فصل ۲

مجموعه ــ ضرب دکارتی و رابطه

۲ــ۱ــ مجموعه

فکر می‌کنید می‌توانیم مفهوم مجموعه را به کمک مفهوم‌های ساده‌تری از خود مفهوم مجموعه تعریف کنیم؟!

این کار امکان‌پذیر نیست! ولی اغلب افراد با این مفهوم آشنا هستند و آن را به‌کار می‌برند. به‌عنوان مثال عبارت‌های «دانش‌آموزانی که معدل آنها ۱۶ است»، «نقطه‌هایی در فضا که از دو نقطهٔ مفروض به یک فاصله‌اند»، «عددهای ۲، ۳، ۵ و ۷» و «همهٔ کسانی که گواهینامهٔ رانندگی دارند» هر کدام یک مجموعه هستند. درواقع مجموعه به‌عنوان دسته‌ای از اشیای کاملاً معین درنظر گرفته می‌شود که با **نام بردن اعضای** آن یا **معرفی خاصیت مشترک** اعضای آن مشخص می‌شود.

در این فصل ضمن آشنایی بیشتر با طبیعت مجموعه‌ها به بررسی روش‌های طبیعی و متعدد ترکیب و پیرایش مجموعه‌ها، برای تشکیل مجموعه‌های دیگر می‌پردازیم. همان‌طور که بررسی نظام‌وار ویژگی‌های کلی اعداد همراه با اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم به جبر اعداد می‌انجامد؛ مطالعهٔ نظام‌وار این روش‌ها نیز به نوعی «جبر» مجموعه‌ها منجر می‌شود.

معمولاً در حالت کلی مجموعه را با یکی از حروف بزرگ A، B، C،... نشان می‌دهیم.

اشیایی که با هم مجموعهٔ مفروضی را تشکیل می‌دهند، **عضوها** یا **عنصرهای** آن مجموعه نامیده می‌شوند. برای آن‌که تعلق عضوی چون x به مجموعه‌ای چون A را به‌طور نمادی بیان کنیم، می‌نویسیم

$$x \in A$$

و اگر x عضو مجموعهٔ A نباشد و یا به عبارت دیگر x متعلق به A نباشد، می‌نویسیم

$$x \, , \; A$$

بدیهی است برای شناختن یک مجموعه باید بدانیم دقیقاً چه چیزهایی عضو آن هستند.

گفتیم یک مجموعه با نام بردن اعضای آن یا معرفی خاصیت مشترک اعضای آن مشخص

می‌شود. مثلاً مجموعه اعداد اول یک رقمی را با نام بردن اعضای آن به‌صورت

$$\{۲, ۳, ۵, ۷\}$$

و یا با بیان خاصیت مشترک اعضای آن به‌صورت

$$\{x| \quad \text{x عدد اول یک رقمی است}\}$$

نشان می‌دهیم که آن را با به‌کار بردن نماد «$x < ۱۰$» به‌جای «x یک رقمی است» و «$x \in P$» به‌جای «x عددی اول است» به‌صورت

$$\{x| \quad x < ۱۰, x \in P\}$$

می‌نویسیم.

به‌عنوان مثالی دیگر؛ می‌دانیم مجموعه نقطه‌هایی از یک صفحه که به فاصلهٔ معینی از نقطهٔ مفروضی در آن صفحه باشند یک دایره تشکیل می‌دهند. در این مثال مجموعه را به کمک یک شرط تعریف کرده‌ایم که باید عضوهای مجموعه با آن سازگار باشند و یا می‌توان گفت، خاصیتی را معین کرده‌ایم که عضوهای مجموعه باید آن را داشته باشند. نقطه‌های واقع بر محیط دایره، با این شرط سازگارند و یا دارای این خاصیت هستند که، همهٔ آن‌ها در یک صفحه قرار گرفته‌اند و از نقطه مفروضی (O مرکز دایره) به یک فاصله (r اندازهٔ شعاع دایره) هستند.

