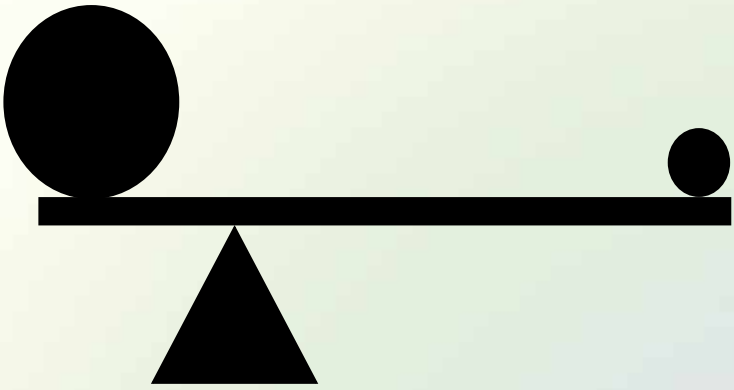
فصل
چهارم

تعادل



هدف‌های رفتاری

پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

۱- مفهوم تعادل را توضیح دهد.

۲- شرط تعادل نقطهٔ مادی را بیان کند.

۳- پیکر آزاد ذرهٔ مادی را ترسیم کند.

۴- شرط تعادل نقطهٔ مادی را در مسائل به‌کار گیرد.

۵- شروط لازم برای تعادل جسم صلب را توضیح دهد.

۶- انواع تکیه‌گاه‌ها را بشناسد.

۷- پیکر آزاد اجسام تحت تأثیر نیروهای مختلف را ترسیم کند.

۸- عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را در اجسام محاسبه کند.

۴-۱ تعادل

مفهوم تعادل آن‌است که ذره یا جسم مادی هیچ‌گونه حرکت و یا چرخشی نداشته باشد.

به منظور بررسی تعادل اجسام، آن‌ها را به دو حالت در نظر می‌گیریم.

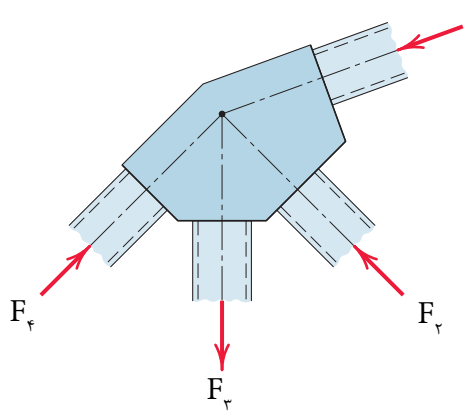
۱- نقطه مادی

۲- جسم صلب .

۴-۱-۱- تعادل نقطهٔ مادی

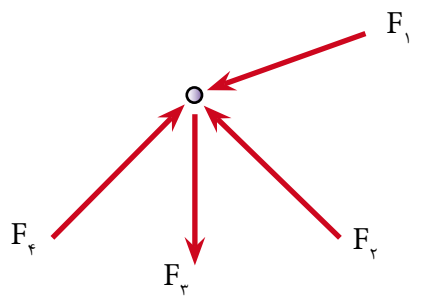
با توجه به تعریف نقطهٔ مادی در فصل اول، نیروهای وارد به جسم در یک نقطه متقارب خواهند بود و شرط تعادل در این حالت آن‌است که برآیند نیروهای وارده صفر باشد یعنی:

$$\sum \vec{F} = 0 \qquad (۱-۴)$$



(الف)

در شکل (۴-۱- الف) چنان‌چه از ابعاد قطعات اتصال صرف‌نظر شود، وضعیت نیروها به صورت شکل (۴-۱- ب) خواهند بود.



(ب)

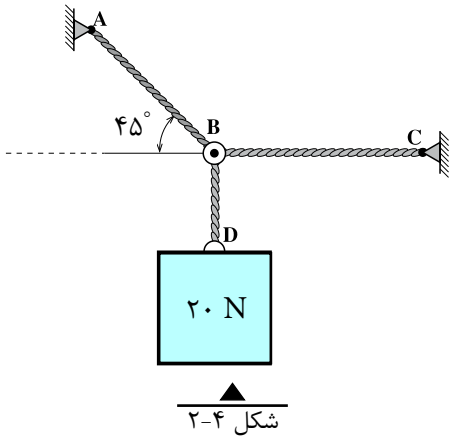
شکل ۴-۱

در صفحه مختصات دکارتی رابطهٔ (۴-۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = 0 \\ \sum \vec{F}_y = 0 \end{cases} \qquad (۲-۴)$$

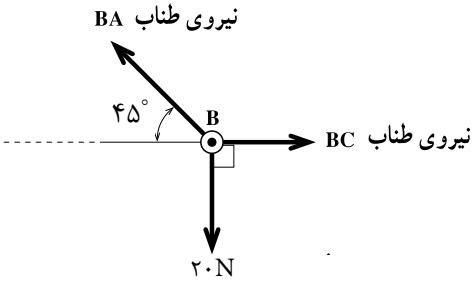
۴-۱-۱-۲- پیکر آزاد جسم

به منظور بررسی تعادل اجسام، لازم است ابتدا جسم را از محیط اطراف خود جدا نموده و نیروهای وارد بر آن را در راستاهای موجود نمایش دهیم که به این عمل، ترسیم پیکرآزادجسم[۱] گفته می‌شود.



