فصل ۵

مثلثات

زوایا و اندازه‌ی زوایا

با دیدن و تماشا کردن، می‌توان چیزهای زیادی یاد گرفت. بعضی از شب‌ها به ستاره‌ها نظاره می‌کنیم و از این همه اجرام آسمانی در تاریکی شب حیرت زده می‌شویم و لذت می‌بریم .آیا تاکنون به این موضوع فکر کرده‌اید که این اجرام آسمانی علاوه بر شگفت انگیزی و تماشایی بودن چه استفاده‌هایی برای انسان‌ها داشته و دارند؟ برای پی بردن به این موضوع می‌توانید در عالم خیال خود به گذشته‌های دور بروید و در وسط اقیانوسی یک کشتی را تصور کنید که بادبان‌هایش برافراشته و در دل تاریکی شب به پیش می‌رود. تصور کنید که از هر طرف هزاران کیلومتر آب است، هیچ نشانه‌ی زمینی مانند ساحل یا فانوس دریایی وجود ندارد. ناخدا چگونه مسیر را تشخیص می‌دهد و کشتی را به سمت مقصد هدایت می‌کند؟ مسیر بادها هم هر از گاهی تغییر می‌کند و ناخدا به ملوانان دستور تنظیم بادبان‌ها را می‌دهد. هیچ راه و روشی روی زمین نمی‌توان یافت که به ناخدا کمک کند تا جهت‌ها را تشخیص دهد و مسیر حرکت را گم نکند. پس باید در آسمان‌ها به دنبال نشانه‌ای بود! ملوانان می‌توانند با کمک ستارگان، جهت‌های چهارگانه را به راحتی تشخیص دهند که از جمله آن‌ها می‌توان به ستاره‌ی قطبی اشاره کرد.

پیامبر اکرم(ص) در مورد آیه‌ی «و بالنجم هم یهتدون» با ستاره (یا آن ستاره) راه را می‌یابند، فرمودند : منظور از ستاره در آیه‌ی فوق جدی (ستاره‌ی قطبی) است . زیرا آن ستاره‌ای است که غروب نمی‌کند و بر اساس آن، قبله مشخص می‌شود و به وسیله‌ی آن اهل بر و بحر (خشکی و دریا) راه را می‌یابند.

ستاره‌ی قطبی تقریباً در امتداد محور چرخش زمین (خطی که دو قطب شمال و جنوب را به‌هم وصل می‌کند.) قرار گرفته است. به این معنا که اگر شخصی در قطب شمال قرار داشته باشد این ستاره را تقریباً بالای سر خود می‌بیند و ما برای این‌که رو به سوی قطب شمال حرکت کنیم با دیدن این ستاره که در قطب شمال قرارگرفته است مسیر خود را پیدا می‌کنیم.[۱]

---

۱. اگر زمین به دور محورش نمی چرخید ستاره‌ی قطبی و تمام ستارگان در جای خود ثابت بودند. اما با چرخش زمین ظاهراً به نظر می‌آید که هر ستاره دایره ای را در طول شبانه روز می‌پیماید. به این حرکت،حرکت ظاهری می‌گویند.

فعالیت

ستاره‌ی قطبی روی دایره‌ای در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند و این ستاره در هر ۲۳ ساعت و ۵۶ دقیقه و ۴/۳۳ ثانیه، یعنی ۰/۹۹۷۲۷۲۳ شبانه‌روز یک بار این دایره‌ی کوچک را طی می‌کند .

۱ــ اگر یک دوران کامل خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت به اندازه‌ی ۳۶۰ درجه باشد و فرض کنیم هر ۲۴ ساعت یک بار این دایره به وسیله‌ی ستاره‌ی قطبی طی می‌شود، به نظر شما $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۲}{۳}$ و $۱\frac{۱}{۴}$ دوران طی چه مدتی صورت می‌پذیرد؟

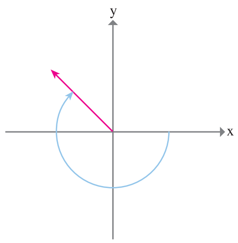
۲ــ حرکت ستاره‌ی قطبی را روی صفحه‌ی مختصات در نظر گرفته و فرض کنید ستاره‌ی قطبی از نقطه‌ای روی قسمت مثبت محور xها به طول ۲ واحد در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت شروع به حرکت کند. اگر ستاره‌ی قطبی به اندازه‌ی $\frac{۱}{۶}$ و $۱\frac{۱}{۶}$ و $۲\frac{۱}{۶}$ دایره را طی کند، اندازه‌ی زاویه‌ی طی شده‌ی هریک از نقاط را نسبت به مبدأ مختصات مشخص نمایید.

در صفحه‌ی مختصات یک زاویه به وسیله‌ی دو نیم‌خط که رأس مشترک دارند ایجاد می‌شود که یک نیم خط را به عنوان ضلع ابتدایی که مکان شروع حرکت نیم خط دوم است و دیگری را ضلع انتهایی که مکان انتهایی نیم‌خط می‌باشد، در نظر می‌گیریم.

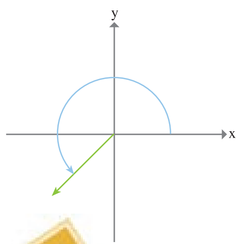
یک زاویه به وسیله‌ی مقدار و جهت چرخش از ضلع ابتدایی به ضلع انتهایی تعیین می‌شود.

اگر تغییر مکان نیم خط دوم از مکان شروع در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، زاویه با یک مقدار منفی و اگر خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، با یک مقدار مثبت مشخص می‌شود.

مثال

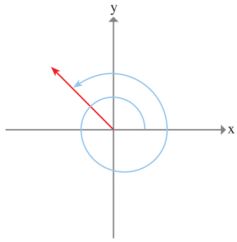


۱ــ یک زاویه‌ی منفی در جهت حرکت عقربه‌های ساعت.

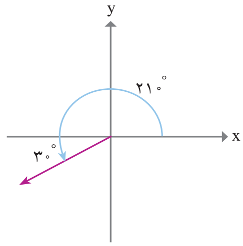


یک زاویه‌ی مثبت در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت.

یک زاویه در دستگاه مختصات در موقعیت استاندارد است، اگر رأس آن در مبدأ و ضلع اولیه‌اش روی قسمت مثبت محور xها باشد، موقعی که ضلع انتهایی حرکت می‌کند ممکن است در بعضی مواقع بیش‌تر از یک دور کامل بچرخد. مانند شکل مقابل :



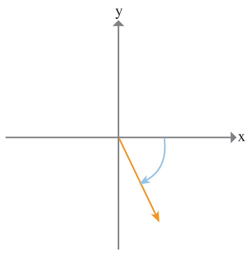
اندازه‌ی یک زاویه که ضلع انتهایی آن دقیقاً یک دور کامل بچرخد، ۳۶۰ درجه است.



۲ــ زوایای ۲۱۰ و ۶۰- درجه را در موقعیت استاندارد رسم کنید.

داریم : $۲۱۰^\circ = ۱۸۰^\circ + ۳۰^\circ$

ضلع انتهایی به اندازه‌ی ۳۰ درجه از محور x ها می‌گذرد.



چون ۶۰- درجه یک زاویه‌ی منفی است، ضلع انتهایی به اندازه‌ی ۶۰ درجه در جهت عقربه‌های ساعت از محور xها عبور می‌کند.

۱ــ هر یک از عبارت‌های زیر را در موقعیت استاندارد به درجه بیان کنید.

الف) $\frac{۱}{۳}$ دور کامل در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت.

ب) $\frac{۳}{۴}$ دور کامل در جهت حرکت عقربه‌های ساعت.

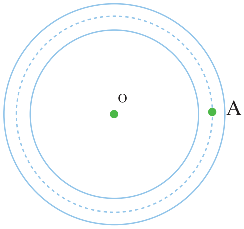
۲ــ زوایای ۴۰۵ و ۱۲۰- درجه را در موقعیت استاندارد رسم کنید.

۳ــ اگر ستاره‌ای حول محور عبور کننده‌ای از مرکز زمین روی مسیر دایره‌ای شکل به شعاع یک واحد به طور ظاهری بگردد، دوران یافته‌ی این ستاره از نقطه‌ی (۱،۰) را تحت زوایای $۳۶۰^\circ, ۲۷۰^\circ, ۱۸۰^\circ, ۳۰^\circ$ در موقعیت استاندارد مشخص کنید.

واحد دیگری برای اندازه گیری زاویه

یکی از ورزش‌های بسیار مفرح که اکثر مردم به راحتی می‌توانند این ورزش را انجام دهند، ورزش دوچرخه سواری است که حتی در مسابقات المپیک یکی از ورزش‌های پر طرفدار است.

فعالیت



فرض کنیم در ورزشگاه شهر، یک پیست دوچرخه‌سواری به صورت دایره‌ای وجود دارد. معلم ورزش مدرسه از دانش آموزان می‌خواهد که در مسابقه دوچرخه سواری دور پیست دایره‌ای شرکت کنند. دانش‌آموزان از نقطه‌ی A که در شکل مقابل مشخص شده است در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت شروع به رکاب زدن می‌کنند. علی یکی از دانش‌آموزانی است که در این مسابقه شرکت کرده است. مکان رکاب زدن علی، دایره‌ای به شعاع یک کیلومتر است که با زاویه‌ای که علی حول O چرخیده است مشخص می‌شود.

۱ــ اگر زاویه‌ای که علی چرخیده است ۹۰ درجه باشد، او چه مسافتی را پیموده است؟

۲ــ اگر او ۳۱۵ درجه از دایره را طی کرده باشد، چه مسافتی را طی نموده است؟

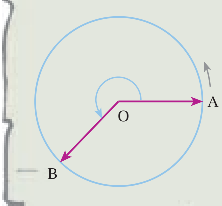
۳ــ علی پس از ۱۵ دقیقه به اندازه‌ی ۷۶۵ درجه روی دایره را طی نموده است او چه مسافتی را طی نموده است؟

۴ــ اگر زاویه‌ی چرخیدن دوچرخه‌سوار θ و مسافت طی شده توسط او L باشد، چه رابطه‌ای بین L و θ وجود دارد؟

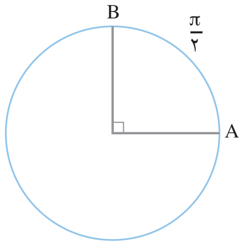
همان‌گونه که دیدیم مقدار مسافتی که روی محیط دایره توسط علی طی شده است و زاویه‌ای که علی چرخیده است با هم رابطه مستقیم دارند و با دانستن هر یک می‌توان دیگری را به‌دست آورد. بنابراین مسافت طی شده توسط علی می‌تواند معیاری برای اندازه‌گیری زاویه چرخیدن علی باشد.