در مشخص کردن یک مجموعه، ممکن است مناسب، یا حتی امکان‌پذیر نباشد که فهرست کاملی از اعضایش را بنویسیم. مجموعهٔ نقاط روی دایره به مرکز O و شعاع r از آن جمله هستند؛ یا مانند مجموعهٔ اعداد اول امکان نوشتن همهٔ عضوهای آن نباشد،

$$P = \{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ...\}$$

مفهوم‌های «شرط» و «خاصیت» پیوندی جدی با مفهوم «مجموعه» دارند. به‌طور کلی هر تعریف از نوع

$$S = \{x| \quad \text{شرطی در مورد x}\}$$

به این معنی است که S مجموعهٔ همهٔ xهایی است که در مورد آن‌ها شرط مفروضی صادق باشد. به‌طور مثال اگر A را مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ درجه دوم

$$x^۲ - ۴x - ۵ = ۰$$

درنظر بگیریم می‌توان آن را بعد از حل معادله به‌صورت

$$A = \{-۱, ۵\}$$

نشان داد، یا از حل معادله اجتناب کرده آن را به‌صورت

$$A = \left\{x \middle| \quad x^۲ - ۴x - ۵ = ۰\right\}$$

بنویسیم. به این طریق نیز تعریفی دقیق و بدون ابهام برای A به‌دست می‌آید.

حال به‌عنوان مثالی دیگر مجموعهٔ B را به‌صورت زیر درنظر بگیرید

$$B=\{x| \quad -۲\leq x\leq ۳\}$$

با کمی دقت متوجه ابهامی در تعریف این مجموعه می‌شویم. زیرا اگر فقط اعداد صحیح مورد نظر باشند، مجموعهٔ B شامل اعداد ۲− ، ۱− ، ۰ ، ۱، ۲ و ۳ می‌شود ولی اگر اعداد حقیقی مورد نظر باشند آنگاه همهٔ اعداد حقیقی دیگر بین ۲− و ۳ را نیز شامل می‌شود.

برای رفع یک چنین ابهامی، مجموعه‌ای چون U را که اعضای مجموعهٔ موردنظر باید از آن انتخاب شوند، مشخص می‌کنیم. به‌طورکلی هر تعریف به‌صورت

$$X=\{x\in U| \ \text{x شرطی در مورد}\}$$

به این معنی است که X مجموعهٔ تمام اعضایی مانند x موجود در مجموعهٔ U است که به‌ازای آن‌ها شرط مفروض در مورد x برآورده می‌شود. البته صورت معادل

$$X=\{x| \ \text{x و شرطی در مورد} \ x\in U\}$$

نیز همان معنا را دارد ولی ما نمایش اول را ترجیح می‌دهیم چون بر نقش U تأکید بیشتری دارد.

مجموعه U که اعضای X طبق شرط تعیین شده از آن انتخاب می‌شوند، **مجموعهٔ مرجع** یا **مجموعهٔ جهانی**[1] خوانده می‌شود.

به‌عنوان مثال اگر A مجموعهٔ اعداد مضرب ۳ باشد، آنگاه مجموعهٔ جهانی را مجموعه اعداد صحیح «$\mathbb{Z}$» می‌گیریم و آن را به‌صورت

$$A=\{x\in\mathbb{Z}| \quad x=۳k \ , \ k\in\mathbb{Z}\}$$

نشان می‌دهیم.

معمولاً خاصیت مشترک اعضای یک مجموعه را با P(x) یا q(x) نشان می‌دهیم و آن را گزاره‌نما با متغیر x می‌خوانیم. بنابراین برای نشان دادن مجموعهٔ X درحالت کلی می‌نویسیم :

$$X=\{x\in U| \quad P(x)\}$$

که U مجموعهٔ جهانی و P(x) به معنی «x خاصیت P دارد» می‌باشد (گزاره‌نما).

در مجموعهٔ

$$A=\{x\in\mathbb{R}| \ ۱<x<۲\}$$

اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ ، مجموعهٔ جهانی و $۱<x<۲$ همان P(x) است.

