۴ \quad ۲۳$$

$$\frac{(x-۱)^۲}{۴}+\frac{(y+۱)^۲}{۹}=۱$$

مرکز بیضی نقطه (۱ ,۱) و ۹ $a^۲$ و ۴ $b^۲$ بنابراین بیضی قائم است و رأس‌ها $A(۱,۲)$ و $A'(۱,-۴)$ و $c=\sqrt{a^۲-b^۲}$ در نتیجه $c=\sqrt{۵}$ و کانون‌ها، $(۱,-۱\pm\sqrt{۵})$. نمودار این بیضی در شکل زیر رسم شده است :



خروج از مرکز بیضی : با توجه به معادله بیضی نسبت $(a>b>۰)\,e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^۲-b^۲}}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامند، این عدد بین صفر و یک تغییر می‌کند و میزان اختلاف شکل بیضی با دایره را نشان می‌دهد، حال اگر a را ثابت نگه داریم و c را در بازهٔ $(۰\,,a)$ تغییر دهیم، شکل بیضی‌های حاصل تغییر خواهد کرد. وقتی c به صفر نزدیک می‌شود بیضی بیشتر شبیه دایره است و وقتی به مقدار

c افزوده شود، بیضی کشیده‌تر می‌شود.

سیارات منظومهٔ شمسی در مدارهایی بیضوی که خورشید در یکی از کانون‌های آن‌ها واقع است، حول خورشید می‌گردند. خروج از مرکز بیشتر سیارات منظومه شمسی به قدری کوچک است که مدار آن‌ها را می‌توان به طور تقریبی دایره تصور کرد. برای نمونه خروج از مرکز زمین برابر ۰/۰۲ است.

مثال : خروج از مرکز یک بیضی $\frac{۴}{۵}$ و مرکزش (۱ , ۴) و طول نقطه A رأس کانونی آن برابر یک است و قطر بزرگ بیضی موازی محور xها است، معادله بیضی را به‌دست آورید.

$$\frac{(x+۴)^۲}{a^۲}+\frac{(y+۱)^۲}{b^۲}=۱$$

$$A(h \quad a, k) \Rightarrow h \quad a \quad ۱ \Rightarrow a \quad ۵$$

$$\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵} \Rightarrow \boxed{c=۴}\, c^۲=a^۲-b^۲ \Rightarrow b^۲=۹$$

معادله بیضی $$\boxed{\frac{(x+۴)^۲}{۲۵}+\frac{(y+۱)^۲}{۹}=۱}$$

معادلات مماس و قائم بر بیضی

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱ \Rightarrow b^۲x^۲+a^۲y^۲-a^۲b^۲=۰$$

شیب مماس : $$\cancel{۲}b^۲x+\cancel{۲}a^۲y'y=۰ \Rightarrow y'=\frac{-b^۲x}{a^۲y} \Rightarrow m=\frac{-b^۲x_۰}{a^۲y_۰}$$

(۱) $$y-y_۰=\frac{-b^۲x_۰}{a^۲y_۰}(x-x_۰)$$

با توجه به تساوی $b^۲x_۰^۲+a^۲y_۰^۲=a^۲b^۲$ از (۱) به معادله زیر می‌رسیم.

معادله مماس در بیضی $$\boxed{\frac{x_۰x}{a^۲}+\frac{y_۰y}{b^۲}=۱}$$

و معادله قائم بر بیضی می‌شود $$\boxed{\frac{a^۲x}{x_۰}-\frac{b^۲y}{y_۰}=c^۲}$$

مسائل

۱ــ معادله یک بیضی را بنویسید که نقاط $F(2 , 2)$ و $F'(4 , 2)$ کانون‌های آن و خروج از مرکز آن $e=\frac{3}{5}$ باشد.

۲ــ بیضی به معادله $4x^2 \quad y^2 \quad 8x \quad 2y \quad 1 \quad 0$ مفروض است. مختصات مرکز، طول اقطار، فاصله کانونی و مختصات دو کانون این بیضی را حساب کنید.