اگر متحرکی از نقطه A روی دایره‌ای به شعاع واحد در جهت مثبت حرکت کند و به مکان B برسد، مسافت طی شده توسط متحرک را اندازه‌ی زاویه‌ی دوران پاره خط OA حول O بر حسب رادیان می‌نامیم.

اگر در جهت منفی حرکت کنیم همین مسافت طی شده را با علامت منفی نشان می دهیم.



مثال



۱ــ اگر از نقطه‌ی A روی دایره به اندازه ۹۰ درجه بچرخیم، یک ربع دایره را طی کرده‌ایم که طول یک چهارم محیط دایره است. چون شعاع دایره ۱ و محیط دایره 2π است، پس طول ربع دایره $\frac{2\pi}{4}$ یعنی $\frac{\pi}{2}$ است.

۲ــ اگر از نقطه‌ی A روی دایره به اندازه‌ی ۱۸۰- درجه بچرخیم، نیم دایره‌ای طی می‌شود که طول آن $\frac{2\pi}{2}$ یعنی π است. پس زاویه‌ی طی شده بر حسب رادیان $-\pi$ است.

۳ــ اگر از نقطه‌ی A روی دایره به اندازه‌ی ۴۵۰ درجه بچرخیم، یک بار دایره طی می‌شود و برای بار دوم به اندازه‌ی ۹۰ درجه می‌چرخیم. پس مسافت طی شده برابر $\frac{\pi}{2}+2\pi$ یعنی $\frac{5\pi}{2}$ است، یعنی ۴۵۰ درجه معادل $\frac{5\pi}{2}$ رادیان است.

هر متحرک روی دایره اگر به اندازه‌ی یک درجه بچرخد به اندازه‌ی $\frac{1}{360}$ محیط آن را طی می‌کند. برای دایره‌ای به شعاع ۱ این طول برابر $\frac{2\pi}{360}$ یعنی $\frac{\pi}{180}$ رادیان است. پس یک درجه $\frac{\pi}{180}$ رادیان است.

پس اگر زاویه‌ای به اندازه‌ی D درجه باشد، بر حسب رادیان به اندازه‌ی $\frac{\pi}{180}D$ رادیان خواهد بود. اگر مقدار زاویه‌ای برحسب درجه D و بر حسب رادیان R باشد، داریم :

$$R=\frac{\pi}{180}D$$

$$\frac{R}{\pi}=\frac{D}{180}$$

از این تساوی برای تبدیل واحد درجه به رادیان و تبدیل واحد رادیان به درجه می‌توان استفاده کرد.

مثال

مقدار $\frac{-\pi}{6}$ رادیان را به درجه بنویسید.

با استفاده از رابطه‌ی بالا داریم :

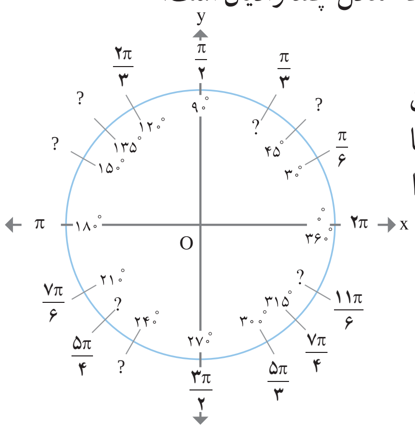
$$D=\frac{-\frac{\pi}{6}\times 180}{\pi}=-30^\circ$$

تمرین در کلاس

۱ــ یک متحرک روی دایره، چه زاویه‌ای بر حسب رادیان بچرخد تا به جای اول خود باز گردد؟

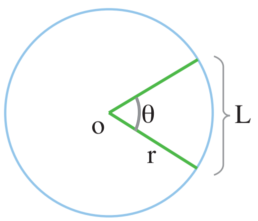
۲ــ ۲۰۰ درجه معادل چند رادیان است؟ ۷۲− درجه معادل چند رادیان است؟

۳ــ شکل مقابل دایره‌ای به شعاع واحد را نشان می‌دهد که اندازه‌های زوایا بر حسب درجه و رادیان با یک‌دیگر معادل هستند. جاهای خالی دایره‌ی فوق را تکمیل نمایید.



۴ــ $\frac{۳\pi}{۲}$ رادیان معادل چند درجه است؟ $\frac{-\pi}{۶}$ رادیان معادل چند درجه است؟

۵ ــ در فعالیت مربوط به پیست دوچرخه سواری اگر علی مسافت $\frac{۷\pi}{۲}$ کیلومتر را طی کرده باشد، مقدار زاویه‌ای که چرخیده است را بر حسب درجه بیان کنید.



اگر یک زاویه‌ی θ در دایره‌ای به شعاع r کمانی به طول L را ببرد، در این صورت اندازه‌ی θ به رادیان برابر $\frac{L}{r}$ می‌باشد. در حالتی که $r=۱$ باشد اندازه‌ی L با اندازه‌ی θ برابر است.

مثال

در دایره‌ای به شعاع ۳ سانتی‌متر توسط زاویه‌ی θ کمانی به طول ۶ سانتی‌متر بریده می‌شود. مقدار θ به رادیان چه‌قدر است؟

حل :

$$\theta = \frac{L}{r} = \frac{۶}{۳} = ۲$$

اندازه‌ی θ به رادیان برابر ۲ می‌باشد.

مسائل

۱ــ دایره‌ای به شعاع واحد رسم کنید. روی این دایره انتهای کمان‌های داده شده را در موقعیت استاندارد مشخص کنید.

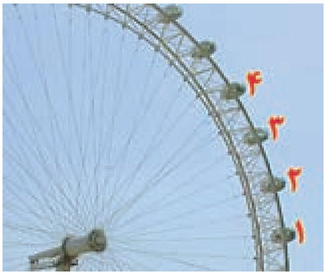
الف) $\frac{۳\pi}{۲}$ ب) ۳رادیان

۲ــ زوایای ۳- رادیان و π ۳- رادیان چه کسری از دایره‌ی طی شده می‌باشند؟ اندازه‌ی آن‌ها را بر حسب درجه بیان کنید. (با تقریب سه رقم اعشار)

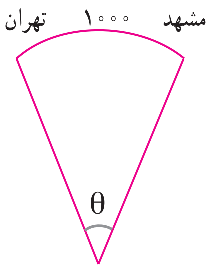
۳- اندازه‌ی زاویه‌ای که عقربه‌ی ساعت شمار از ساعت ۱ بعدازظهر تا ۳ بعدازظهر حرکت می کند را بر حسب درجه و رادیان بیان کنید.

۴ــ چه مدت طول می‌کشد تا عقربه‌ی دقیقه شمار به اندازه‌ی $۲/۵\pi$ رادیان دوران کند؟

۵ــ فرض کنید سوار چرخ و فلکی شده‌اید که ۴۰ کابین دارد و کابین‌های آن شماره گذاری شده‌اند. اگر در آغاز حرکت در جهت خلاف عقربه‌های ساعت، شما روی کابین شماره‌ی ۳ نشسته باشید، بعد از $\frac{۴۷\pi}{۱۰}$ رادیان دوران، شما در موقعیت کدام کابین قرار دارید؟



۶ــ فرض کنیم فاصله‌ی تهران تا مشهد روی قسمتی از سطح زمین تقریباً ۱۰۰۰ کیلومتر باشد. اگر شعاع زمین را ۶،۴۴۰ کیلومتر فرض کنیم، اندازه‌ی زاویه‌ای را بر حسب رادیان که رأس آن در مرکز زمین باشد پیدا کنید به طوری که تهران روی یک ضلع آن و مشهد روی ضلع دیگر آن باشد.



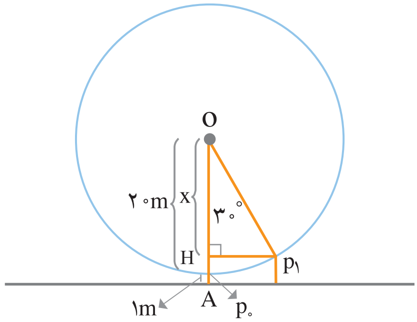
شناخت دایره مثلثاتی

در ریاضی سال اول متوسطه مقادیر مثلثاتی زوایای حاده را می‌توانستید محاسبه کنید.

حل یک مسئله :

خانواده آقای حسینی دریک روز تعطیل به شهربازی رفتند، رضا و زهرا فرزندان آقای حسینی قصد دارند سوارچرخ و فلکی به شعاع ۲۰ متر شوند. بعد از اینکه رضا از سطح زمین سوار کابین

شماره‌ی ۱ شده است، مسئول چرخ و فلک جهت سوار شدن زهرا کابین را به اندازه‌ی ۳۰° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت حرکت داد. می‌خواهیم بدانیم فاصله‌ی رضا از سطح زمین چه‌قدر است. با توجه به دانسته‌هایمان از ریاضی سال اول متوسطه، می‌توانیم این مسئله را حل کنیم.



اگر شکل مقابل را درنظر بگیریم می‌بینیم که x اختلاف بین OA (فاصله‌ی مرکز چرخ تا زمین) و HA می‌باشد و $AH = h$. با استفاده از نسبت کسینوس‌ها داریم: $\cos ۳۰^\circ = \frac{x}{۲۰} = \frac{۲۱-h}{۲۰}$

که با توجه به رابطه‌ی بالا h به‌دست می‌آید.

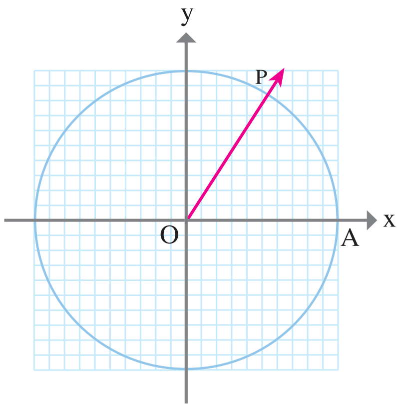
اگر کابین رضا به اندازه‌ی ۱۲۰ درجه یا ۲۴۰ درجه یا ۳۰۰ درجه دوران کند فاصله‌ی رضا از سطح زمین چه‌قدر خواهد بود؟

برای این‌که به سؤال فوق پاسخ داده شود بایستی نسبت‌های مثلثاتی زوایای بیش‌تر از ۹۰° را بتوانیم محاسبه کنیم.