۱ـ Universal Set

به‌طور کلی

گزاره نما عبارتی است شامل نمادی مانند x که هرگاه هر عضو مانند $a \in U$ را به‌جای x قرار دهیم جملهٔ حاصل یا به وضوح درست باشد یا به وضوح نادرست.

اگر چنین باشد می‌گوییم که این گزاره‌نما برای مجموعهٔ U معتبر است.

مثلاً عبارت $-۲ \leq x \leq ۳$ یک گزاره‌نماست که برای مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ و برای مجموعهٔ $\mathbb{R}$ معتبر است. یعنی با قرار دادن هر عدد صحیح یا حقیقی به‌جای x جمله‌ای به‌دست می‌آید که یا درست است یا نادرست. مثلاً جملهٔ $-۲ \leq ۱ \leq ۳$ درست است ولی $-۲ \leq ۶ \leq ۳$ نادرست است.

باید توجه کرد که گزاره‌نما در مجموعه‌های جهانیِ متفاوت تعریف می‌شود. مثلاً اگر M را مجموعهٔ چهارضلعی‌های محدب واقع در صفحه درنظر بگیریم آنگاه عبارت «x مربع است» گزاره‌نمایی است معتبر برای مجموعهٔ M و مجموعهٔ

$$\{x \in M | \ \text{مربع است}\ x\}$$

فقط مجموعهٔ مربع‌های واقع در صفحه است.

یا اگر S مجموعهٔ نقاط صفحه باشد، دایرهٔ به مرکز O و شعاع r را به‌عنوان یک مجموعه از نقاط به‌صورت

$$\{x \in S | \ \text{فاصلهٔ } x \text{ از } O \text{ برابر } r \text{ است}\}$$

می‌نویسیم.

گفتیم یک مجموعه ممکن است به روش‌های مختلف توصیف شود. مثلاً اگر A مجموعه جواب‌های معادلهٔ

$$x^۲ - ۶x + ۸ = ۰$$

باشد و B مجموعهٔ اعداد صحیح زوج بین ۱ و ۵، آنگاه A و B هر دو دقیقاً دارای دو عضو ۲ و ۴ هستند. با مشخص شدن اعضاء مشاهده می‌شود که این دو مجموعه برابرند. بنابراین طبیعی است بگوییم

دو مجموعهٔ A و B برابرند اگر و فقط اگر اعضایشان یکی باشد و می‌نویسیم

$$A=B$$

اگر A و B برابر نباشند می‌نویسیم $A \neq B$.

با توجه به تعریف بالا مشاهده می‌شود که مجموعه‌های $A=\{۵,۱۵,۲۵\}$ و $B=\{۱۵,۲۵,۵\}$ برابرند، زیرا هر عضو A عضو B نیز هست و هر عضو B نیز عضو A است.

تغییر ترتیب عضوهای یک مجموعه، آن مجموعه را تغییر نمی‌دهد.

همچنین مجموعه‌های $C=\{۱,۳,۱,۶\}$ و $D=\{۳,۱,۳,۶\}$ نیز برابرند زیرا هر عضو C متعلق به D نیز هست و هر عضو D نیز به C تعلق دارد.

تکرار عضوها در یک مجموعه، آن مجموعه را تغییر نمی‌دهد.

مجموعهٔ

$$A=\left\{x \in \mathbb{R} \middle| \quad x^{۲}+x+۱=۰\right\}$$

را درنظر بگیرید، با کمی دقت ملاحظه می‌کنید که هیچ عدد حقیقی در شرط این مجموعه صدق نمی‌کند، درنتیجه این مجموعه خالی از عضو است.

مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد مجموعهٔ تهی نامیده می‌شود و با نماد $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نشان داده می‌شود.