شکل ۴-۲

در شکل (۴-۲) وزنهٔ ۲۰N توسط سه رشته کابل AB و BC و BD نگهداری شده است. چون کابل‌ها فقط نیروی کششی را تحمل می‌نمایند بنابراین نیروهای وارد به نقطه B به صورت کششی بوده و پیکر آزاد آن مطابق شکل (۴-۳) خواهد بود.



شکل ۴-۳

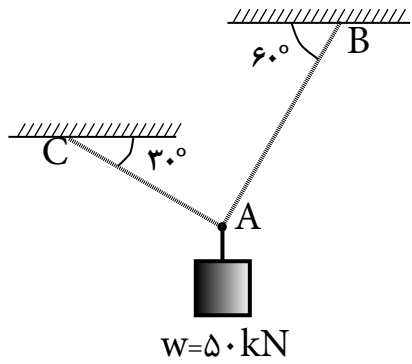
نکته:

در حل مسائل تعادل نقطهٔ مادی، ابتدا پیکر آزاد آن‌را ترسیم نموده و سپس به کمک معادلات تعادل (۴-۲) مجهولات مسئله را محاسبه می‌نمائیم.

۱- FBD (Free Body Diagram)

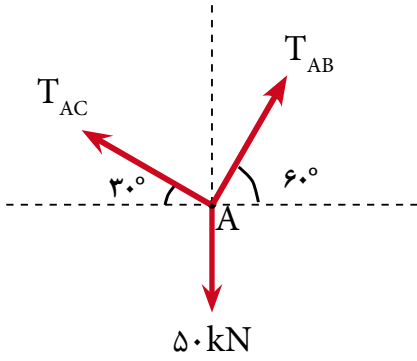
مثال ۱

کشش کابل‌های **AB** و **AC** را در سامانهٔ در حال تعادل زیر به‌دست آورید.

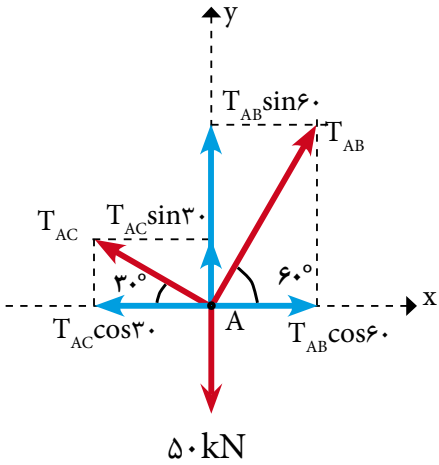


حل:

گام اول) با توجه به این موضوع که تمامی نیروها به نقطه **A** وارد می‌شوند بنابراین پیکر آزاد نقطه مادی **A** ترسیم می‌گردد. می‌دانیم که کابل‌ها همیشه رفتار کششی دارند بنابراین نیروی کابل‌های **AB** و **AC** را به ترتیب با T_{AB} و T_{AC} به صورت کششی و زوایای هر کدام را نمایش می‌دهیم.



گام دوم) تعیین محورهای مختصات **x** و **y** روی نقطه **A** و تجزیه نیروها در این دستگاه مختصات



گام سوم) تشکیل معادلات تعادل (۴-۲) و حل آن‌ها تا رسیدن به خواسته‌های مسئله

رابطه I $\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \Rightarrow T_{AB}\cos 60^\circ - T_{AC}\cos 30^\circ = 0$

رابطه II $+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T_{AB}\sin 60^\circ + T_{AC}\sin 30^\circ - 50 = 0$

چون حل هر یک از معادلات فوق با وجود دو مجهول امکان‌پذیر نیست بنابراین آن‌ها را در یک دستگاه دو معادله دو مجهولی قرار داده که با استفاده از روش‌های مختلف قابل حل است.