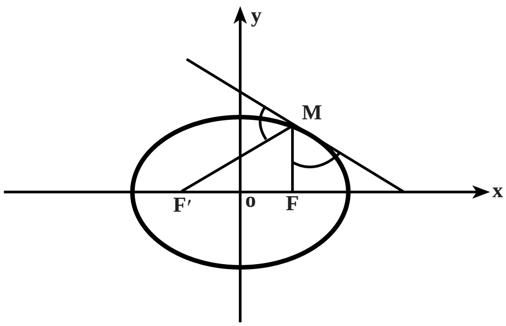
۳ــ نقطه $M\left|\begin{array}{l} x=1+3\sin t \\ y=2\cos t \end{array}\right.$ مفروض است اوّلاً : ثابت کنید مکان هندسی نقطه M وقتی t تغییر کند، بیضی‌است. ثانیاً : نقطه‌ای از بیضی را که به ازای $t=\frac{\pi}{4}$ به دست می‌آید،N می‌نامیم معادلهٔ خط مماس بر بیضی را در نقطه N بنویسید.

۴ــ شکل ناحیه‌ای را رسم کنید که مختصات نقاطش در نابرابری زیر صدق می‌کند.

$$4x^2 \quad 9y^2 \leq 36$$

۵ــ به ازای چه مقادیر ثابت a و b و c، بیضی $4x^2 \quad y^2 \quad ax \quad by \quad c \quad 0$ در مبدأ مختصات بر محور x مماس است و از نقطه (۱,۲) می‌گذرد؟

۶ــ **ویژگی بازتابندگی بیضی** : بیضی‌وار از دوران بیضی حول قطر بزرگش پدید می‌آید. آینه را با نقره اندود کردنِ درون رویهٔ بیضی‌وار می‌سازند. نشان دهید پرتویی از نور که از یکی از کانون‌ها ساطع شود به کانون دیگر باز می‌تابد. امواج صوتی هم این مسیر را طی می‌کنند و از این ویژگی بیضی‌وار برای ساختن برخی از تالارهای هنری استفاده می‌کنند. مطابق شکل مقابل نشان دهید که خطوط گذرنده از نقطه M واقع بر بیضی و دو کانون آن با خط مماس بر بیضی در M زوایای برابر تشکیل می‌دهند.



۷ــ معادله مکان هندسی نقاطی را تعیین کنید که عرض نقطه‌های واقع بر دایرهٔ $x^2 \quad y^2 \quad 16$ را به نسبت $\frac{3}{4}$ تقسیم کنند.

هذلولی

تعریف : هذلولی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که قدر مطلق تفاضل فواصل آن نقطه از دو نقطه ثابت عدد ثابتی باشد. دو نقطه ثابت F و F' کانون‌های هذلولی می‌نامند و قرار می‌دهیم $FF' = 2c$ و مقدار ثابت را با $2a$ نشان می‌دهیم و داریم $c > a$.

معادله هذلولی : اگر $M(x,y)$ بر هذلولی واقع باشد و کانون‌های هذلولی $F(c,0)$ و $F'(-c,0)$ و مقدار ثابت $2a$ باشد. آنگاه نقطه $M(x,y)$ بر هذلولی واقع است اگر و فقط اگر

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$$

یکی از رادیکال‌ها را به طرف راست معادله منتقل، دو طرف را مجذور، و نتیجه را ساده کرده، سپس یک رادیکال باقی‌مانده را در یک طرف نگه می‌داریم و نتیجه را باز هم مجذور می‌کنیم و به معادله زیر می‌رسیم :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$

با فرض $b^2 \quad a^2 \quad c^2$ معادله هذلولی به صورت $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$ می‌باشد.

هذلولی هم مانند بیضی نسبت به هر دو محور و نسبت به مبدأ متقارن است امّا با محور yها تقاطعی ندارد و هیچ قسمتی از نمودار هذلولی بین خطوط x a و x a قرار نمی‌گیرد. در هذلولی یک نامساوی کلی شامل a و b وجود ندارد که متناظر با نامساوی $a > b$ در مورد بیضی باشد. یعنی در یک هذلولی ممکن است $a < b$ یا $a > b$ باشد. اگر در یک هذلولی a b، آن هذلولی را متساوی الساقین گویند.

مجانب‌های هذلولی : نشان می‌دهیم هذلولی به معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ دارای مجانب‌هایی به‌صورت $y=\frac{\pm b}{a}x$ است.

