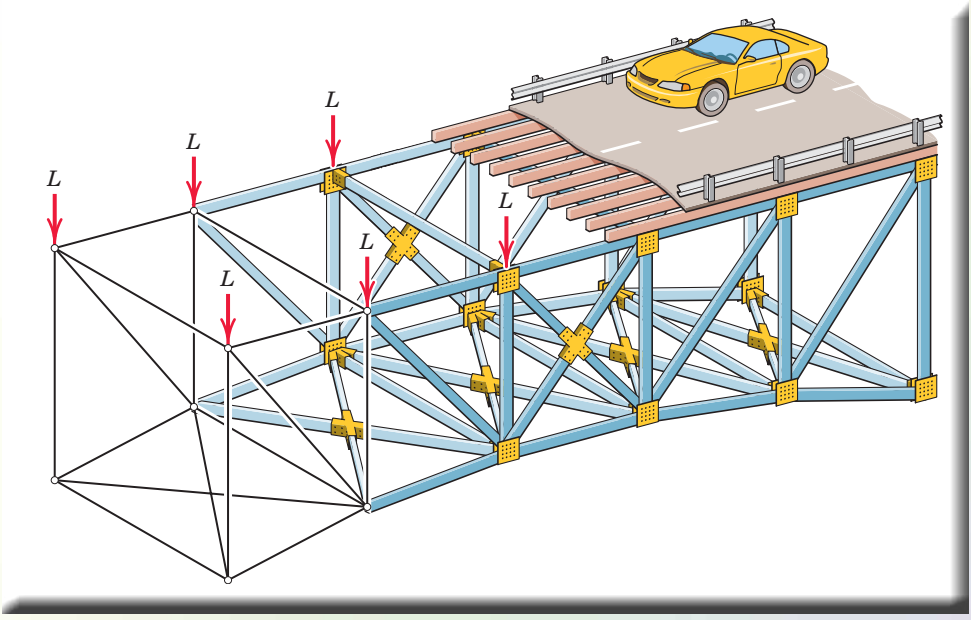
فصل
پنجم

تحلیل سازه‌های ساختمانی



بخش اول – استاتیک

هدف‌های رفتاری

پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

۱- تحلیل سازه را تعریف نماید.

۲- خرپا را بشناسد و انواع آن‌را نام ببرد.

۳- فرضیات تحلیل خرپا را بداند.

۴- روش مفاصل (گره‌ها) را در تحلیل خرپا به‌کار گیرد.

۵- اعضای صفر نیرویی را در خرپاها تعیین نماید.

۶- تیر را تعریف کرده و بارهای وارد بر آن‌را بشناسد.

۷- رفتار تیر تحت تأثیر بارهای خارجی را بشناسد.

۸- عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیرها با بار گسترده یکنواخت را به‌دست آورد.

۹- نیروهای داخلی تیرها با بار متمرکز را محاسبه نماید.

۱۰- نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی در تیرهای با بار متمرکز را ترسیم نماید.

۱۱- مقادیر حداکثر نیروی برشی و لنگر خمشی تیرها با بار متمرکز را به‌دست آورد.

مقدمه:

سازه‌های ساختمانی شامل انواع سازه‌های قابی، سازه‌های پوسته‌ای، سازه‌های کابلی وسازه‌های خرپایی می‌باشد.

به هر عضو یا مجموعه‌ای از اعضا که نیروی وارد شده را تحمل نموده و منتقل نماید، سازه گفته می‌شود.

بنابراین تیرها ، ستون‌ها، بادبندها و ... نیز نوعی سازه می‌باشند.

منظور از تحلیل سازه، بررسی پایداری سازه، تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی، نیروهای داخلی و تغییر شکل سازه تحت تاثیر نیروهای خارجی وارد به آن می‌باشد که در فصل چهارم راجع به تعیین عکس‌العمل‌ها بحث شد و در این فصل تنها به تعیین نیروهای داخلی در اجزای خرپاهای صفحه‌ای و تیرها بسنده می‌شود.

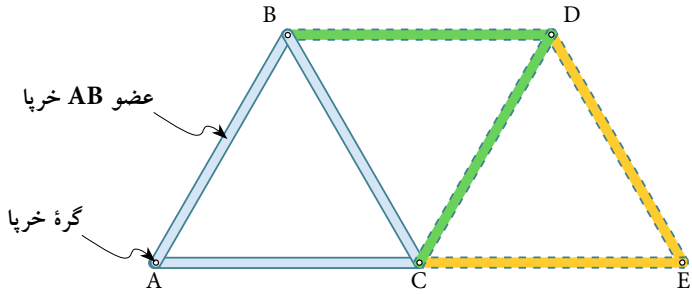
۵-۱ خرپا (Truss)

خرپاها سازه‌هایی هستند متشکل از اعضا (میله‌هایی) که در دو انتهای خود به صورت مفصل (پین) به یکدیگر متصل شده و عموماً تشکیل شبکه‌های مثلثی می‌دهند.

۵-۱-۱- انواع خرپا

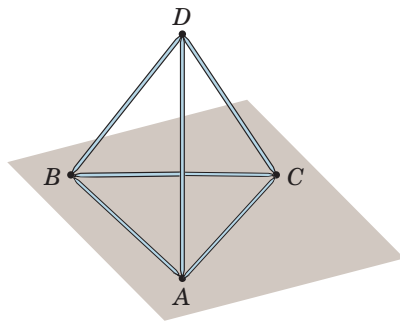
خرپاها به طور کلی به دو گروه تقسیم می‌شوند.

۱- خرپاهای صفحه‌ای: خرپاهایی هستند که فرم پایه آن‌ها تشکیل شده از سه عضو (میله) و سه گره (پین یا مفصل) که در یک صفحه واقع شده و با افزودن دو عضو و یک گره جدید گسترش می‌یابد.



شکل ۵-۱

۲- خرپاهای فضایی: به خرپاهایی گفته می‌شود که فرم پایه آن‌ها تشکیل شده از شش عضو و چهار گره که یک شبکه فضایی ساخته و با افزودن سه عضو و یک گره جدید گسترش می‌یابد.

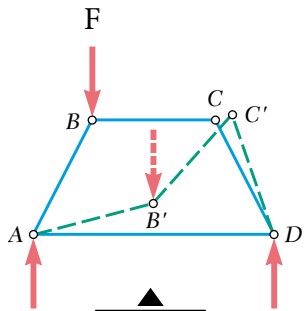


شکل ۵-۲

۵-۱-۲- شکل خرپاها

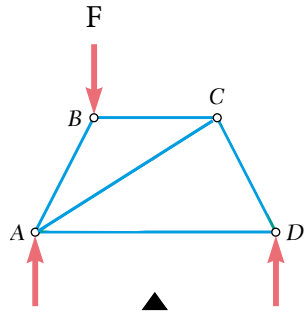
همان‌طور که گفته شد خرپاهای ساده از تعدادی شبکه مثلثی تشکیل می‌یابند و دلیل استفاده از هندسهٔ مثلثی در خرپاها، پایداری هندسی مثلث نسبت به سایر اشکال هندسی می‌باشد. چرا که در مثلث تغییر زاویه مشروط به تغییر طول اضلاع آن می‌باشد و این تغییر در هندسهٔ مثلثی خرپاها به سادگی اتفاق نمی‌افتد درحالی‌که در یک هندسهٔ چهارضلعی بدون تغییر طول اضلاع آن‌ها تغییر شکل به راحتی صورت می‌پذیرد.

با توجه به شکل (۵-۳) دیده می‌شود که در چهارضلعی **ABCD** که اضلاع آن به صورت مفصل یا پین به هم متصل شده‌اند با وارد آوردن نیروی نه‌چندان بزرگ **F** به‌راحتی دچار تغییرشکل شده و نقطه **B** به **B´** و **C** به **C´** منتقل می‌شود بنابراین سازه ناپایدار بوده و این مسئله نامطلوب است.