در این قسمت به این می‌پردازیم که چگونه مقادیر مثلثاتی هر زاویه‌ی دلخواه را محاسبه کنیم.

در فعالیت زیر از ابزار پرگار، نقاله، کاغذ شطرنجی و ماشین حساب استفاده کنید.

فعالیت



روی کاغذ شطرنجی محور مختصات را رسم نمایید.

فرض کنید طول هر ضلع مربع روی صفحه شطرنجی نمایش ۰/۱ واحد باشد. به مرکز مبدأ مختصات مانند شکل مقابل دایره‌ای به شعاع ۱ رسم کنید.

۱ــ نقاله را به گونه‌ای قرار دهید که نقطه‌ی O در مبدأ قرار گرفته و از نقطه‌ی A زاویه‌ای به اندازه‌ی ۵۷/۳ درجه را روی دایره مشخص نمایید و آن را P بنامید.

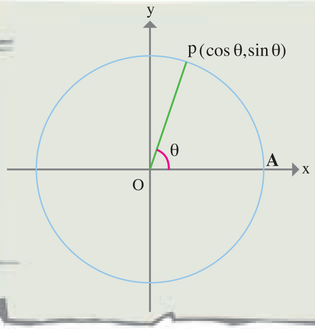
۲ــ با به کار بردن کاغذ شطرنجی طول و عرض نقطه‌ی P را به‌دست آورید.

۳ــ با ماشین حساب کسینوس و سینوس ۵۷/۳ درجه را محاسبه کنید و رابطه‌ی بین مختصات

نقطه‌ی P ومقادیر سینوس و کسینوس را بنویسید.

۴ــ با ۲ و ۳ برابر کردن زاویه فوق، سه فعالیت صفحه‌ی قبل را تکرار کنید.

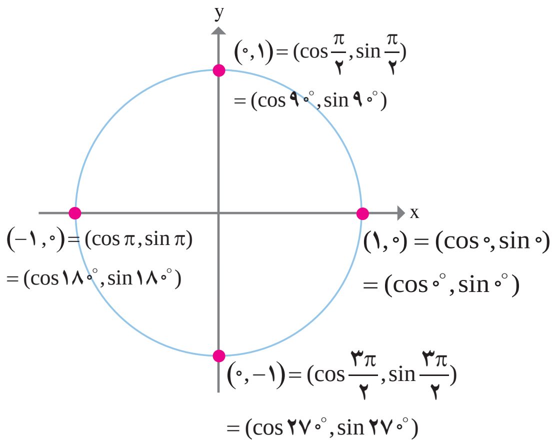
با توجه به فعالیت صفحه‌ی قبل می‌توانیم بگوییم $(\cos ۵۷/۳,\sin ۵۷/۳)$ به طور تقریبی با مختصات نقطه‌ی P برابر است.



در دایره ای به شعاع ۱ (دایره‌ی مثلثاتی) به ازای هر مقدار حقیقی زاویه‌ی θ، نقطه‌ی $P(\cos\theta,\sin\theta)$ دوران‌یافته‌ی نقطه‌ی A تحت دوران θ حول مبدأ می‌باشد که در آن $\sin\theta = y$ و $\cos\theta = x$ می‌باشد.

مثال

۱ــ در شکل زیر کسینوس و سینوس مضارب صحیح زاویه‌ی $\frac{\pi}{۲}$ روی دایره‌ی مثلثاتی مشخص شده است.



۲ــ نقطه‌ی $(۱,۰)$ به اندازه‌ی $\frac{۱۳\pi}{۵}$ حول مبدأ مختصات دوران می‌کند. مختصات نقطه‌ی به‌دست آمده‌ی آن را تا ۳ رقم اعشار حساب کنید.

با استفاده از ماشین حساب مقدار ($\sin\frac{۱۳\pi}{۵}$ و $\cos\frac{۱۳\pi}{۵}$) عبارت‌است از :

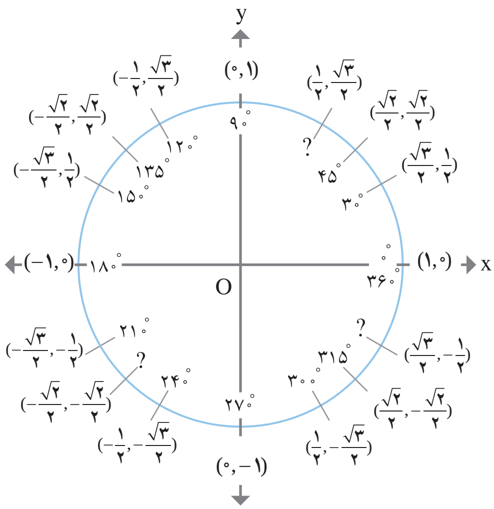
(۰/۹۵۱ و ۰/۳۰۹−)

۳- فرض کنیم ضلع انتهایی زاویه‌ی θ که از نقطه‌ی (۱,۰) شروع شده است در نقطه‌ی $P(\frac{۲\sqrt{۲}}{۳},\frac{-۱}{۳})$ روی دایره‌ی مثلثاتی قرار بگیرد، مقادیر $\sin\theta$ و $\cos\theta$ را به‌دست آورید.

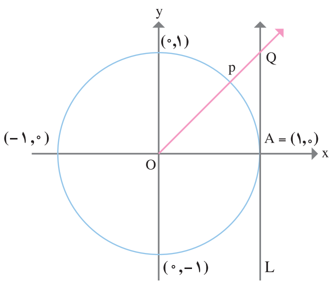
$P(\cos\theta$ و $\sin\theta) = P(\frac{۲\sqrt{۲}}{۳},-\frac{۱}{۳})$ بنابراین : $\cos\theta=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ و $\sin\theta=-\frac{۱}{۳}$

تمرین در کلاس

حال مقادیر دقیق سینوس و کسینوس بعضی از زوایای خاص را روی دایره مثلثاتی مشخص می کنیم.



خط L را در شکل مقابل در دایره‌ی مثلثاتی در نظر بگیرید که از نقطه‌ی $A=(۱,۰)$ می‌گذرد. P تصویر A تحت دوران θ به مرکز O می‌باشد و خط OP خط L را در نقطه‌ی Q قطع می‌کند. وقتی $۰<\theta<\frac{\pi}{۲}$ باشد، اندازه‌ی $QA=\tan\theta$



تمرین در کلاس

۱ــ مثال شماره‌ی ۲ صفحه‌ی قبل را با استفاده از کاغذ شطرنجی و رسم دایره‌ی مثلثاتی آزمایش کنید.

۲ــ از نمودار شکل بالا استفاده نمایید و درستی رابطه‌های صفحه‌ی بعد را بررسی کنید :

الف : به ازای هر مقدار θ داریم : $\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta=۱$

ب : به ازای هر مقدار θ با شرط این که $\cos\theta\neq ۰$ باشد، داریم : $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

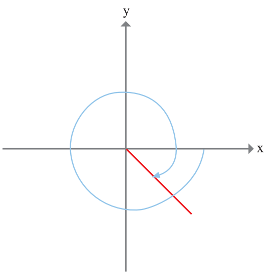
۳- مقادیر $\tan\pi$ و $\tan(-۲۷۰)$ را تعیین کنید.

۴- با رسم دایره‌ی مثلثاتی، مقدار $\tan\theta$ در حالتی‌که $\frac{\pi}{۲}<\theta<\pi$ باشد را نشان دهید.

۵- با توجه به این‌که به صورت عملی با مقادیر مثبت و منفی عبارت‌های مثلثاتی آشنا شده‌اید، جدول زیر را تکمیل کنید.

مقدار θ	ربع	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$\tan\theta$
$۰<\theta<\frac{\pi}{۲}$	اول			
$\frac{\pi}{۲}<\theta<\pi$	دوم			
$\pi<\theta<\frac{۳\pi}{۲}$	سوم			
$\frac{۳\pi}{۲}<\theta<۲\pi$	چهارم			

مثال



علامت $\tan(-۷)$, $\cos(-۷)$, $\sin(-۷)$ (اندازه‌ی ۷- بر حسب رادیان است) را مشخص کنید.

حل : (۷-) رادیان، دوران بیش‌تر از یک دور و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌باشد. بنابراین ضلع انتهایی زاویه در ربع چهارم قرار می‌گیرد و در ربع چهارم کسینوس مثبت و تانژانت و سینوس منفی می‌باشند.

تمرین کلاسی

۱- با فرض این‌که نقطه‌ی $A=(۱,۰)$ به اندازه‌ی θ حول مبدأ مختصات دوران کند، نقاط

حاصل از دوران به ازای مقادیر داده شده‌ی θ را به‌دست آورید.

الف) ۸۱۰- درجه　　　ب) -۱۳π　　　ج) $\frac{۱۱\pi}{۲}$

۲- با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی همه‌ی مقادیر θ بین ۰ و ۲π به طوری که $\cos\theta = \frac{۱}{۲}$ می‌باشد را بیابید.

مسائل

۱- مقادیر دقیق عبارت‌های زیر را به‌دست آورید:

$$\cos\frac{۷\pi}{۴} \text{ و } \sin ۱۳۵^\circ \text{ و } \sin\frac{۳\pi}{۴} \text{ و } \cos ۳۰۰^\circ \text{ و } \tan\frac{۱۱\pi}{۶}$$

۲- الف) اگر $\cos\theta = \frac{۲}{۵}$ باشد، دو مقدار ممکن برای $\sin\theta$ بیابید.

ب) با رسم شکل، مختصات فوق را روی شکل نشان دهید.

۳- اگر زاویه‌ی θ در موقعیت استاندارد باشد به طوری‌که نقطه‌ی انتهایی کمان θ دایره‌ی مثلثاتی را در نقطه‌ی $(-\frac{۲}{\sqrt{۵}}, \frac{۱}{\sqrt{۵}})$ قطع کند، مقادیر $\tan\theta, \cos\theta, \sin\theta$ را در نقطه‌ی فوق حساب کنید.