در این‌جا از معادله اول یکی از مجهولات را بر حسب دیگری محاسبه و در معادله دوم قرار می‌دهیم تا یکی از مجهولات حذف شود:

رابطه III $\Rightarrow T_{AB} = \dfrac{T_{AC}\cos 30}{\cos 60} \Rightarrow T_{AB} = 1/73 T_{AC}$ از رابطه I نتیجه می‌شود

مقدار T_{AB} را در رابطه II قرار داده خواهیم داشت:

$$1/73 T_{AC} \times \sin 60^\circ + T_{AC}\sin 30^\circ - 50 = 0 \Rightarrow 2\ T_{AC} - 50 = 0$$

$$T_{AC} = \frac{50}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{AC} = 25\ kN}$$

حال مقدار T_{AC} را در رابطهٔ III قرار می‌دهیم:

$\Rightarrow T_{AB} = 1/73 \times 25$ از رابطهٔ III

$$\Rightarrow \boxed{T_{AB} = 43/25\ kN}$$

۴-۱-۲- تعادل جسم صلب

در قسمت قبل بنا به فرض، اجسام را به عنوان یک نقطه مادی در نظر گرفتیم. در حالی که چنین فرضی همیشه امکان‌پذیر نخواهد بود و نمی‌توان از ابعاد جسم صرف‌نظر نمود بنابراین در این حالت نیروها در یک نقطه متقارب نخواهند بود و علاوه بر حرکت، امکان دَوَران (گشتاور) جسم تحت تأثیر نیروهای وارده نیز وجود دارد. لذا شرط تعادل در مورد اجسام صلب به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \Sigma F_X = 0 \leftarrow \text{۱- برای این‌که جسم در راستای محور } x \text{ جابه‌جایی نداشته باشد باید:} \\ \Sigma F_Y = 0 \leftarrow \text{۲- برای این‌که جسم در راستای محور } y \text{ جابه‌جایی نداشته باشد باید:} \\ \Sigma M = 0 \leftarrow \text{۳- برای این‌که جسم چرخش نداشته باشد باید:} \end{cases}$$

(۳-۴)

۴-۲ انواع تکیه‌گاه‌ها و عکس‌العمل‌های آن‌ها

برای بررسی تعادل اجسام صلب، همانند نقاط مادی باید ابتدا پیکر آزاد آن‌ها را ترسیم نمود. برای این منظور، باید جسم را از محیط اطراف آن جدا نمائیم و چون اجسام بر روی تکیه‌گاه‌هایی قرار دارند که با توجه به نوع آن‌ها مانع از حرکت (جابه‌جایی) و یا چرخش جسم می‌گردند، لازم است ابتدا تکیه‌گاه‌ها و عکس‌العمل‌های آن‌ها را معرفی نمائیم.

تعریف عکس‌العمل تکیه‌گاهی

منظور از عکس‌العمل تکیه‌گاهی اجسام واکنشی است که تکیه‌گاه در جهت حفظ تعادل آن‌ها از خود نشان می‌دهد و مانع از حرکت و یا دوران جسم مورد نظر می‌شود.

۴-۲-۱- انواع تکیه‌گاه‌ها

الف) تکیه‌گاه غلطکی (یک‌مجهولی)

عبارت‌است از تکیه‌گاهی که تنها یک عکس‌العمل آن‌هم عمود بر سطح اتکای خود دارد؛ همانند چرخ اتومبیل روی سطح بدون اصطکاک.

ب) تکیه‌گاه مفصلی (دومجهولی)

به تکیه‌گاهی گفته می‌شود که دارای دو عکس‌العمل می‌باشد؛ یکی مماس بر سطح اتکا و دیگری عمود بر آن خواهد بود.

ج) تکیه‌گاه گیردار (سه‌مجهولی)

تکیه‌گاهی است که دارای سه عکس‌العمل به شرح زیر می‌باشد:

۱- مماس بر سطح تکیه‌گاه

۲- عمود بر سطح تکیه‌گاه

۳- عکس‌العمل دورانی

د) تکیه‌گاه میله‌ای

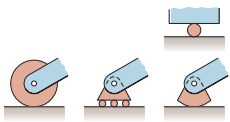
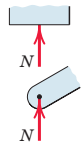
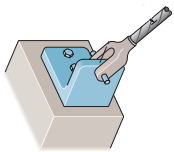
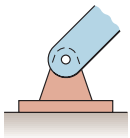
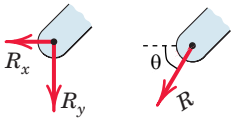
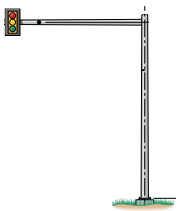
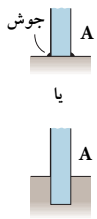
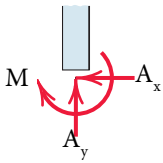
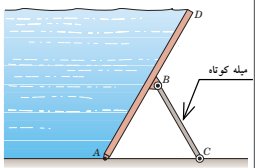
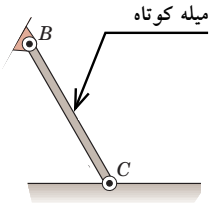
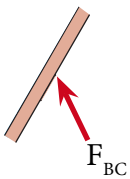
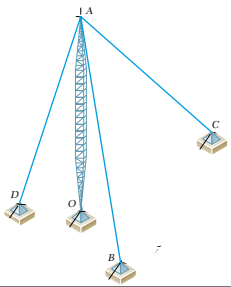
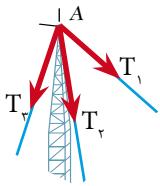
منظور از میله عضوی کوتاه است که در دو انتهای خود به صورت لولا یا مفصل متصل شده باشد. عکس‌العمل تکیه‌گاه میله‌ای در راستای میله و به صورت کششی یا فشاری خواهد بود.