شکل ۵-۳

برای تأمین پایداری سازه فوق کافی است عضو قطری **BC** را به آن بیافزاییم و چهار ضلعی را به دو مثلث تبدیل نماییم. (شکل ۵-۴)



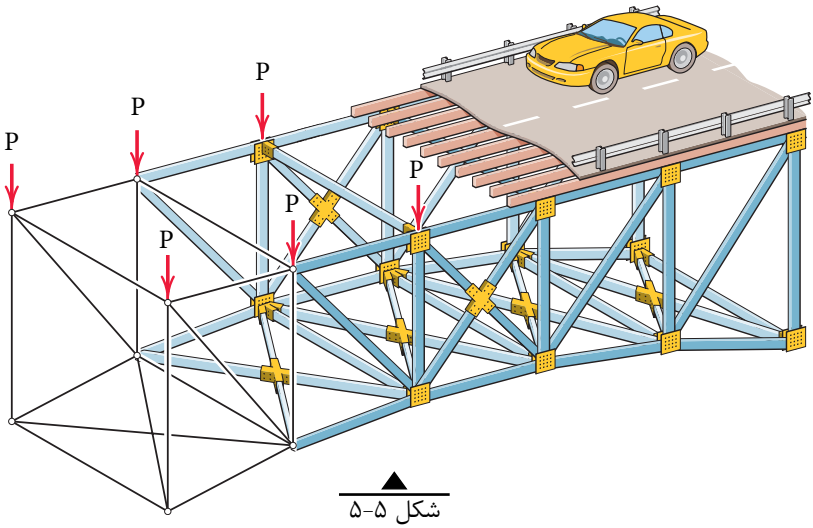
شکل ۵-۴

کارعملی: شکل‌های (۵-۳) و (۵-۴) را با قطعات چوبی و اتصال مفصلی بسازید و با اعمال نیروی متناسب، عملکرد آن‌ها را با یکدیگر مقایسه نمایید.

۵-۱-۳- فرضیات تحلیل خرپاها:

منظور از تحلیل خرپا، تعیین نیروی داخلی هر عضو خرپا و محاسبهٔ عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی آن می‌باشد و مبتنی بر فرضیاتی به شرح ذیل است:

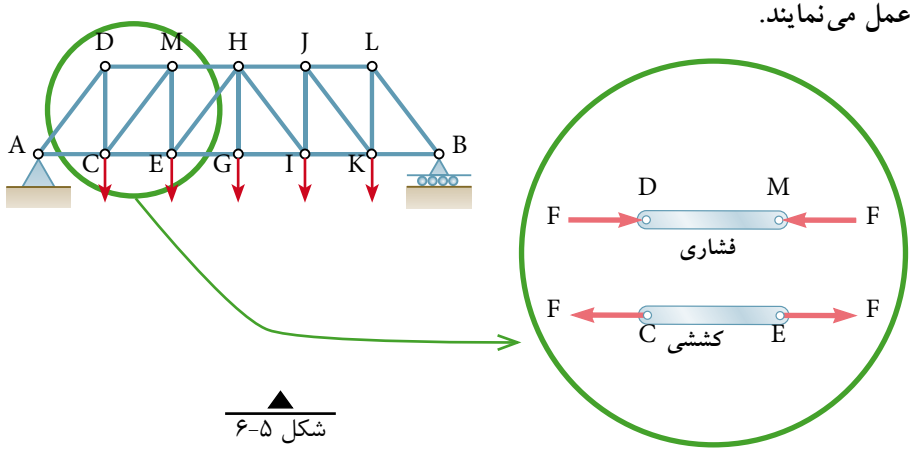
۱- نیروهای خارجی وارد بر خرپا در صفحه خرپا و در محل گره‌ها به آن اعمال می‌شود. شکل (۵-۵)



شکل ۵-۵

۲: اعضای خرپا (میله‌ها) به صورت مفصلی به یکدیگر متصل می‌شوند.

با توجه به فرضیات فوق، نیروهای داخلی و خارجی در محل گره به صورت متقارب خواهند بود. بنابراین نیروهای داخلی اعضا در راستای آن‌ها و به صورت کششی یا فشاری عمل می‌نمایند.



شکل ۵-۶

۵-۱-۴- روش تحلیل خرپا

برای تحلیل خرپاها روش‌های مختلفی وجود دارد که در این قسمت به روش تحلیل مفاصل (گره‌ها) اشاره می‌شود و در مقاطع بالاتر با سایر روش‌های تحلیل خرپا آشنا خواهید شد.

۵-۱-۵- روش مفاصل (گره‌ها) در تحلیل خرپاها:

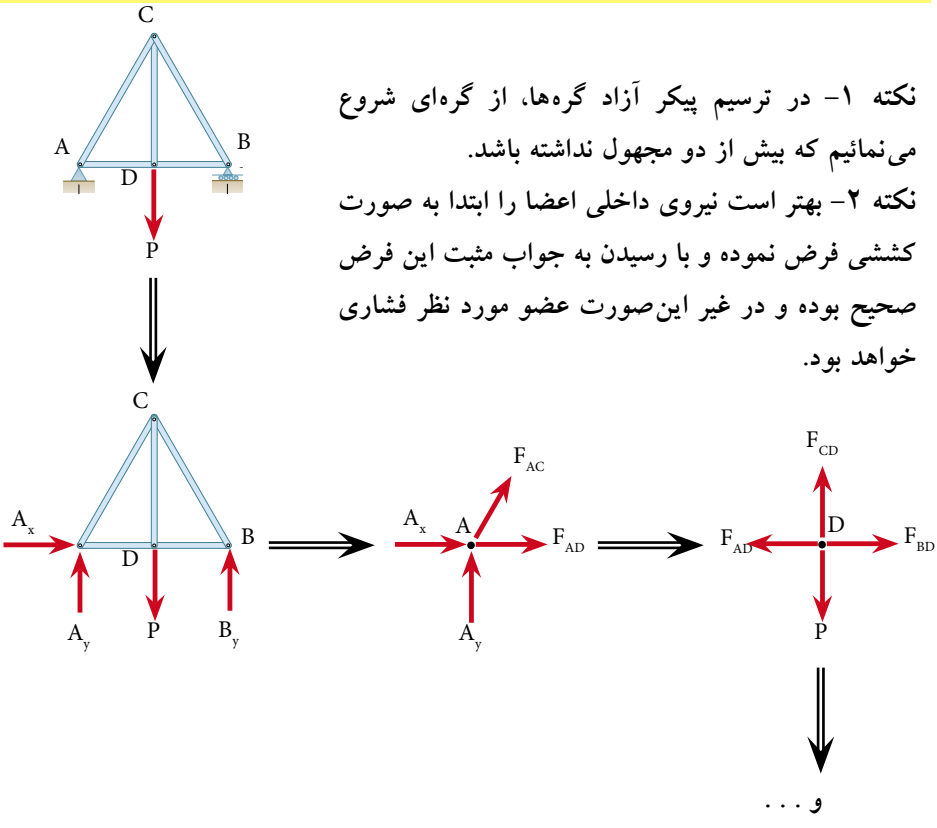
فلسفه این روش بر این اصل استوار است که چون کل خرپا در حال تعادل است پس هر گرهٔ آن نیز باید در حال تعادل باشد، بنابراین عموماً مراحل تحلیل خرپا در این روش عبارت‌است از:

۱) محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی ⟵ ۲) ترسیم پیکر آزاد هر گره ⟵

۳) اعمال شرایط تعادل هر گره (نقطهٔ مادی) یعنی: $\begin{cases}\Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0\end{cases}$ ⟵ ۴) حل معادلات تشکیل‌شده و محاسبهٔ مجهولات مورد نظر

نکته ۱- در ترسیم پیکر آزاد گره‌ها، از گره‌ای شروع می‌نمائیم که بیش از دو مجهول نداشته باشد.

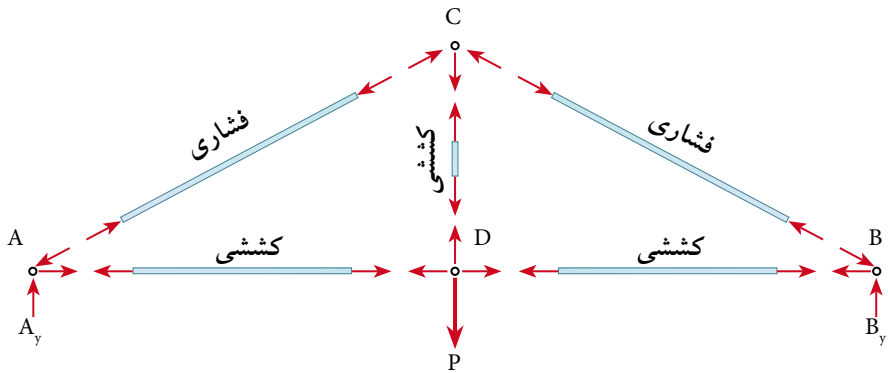
نکته ۲- بهتر است نیروی داخلی اعضا را ابتدا به صورت کششی فرض نموده و با رسیدن به جواب مثبت این فرض صحیح بوده و در غیر این‌صورت عضو مورد نظر فشاری خواهد بود.