۴- با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی همه‌ی مقادیری از θ بین $۲\pi, ۰$ را بیابید به طوری‌که روابط زیر برقرار باشد:

الف) $\sin\theta = \frac{۱}{۲}$　　　ب) $\tan\theta = -\sqrt{۳}$　　　ج) $\cos\theta = ۰$

۵- اگر از نقطه‌ای روی دایره‌ی مثلثاتی شروع به حرکت کنیم و به اندازه‌ی ۲π واحد فاصله را طی کنیم، به جایی که حرکت را شروع کرده‌ایم می‌رسیم. اگر حرکت را برای بار دوم ادامه دهیم، همه‌ی مقادیر (x, y) ای که در دور اول به آن رسیدیم، مجدداً به آن می‌رسیم. با استفاده از بحث بالا مقادیر هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید:

$\cos(۲\pi - \frac{\pi}{۶})$　　　$\sin(۲\pi + \frac{\pi}{۳})$

$\cos(۲\pi + \frac{۲\pi}{۳})$　　　$\sin(۲\pi - \frac{\pi}{۴})$

۶- دو مقدار از θ بین $\frac{\pi}{۲}$, $\frac{-\pi}{۲}$ پیدا کنید به طوری‌که $\cos\theta = \frac{۱}{۲}$ باشد.

۷- فرض کنیم : $\sin\theta = -\frac{۱}{۲}$

الف) دو مقدار از θ بین ۲π , ۰ پیدا کنید به طوری‌که رابطه‌ی فوق درست باشد.

ب) دو مقدار منفی از θ مشخص کنید که معادله‌ی فوق درست باشد.

۸- چهار مقدار از θ بین $-۲\pi , ۲\pi$ پیدا کنید به طوری‌که $\cos\theta = \sin\theta$ باشد و به ازای مقادیر θ به‌دست آمده از بالا $\tan\theta$ را به‌دست آورید.

تعیین مقادیر مثلثاتی برای تمام زوایا

فعالیت

۱- یک دایره‌ی مثلثاتی رسم نموده و نقطه‌ای مانند P روی آن چنان بیابید که زاویه‌ی نظیر آن ۳۰° باشد.

۲- قرینه‌ی نقطه‌ی P را نسبت به محورy‌ها مشخص نموده و آن را Q نامیده و مختصات آن را معین کنید.

۳- اگر نقطه‌ی $(۱,۰)$ را A و نقطه‌ی $(-۱,۰)$ را B بنامیم، چه رابطه‌ای بین زوایای QOB و POA وجود دارد؟

۴- زاویه‌ی AOQ را در جهت مثبت مشخص نموده و سپس بر اساس این زاویه مختصات نقطه‌ی Q را به‌دست آورید.

۵- از مختصات تعیین شده Q در بند ۲ و بند ۴ فعالیت فوق چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

در حالت کلی به ازای هر زاویه‌ی دلخواه θ :

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$$
$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$

مثال

فرض کنیم : $\sin\theta = ۰/۱۵$ باشد، مقدار $\sin(\pi-\theta)$ را به‌دست آورید.

با استفاده از روابط به‌دست آمده در صفحه‌ی قبل داریم : $\sin(\pi-\theta) = \sin\theta = ۰/۱۵$

تمرین کلاس

مقادیر سینوس و کسینوس زوایای $\frac{۲\pi}{۳}$ و $\frac{۵\pi}{۶}$ را به‌دست آورید.

فعالیت

با استفاده از پرگار و نقاله دایره مثلثاتی رسم نموده و به ازای هر زاویه دلخواه θ مقادیر $\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)$ و $\cos\theta$ را به‌دست آورده و رابطه‌ی بین این دو را حدس بزنید وحدستان را با دو مقدار از θ آزمایش کنید.

به ازای هر زاویه‌ی θ بر حسب درجه داریم: $\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta) = \cos\theta$

$\cos(\frac{\pi}{۲}-\theta) = \sin\theta$

مثال

اگر $\cos\theta = \frac{۲}{۵}$ باشد، مقدار $\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)$ را به‌دست آورید.

$\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta) = \cos\theta = \frac{۲}{۵}$

تمرین کلاس

رابطه‌ی بین $\cos\theta$ و $\sin(۹۰+\theta)$ و همچنین رابطه‌ی $\sin\theta$ و $\cos(۹۰+\theta)$ را با استفاده از فعالیت بالا بنویسید.

فعالیت

یک دایره‌ی مثلثاتی را درنظر بگیرید.

۱ــ نقطه‌ی $A(1,0)$ را به اندازه‌ی θ دوران دهید و آن نقطه را P نامیده و مختصات آن را بنویسید.

۲ــ قرینه‌ی نقطه‌ی P را نسبت به مبدأ مختصات مشخص کرده و آن را Q نامیده و مختصات آن را مشخص کنید.

۳ــ با توجه به این‌که Q تصویر A تحت دوران به اندازه‌ی $\pi+\theta$ است، مختصات آن را بنویسید.

۴ــ ازدو بند فوق چه نتیجه‌ای می گیرید؟

در حالت کلی:

$$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$$
$$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$$

مثال

اگر $\cos\theta=\frac{2}{3}$ باشد، مقدار $\cos(\pi+\theta)$ چه قدر خواهد بود؟

حل :

$$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta=-\frac{2}{3}$$

تمرین در کلاس

۱- با استفاده از پرگار و نقاله دایره مثلثاتی رسم نموده و به ازای یک زاویه دلخواه x روابط بالا را آزمایش کنید.

۲-روابط فوق را برای تانژانت هر زاویه دلخواه بررسی کنید.

۳- مقدار $4\sin(2x+\pi)$ را به ازای $x=\frac{\pi}{6}$ به‌دست آورید.

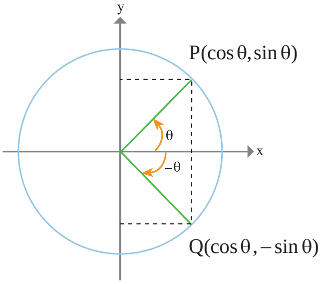
فعالیت

با استفاده از ماشین حساب مقادیر زیر را حساب کنید :

۱- زوایای زیر بر حسب رادیان هستند.

الف) $\sin\frac{\pi}{3}\ ,\ \sin\frac{-\pi}{3}$ ب) $\sin(\frac{5\pi}{6}),\sin(\frac{-5\pi}{6})$ ج) $\sin(2/8),\sin(-2/8)$

۲- $\cos(-۸۳^\circ)$ و $\cos(۸۳^\circ)$



اگر دقت کنیم می‌بینیم تمام زوایای فوق قرینه هستند اما سینوس و کسینوس زوایای قرینه متفاوت عمل کرده‌اند. حال به تحلیل چرایی این موضوع می‌پردازیم.

فرض کنیم P دوران یافته‌ی (۱,۰) تحت زاویه θ و Q دوران یافته‌ی (۱,۰) تحت زاویه $-\theta$ مطابق شکل مقابل باشند.

توجه کنید که P,Q قرینه‌ی یکدیگر نسبت به محور x ها هستند.

بنابراین مختص x آن‌ها یعنی کسینوس‌ها مساوی هستند اما مختص y آن‌ها یعنی سینوس‌ها قرینه‌اند.

بنابراین:

به ازای هر زاویه‌ی θ داریم:

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

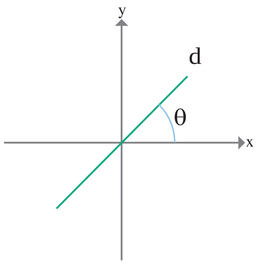
تمرین کلاس

۱- روابط فوق را برای تانژانت θ به‌دست آورید.

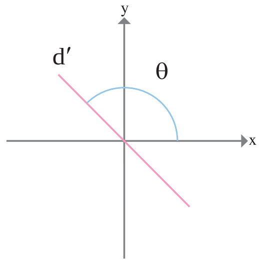
۲- مقادیر $\cos(\theta - ۱۸۰^\circ)$ و $\sin(\theta - ۱۸۰^\circ)$ را به‌دست آورید.

رابطه بین شیب خط و تانژانت زاویه

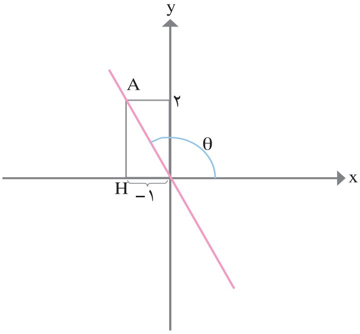
شیب خط‌هایی که با محور x ها زاویه‌ی حاده می‌سازند تانژانت همان زاویه است. اما در مورد خط‌هایی که با جهت مثبت محور xها زاویه‌ی منفرجه می‌سازند چه می‌توان گفت؟



$m_d = \tan\theta$ (شیب خط d)



$m_{d'} = ?$ (شیب خط d')



شیب خط‌هایی که با محور x زاویه‌ی منفرجه می‌سازند عددی منفی است، پس تانژانت زاویه‌های منفرجه باید عددی منفی باشد. به‌نظر شما در خط $y = -۲x$ عدد -۲ چه رابطه‌ای با زاویه‌ی این خط و محور xها دارد؟

تمرین در کلاس

خط $y = -x-۱$ با محور xها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

مسائل

۱– مقادیر هر یک از عبارت‌های زیر را به ازای $x = \frac{\pi}{۶}$ به‌دست آورید.

ب) $y = -۱ + \frac{۳}{۴}\cos(۲x - \frac{\pi}{۲})$

الف) $y = ۱ + ۲\sin ۳x$

ج) $y = ۴ - \frac{۲}{۳}\sin(۳x - \pi)$

۲– عبارت $\cos۴ = \cos(-۴)$ درست یا نادرست است؟ با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی جوابتان را بررسی کنید. (زوایای فوق بر حسب رادیان هستند.)

۳– اگر $\sin\theta = ۰/۴$ باشد (θ بر حسب درجه است) بدون ماشین حساب مقادیر $\sin(-\theta), \sin(۱۸۰-\theta)$ را به‌دست آورید.

۴- اگر $\cos\theta = ۰/۲$ باشد(θ بر حسب رادیان) بدون ماشین حساب مقادیر $\cos(\pi+\theta), \sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)$ را به‌دست آورید.

۵- اگر عبارت‌های زیر درست است دلیل درستی و اگر نادرست است با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی دلیل نادرستی آن‌ها را بیان کنید.

$$\sin(\frac{-۲\pi}{۳}) = \sin(\frac{۲\pi}{۳})$$

$$\cos\frac{\pi}{۶} = \cos\frac{۵\pi}{۶}$$

۶- با ارایه‌ی مثالی نشان دهید رابطه‌ی زیر همواره درست نیست.

$$\sin(\pi-\theta) = \sin\pi - \sin\theta$$

۷- به ازای هر مقدار θ نشان دهید $\cos\theta + \cos(\pi-\theta) = ۰$

۸- خط d با محور xها زاویه‌ی ۳۰ درجه می‌سازد، شیب این خط را به دست آورید.