ه) تکیه‌گاه کابلی:

هر گاه جسم توسط کابل به تکیه‌گاه متصل شود، عکس‌العمل کابل به صورت کششی و در راستای آن خواهد بود.

در جدول (۴-۱) انواع تکیه‌گاه‌ها و عکس‌العمل‌های آن‌ها معرفی شده‌اند.

جدول (۴-۱) انواع تکیه‌گاه

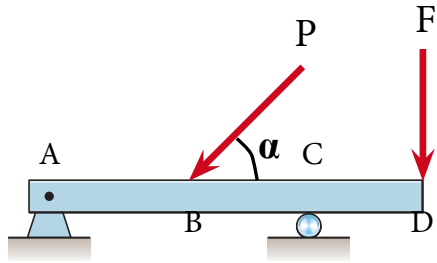
ردیف	نوع تکیه‌گاه	شکل واقعی	شکل شماتیک	عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی
۱	غلطکی			
۲	مفصلی			
۳	گیردار			
۴	میله‌ای			
۵	کابلی		———	

۳-۴ محاسبه عکس العمل های تکیه‌گاهی اجسام صلب

همان‌طور که گفته شد شرط تعادل اجسام صلب بر آورده شدن معادلات (۳-۴) می‌باشد و برای نیل به این هدف به صورت زیر عمل می‌نمائیم.

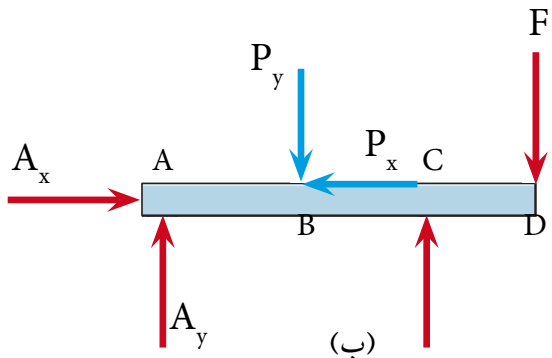
گام اول – ترسیم پیکر آزاد جسم

ابتدا جسم را از تکیه‌گاه‌ها جدا نموده و با توجه به نوع تکیه‌گاه، عکس العمل‌های مربوطه را در محل تکیه‌گاه و در جهت دلخواه قرار می‌دهیم. به عنوان مثال پیکر آزاد تیر شکل (۴-۴-الف) به صورت شکل (۴-۴-ب) خواهد بود.



(الف)

شکل ۴-۴



(ب)

گام دوم – تجزیهٔ نیروها

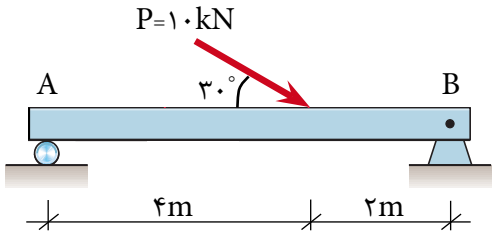
همهٔ نیروهای مورب را روی پیکر آزاد در صورت وجود به مؤلفه‌های آن تجزیه می‌نمائیم. به عنوان مثال در شکل (۴-۴-ب) نیروی **P** به دو مؤلفهٔ متعامد تجزیه شده است.

گام سوم – تشکیل معادلات و حل آن‌ها

با تشکیل معادلات تعادل و حل آن‌ها مجهولات مسئله (عکس‌العمل‌ها) تعیین می‌شوند.