شکل ۵-۷

نکته ۳- در ترسیم پیکر آزاد هرگره جهت نیروهای کششی از گره دور شده و جهت نیروهای فشاری به گره نزدیک می‌شود.

نتیجه نهایی تحلیل خرپای شکل (۵-۷) در شکل (۵-۸) نشان داده شده است.



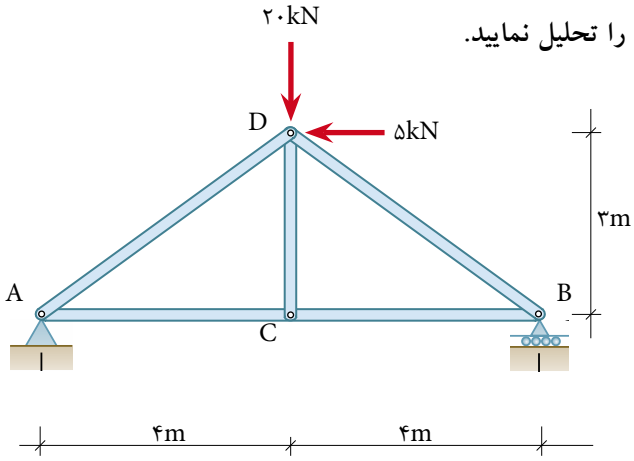
شکل ۵-۸

تاریخ مهندسی (مطالعه آزاد)

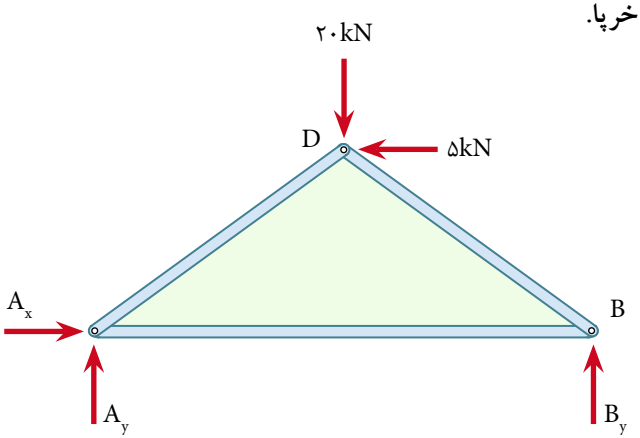
در کتاب‌های تاریخ فنی غرب، چنین آمده است که اولین نوع ساختمان‌های خرپایی، در قرون شانزدهم میلادی ساخته شده است. همچنین گفته شده که اولین نوع خرپای واقعی ثبت‌شده در تاریخ در قرن شانزدهم میلادی توسط یک مهندس رومی به‌نام پالادیو (**Paladio**) (۱۵۸۰ - ۱۵۱۸ م) ابداع و ساخته شده است. اما سندهای تاریخی نشان‌دهندهٔ آن است که ساختمان خرپایی در ایران باستان از هزارهٔ سوم قبل از میلاد ساخته می‌شده است. مورد استناد در این بررسی لوحه‌ای است که در حفاری‌های باستان‌شناسی شوش به‌دست آمده و تاریخ آن به هزارهٔ سوم قبل از میلاد (پنج هزار سال پیش) می‌رسد.

مثال ۱

خرپای شکل روبه‌رو را تحلیل نمایید.



۱ – ترسیم پیکر آزاد کل خرپا.



۲ – محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی.

$$\overset{+}{\rightarrow}\ \Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 5\ kN \rightarrow}$$

$$+\uparrow\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 20 = 0$$

$$A_y + B_y = 20\ kN \qquad \text{معادله I}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow 20\times 4 - 5\times 3 - B_y \times 8 = 0$$

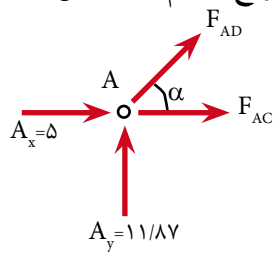
$$B_y = \frac{65}{8} \Rightarrow \boxed{B_y = 8/13\ kN}$$

در معادله I $\quad A_y + 8/13 = 20 \Rightarrow \boxed{A_y = 11/87\ kN}$

۳ – تحلیل گره‌ها:

برای تحلیل گره‌ها با توجه وجود دو عضو (دو مجهول) در هر یک از گره‌های A و B می‌توانیم از هریک از آن‌ها شروع نماییم که در این مثال گرهٔ A انتخاب می‌گردد.

پیکر آزاد گرهٔ A :



$$\alpha = \tan^{-1}(\frac{۳}{۴}) = ۳۶/۸۶^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = ۰/۶ \\ \cos\alpha = ۰/۸ \end{cases}$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = ۰ \Rightarrow ۵ + F_{AD}\cos\alpha + F_{AC} = ۰ \Rightarrow ۵ + ۰/۸F_{AD} + F_{AC} = ۰$$ **معادله II**

$$^{+}\uparrow \Sigma F_y = ۰ \Rightarrow ۱۱/۸۷ + F_{AD}\sin\alpha = ۰ \Rightarrow ۰/۶F_{AD} = -۱۱/۸۷$$

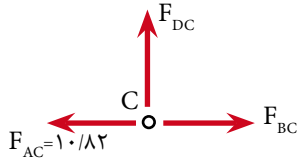
$$\Rightarrow \boxed{F_{AD} = -۱۹/۷۸\text{kN} \quad \text{فشاری}}$$

$$\text{از معادله II} \Rightarrow ۵ + ۰/۸(-۱۹/۷۸) + F_{AC} = ۰$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{AC} = ۱۰/۸۲\text{kN} \quad \text{کششی}}$$

باتوجه به مشخص شدن نیروی داخلی عضو AC می‌بینیم که گره C نیز دارای دو مجهول BC و CD می‌باشد و اکنون می‌توان تحلیل این گره را آغاز کرد.

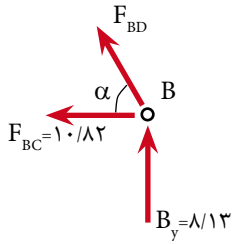
پیکر آزاد گرهٔ C :



$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = ۰ \Rightarrow F_{BC} - ۱۰/۸۲ = ۰ \Rightarrow \boxed{F_{BC} = ۱۰/۸۲\ \text{kN} \quad \text{کششی}}$$

$$^{+}\uparrow \Sigma F_y = ۰ \Rightarrow \boxed{F_{CD} = ۰}$$

پیکر آزاد گرهٔ B :



$$^{+}\uparrow \Sigma F_y = ۰ \Rightarrow F_{BD}\sin\alpha + ۸/۱۳ = ۰$$

$$\Rightarrow F_{BD} = \frac{-۸/۱۳}{۰/۶} \Rightarrow \boxed{F_{BD} = -۱۳/۵۵\ \text{kN} \quad \text{فشاری}}$$

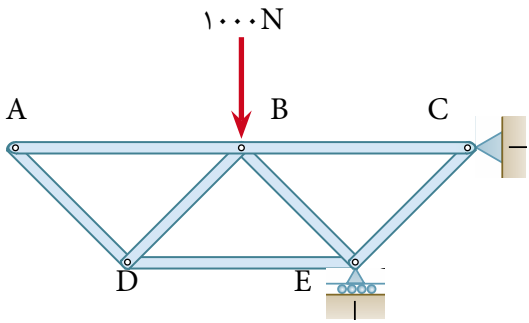
۵-۱-۶- اعضای صفر نیرویی

درمثال فوق ملاحظه گردید که نیروی داخلی عضو **CD** برابر صفر است که اصطلاحاً به آن عضو صفر نیرویی گفته می‌شود.

در موارد زیر اعضای صفر نیرویی بدون تحلیل قابل تشخیص هستند.