تابع مثلثاتی

فعالیت

یک شهر بازی چرخ وفلکی دارد که شعاع دایره‌ی آن ۱۵ متر است. فاصله‌ی مرکز دایره‌ی این چرخ وفلک تا زمین ۲۰ متر است. برای هر نقطه‌ی C از این چرخ وفلک با مشخص بودن زاویه‌ی OC باخط افق می‌توان فاصله‌ی نقطه‌ی C تا زمین را به دست آورد. به عبارت دیگر فاصله‌ی C تا زمین به زاویه‌ی OC با خط افق بستگی دارد.

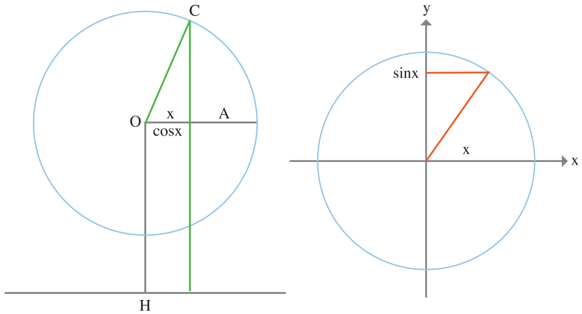
زاویه‌ای که OC با جهت مثبت خط افق می‌سازد را x و فاصله‌ی C تا زمین را y بنامید.

۱- در حالتی که x زاویه‌ای بین صفر و π باشد، نشان دهید y مجموع دو طول AC و OH است و نتیجه بگیرید : $y = ۲۰ + ۱۵\sin x$

۲- در حالتی که x بین π و ۲π باشد، شکل جدیدی بکشید و باز نتیجه بگیرید :
$y=۲۰+۱۵\sin x$

تابعی که در فعالیت بالا به آن رسیدیم، نمونه‌ای از توابع مثلثاتی می‌باشد.

توابع $y=\sin x$, $y=\cos x$ از ساده‌ترین توابع مثلثاتی هستند و در دایره‌ی مثلثاتی تعبیر هندسی ساده‌ای دارند. (x بر حسب رادیان است.)



به ازای هر مقدار x مقدارهای sinx و cosx تعریف شده‌اند و دامنه‌ی این توابع تمام $\mathbb{R}$ است. با تغییر x مقادیری که برای sinx و cosx به‌دست می‌آید اعدادی بین ۱- و ۱ هستند، به عبارت دیگر برد این توابع $[-1,1]$ است.

حال به مسأله‌ی چرخ و فلک صفحه‌ی قبل برمی‌گردیم :

فعالیت

۱- اگر سوار چرخ و فلکی شوید که فاصله‌ی شما تا سطح زمین از رابطه‌ی $y=20+15\sin\theta$ تعیین شود، با تکمیل جدول زیر فاصله‌ی خود تا سطح زمین را بر اساس زاویه‌ی طی شده به دست آورید.

θ (زاویه‌ی طی شده)	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y (فاصله‌ی شخص تا سطح زمین)								

۲- با توجه به جدول صفحه‌ی قبل به نظر شما در مورد فاصله‌ی خودتان تا سطح زمین در زوایای صفر و ۲π چه می‌توان گفت؟

۳- جدول صفحه‌ی قبل را برای زوایای $\theta + ۲\pi$ ترسیم و تکمیل نموده و مقادیر به دست آمده را با مقادیر جدول اولیه مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴- به نظر شما اگر جدول اولیه را برای زوایای $\theta + ۲\pi \times ۲$ ترسیم نماییم چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

فرض کنیم مریم سوار چرخ و فلک شود و بعد از یک دور چرخیدن، زهرا سوار چرخ و فلک شده و کنار مریم بنشیند، در این حالت با آن‌که مریم به اندازه‌ی $\theta + ۲\pi$ و زهرا به اندازه‌ی θ که یک دور کمتر از مریم چرخیده‌است، اما هر دو در یک محل قرار می‌گیرند.

$$\sin(\theta + ۲\pi) = \sin\theta$$

$$\sin(\theta + ۲\times ۲\pi) = \sin\theta$$

.

.

.

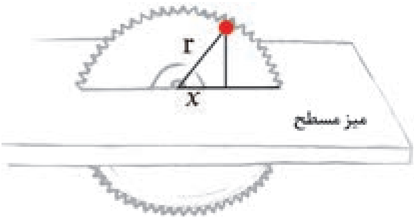
$$\sin(\theta + n\times ۲\pi) = \sin\theta$$

به چنین توابعی توابع تناوبی می‌گوییم و زاویه‌ی ۲π دوره‌ی تناوب تابع فوق نامیده می‌شود.

تابع $y=\cos\theta$ نیز دارای دوره‌ی تناوب ۲π می‌باشد(چرا؟)

منحنی توابع مثلثاتی

فعالیت



یک اره‌ی برقی را به شعاع ۴۰ سانتی متر در نظر بگیرید که یک نقطه‌ی قرمز رنگ بر روی لبه‌ی خود دارد و در هر ثانیه چهار دور در جهت مثبت می‌چرخد. فرض کنیم که نقطه‌ی قرمز اره‌برقی در لحظه‌ی $t=۰$ روی میز مسطحی باشد که الوار را برای برش روی آن قرار می‌دهند. با فرض این که مرکز اره برقی روی مبدأ مختصات باشد، در این صورت :

۱- نقطه‌ی قرمز در هر ثانیه چه زاویه‌ای را طی می‌کند؟

۲- در ۱ دقیقه چه زاویه‌ای را طی می‌کند؟

۳- در چه مدتی ۷۶۵ درجه می‌گردد؟

۴- نقطه‌ی قرمز در زمان‌های ۱ , $\frac{۳}{۴}$, $\frac{۱}{۲}$, $\frac{۱}{۴}$, $\frac{۱}{۸}$, $t=\frac{۱}{۱۶}$ (ثانیه) در چه محلی قرار می‌گیرد، روی شکل نشان دهید.

۵- جدول زیر را تکمیل نموده و نمودار آن را رسم کنید :

t	$t=۰$	$t=\frac{۱}{۱۶}$	$t=\frac{۲}{۱۶}$	$t=\frac{۳}{۱۶}$	$t=\frac{۴}{۱۶}$	$t=\frac{۵}{۱۶}$	$t=\frac{۶}{۱۶}$	$t=\frac{۷}{۱۶}$	...	$t=۱$
اندازه ارتفاع نقطه‌ی قرمز تا سطح										

اگر بر روی محورهای مختصات جهت مثبت محور xها را زمان طی شده و محور yها را سطوح مختلف ارتفاع از سطح میز در نظر بگیریم، نمودار حاصل، موج سینوسی است که نقاط جدول فوق روی آن نمودار قرار دارند.

صفحه‌ی اره برقی در هر ثانیه ۴ دور کامل خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت طی می‌کند به

عبارت دیگر هر $\frac{۱}{۴}$ ثانیه یک دور کامل طی می‌کند و این موج تکرار می‌شود. بنابراین تابع فوق تناوبی است و این تناوب در هر $\frac{۱}{۴}$ ثانیه تکرار می‌شود.

تمرین در کلاس

آیا به این فکر کرده‌اید که اگر t را منفی فرض کنیم چه پیش می‌آید؟ به نظر شما t منفی به چه معناست؟

برای t منفی منحنی را رسم کنید.

حال به بررسی و تحلیل نمودار تابع $y = \sin\theta$ می پردازیم :

فعالیت

جدول زیر را درنظر بگیرید :

x	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۵\pi}{۳}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$	۲π
sinx	۰	۰/۵	۰/۸۷	۱	۰/۸۷	۰/۵	۰	-۰/۵	-۰/۸۷	-۱	-۰/۸۷	-۰/۵	۰

۱– نمودار جدول فوق را رسم و آن را در جهت مثبت محور xها گسترش دهید.

۲– عبارات زیر را تکمیل کنید.

وقتی‌که x از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$ افزایش می‌یابد، مقدار y از ۰ تا ۱ افزایش می‌یابد.

وقتی‌که x از $\frac{\pi}{۲}$ تا π افزایش می‌یابد، ....

وقتی‌که x از π تا $\frac{۳\pi}{۲}$ ....

....

۳- به ازای $-۲\pi \le x \le ۰$ جدول و نمودار تابع $y = \sin x$ را رسم کنید و در جهت منفی محور xها گسترش دهید و بیان نمایید که در بازه‌ی فوق به ازای چه مقادیری از x، $y = \sin x$ افزایش و به ازای چه مقادیری از x کاهش می‌یابد.

از نمودار فوق مشخص است که تابع $y = \sin x$ ، موج سینوسی آن هر ۲π رادیان تکرار می‌شود. بنابراین تابع فوق یک تابع تناوبی با دوره‌ی تناوب ۲π است.

از جدول صفحه‌ی قبل پیداست که تابع $y = \sin x$ در نقاط $\dots, -۲\pi, -\pi, ۰, \pi, ۲\pi, \dots$ صفر است. بنابراین مقدار تابع $y = \sin x$ برای $x = k\pi$ ‏(k متعلق به مجموعه‌ی اعداد صحیح می‌باشد.) صفر است.

مثال

به ازای چه مقادیری از θ مقدار تابع $y=\sin ۳\theta$ صفر می‌شود؟

حل : مقدار تابع $y=\sin ۳\theta$ به ازای $۳\theta = k\pi$ صفر است. بنابراین :

$$۳\theta = k\pi$$

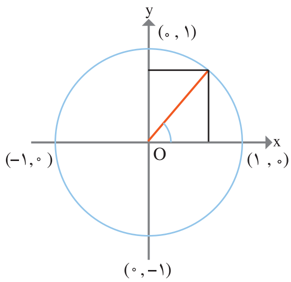
$$\theta = \frac{k\pi}{۳}$$

به ازای نقاط ... و $\frac{۲\pi}{۳}$ و $\frac{\pi}{۳}$ و ۰ و $-\frac{\pi}{۳}$ و $-\frac{۲\pi}{۳}$ و ... مقدار تابع فوق صفر می‌شود.