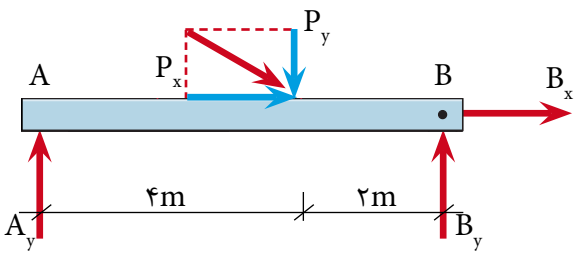
مثال ۲

عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیر زیر را به‌دست آورید



گام اول:

ترسیم پیکر آزاد جسم



گام دوم:

تجزیه نیروی P

$$P_x = P.\cos\theta = ۱۰\times\cos ۳۰^\circ = ۸/۶۶ kN$$

$$P_y = P.\sin\theta = ۱۰\times\sin ۳۰^\circ = ۵ kN$$

گام سوم : تشکیل معادلات تعادل وحل آنها

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = ۰ \Rightarrow B_x + P_x = ۰ \Rightarrow B_x + ۸/۶۶ = ۰ \Rightarrow \boxed{B_x = -۸/۶۶ \ kN}$$

لازم به توضیح است که علامت منفی در جواب فوق به این معنی است که جهت صحیح عکس العمل B_x در پیکر آزاد تیر به سمت چپ می‌باشد

رابطه I $\overset{+}{\uparrow}\Sigma F_y = ۰ \Rightarrow A_y + B_y - P_y = ۰ \Rightarrow A_y + B_y = P_y \Rightarrow A_y + B_y = ۵ kN$

معادله فوق دارای دو مجهول بوده و قابل حل نمی باشد لذا از شرط سوم یعنی $\Sigma M = ۰$ استفاده می‌کنیم و در این معادله بهتر است گشتاور نسبت به نقطه‌ای محاسبه شود که بیشترین مجهولات تکیه‌گاهی در آن نقطه متمرکز است (یعنی نقطه B)

$$\overset{+}{\curvearrowleft}\Sigma M_B = ۰ \Rightarrow A_y \times ۶ - P_y \times ۲ = ۰ \Rightarrow A_y \times ۶ - ۵ \times ۲ = ۰ \Rightarrow ۶A_y = ۱۰$$

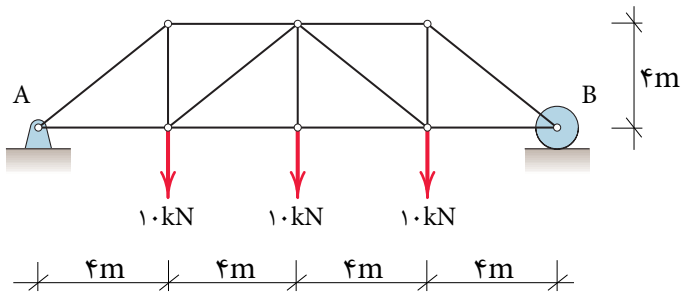
$$A_y = \frac{۱۰}{۶} \Rightarrow \boxed{A_y = ۱/۶۷ \ kN}$$

حال با قرار دادن مقدار A_y در رابطه I خواهیم داشت:

$$Ay + By = ۵ \Rightarrow ۱/۶۷ + By = ۵ \Rightarrow By = ۵ - ۱/۶۷ \Rightarrow \boxed{By = ۳/۳۳ \ kN}$$

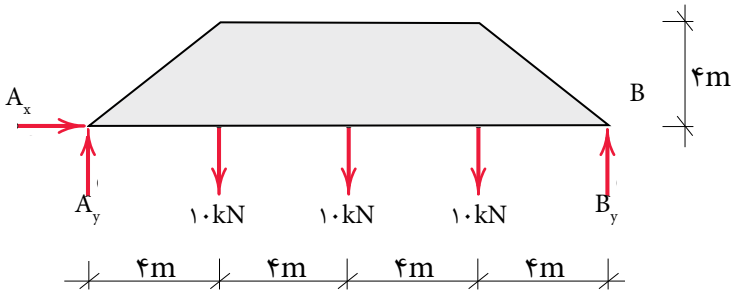
مثال ۳

عکس العمل های تکیه گاهی را در خرپای شکل زیر به‌دست آورید.



گام ۱)

ترسیم پیکر آزاد



گام۲)

تشکیل معادلات تعادل:

با توجه به اینکه نیروی افقی به سیستم وارد نمی‌شود لذا عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه A یعنی (A_x) برابر صفر است.

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$^{+}\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 10 - 10 - 10 = 0$$

$$A_y + B_y = 30 \text{ kN} \qquad \text{رابطهٔ I}$$

$$\overset{+}{\circlearrowleft}\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 10\times 4 + 10\times 8 + 10\times 12 - B_y \times 16 = 0$$

$$16B_y = 240 \Rightarrow B_y = \frac{240}{16} \Rightarrow \boxed{B_y = 15 \text{ kN} \uparrow}$$

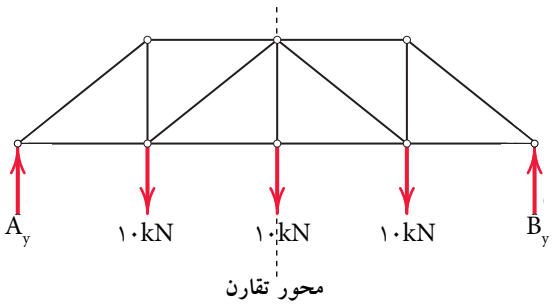
مقدار B_y را در رابطهٔ I قرار می‌دهیم داریم:

$$A_y + ۱۵ = ۳۰ \text{ kN} \Rightarrow \boxed{A_y = ۱۵ \text{ kN} \uparrow}$$

نکته:

هرگاه بارگذاری و هندسه سازه‌ای متقارن باشند کل بارهای وارده به صورت مساوی بین دو تکیه‌گاه تقسیم می‌شود.