الف) هرگاه در گره‌ای دو عضو غیر هم‌راستا وجود داشته باشد و به آن گره نیروی خارجی و یا عکس‌العمل تکیه‌گاهی اعمال نشود، هر دو عضو صفر نیرویی خواهند بود. برای نمونه در شکل (۵-۹)، اعضای **AB** و **AD** دارای چنین شرایطی هستند بنابراین عضو صفر نیرویی خواهند بود. یعنی:

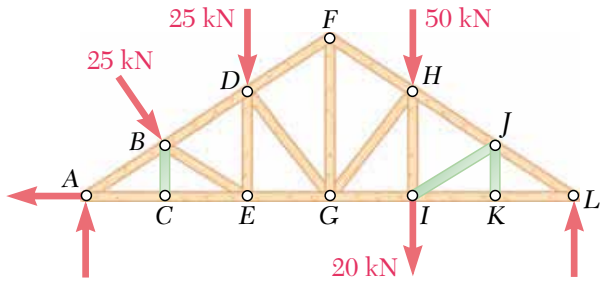
$$F_{AB} = F_{AD} = ۰$$



شکل ۵-۹

آیا این خرپا دارای عضو صفر نیرویی دیگری می‌باشد؟ چرا؟ نام ببرید.

ب) هرگاه در گره‌ای سه عضو وجود داشته باشد که دو عضو آن هم‌راستا باشند، در صورتی که نیروی خارجی روی گرهٔ مذکور نباشد، عضو سوم صفر نیرویی خواهد بود. در خرپای شکل (۵-۱۰) اعضای **BC** و **KJ** و **IJ** صفر نیرویی می‌باشند.



شکل ۵-۱۰

۵-۲ تحلیل تیرها

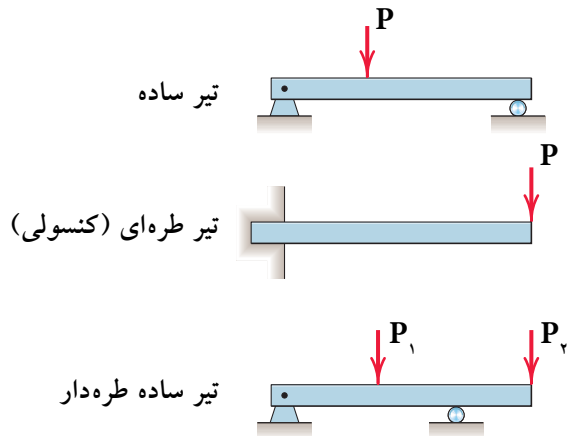
هدف از تحلیل تیر در این فصل تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی و نیروهای داخلی در هر مقطع از تیر می‌باشد.

۵-۲-۱- تعریف تیر (Beam)

تیر عضوی است که بارهای عمود بر محور خود را تحمل و منتقل می‌نماید و در اکثر سازه‌های ساختمانی به‌کار می‌رود.

۵-۲-۲- انواع تیرها از نظر شرایط تکیه‌گاهی

با توجه به انواع تکیه‌گاه‌ها که قبلاً معرفی شده‌اند تیرها می‌توانند به صورت‌های مختلف روی تکیه‌گاه‌ها قرار گیرند که در این قسمت به معرفی چند نوع از آن‌ها اکتفا می‌شود. شکل (۵-۱۱)

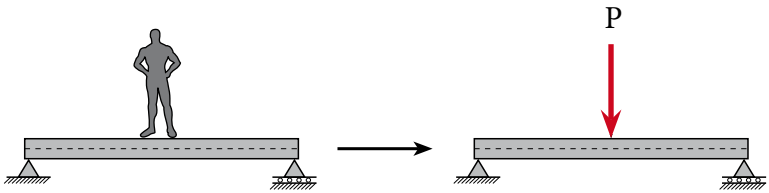


شکل ۵-۱۱

۵-۲-۳- انواع بارهای وارد به تیر

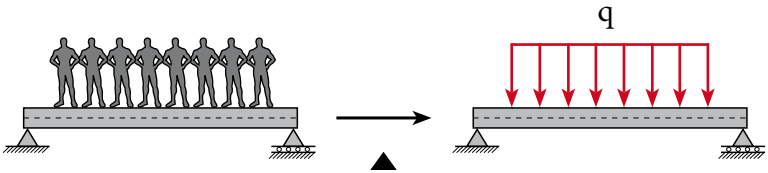
بارها به صورت‌های گوناگون به تیرها وارد می‌گردند که تعدادی از آن‌ها عبارت‌اند از:

الف) بار متمرکز



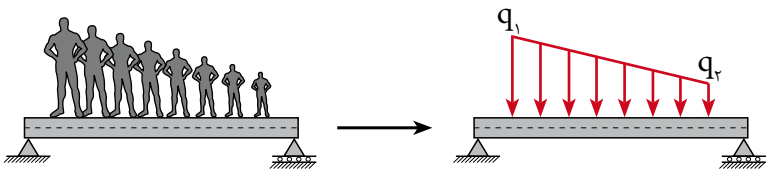
شکل ۵-۱۲

ب) بار گسترده یکنواخت



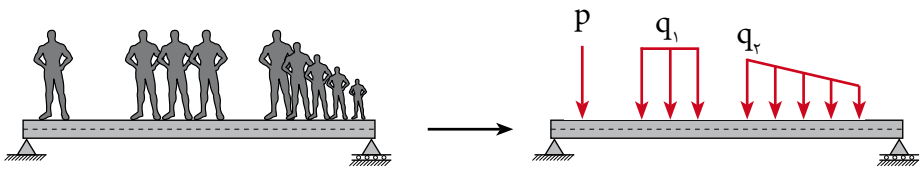
شکل ۵-۱۳

ج) بار گسترده غیر یکنواخت



شکل ۵-۱۴

د) ترکیبی از انواع فوق

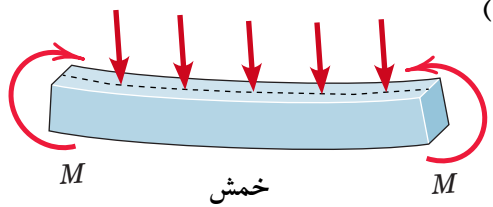


شکل ۵-۱۵

۵-۲-۴- رفتار تیر تحت تأثیر بارهای خارجی

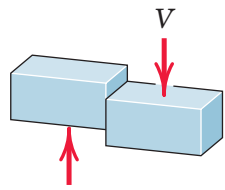
هنگامی که تیری تحت تأثیر نیروهای خارجی مطابق شکل (۵-۱۶) واقع می‌شود، در آن پدیده‌های خمش و برش ایجاد می‌گردد.

پدیده خمش باعث ایجاد کشش و فشار در لایه‌ها یا تارهای تحتانی و فوقانی تیر می‌گردد. شکل (۵-۱۶)



شکل ۵-۱۶

پدیده برش، رفتاری از تیر است که تمایل دارد تیر را در مقاطع مختلف آن قطع نماید. این رفتار، شبیه رفتار یک قیچی می‌باشد. شکل (۵-۱۷)



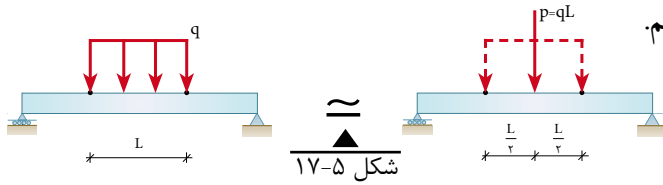
شکل ۵-۱۷

۵-۲-۵- تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیرها با بار گسترده یکنواخت

برای محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیرها تحت بار گستردهٔ یکنواخت ابتدا باید مقدار و محل اثر برآیند بارهای گسترده یکنواخت وارد به تیر را تعیین نمود. مطابق شکل (۵-۱۸)

مقدار برآیند بار گسترده برابر مساحت مستطیل بار وارده و محل اثر آن نقطهٔ تلاقی دو قطر مستطیل (نصف طول آن) خواهد بود.

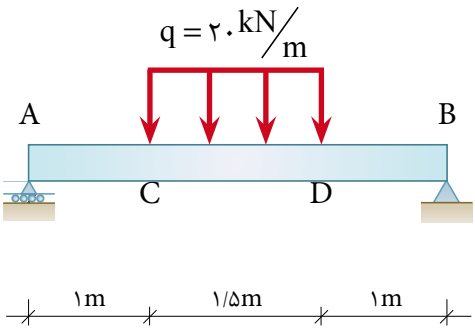
با توجه به موارد فوق‌الذکر پیکر آزاد تیر را ترسیم نموده و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را محاسبه می‌نماییم.