رابطه‌ی بین منحنی تابع سینوسی و دایره‌ی مثلثاتی

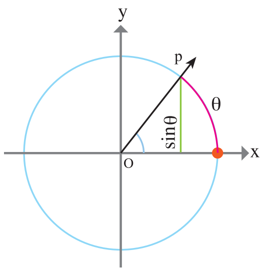
فعالیت

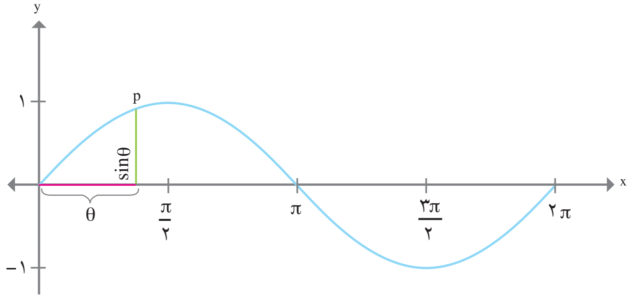
۱− با تکمیل جدول زیر تفسیر تابع $y = \sin\theta$ را روی دایره‌ی مثلثاتی انجام می‌دهیم.



ربع اول	با تغییر θ از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ نقطه‌ی p از (۱,۰) به نقطه‌ی (۰,۱) حرکت می‌کند و مقدار $y = \sin\theta$ از ۰ به ۱ افزایش می‌یابد.
ربع دوم	با تغییر θ از $\frac{\pi}{2}$ تا π نقطه‌ی p از (۰,۱) به (−۱,۰) حرکت می کند و مقدار $y = \sin\theta$ از ۱ به صفر کاهش می یابد.
ربع سوم	
ربع چهارم	

۲- شکل زیر را در نظر بگیرید. اگر x از ۰ تا ۲π تغییر کند، مکان نقطه‌ی p را روی نمودار مشخص کنید :

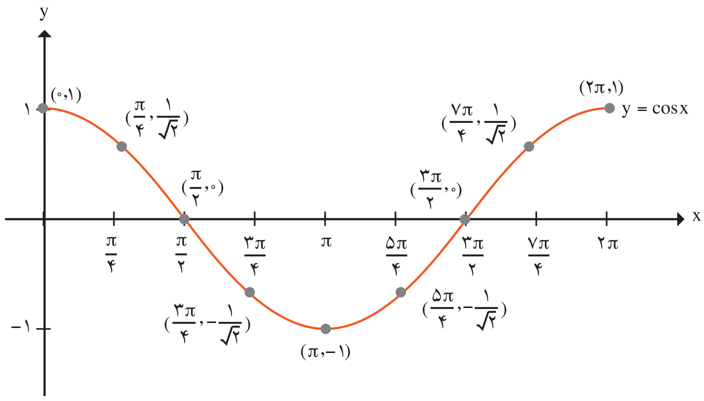




فعالیت

۱- جدول و نمودار تابع $y = \cos\theta$ را در نظر بگیرید :

x	y=cosx
۰	$\cos ۰ = ۱$
$\frac{\pi}{۴}$	$\cos\frac{\pi}{۴} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$
$\frac{\pi}{۲}$	$\cos\frac{\pi}{۲} = ۰$
$\frac{۳\pi}{۴}$	$\cos\frac{۳\pi}{۴} = -\frac{۱}{\sqrt{۲}}$
π	$\cos\pi = -۱$
$\frac{۵\pi}{۴}$	$\cos\frac{۵\pi}{۴} = -\frac{۱}{\sqrt{۲}}$
$\frac{۳\pi}{۲}$	$\cos\frac{۳\pi}{۲} = ۰$
$\frac{۷\pi}{۴}$	$\cos\frac{۷\pi}{۴} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$
۲π	$\cos ۲\pi = ۱$



۱−۱) تفسیر افزایشی یا کاهشی بودن تابع $y=\cos\theta$ را از روی نمودار از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$ ، $\frac{\pi}{۲}$ تا π ، π تا $\frac{۳\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ تا ۲π بنویسید.

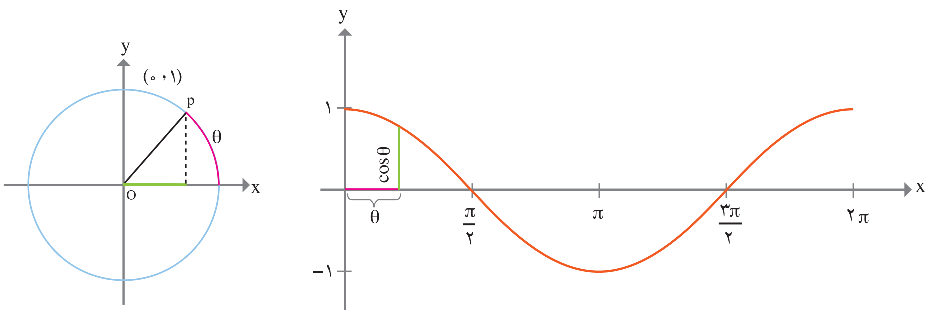
۱−۲) دوره‌ی تناوب تابع فوق را مشخص کنید.

۱−۳) به ازای چه مقادیری، تابع فوق برابر صفر است و در حالت کلی تابع $\cos\theta$ به ازای چه مقادیری صفر است.

۱−۴) جدول و نمودار تابع $y=\cos\theta$ را به ازای $-۲\pi\leq\theta\leq ۰$ رسم نمایید.

۲− تفسیر تابع $y=\cos\theta$ را با رسم دایره‌ی مثلثاتی برای ربع‌های اول تا چهارم انجام دهید.

۲−۱) نمودار شکل زیر را در نظر بگیرید. اگر x از ۰ تا ۲π تغییر کند، مکان نقطه‌ی p راروی نمودار بررسی کنید:



از نمودار $y=\cos\theta$ مشخص است که موج کسینوسی هر ۲π رادیان تکرار می‌شود. بنابراین تابع فوق یک تابع تناوبی با دوره‌ی تناوب ۲π است.

تابع $y=\cos\theta$ در نقاط ... و $\frac{5\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{3\pi}{2}$ و ... صفر است.

بنابراین مقدار تابع $y=\cos\theta$ به ازای $\theta=k\pi+\frac{\pi}{2}$ که k متعلق به مجموعه‌ی اعداد صحیح است صفر است.

مثال

تابع $y=\cos(-2\theta)$ در چه نقاطی صفر است؟

حل :

$$-2\theta=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\theta=\frac{-k\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$$

به ازای نقاط ... و $-\frac{3\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ و... تابع فوق صفر می‌شود.

در دو فعالیت زیر می‌خواهیم بررسی کنیم که مقادیر حداقلی و حداکثری تابع y=asinbx و نیز دوره‌ی تناوب تابع y=asinbx چه قدر است.

فعالیت

۱– جدول زیر را کامل کنید :

x	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\sin x$	۰	۰/۵	۰/۷۱	۰/۸۷	۱						
$\sin 2x$	۰	۰/۸۷	۱	۰/۸۷	۰						
$\sin 3x$	۰	۱	۰/۷۱	۰	۱–						

۲– نقاطی که توابع فوق به ازای آن‌ها صفر است را روی محور xها مشخص کنید.

۳- نقاطی که توابع فوق به ازای آن‌ها مقادیر حداقلی و حداکثری دارند را مشخص کنید.
۴- با رسم توابع فوق روی یک دستگاه، دوره‌ی تناوب هر یک را به دست آورید.
۵- حدس می‌زنید دوره‌ی تناوب تابع $y = \sin bx$ چه مقدار باشد؟

فعالیت

جدول زیر را در نظر بگیرید :

x	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۵\pi}{۳}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$	۲π
sinx	۰	۰/۵	۰/۸۷	۱	۰/۸۷	۰/۵	۰	-۰/۵	-۰/۸۷	-۱	-۰/۸۷	-۰/۵	۰
۲sinx	۰	۱	۱/۷۳	۲	۱/۷۳	۱	۰	-۱	-۱/۷۳	-۲	-۱/۷۳	-۱	۰
$\frac{۱}{۲}$ **sinx**	۰	۰/۲۵	۰/۴۳	۰/۵	۰/۴۳	۰/۲۵	۰	-۰/۲۵	-۰/۴۳	-۰/۵	-۰/۴۳	-۰/۲۵	۰

۱- مقادیر حداکثری و حداقلی توابع فوق را به دست آورید.
۲- حدس می‌زنید مقادیر حداکثری و حداقلی تابع y=asinx چه قدر باشد؟

در حالت کلی در توابع y=acosbx و y=asinbx برای این که یک دور کامل طی شود بایستی $۰ \le bx \le ۲\pi$ تغییر نماید. بنابراین : $۰ \le x \le \frac{۲\pi}{b}$. $(b \neq ۰)$

درتابع y=acosbx و y=asinbx ماکسیمم مقدار تابع $|a|$ و مینیمم مقدار تابع $-|a|$ و دوره ی تناوب آن $\left|\frac{۲\pi}{b}\right|$ می باشد.

بنابراین با دوره‌ی تناوب و تعیین مقادیر حداقلی و حداکثری می‌توان معادله‌ی نمودار تابع را نیز حدس زد.

تمرین در کلاس

۱- با استفاده از جداول دو فعالیت صفحه‌ی قبل توابع $y=\sin ۲x$ و $y=۲\sin x$ را از نظر حداقلی و حداکثری و نیز دوره‌ی تناوب مقایسه کنید.

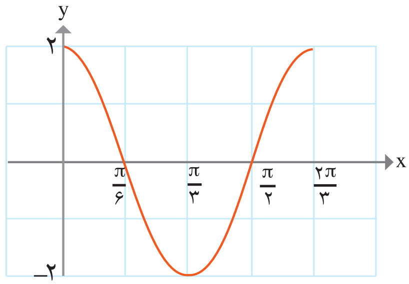
۲- درستی جملات زیر را در یک دوره‌ی تناوب از صفر تا ۲π بررسی کنید :

الف) تابع $y=\sin ax$ $(a>۰)$ در $x=\frac{\pi}{۲a}$ حداکثر و در $x=\frac{۳\pi}{۲a}$ حداقل مقدار را دارد.

ب) تابع $y=\cos ax$ $(a>۰)$ در $x=\frac{۲\pi}{a}$ حداکثر و در $x=\frac{\pi}{a}$ حداقل مقدار را دارد.

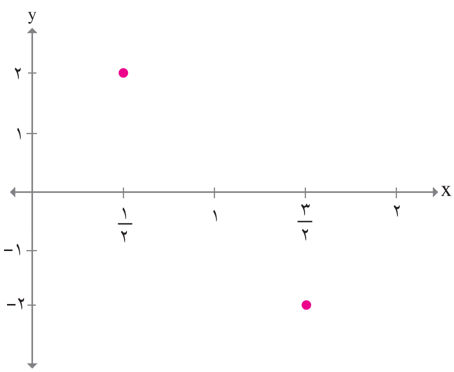
مثال

۱- با استفاده از تعیین مقادیر حداقلی و حداکثری و دوره‌ی تناوب تابع $y=۲\cos ۳x$ نمودار تابع را رسم کنید.