بنابراین با توجه به تقارن در سازهٔ فوق داریم :

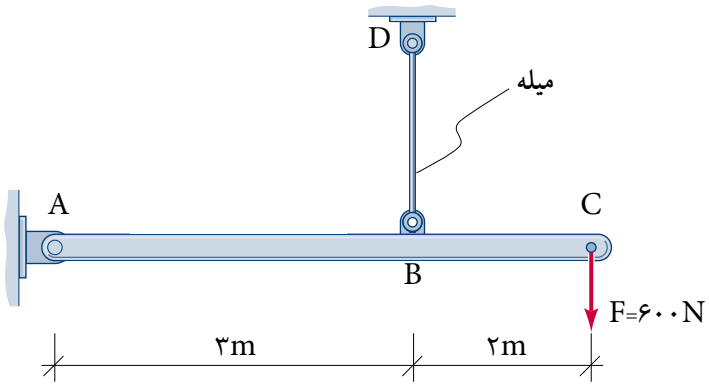


کل بار = ۱۰+۱۰+۱۰=۳۰kN

$$\boxed{A_y = B_y = \frac{۳۰}{۲} = ۱۵ \text{ kN}}$$

مثال ۴

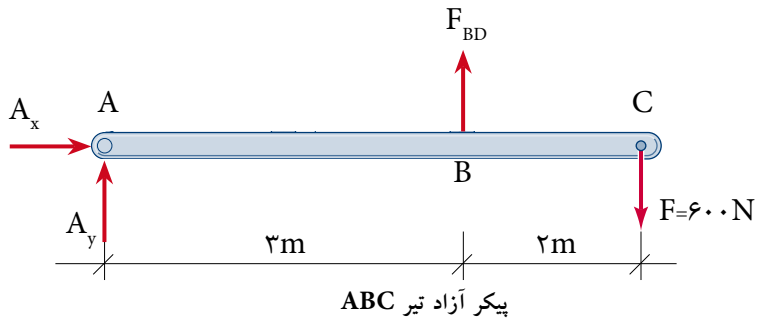
عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیر **ABC** را به‌دست آورید.



گام اول:

ترسیم پیکر آزاد تیر ABC

چون عضو BD میله است و با توجه به این‌که در تکیه‌گاه میله‌ای عکس‌العمل تکیه‌گاهی، در راستای میله می‌باشد، خواهیم داشت:



پیکر آزاد تیر **ABC**

گام دوم:

تشکیل معادلات تعادل

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + F_{BD} - 600 = 0 \Rightarrow A_y + F_{BD} = 600\ N \qquad \text{رابطه I}$$

$$\overset{+}{\circlearrowleft}\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 600\times 5 - F_{BD}\times 3 = 0 \Rightarrow \boxed{F_{BD} = 1000\ N}$$

از رابطه I داریم:

$$A_y + F_{BD} = 600 \Rightarrow A_y + 1000 = 600 = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = -400\ N\downarrow}$$

با توجه به علامت منفی در مقدار A_y، جهت عکس‌العمل تکیه‌گاهی A_y به‌طرف پایین(↓)خواهد بود.

خلاصهٔ فصل

- مفهوم تعادل آن است که ذره یا جسم مادی هیچ‌گونه حرکت و یا چرخشی نداشته باشد.
- شرط تعادل نقطه مادی آن است که برآیند نیروهای وارد بر آن صفر باشد یعنی:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = 0 \\ \sum \vec{F}_y = 0 \end{cases}$$

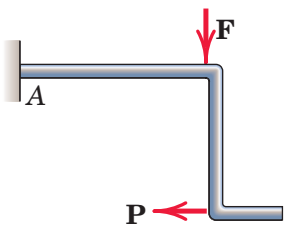
- هرگاه جسم یا نقطه مادی را از محیط اطراف خود جدا و نیروهای وارد بر آن‌ها را در راستاهای موجود نمایش دهیم، پیکر آزاد جسم و یا نقطه مادی را ترسیم نموده‌ایم.
- شرایط تعادل جسم صلب عبارت‌است از:

$$\begin{cases} \Sigma F_X = 0 \\ \Sigma F_Y = 0 \\ \Sigma M = 0 \end{cases}$$

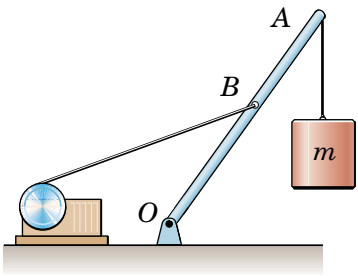
- برای تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی از معادلات تعادل جسم صلب و یا نقطهٔ مادی استفاده می‌شود.