شکل ۵-۱۷

مثال ۲

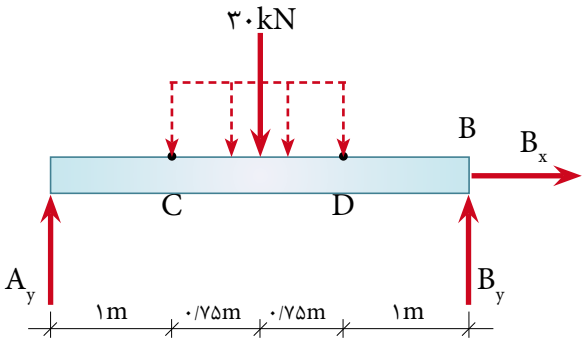
عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیر شکل زیر رامحاسبه نمایید.

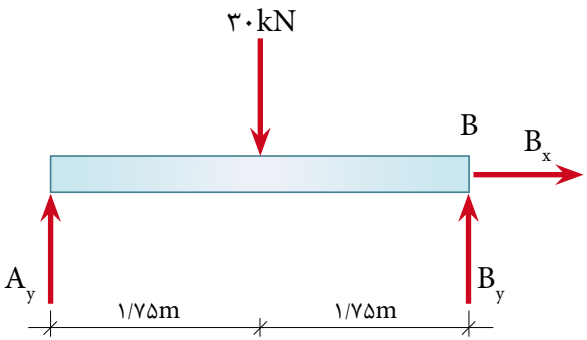


الف) ابتدا مقدار برآیند بار گسترده (مساحت مستطیل) را به‌دست می‌آوریم

$$P = q.L \Rightarrow P = ۲۰ \times ۱/۵ = ۳۰ kN$$

ب) محل اثر برآیند بار گسترده در نصف طول مستطیل می‌باشد که در پیکر آزاد تیر دیده می‌شود.





ج) با تشکیل معادلات تعادل و حل آن‌ها خواهیم داشت:

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{B_x = 0}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 30 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A_y + B_y = 30\ kN}\ \ \mathbf{I}$$

$$\overset{+}{\circlearrowleft}\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 30 \times 1/75 - B_y \times 3/5 = 0$$

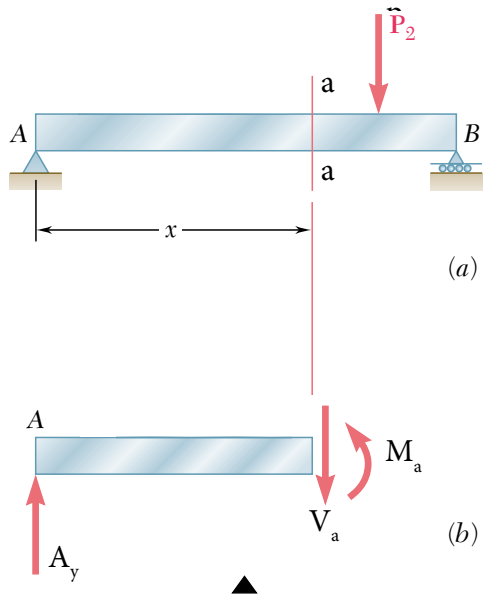
$$\Rightarrow \boxed{B_y = 15\ kN}$$

مقدار B_y را در معادله **I** قرار می‌دهیم تا A_y به‌دست آید.

$$\text{از معادلهٔ } \mathbf{I} \Rightarrow A_y + B_y = 30 \Rightarrow A_y + 15 = 30 \Rightarrow \boxed{A_y = 15\ kN}$$

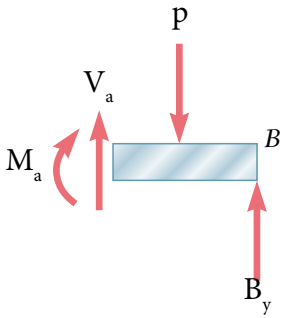
۵-۲-۶- نیروهای داخلی در تیرها با بار متمرکز

هنگامی که تیر تحت تأثیر بار قرار می‌گیرد در هر نقطه از طول تیر نیروهایی به‌وجود می‌آیند که به آن‌ها نیروهای داخلی تیر می‌گویند. برای این‌که نیروهای داخلی در هر نقطه از تیر تعیین شود باید یک برش (مقطع) عمود بر محور تیر در آن نقطه در نظر گرفت و پیکر آزاد یکی از قطعات سمت چپ یا راست مقطع مورد نظر را ترسیم نموده و با توجه به بحث تعادل اثر قطعه دیگر را بر روی آن اعمال کرد. به عنوان مثال در شکل (۵-۱۸) در مقطع **a-a** خواهیم داشت:



شکل ۵-۱۸

و مطابق قانون سوم نیوتن همین اثر روی قطعه سمت راست و در جهت مخالف وجود دارد. شکل (۵-۱۹)



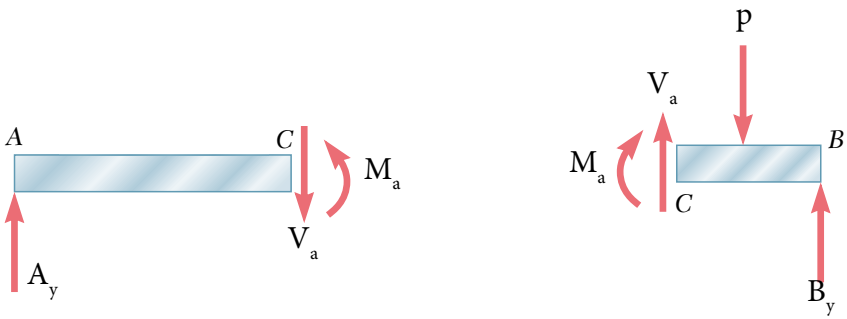
شکل ۵-۱۹

بنابراین نیروهای داخلی در هر مقطع از تیرها عبارتند از:

۱- نیروی برشی (V)
۲- لنگر خمشی (M)

۵-۲-۶-۱- علائم قرار دادی نیروهای داخلی تیرها

برای ایجاد یکنواختی در محاسبات نیروهای داخلی در مقاطع تیرها بهتر است جهت‌های مثبت نیروی برشی و لنگر خمشی را به صورت شکل (۵-۲۰) در نظر بگیریم.



قطعه سمت چپ　　قطعه سمت راست

شکل ۵-۲۰

۵-۲-۶-۲- محاسبهٔ نیروهای داخلی تیرها با بار متمرکز

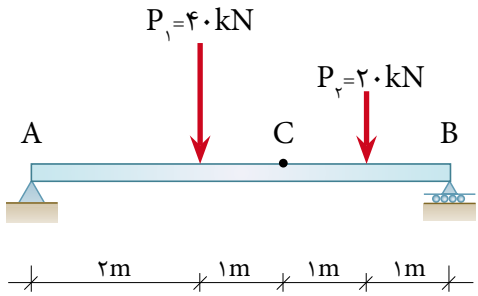
برای محاسبهٔ نیروهای داخلی در هر مقطع، پس از ترسیم پیکر آزاد یکی از قطعات سمت چپ یا راست آن مقطع و قرار دادن نیروی برشی **V** و لنگر خمشی **M** مطابق قرارداد فوق کافی‌است معادلات تعادل را برای مقطع مورد نظر تشکیل داده و اقدام به حل آن‌ها نماییم.

مثال ۲

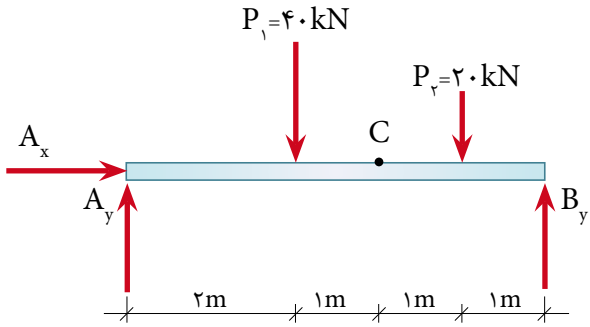
در تیر شکل مقابل مطلوب است:

الف) محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی

ب) محاسبه نیروی برشی و لنگر خمشی در مقطع C



گام۱) ترسیم پیکر آزاد تیر:



گام۲) محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی:

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 40 - 20 = 0$$

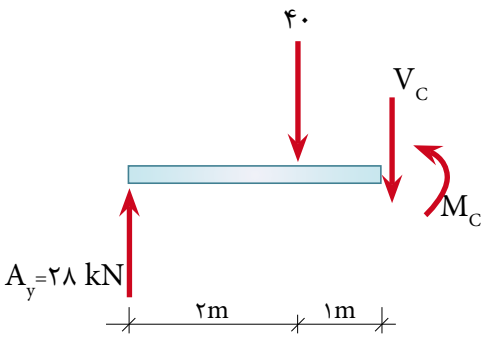
$$A_y + B_y = 60 \text{ kN} \quad \text{رابطهٔ I}$$

$$\overset{+}{\circlearrowleft}\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 40\times 2 + 20\times 4 - 5B_y = 0$$

$$\boxed{B_y = 32 \text{ kN}}$$

$$\text{از رابطهٔ I} \Rightarrow A_y + 32 = 60 \Rightarrow \boxed{A_y = 28 \text{ kN}}$$

گام۳) برای تعیین نیروهای داخلی در مقطع C، تیر را در این نقطه به دو قسمت تقسیم نموده و قطعهٔ سمت چپ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.