مقادیر حداکثری ۲ و حداقلی ۲- بوده و دوره‌ی تناوب آن $\frac{۲\pi}{۳}$ می‌باشد. از طرفی تابع $y=۲\cos ۳x$ در یک دوره‌ی تناوب در نقاط $\frac{\pi}{۶}$ و $\frac{\pi}{۲}$ صفر هستند و در نقاط ۰ و $\frac{۲\pi}{۳}$ حداکثر مقادیر و در نقطه‌ی $\frac{\pi}{۳}$ حداقل مقدار را دارد. بنابراین نمودار از دو طرف قابل گسترش است.

۲- نمودار $y=۲\sin(\pi x)$ را رسم کنید.

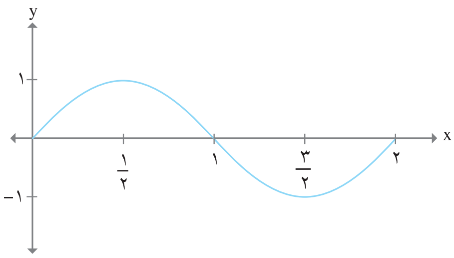


حل : با توجه به روابط بالا مقادیر حداقل و حداکثر ۲- و ۲ می‌باشد که این حداقل و حداکثر در نقاط $x=\frac{۱}{۲}$ و $x=\frac{۳}{۲}$ به دست می‌آید.

از طرفی $۰\le \pi x\le ۲\pi$ است. پس :

$۰\le x\le ۲$

دوره‌ی تناوب ۲ می‌باشد با توجه به این که $\sin \pi x$ در نقاط $x=۰$ و $x=۱$ و $x=۲$ صفر است و انتهای یک موج سینوسی کامل در نقطه‌ی $x=۲$ می‌باشد، بنابراین نمودار آن به صورت مقابل است که این موج را می‌توان از دو طرف گسترش داد.



مسائل

۱– الف) جدول زیر را کامل کنید :

x	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۵\pi}{۳}$	$\frac{۷\pi}{۴}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$	۲π
sin(−x)	۰	−۰/۵			−۱												
۲sin(−x)	۰	−۱			−۲												

ب) نمودار $y=\sin(-x)$ و $y=۲\sin(-x)$ را رسم کنید.

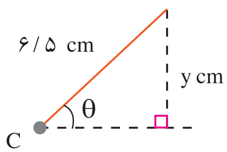
۲– نمودارهای توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=-۲\sin\frac{۱}{۲}x$ ب) $y=-۳\cos\frac{۱}{۲}x$

۳– با استفاده از تعیین مقادیر حداقلی و حداکثری و نیز دوره‌ی تناوب توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=۳\sin ۲x$ ب) $y=\cos\frac{۱}{۳}x$ ج) $y=-۲\cos\frac{\pi}{۲}x$

۴– طول عقربه‌ی دقیقه شمار یک ساعت ۶/۵ cm است. عقربه با جهت محور افقی زاویه‌ی θ می‌سازد. با توجه به مثلث مقابل می‌توان نوشت $y=۶/۵\sin\theta$.

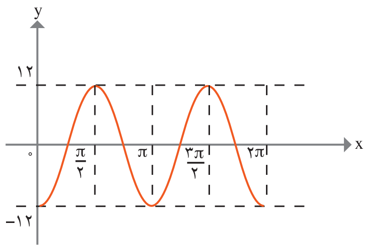


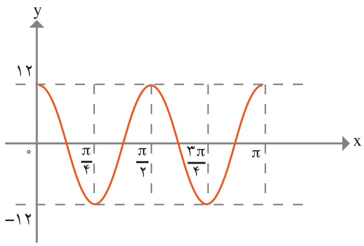
الف) حداکثر ارتفاع نوک عقربه چه قدر است ؟

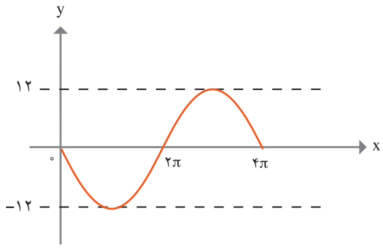
ب) حداقل ارتفاع آن را محاسبه کنید. در کدام زوایا ارتفاع صفر است ؟

ج) طول عقربه‌ی ساعت شمار ۵ cm و ارتفاع عمودی نوک آن از محور افقی تابعی به معادله‌ی $y=۵\sin\theta$ است، نمودار تابع y را در این حالت رسم کنید.

۵– معادله‌ی هر یک از منحنی‌های زیر را به صورت $y=a\sin bx$ یا $y=a\cos bx$ که در آن x بر حسب رادیان باشد، بیان کنید.







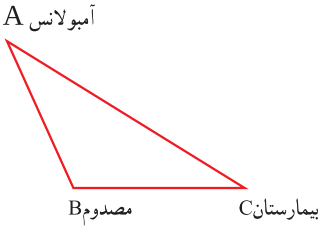
۶– وزنه‌ای به یک فنر وصل است به گونه‌ای که به طور پیوسته پایین و بالا می‌رود. تغییر مکان وزنه از نقطه‌ی تعادل بعد از t ثانیه از رابطه‌ی $d=-۳/۵\cos(۲\pi t)$ به‌دست می‌آید که d اندازه برحسب سانتی‌متر می‌باشد.

الف) نمودار تابع را به ازای $۰ \leq t \leq ۳$ رسم نمایید.

ب) بیشترین فاصله‌ی وزنه از نقطه‌ی تعادل چه‌قدر است؟

ج) چه مدت طول می‌کشد تا وزنه یک نوسان کامل انجام دهد؟

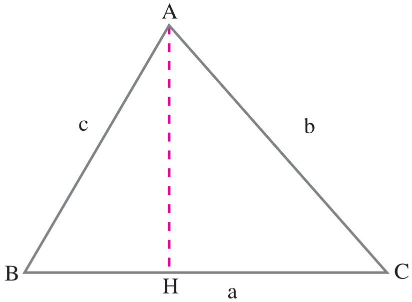
کاربردهایی از مثلثات



فاطمه به مسائل امداد و نجات علاقه‌مند است. دلیل علاقه‌مندی وی وقوع اتفاقاتی چون زلزله در کشور ما است. درنتیجه او سعی دارد مسائل این چنینی را بهتر و بیش‌تر بشناسد. دریکی از این مسائل که در فیلمی آن را دیده بود حادثه‌ای در نقطه‌ی B مانند شکل مقابل روی داد.

(این حادثه را می‌توانید زلزله، تصادف، سیل،... تصور کنید.) آمبولانس در فاصله‌ی ۱ کیلومتری از حادثه‌ی B در نقطه‌ی A قرار دارد. زاویه‌ی B , C را نیز راننده‌ی آمبولانس حدس زد. او فاصله‌ی خود تا بیمارستان را نیز می‌داند. راننده‌ی آمبولانس می‌خواهد بداند که آیا به اندازه‌ی کافی بنزین برای رفتن از B به C دارد یا نه؟

فاطمه نیز می‌خواهد این مسئله را حلّ نماید. او پیش خود چنین استدلال می‌نماید که : آمبولانس می‌بایست مسیر A تا B و سپس مسیر B تا C را طی کند.



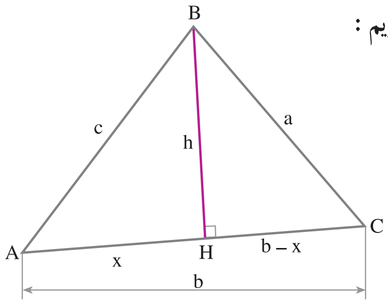
فاطمه تلاش دارد که این مسئله را از طریق مثلثات حل نماید. اما در سال پیش زوایایی که او خوانده بود همه حاده بودند. در نتیجه پیش خود گفت : بگذار اول برای مثلث با زوایای حاده مسئله را حلّ کنم سپس بقیه‌ی مثلث‌ها را نیز می‌توان حل نمود. فاطمه مثلث مقابل را ترسیم نمود و سپس به حل آن به صورت زیر پرداخت :

$$BC=BH+HC=AB\cos B+AC\cos C$$

با توجه به این‌که همه‌ی مقادیر برای او مشخص است مسئله حل می‌شود.

مسئله را برای زاویه‌ی منفرجه مانند قبل حل کنید.

فردای آن روز در کلاس درس، معلم رابطه‌ای را بررسی نمود که مسئله‌ی فوق را به راحتی با آن رابطه می‌توان حل نمود. حال به بررسی آن رابطه می‌پردازیم :



مثلث ABC را مانند شکل مقابل در نظر بگیرید :

$$a^2=(b-x)^2+h^2=b^2-2bx+x^2+h^2=b^2-2b(c\cos A)+c^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

بنابراین در مثلث ABC داریم :

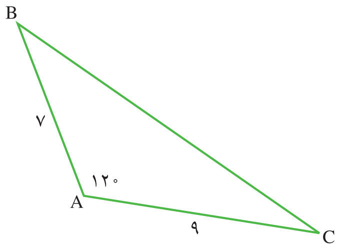
$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-۲bc\cos A$$

$$b^{۲}=a^{۲}+c^{۲}-۲ac\cos B$$

$$c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}-۲ab\cos C$$

به روابط فوق روابط کسینوس‌ها می‌گوییم.

مثال



با استفاده از رابطه‌ی کسینوس‌ها، اندازه بزرگ‌ترین ضلع را در شکل مقابل به‌دست آورید.

$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-۲bc\cos A=۹^{۲}+۷^{۲}-۲(۹)\,(۷)\,\cos ۱۲۰$$

$$\Rightarrow\ a=\sqrt{۱۹۳}$$

تمرین در کلاس

۱- مسئله‌ی امداد و نجات را با استفاده از رابطه‌ی کسینوس‌ها حل کنید.

۱-۱) در مثلث ABC , $AB=۸$, $AC=۱۰$, $\cos A=\frac{۱}{۸}$ ، مقدار BC را پیدا کنید.

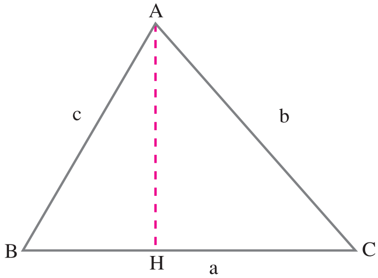
۲-

الف) رابطه‌ی کسینوس‌ها را برای یک مثلث قائم‌الزاویه بنویسید.