معادلهٔ هذلولی را بر حسب x مرتب می‌کنیم :

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2$$

در این صورت f(x) به یکی از صورت‌های زیر است :

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^{۲}-a^{۲}}\ ,\ y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^{۲}-a^{۲}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{b}{a}x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{b}{a}\sqrt{x^{۲}-a^{۲}}-\frac{b}{a}x\right]$$

$$=\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^{۲}-a^{۲}}-x)(\sqrt{x^{۲}-a^{۲}}+x)}{\sqrt{x^{۲}-a^{۲}}+x}=\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{-a^{۲}}{\sqrt{x^{۲}-a^{۲}}+x}=۰$$

پس بنا به تعریف مجانب، خط $y=\frac{b}{a}x$ مجانب نمودار $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^{۲}-a^{۲}}$ است. به طور مشابه، می‌توان نشان داد که خط $y=\frac{b}{a}x$ نیز مجانب نمودار $y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^{۲}-a^{۲}}$ است در نتیجه خط $y=\frac{b}{a}x$ مجانب هذلولی $\frac{x^{۲}}{a^{۲}}-\frac{y^{۲}}{b^{۲}}=۱$ خواهد بود و با همین روش می‌توان ثابت کرد خط $y=\frac{-b}{a}x$ نیز مجانب همین هذلولی است. برای به یاد سپردن معادلات مجانب‌های هذلولی به صورت زیر عمل می‌کنیم :

$$\frac{x^{۲}}{a^{۲}}-\frac{y^{۲}}{b^{۲}}=۱\Rightarrow(\frac{x}{a}-\frac{y}{b})(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})=۰\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=۰\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=۰\end{cases}$$ مجانب‌ها

طریقه رسم هذلولی : ابتدا مستطیلی به رئوس (a,b) و (a, b) و (a,b) و (a, b) رسم می‌کنیم قطرهای مستطیل خطوط مجانب هذلولی‌اند و رئوس هذلولی نقاط تقاطع محور اصلی و مستطیل رسم شده‌اند و هر شاخه هذلولی از رأس مربوطه و مماس بر ضلع مستطیل رسم شده به طوری که امتداد شاخه هذلولی به طور مجانبی به خطی که قطر مستطیل روی آن قرار دارد نزدیک می‌شود.

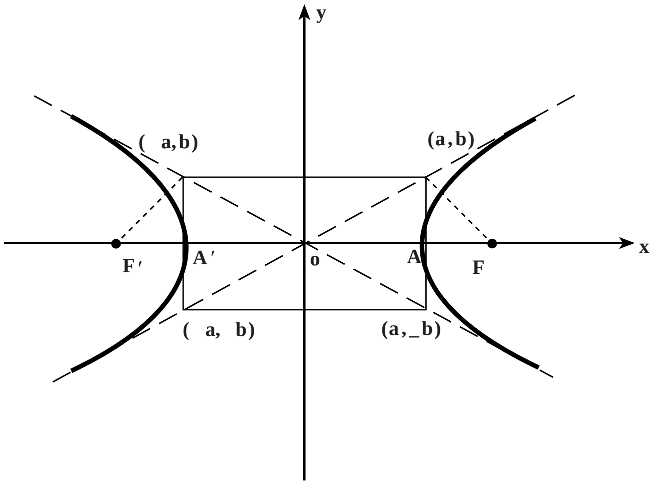
مثال : هذلولی به معادله $\frac{x^{۲}}{۹}-\frac{y^{۲}}{۴}=۱$ را رسم کنید.