گام۴) تشکیل معادلات تعادل و حل آن‌ها برای این قطعه

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 28 - 40 - V_c = 0 \Rightarrow \boxed{V_c = -12 \text{ kN}}$$

$$\overset{+}{\circlearrowleft} \Sigma M_c = 0 \Rightarrow 28 \times 3 - 40 \times 1 - M_c = 0$$

$$\boxed{M_c = 44 \text{ kN.m} \circlearrowleft}$$

۵-۲-۷- مقادیر حداکثر نیروهای برشی و لنگر خمشی در تیرها با بار متمرکز

در مثال قبل چگونگی محاسبه نیروی برشی و لنگر خمشی در نقطه دلخواه C را مشاهده نمودیم. برای مهندسین معمولاً مقدار ماکزیمم نیروهای داخلی و محل آن‌ها مهم است.

حال این سوال مطرح می‌شود که مقادیر نیروی برشی و لنگر خمشی حداکثر در کدام نقطه از طول تیر به وجود می‌آید؟

برای پاسخ به این سوال باید مقادیر نیروی برشی و لنگر خمشی را در تمام نقاط طول تیر همانند مثال قبل محاسبه نموده تا مقادیر حداکثر مورد نظر و محل آن‌ها مشخص شود که این روش، کاری است طاقت‌فرسا. لذا بهتر است که مقادیر نیروی برشی و لنگر خمشی در طول تیر را به صورت نمودار نشان داده و از روی نمودار مقادیر حداکثر نیروی برشی و لنگر خمشی و محل آن‌ها را تعیین نمود.

۵-۲-۸- ترسیم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیرها با بار متمرکز

نمودار نیروی برشی و یا لنگر خمشی عبارت‌است از نموداری که مقادیر نیروی برشی و لنگر خمشی را در هر نقطه از تیر مشخص نماید. هدف از ترسیم چنین نمودارهایی تعیین نقاطی است که حداکثر نیروی برشی و لنگر خمشی در آن‌ها به‌وجود می‌آید .برای رسیدن به این هدف تیر را در محل‌هایی که بارگذاری آن تغییر می‌نماید به چند ناحیه تقسیم نموده و در هر ناحیه معادلات نیروی برشی و لنگر خمشی را بر حسب طول تیر تعیین و سپس نمودار معادلات مذکور ترسیم می‌گردد.

مراحل ترسیم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر با بار متمرکز به شرح ذیل خواهد بود:

۱- محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیر

۲- مابین هر دو بار متمرکز یک مقطع به فاصله X از تکیه‌گاه در نظر گرفته و محدوده X را تعیین می‌نماییم. عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی نیز، بار متمرکز محسوب می‌شوند.

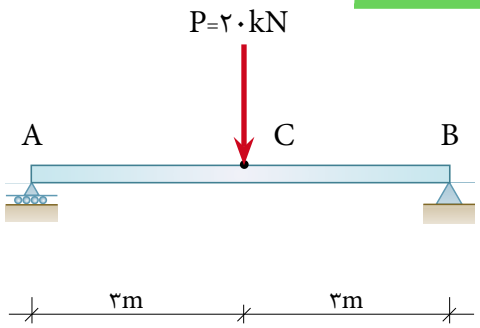
۳- پیکر آزاد یکی از قطعات سمت چپ و یا راست مقطع مورد نظر را ترسیم می‌کنیم.

۴- با تشکیل معادلات تعادل برای این قطعه به معادلات نیروی برشی و لنگر خمشی بر حسب X خواهیم رسید.

۵- با ترسیم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی در محدوده‌های مختلف تیر به نمودارهای موردنظر دست می‌یابیم.

مثال ۳

نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر مقابل را ترسیم نمائید.

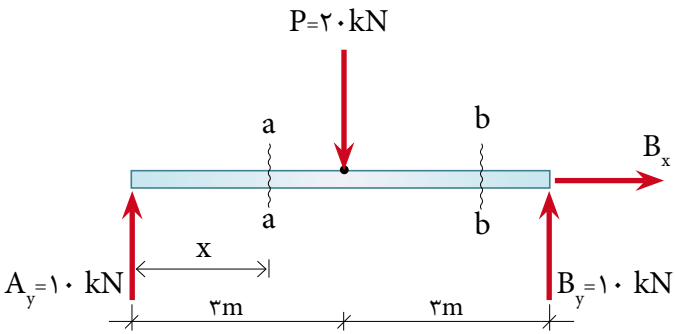


۱- محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی با توجه به تقارن تیر داریم:

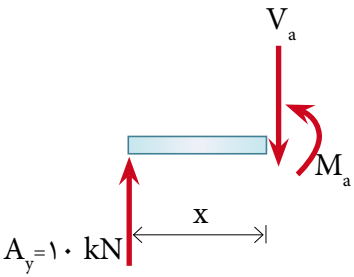
$$\overset{+}{\Sigma \overrightarrow{F_x}} = ۰ \Rightarrow \boxed{B_x = ۰}$$

$$\boxed{A_y = B_y = \frac{۲۰}{۲} = ۱۰ \text{ kN}}$$

۲- مقطع **a–a** به فاصله **x** از تکیه‌گاه **A** را در نظر گرفته و محدودهٔ **x** را مشخص می‌نمائیم.



۳- ترسیم پیکر آزاد قطعهٔ سمت چپ مقطع **a–a**



$۰ \le x \le ۳\text{m}$

۴- با تشکیل معادلات تعادل برای قطعه فوق خواهیم داشت:

$$+\uparrow \Sigma F_y = ۰ \Rightarrow ۱۰ - V_a = ۰$$

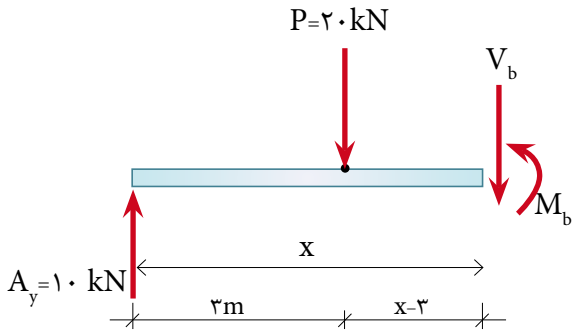
$$\boxed{V_a = ۱۰\ kN} \quad \textbf{(I)} \qquad ۰ \le x \le ۳m \quad \text{معادله نیروی برشی در محدودهٔ}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_a = ۰ \Rightarrow ۱۰ \times x - M_a = ۰$$

$$\boxed{M_a = ۱۰\ x} \quad \textbf{(II)} \qquad ۰ \le x \le ۳m \quad \text{معادله لنگر خمشی در محدودهٔ}$$

این معادلات مقادیر نیروی برشی و لنگر خمشی را در محدودهٔ $۰ \le x \le ۳m$ مشخص می‌نمایند.

عملیات فوق را برای مقطع b–b در محدودهٔ $۳m \le x \le ۶m$ تکرار می‌نمائیم. خواهیم داشت:



مقطع b–b

$$+\uparrow \Sigma F_y = ۰ \Rightarrow ۱۰ - ۲۰ - V_b = ۰$$

$$\boxed{V_b = -۱۰\ kN} \quad \textbf{(III)} \qquad ۳m \le x \le ۶m \quad \text{معادله نیروی برشی در محدودهٔ}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_b = ۰ \Rightarrow ۱۰ \times x - ۲۰\ (x - ۳) - M_b = ۰$$

$$M_b = ۱۰\ x - ۲۰\ (x - ۳)$$

$$\boxed{M_b = ۶۰ - ۱۰\ x} \quad \textbf{(IV)} \qquad ۳m \le x \le ۶m \quad \text{معادله لنگر خمشی در محدودهٔ}$$

۵- اکنون نمودار نیروی برشی را با استفاده از معادلات **I** و **III** ترسیم می‌نمائیم.