خودآزمایی

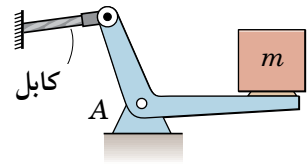
۱- پیکر آزاد هر کدام از شکل‌های زیر را رسم نمائید.



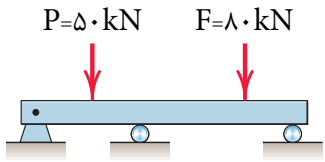
(الف)



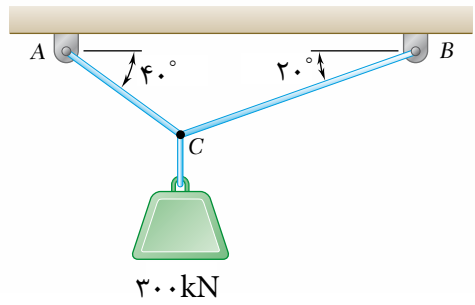
(ب)



(ج)

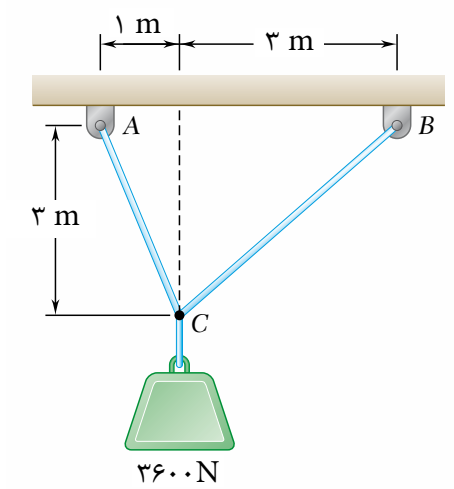


(د)

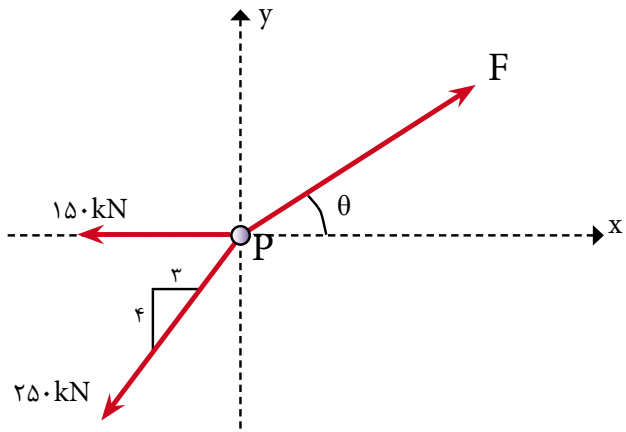


(ه)

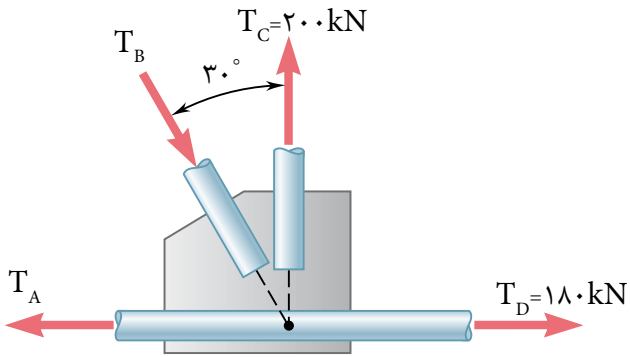
۲- کشش کابل‌ها را در شکل زیر به‌دست آورید.



۳- مقدار نیروی **F** و زاویهٔ θ را طوری تعیین کنید که ذرهٔ مادی **P** در حال تعادل باشد.

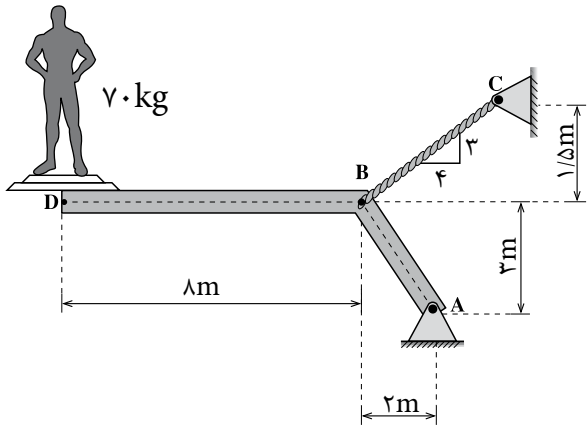


۴- مقدار $\mathbf{T_A}$ و $\mathbf{T_B}$ را طوری تعیین کنید که تعادل در اتصال شکل زیر برقرار باشد.