$a^{۲}\quad ۹$ و $b^{۴}\quad ۲$

$c^{۲}\quad a^{۲}\quad b^{۲}\quad ۱۳$

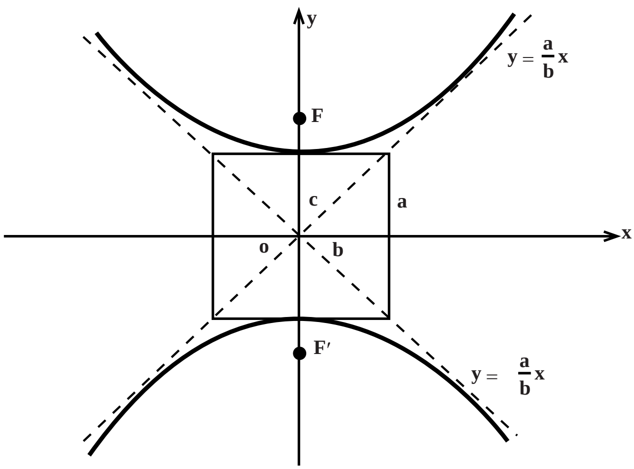
$F(\sqrt{۱۳},۰)$

$F'=(-\sqrt{۱۳},۰)$



اگر به مرکز O و به شعاع $c=\sqrt{a^۲+b^۲}$ دایره رسم کنیم محور تقارن هذلولی (محور xها) را در کانون‌ها، F و F′ قطع می‌کند.

اگر در معادله $\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ جای x و y را عوض کنیم، معادله جدید $\frac{y^۲}{a^۲}-\frac{x^۲}{b^۲}=۱$ یک هذلولی را نشان می‌دهد که کانون‌هایش بر محور yها واقع‌اند (مانند شکل زیر).



وقتی مرکز هذلولی مبدأ مختصات نباشد : مرکز یک هذلولی محل تقاطع محورهای تقارن آن است. فهرست زیر معادلات هذلولی‌هایی را نشان می‌دهد که محورهایشان با محورهای مختصات موازی‌اند، و مرکزشان در نقطه (h,k) واقع است.

۱ــ هذلولی افقی (خط گذرنده از کانون‌ها موازی با محور xها)

$$\frac{(x-h)^{۲}}{a^{۲}}-\frac{(y-k)^{۲}}{b^{۲}}=۱$$

رأس‌ها $(h \pm a , k)$ و کانون‌ها $(h \pm c , k)$:

مجانب‌ها $\qquad \frac{x-h}{a}\pm\frac{y-k}{b}=۰$

۲ــ هذلولی قائم (خط گذرنده از کانون‌ها موازی با محور yها)

$$\frac{(y-k)^{۲}}{a^{۲}}-\frac{(x-h)^{۲}}{b^{۲}}=۱$$

رأس‌ها $(h , k\pm a)$ و کانون‌ها $(h , k\pm c)$:

مجانب‌ها $\qquad \frac{y-k}{a}\pm\frac{x-h}{b}=۰$

مثال : مرکز، رأس‌ها، کانون‌ها و مجانب‌های هذلولی زیر را به دست آورید.

حل : داریم

$$x^{۲} \quad ۴y^{۲} \quad ۲x \quad ۸y \quad ۷ \quad ۰$$

$$(x^{۲} \quad ۲x \quad ۱ \quad ۱) \quad ۴(y^{۲} \quad ۲y \quad ۱ \quad ۱) \quad ۷ \quad ۰$$

$$(x \quad ۱)^{۲} \quad ۱ \quad ۴\,(y \quad ۱)^{۲} \quad ۴ \quad ۷ \quad ۰$$

$$(x \quad ۱)^{۲} \quad ۴\,(y \quad ۱)^{۲} \quad ۴$$

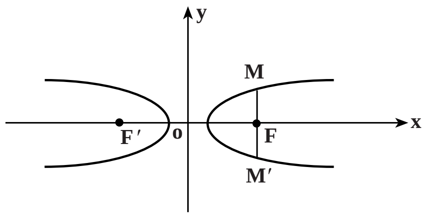
$$\frac{(x-۱)^{۲}}{۴}-(y-۱)^{۲}=۱$$

پس مختصات مرکز (۱,۱) و چون a ۲ و b ۱ پس $c=\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}=\sqrt{۵}$. پس رأس‌ها نقاط (۳,۱) و (۱,۱) و کانون‌ها $(۱+\sqrt{۵},۱)$ و $(۱-\sqrt{۵},۱)$ و مجانب‌ها عبارتند از :

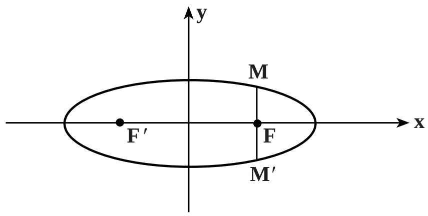
$$\frac{x-۱}{۲}\pm(y-۱)=۰$$

خروج از مرکز هذلولی : نظیر خروج از مرکز بیضی، $e=\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز هذلولی می‌نامند و چون درهذلولی $c>a$. خروج از مرکز هر هذلولی همیشه عددی بزرگتر از یک می‌باشد.