(I) $V_a = ۱۰ \ kN \qquad ۰ \le x \le ۳m$

(III) $V_b = -۱۰ \ kN \qquad ۳m \le x \le ۶m$

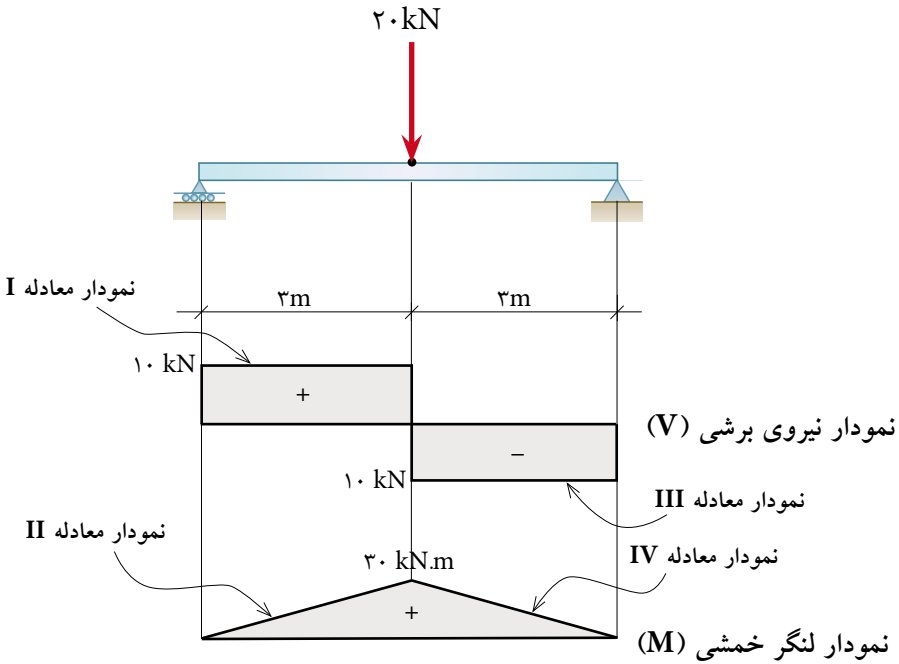
۶- نمودار لنگر خمشی را با استفاده از معادلات **II** و **IV** و به‌روش نقطه‌یابی در نقاط ابتدا و انتهای هر ناحیه ترسیم می‌کنیم.

(II) $M_a = ۱۰x \qquad ۰ \le x \le ۳m$

x (m)	M(kN.m)
۰	۰
۳	۳۰

(IV) $M_b = ۶۰ - ۱۰x \qquad ۳m \le x \le ۶m$

x (m)	M(kN.m)
۳	۳۰
۶	۰



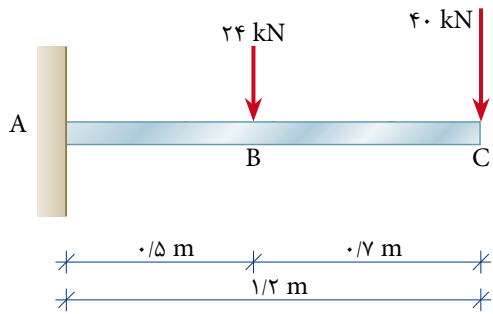
مثال ۴

در تیر شکل مقابل مطلوب‌است:

الف- ترسیم دیاگرام نیروی برشی تیر

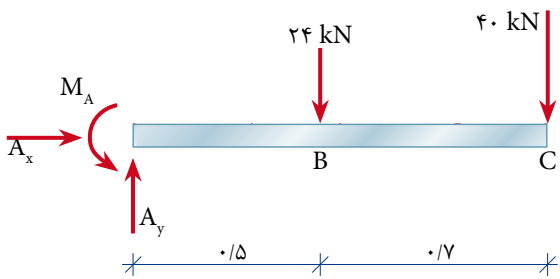
ب- ترسیم دیاگرام لنگر خمشی تیر

ج- تعیین نیروی برشی و لنگر خمشی حداکثر تیر.



حل:

الف) محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی

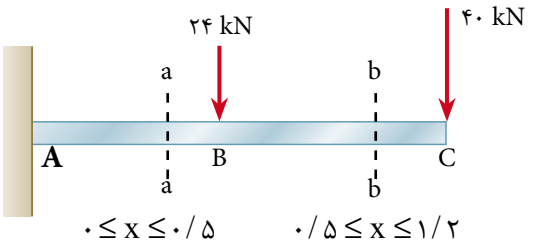


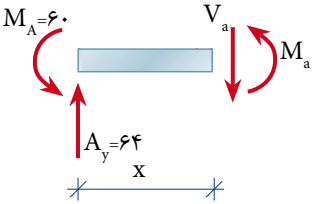
$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$^{+}\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - 24 - 40 = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = 64\ kN}$$

$$\overset{+}{\circlearrowleft}\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -M_A + 24\times 0/5 + 40\times 1/20 = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = 60\ kN.m}$$

معادلات نیروی برشی و لنگر خمشی در ناحیه AB (۰ ≤ x ≤ ۰/۵):



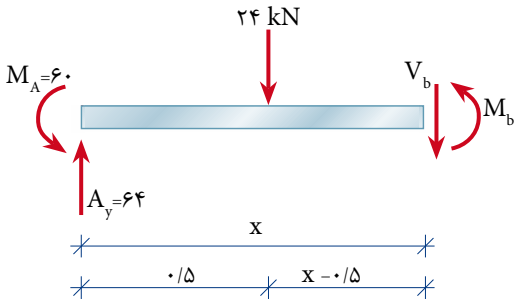


مقطع a–a

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 64 - V_a = 0 \Rightarrow \boxed{V_a = 64\ kN} \qquad 0 \le x \le 0/5$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_a = 0 \Rightarrow -M_a + 64x - M_A = 0 \Rightarrow \boxed{M_a = 64x - 60}$$

معادلات نیروی برشی و لنگر خمشی در ناحیه BC (۰/۵ ≤ x ≤ ۱/۲):



مقطع b–b

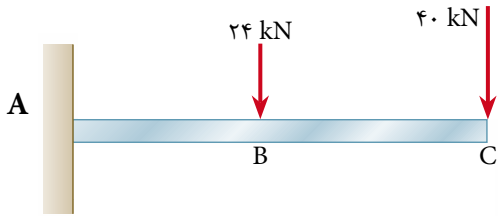
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 64 - 24 - V_b = 0 \Rightarrow \boxed{V_b = 40\ kN} \qquad 0/5 \le x \le 1/2$$

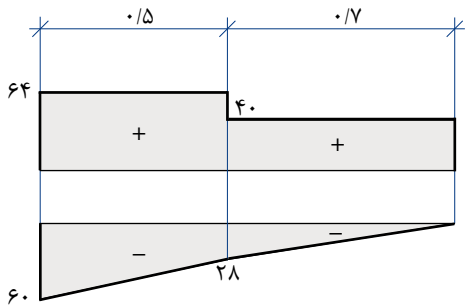
$$+\circlearrowleft \Sigma M_b = 0 \Rightarrow -M_b - M_A + 64 \times x - 24(x - 0/5) = 0$$

$$\Rightarrow M_b = 64x - 24(x - 0/5) - 60$$

$$\boxed{M_b = 40\ x - 48} \qquad 0/5 \le x \le 1/2$$

ترسیم معادلات برش و خمش:





نمودار نیروی برشی

نمودار لنگر خمشی

ج) با توجه به نمودار، حداکثر نیروی برشی و لنگر خمشی در تکیه‌گاه قرار دارد و مقدار آن برابر است با:

$$V_{max} = ۶۴ \ kN$$
$$M_{max} = ۶۰ \ kN.m$$

نتیجه: در تیرهای کنسولی حداکثر نیروی برشی و لنگر خمشی در تکیه‌گاه به‌وجود می‌آید.