حال با توجه به تعریف بالا آیا می‌توانید تفاوت مجموعه‌های $\varnothing$ ، $\{۰\}$ و $\{\varnothing\}$ را بیان کنید؟

۲ـــ۲ـــ زیرمجموعه

با حذف برخی از اعضای مجموعهٔ غیرتهی A، مجموعه‌های دیگری به‌دست می‌آیند که این مجموعه‌ها را زیرمجموعه‌های A می‌نامیم. مثلاً اگر از مجموعهٔ

$$A=\{۱,۲,۳,۴\}$$

اعضای ۱ و ۲ را حذف کنیم مجموعهٔ

$$B=\{۳,۴\}$$

به‌دست می‌آید که همهٔ اعضای آن در A نیز هستند. در این حالت می‌گوییم B زیرمجموعهٔ A است یا

A شامل B است.

B یک زیرمجموعه از A است اگر هر عضو B عضوی از A نیز باشد و می‌نویسیم $B \subseteq A$.

به عبارت دیگر $B \subseteq A$ اگر برای هر $x \in U$ از $x \in B$ نتیجه شود که $x \in A$. با توجه به این تعریف می‌توان گفت برای دو مجموعهٔ A و B اگر عضوی در B وجود داشته باشد که این عضو در A نباشد در این‌صورت B زیرمجموعهٔ A نیست و آن را به‌صورت $B \nsubseteq A$ نشان می‌دهیم.

بنابراین می‌توان گفت :

هر مجموعه‌ای زیرمجموعهٔ خودش است.

یعنی برای هر مجموعهٔ A داریم $A \subseteq A$. همچنین بدیهی است که $A \subseteq U$.

مثال ۱ : نشان دهید مجموعهٔ $A = \{۲,۳,۴,۵\}$ زیرمجموعهٔ $B = \{x \in \mathbb{Z} |$ زوج باشد $x\}$ نیست.

حل: باید نشان دهیم حداقل یک عضو A در B نیست.

چون $۳ \in A$ و $۳ \notin B$ بنابراین $A \nsubseteq B$.

توجه کنید که لازم نیست بدانیم که آیا عضوهای دیگر A عضو B هستند یا خیر.

اگر $A \subseteq B$ ولی $A \neq B$، آنگاه B زیرمجموعهٔ سرهٔ A نامیده می‌شود.

مثال ۲ : نشان دهید که مجموعهٔ $A = \{a,b\}$ زیرمجموعهٔ سرهٔ $B = \{a,b,c\}$ است.

حل: $A \subseteq B$ است زیرا a و b هم متعلق به A و هم متعلق به B است. اما چون $c \in B$ ولی $c \notin A$ درنتیجه $A \neq B$. بنابراین A یک زیرمجموعهٔ سرهٔ B است.

مثال ۳: اگر

$$A = \{x \in \mathbb{Z} | \quad -۲۰ \leq x \leq ۲۰\}$$

$$B = \left\{n \in \mathbb{Z} \middle| \quad n^۲ \leq ۴۹\right\}$$

$$C = \{A, B, -۳, ۴, ۶\}$$

$$D = \{-۳, ۴, ۶, ۷\}$$

آنگاه :

$B \subseteq A$ (چرا؟)

$C \nsubseteq A$ زیرا $A \in C$ ولی $A \notin A$

$D \subseteq A$ (چرا؟)

$D \nsubseteq C$ زیرا $۷ \in D$ ولی $۷ \notin C$

$D \nsubseteq B$ زیرا $۳ \in D$ ولی $-۳ \notin B$

مثال ۴: ثابت کنید $\varnothing$ زیرمجموعهٔ هر مجموعه است.

حل: $\varnothing \subseteq A$ زیرا اگر $\varnothing \nsubseteq A$ باید عضوی مانند x در $\varnothing$ باشد که در A نباشد، و این غیرممکن است چون $\varnothing$ عضوی ندارد.

با توجه به تعریف زیرمجموعه می‌توان تعریف تساوی دو مجموعه را به‌صورت قضیهٔ زیر بازنویسی کرد.