وتر کانونی : وتری که از کانون هذلولی (یا بیضی) می‌گذرد و بر محور کانونی عمود است وتر کانونی هذلولی (بیضی) نامیده می‌شود (شکل زیر). ثابت می‌شود که طول چنین وتری برابر $\frac{۲b^{۲}}{a}$ می‌باشد.



MM یک وتر کانونی هذلولی است.



MM یک وتر کانونی بیضی است.

مثال : معادله یک هذلولی را بنویسید که مرکزش مبدأ مختصات و محور کانونی آن منطبق بر محور xها و خروج از مرکزش $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ و وتر کانونی آن به طول ۴ باشد.

حل : فرض کنیم هذلولی مانند شکل قبل باشد. بنابراین داریم

$$MM' = \frac{۲b^۲}{a} = ۴ \quad \text{و} \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

از این دو رابطه خواهیم داشت :

$$b^۲ \quad ۲a \quad \text{و} \quad e^۲ = \frac{c^۲}{a^۲} = \frac{۵}{۴}$$

لذا

$$\frac{a^۲ + ۲a}{a^۲} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow \frac{a^۲}{a^۲} + \frac{۲a}{a^۲} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow ۱ + \frac{۲}{a} = \frac{۵}{۴}$$

پس $a \quad ۸$ اکنون با توجه به رابطه $b^۲ \quad ۲a$ داریم $b \quad ۴$ در نتیجه معادله هذلولی به صورت زیر است :

$$\frac{x^۲}{۶۴} - \frac{y^۲}{۱۶} = ۱$$

مثال : معادله یک هذلولی را بنویسید که خطوط $۳x \quad ۲y \quad ۱ \quad ۰$ و $۳x \quad ۲y \quad ۷ \quad ۰$ مجانب‌های آن بوده و از نقطه $M(۱+۲\sqrt{۳},۴)$ بگذرد.

حل : مجانب‌ها را در یک دستگاه قطع می‌دهیم.

$$\begin{cases} ۳x + ۲y + ۱ = ۰ \\ ۳x - ۲y - ۷ = ۰ \end{cases} \Rightarrow O'(۱,-۲)$$

O' مرکز این هذلولی است (چرا؟) با رسم خطوط مجانب و انتخاب نقطه M در صفحه مختصات معلوم می‌شود که محور کانونی این هذلولی موازی محور yها است. بنابراین معادله هذلولی

به صورت :

$$\frac{(y+۲)^۲}{a^۲}-\frac{(x-۱)^۲}{b^۲}=۱$$

می‌باشد. چون ضریب زاویه مجانب‌ها از دستور $m=\pm\frac{a}{b}$ به دست می‌آید، پس

$$m=\pm\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۲a=۳b$$

از طرف دیگر مختصات M در معادله هذلولی صدق می‌کند، پس

$$\frac{۳۶}{a^۲}-\frac{۱۲}{b^۲}=۱\Rightarrow a=۳,b=۲$$

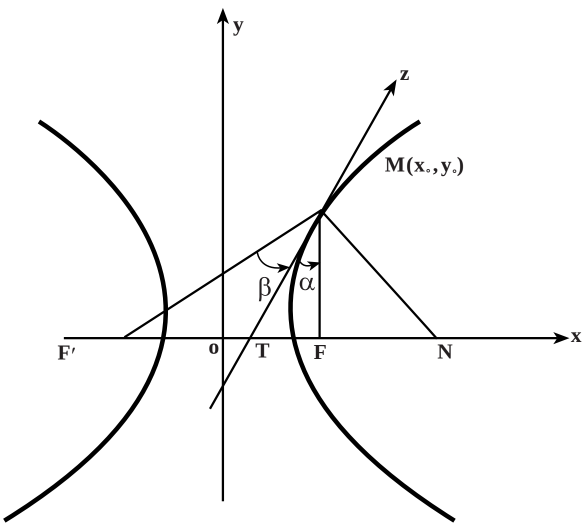
بنابراین معادله هذلولی می‌شود :