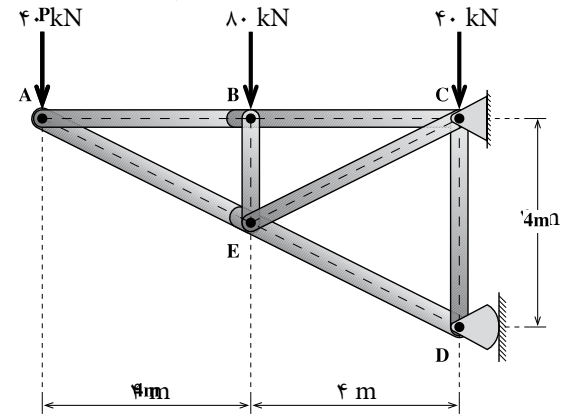


۵- عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را در شکل‌های زیر به‌دست آورید.

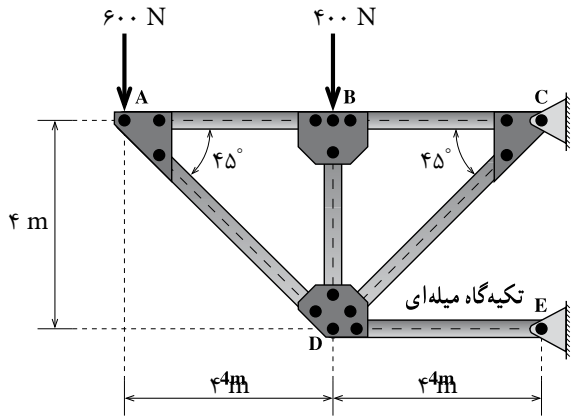
$(g = ۱۰ \frac{m}{s^۲})$



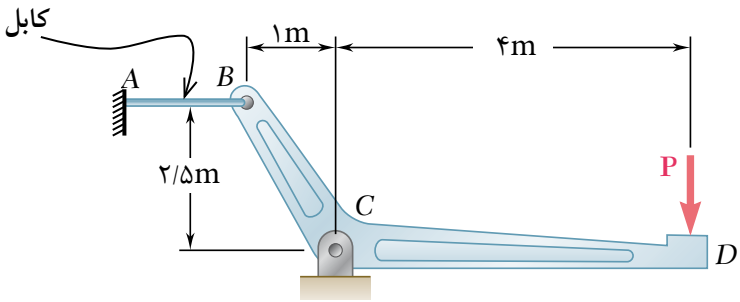
(الف)



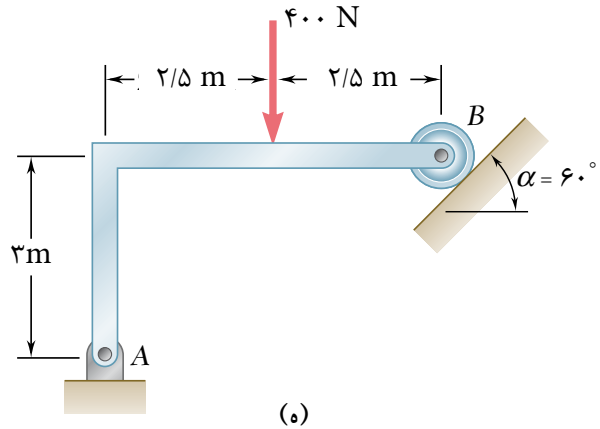
(ب)



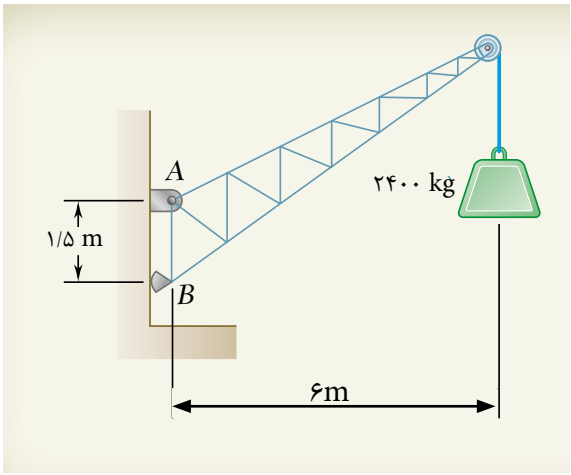
(ج)



(د)



(ه)



(و)