خلاصهٔ فصل

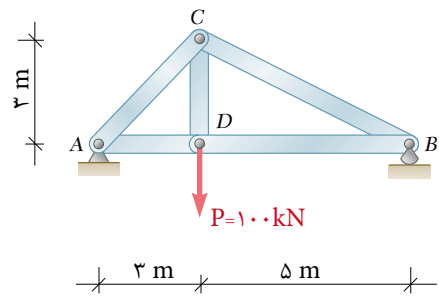
- خرپاها به دو گروه کلی صفحه‌ای و فضایی تقسیم می‌شوند.
- خرپاها تشکیل شبکهٔ مثلثی می‌دهند.
- نیروهای خارجی وارد بر خرپاها در صفحه خرپا و در محل گره‌ها به آن‌ها اعمال می‌شود.
- اعضای خرپاها به صورت مفصلی به یکدیگر متصل می‌شوند.
- منظور از تحلیل خرپا، تعیین نیروی داخلی هر عضو خرپا و محاسبهٔ عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی آن می‌باشد.
- برای تحلیل خرپاها از روش مفصل (گره) استفاده می‌شود.
- در گره‌های دارای دو عضو غیر هم‌راستا در صورتی که نیروی خارجی وجود نداشته باشد هر دو عضو صفر نیرویی خواهند بود.
- در گره‌های دارای سه عضو که دو عضو آن‌ها هم‌راستا باشند، در صورت عدم وجود نیروی خارجی در آن گره، عضو سوم، صفر نیرویی خواهد بود.
- هدف از تحلیل تیر، تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی و نیروهای داخلی در هر مقطع از تیر می‌باشد.
- تیرها در اثر اعمال بارهای خارجی دارای رفتارهای خمشی و برشی می‌باشند.
- نیروهای داخلی در هر مقطع از تیر عبارتند از : نیروی برشی و لنگر خمشی.
- مقدار برآیند بارهای گسترده یکنواخت برابر است با مساحت بار گسترده.
- محل اثر برآیند بارهای گسترده یکنواخت در محل تلاقی دو قطر مستطیل بار وارده می‌باشد.

خودآزمایی

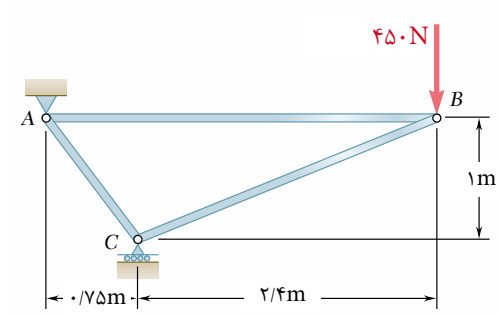
۱- در خرپای شکل زیر مطلوب‌است:

الف) محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی

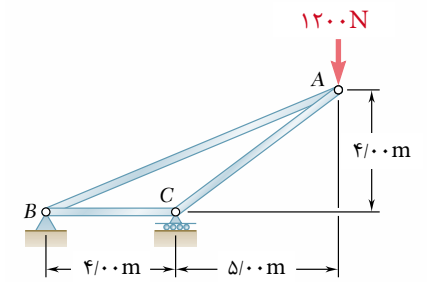
ب) محاسبه نیروهای داخلی اعضا و تعیین کششی یا فشاری بودن آن‌ها



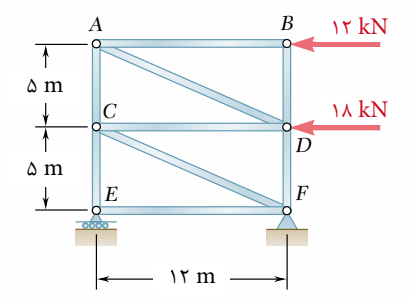
۲- در خرپاهای زیر نیروهای داخلی اعضا را محاسبه نمایید.



(الف)



(ب)

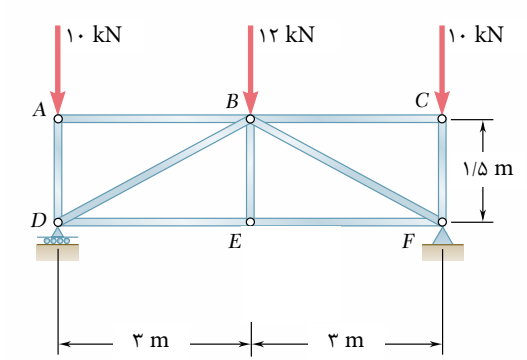


(ج)

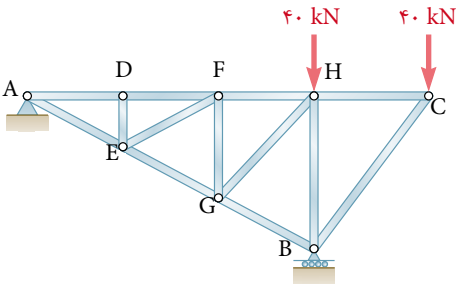
۳- در خرپای شکل زیر

اولاً: اعضای صفر نیرویی را تعیین کنید.

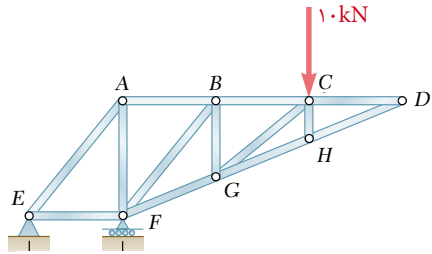
ثانیاً: نیروی داخلی سایر اعضا را محاسبه کنید.



۴- در خرپاهای زیر اعضای صفر نیرویی را مشخص نمایید.

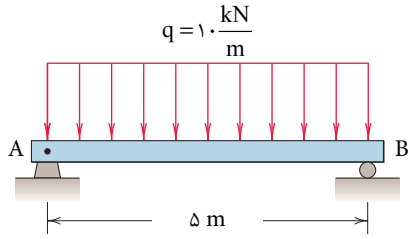


(الف)

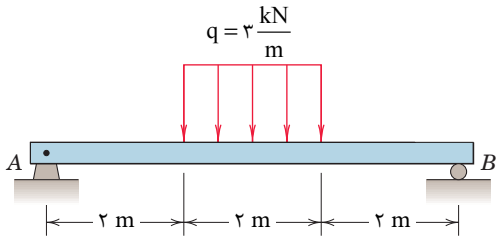


(ب)

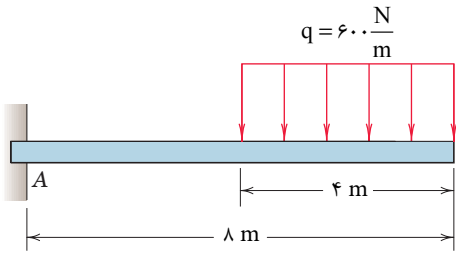
۵- عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیرهای زیر را به‌دست آورید.



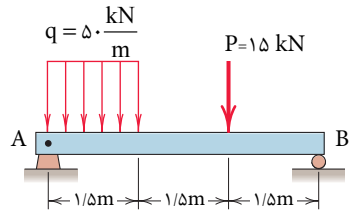
(الف)



(ب)



(د)



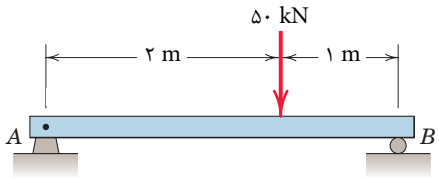
(ج)

۶- در تیرهای زیر مطلوب‌است:

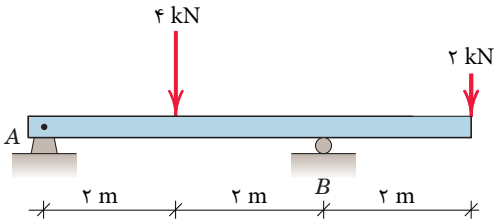
الف) ترسیم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی

ب) تعیین محل لنگر خمشیِ حداکثر

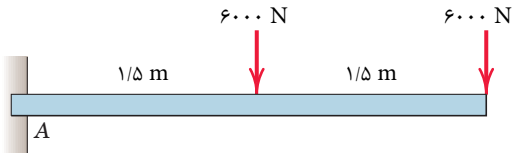
ج) تعیین مقادیر حداکثر نیروی برشی و لنگر خمشی تیر



(الف)



(ب)



(ج)