$$\frac{(y+۲)^۲}{۹}-\frac{(x-۱)^۲}{۴}=۱$$

معادلات مماس و قائم بر هذلولی

هذلولی به معادله $\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ و نقطه $M(x_\circ , y_\circ)$ متعلق به آن را در نظر می‌گیریم :

$$b^۲x^۲-a^۲y^۲=a^۲b^۲\Rightarrow y'=\frac{b^۲x}{a^۲y}$$



$$\text{شیب مماس } m=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\Rightarrow y-y_0=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)\Rightarrow \boxed{\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1}$$

معادله مماس بر هذلولی

$$\text{شیب قائم } m'=\frac{-a^2y_0}{b^2x_0}\Rightarrow y-y_0=\frac{-a^2y_0}{b^2x_0}(x-x_0)\Rightarrow \boxed{\frac{a^2x}{x_0}+\frac{b^2y}{y_0}=c^2}$$

معادله قائم بر هذلولی

مثال : بدون استفاده از مشتق، ضریب زاویه خطوطی را به دست آورید که از نقطهٔ $A(3,4)$ بگذرند و بر هذلولی به معادلهٔ $x^2 \quad y^2 \quad 1$ مماس باشند.

حل : معادله خطی را می‌نویسیم که از نقطه $A(3,4)$ بگذرد و شیب آن m باشد؛ می‌دانیم معادلهٔ این خط $y \quad 4 \quad m(x \quad 3)$ است. لذا $y \quad mx \quad 3m \quad 4$.

مختصات نقاط تلاقی این خط با هذلولی مفروض از حل دستگاه

$$\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ y=mx-3m+4 \end{cases}$$

به‌دست می‌آید. با حذف y در این معادلات به‌دست می‌آوریم

$$(1 \quad m^2)\,x^2 \quad 2m(\ 3m \quad 4)\,x \quad 9m^2 \quad 24m \quad 17 \quad 0$$

این معادله در واقع طول‌های نقاط تقاطع خطوطی را به‌دست می‌دهد که از نقطه $A(3,4)$ می‌گذرند و هذلولی $x^2 \quad y^2 \quad 1$ را قطع می‌کنند. برای آنکه یکی از این خطوط بر هذلولی مماس شود باید معادلهٔ درجه دوم اخیر فقط یک جواب (یک نقطه تقاطع) داشته باشد. از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{1}{4}\Delta=(3m^2-4m)^2-(1-m^2)(-9m^2+24m-17)=0$$

پس از ساده کردن به‌صورت زیر درمی‌آید

$$8m^2 \quad 24m \quad 17 \quad 0$$

و این معادله دارای دو جواب $m=\frac{6+\sqrt{2}}{4}$ و $m=\frac{6-\sqrt{2}}{4}$ است. یعنی از نقطه $A(3,4)$ دو خط مستقیم می‌توان بر هذلولی $x^2 \quad y^2 \quad 1$ مماس رسم کرد. ضریب زاویه این دو خط به‌ترتیب برابر $\frac{6+\sqrt{2}}{4}$ و $\frac{6-\sqrt{2}}{4}$ است.

مسائل

۱ــ هذلولی‌های زیر را رسم کنید :

(الف) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ (ب) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

(ج) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$ (د) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$

در تمرین‌های ۲ تا ۸، مرکز، رئوس، کانون‌ها و ثابت‌های هذلولی به معادله مفروض را پیدا کنید. سپس شکل منحنی را در کاغذ شطرنجی رسم کنید.

۲ــ $9(x \quad 2)^2 \quad 4(y \quad 3)^2 \quad 36$

۳ــ $4(x \quad 2)^2 \quad 9(y \quad 3)^2 \quad 36$

۴ــ $4(y \quad 3)^2 \quad 9(x \quad 2)^2 \quad 1$

۵ــ $5x^2 \quad 4y^2 \quad 20x \quad 8y \quad 2$

۶ــ $4x^2 \quad y^2 \quad 4y \quad 8$

۷ــ $4y^2 \quad x^2 \quad 4x$

۸ــ $4x^2 \quad 5y^2 \quad 16x \quad 10y \quad 31 \quad 0$

۹ــ بر نقطه A واقع بر هذلولی به معادله $xy \quad a^2$ ($a\neq 0$ و ثابت است) مماسی رسم کرده‌ایم. این مماس محورهای مختصات را در نقاط B و C قطع می‌کند. ثابت کنید نقطه A وسط پاره‌خط BC است.