ب) به‌نظر شما معنای تعمیم در عبارت «رابطه‌ی کسینوس‌ها تعمیم رابطه‌ی فیثاغورث است» چیست؟

به نظر فاطمه روش جدید و استفاده از فرمول فوق‌الذکر بهتر بود، چرا که لازم نبود تمامی زوایای مثلث را بشناسند و با شناخت یک زاویه مسئله را حل می‌کرد. آیا اگر در مسئله‌ی فوق زاویه‌ی B و اضلاع AC و AB مشخص بودند با استفاده از رابطه‌ی کسینوس‌ها می‌توانستیم مسئله را حل کنیم؟

فردای آن روز سمیه که همکلاسی فاطمه بود مسئله‌ای که به نظرش جالب می‌آمد را برای فاطمه تعریف نمود. مسئله آن بودکه زمینی به شکل مثلث درانتهای محله‌ی آن‌ها بایر مانده بودکه شهرداری می‌خواست آن‌جا را چمن کرده و تبدیل به پارک نماید. مسئله محاسبه‌ی مساحت زمین بود. ابتدا آن‌ها شکلی را به صورت مقابل ترسیم نمودند که در آن مساحت مثلث ABC را با فرمول هندسی $S_{ABC} = ۱/۲ AH \times BC$ می‌خواستند محاسبه نمایند.



اما در این زمین بایر مقدار زیادی آشغال ریخته شده بود و عملاً محاسبه‌ی AH ممکن نبود. بعد از دو روز فکر کردن فاطمه راه حلّ دیگری یافت.

او به جای AH، مقدار $AB \times \sin B$ را قرار داد و در نتیجه:

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}(AB \times \sin B) \times BC = \frac{۱}{۲} AB \times BC \times \sin B = \frac{۱}{۲} ac \sin B$$

حال به نظر او فرمول بالا هر چند به لحاظ ریاضی با فرمول هندسی یکی بود، اما به شکل عملی می‌توانست مساحت مثلث را حساب کند.

مثال

مساحت مثلث ABC را در صورتی‌که $B=۱۳۵$ درجه و $a=۵$ و $c=۶$ باشد پیدا کنید:

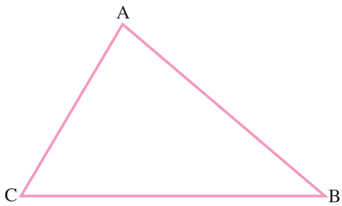
$$S = \frac{۱}{۲} ac \sin B$$

$$= \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۶ \times \sin ۱۳۵ = \frac{۱۵\sqrt{۲}}{۲}$$

در مثلث ABC، اگر $AB = ۱۴$ سانتی‌متر و $BC = ۹$ سانتی‌متر و $\angle B = ۳۰^\circ$ باشد، مساحت مثلث را حساب کنید.

فاطمه و سمیه مسئله و حل خودشان را فردای آن روز به معلم خود نشان دادند. معلم آن‌ها را تحسین نموده و راه‌حل آن‌ها را به بچه‌های کلاس نشان داد.

سپس درس جدید را به این شکل ادامه داد. همان‌گونه که دیدیم مساحت مثلث را بچه‌ها به شکل زیر محاسبه نمودند. حال به همین شکل سه رابطه‌ی متقارن زیر را داریم:



الف) $S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AB \times AC \times \sin A$

ب) $S_{ABC} = \frac{۱}{۲} BC \times AC \times \sin C$

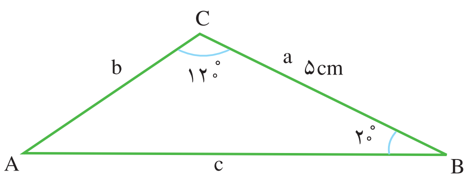
ج) $S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AB \times BC \times \sin B$

در ادامه توضیح داد که اگر سه فرمول بالا را با هم برابر قرار دهیم و بر $\frac{۱}{۲} AB \times AC \times BC$ تقسیم نماییم داریم:

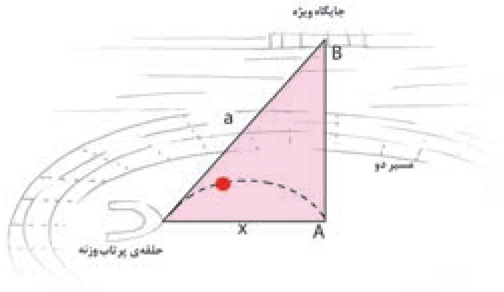
$$\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin C}{AB} = \frac{\sin B}{AC}$$

رابطه‌ی فوق را نخستین بار ابوریحان بیرونی دانشمند ایرانی در کتاب «قانون مسعودی» به وجه قابل توجهی اثبات کرده است.

۱- مثلث زیر را در نظر بگیرید. اگر $B = ۲۰^\circ$ و $C = ۱۲۰^\circ$ و $a = ۵cm$ باشد، مقادیر b و c را به دست آورید.



۲- با توجه به شکل مقابل درصورتی که $a=۵۶۲$ متر و $B=۳۲^{\circ}$ و $A=۹۰^{\circ}$ باشد، فاصله‌ی x را حساب کنید.



مسائل

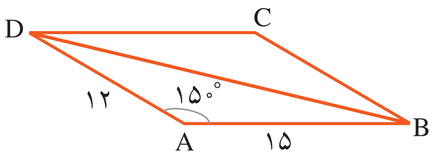
۱- محیط یک زمین کشاورزی که به شکل مثلث است را به‌دست آورید، اگر یک ضلع آن ۴۵ کیلومتر وضلع دیگر آن ۴۰ کیلومتر و زاویه‌ی بین آن‌ها ۱۵۰ درجه باشد.

۲- طول قطر یک پنج ضلعی منتظم که طول یک ضلع آن ۱۰ سانتی‌متر می‌باشد را پیدا کنید.

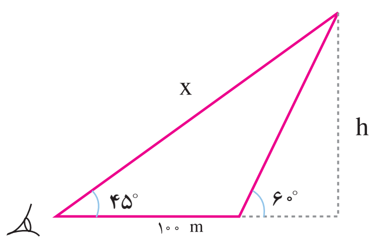
۳- سُرسُره‌های یک پارک را در نظر بگیرید که نردبانی به طول ۵/۲ متر جهت بالا رفتن دارد. اگر طول سرسره ۵/۴ متر باشد و نردبان زاویه‌ی ۷۵ درجه با زمین بسازد، سینوس زاویه‌ای که سرسره با زمین می‌سازد را حساب کنید.

۴- قطرهای یک متوازی الاضلاع ۱۲ و ۲۲ سانتی‌متر است و تقاطع این دو یک زاویه‌ی ۱۲۵° می‌سازد. طول اضلاع بزرگ‌تر متوازی الاضلاع را به‌دست آورید.

۵- باغی به شکل ذوزنقه وجود دارد که طول‌های اضلاع موازی آن ۳۰ ، ۲۰ کیلومتر و دو ضلع دیگر هر یک ۱۰ کیلومتر است. اگر یکی از زوایای پایه ۶۰° باشد، مساحت باغ را حساب کنید.

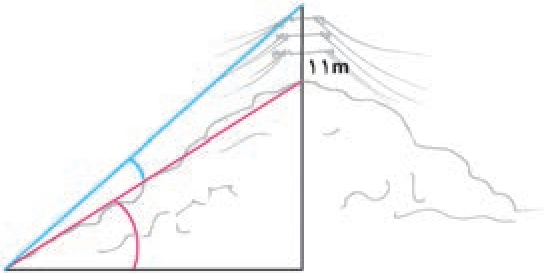


۶- اضلاع مجاور یک متوازی الاضلاع دارای اندازه‌های ۱۲ و ۱۵ سانتی‌متر است اندازه‌ی یک زاویه‌ی آن ۱۵۰° است. مساحت متوازی الاضلاع را پیدا کنید.



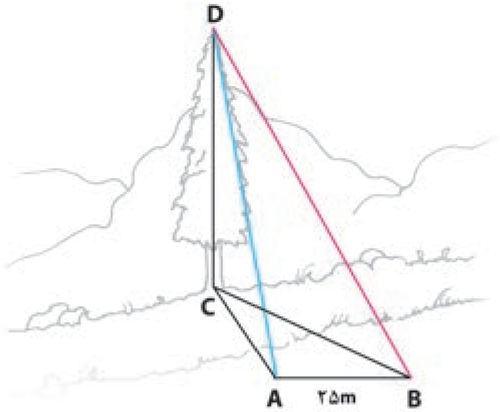
۷- شخصی نزدیک آنتن یک ایستگاه رادیویی ایستاده است. زاویه‌ی دید شخص با نوک آنتن ۶۰° است . اگر او ۱۰۰ متر به عقب برود زاویه‌ای که با نوک آنتن در موقعیت جدید می‌سازد ۴۵° است. ارتفاع آنتن را حساب کنید.

۸- آنتنی به طول ۱۱ متر را بر روی تپه‌ای در نظر بگیرید به گونه‌ای که انتهای آنتن با سطح تپه زاویه‌ی $۱/۵^{\circ}$ مطابق شکل می‌سازد، اگر زاویه‌ای که ابتدای آنتن با سطح افقی زمین می‌سازد ۲۵° باشد ارتفاع تپه را حساب کنید.



$(\sin ۲۵^{\circ} \simeq ۰/۴۲$ و $\sin ۱/۵^{\circ} \simeq ۰/۰۲)$

۹- رضا می‌خواهد درختی را که در سمت دیگر رودخانه است اندازه بگیرد. او روبروی درخت در نقطه‌ی A ایستاده است. زاویه‌ی دید رضا با نوک درخت حدوداً ۶۰° است. او به اندازه‌ی ۱۲۵° برمی‌گردد و بعد از طی ۲۵ متر به نقطه‌ی B می‌رسد. زاویه‌ی بین مسیر AB و خط BC (C پای درخت است) ۴۵° می‌باشد. ارتفاع درخت را حساب کنید.



۱۰- محمد و جواد در فاصله‌ی ۳ کیلومتری از یک‌دیگر، راکتی که از یک پایگاه موشکی پرتاب شده است را مشاهده می‌کنند. اگر موقعیت محمد به جواد شمال به جنوب باشد به گونه‌ای که محمد راکت را به طرف غرب مشاهده می‌کند که با موقعیت او ۶۵ درجه زاویه دارد و جواد راکت را به طرف غرب مشاهده می‌کند که با موقعیت او ۷۵ درجه زاویه دارد. فاصله‌ی هر یک از آن‌ها تا راکت چه قدر است؟