۱۰ــ بر نقطهٔ A واقع بر هذلولی به معادلهٔ $x^2 \quad y^2 \quad 1$ قائمی رسم کرده‌ایم. این قائم محورهای مختصات را در نقاط B و C قطع می‌کند. ثابت کنید نقطه A وسط پاره‌خط BC است.

۱۱ــ خطوط موازی با شیب m وترهایی بر هذلولی به معادله $x^2 \quad y^2 \quad 1$ ایجاد می‌کنند، ثابت کنید اوساط این وترها بر یک خط واقع‌اند.

مسائل دوره‌ای فصل

۱ــ سهمی به معادله $y \quad x^2$ مفروض است. فرض کنیم A نقطه‌ای واقع بر این سهمی غیر از مبدأ مختصات باشد. مماس بر سهمی در نقطه A محورهای x و y را به ترتیب در نقاط B و C قطع می‌کند. ثابت کنید نقطه B وسط پاره‌خط AC است.

۲ــ مماس بر هذلولی به معادلهٔ $xy \quad a^2$ ($a\neq 0$ عددی است ثابت) در یک نقطه واقع بر آن محورهای مختصات را در نقاط B و C قطع می‌کند؛ ثابت کنید مساحت مثلث OBC عددی است ثابت

(O مبدأ مختصات است).

۳ــ در چه نقاطی از سهمی به معادلهٔ $y \quad x^{۲}$ قائم بر سهمی از نقطه $A(۰,a)$ می‌گذرد؟ $a > \frac{۱}{۲}$.

۴ــ ثابت کنید هذلولی $۲ \quad x^{۲} \quad y^{۲}$ و دایره $x^{۲}+y^{۲}-۲y-\frac{۳}{۲}=۰$ در نقاط $A(\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲})$ و $B(-\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲})$ بر هم مماس هستند.

۵ــ بر سهمی به معادله $y \quad x^{۲} \quad ۵x \quad ۱۰$ نقطه‌ای به‌دست آورید که مماس بر منحنی در آن نقطه موازی خط $y \quad ۶x \quad ۷$ باشد.

۶ــ بر بیضی به معادلهٔ

$$\frac{x^{۲}}{۹}+\frac{y^{۲}}{۱۶}=۱$$

نقاطی را به‌دست آورید که مماس بر منحنی در آن نقاط موازی خطّ $y \quad ۴x \quad ۷$ باشد.

۷ــ نقطه $A(x,y)$ با مختصات پارامتری

$$x=\frac{e^{t}+e^{-t}}{۲} \quad و \quad y=\frac{e^{t}-e^{-t}}{۲}$$

مفروض است که در آن $t \in IR$. به‌ازای بعضی از مقادیر t چند نقطه را در یک کاغذ شطرنجی مشخص کنید. (الف) تعداد نقاط به‌دست آمده را آنقدر انتخاب کنید (با اختیار کردن مقادیر t) تا بتوانید حدس بزنید که این نقاط تشکیل چه نوع منحنی‌ای در صفحه می‌دهند.

(ب) ثابت کنید وقتی t در IR تغییر می‌کند نقطه A بر یک هذلولی حرکت می‌کند. معادله این هذلولی را به‌دست آورید.

۸ــ ثابت کنید به‌ازای هر عدد حقیقی a، خط مستقیم به معادله $y=ax+\sqrt{۴a^{۲}+۹}$ بر بیضی به معادلهٔ

$$\frac{x^{۲}}{۴}+\frac{y^{۲}}{۹}=۱$$

مماس است.

۹ــ ثابت کنید دایره به معادله $x^{۲} \quad y^{۲} \quad ۹y \quad ۱۶ \quad ۰$ و سهمی $y \quad x^{۲}$ در دو نقطهٔ $A(۲,۴)$ و $A(\quad ۲,۴)$ بر هم مماس هستند.