قضیه ۱: دو مجموعهٔ A و B مساوی هستند، یعنی A=B، اگر و تنها اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$

برهان: اگر A=B آنگاه از آنجا که $A \subseteq A$ ، نتیجه می‌گیریم که $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.

برعکس، فرض می‌کنیم $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ آنگاه هر عضو A، عضوی از B است و هر عضو B، عضوی از A. از این‌رو اعضای A و B یکی هستند و لذا A=B. ▨

قضیه ۲: برای سه مجموعهٔ A، B و C اگر داشته باشیم $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ آنگاه داریم $A \subseteq C$.

برهان: چون $A \subseteq B$ پس هر عضو A در B است و چون $B \subseteq C$ پس هر عضو B در C است. بنابراین هر عضو A، عضو C نیز هست درنتیجه $A \subseteq C$. ▨

توجه کنید که زیرمجموعه‌ها را نباید با اعضای مجموعه اشتباه گرفت زیرا که این دو مفهوم کاملاً متفاوت هستند.

مثال ۵: اگر $M = \{r,s,t\}$ ، کدام‌یک از احکام زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ در صورت نادرستی دلیل آن را بیان کنید.

الف) $r \in M$ ب) $r \subseteq M$

پ) $\{r\} \in M$ ت) $\{r\} \subseteq M$

حل: الف) درست.

ب) نادرست، علامت $\subseteq$ بایستی دو مجموعه را به هم مربوط کند ولی در این‌جا r زیرمجموعهٔ

M نیست بلکه عضو M است.

پ) نادرست، علامت $\in$ بایستی یک شیٔ را به یک مجموعه مربوط کند، ولی $\{r\}$ زیرمجموعهٔ M است نه عضو M.

ت) درست.

مثال ۶: اگر $A=\{x\in\mathbb{R} \mid \quad ۲x=۶\}$ آیا ۳=A؟

حل: A یک مجموعه است که دارای تنها یک عنصر ۳ است، یعنی $A=\{۳\}$. پس عدد ۳ متعلق به A است نه مساوی A.

درنتیجه باید توجه داشته باشیم که عضو a و مجموعهٔ $\{a\}$ متفاوت هستند و آن‌ها را یکی نگیریم.

مثال ۷: آیا هر مجموعه‌ای دارای زیرمجموعهٔ سره است؟

حل: مجموعهٔ تهی دارای زیرمجموعهٔ سره نیست ولی بقیه مجموعه‌ها $\varnothing$ را به‌عنوان زیرمجموعهٔ سره خود دارند. اگر مجموعهٔ سره غیرتهی موردنظر باشد، مجموعه‌های تک‌عضوی دارای زیرمجموعهٔ سرهٔ غیرتهی نیستند ولی بقیهٔ مجموعه‌ها که بیش از یک عضو دارند دارای زیرمجموعهٔ سرهٔ ناتهی می‌باشند.

۲ــ۳ــ مجموعهٔ توانی

مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳\}$ را درنظر می‌گیریم و همهٔ زیرمجموعه‌های A را می‌نویسیم که عبارتند از:

$$A=\{۱,۲,۳\}$$

$$\varnothing$$

$$A_۱=\{۱\}$$

$$A_۲=\{۲\}$$

$$A_۳=\{۳\}$$

$$A_۴=\{۱,۲\}$$

$$A_۵=\{۱,۳\}$$

$$A_۶=\{۲,۳\}$$

حال اگر مجموعهٔ این زیرمجموعه‌ها را با

$$P(A)=\{A,\varnothing,A_۱,A_۲,A_۳,A_۴,A_۵,A_۶\}$$

نشان دهیم، $P(A)$ مجموعهٔ توانی A خوانده می‌شود. پس

مجموعهٔ کلیهٔ زیرمجموعه‌های X، مجموعهٔ توانی X نامیده می‌شود و با $P(X)$ نشان داده می‌شود.

مثال ۸: مجموعهٔ توانی $B=\{a,b\}$ را بنویسید.

حل: کلیهٔ زیرمجموعه‌های B عبارتند از :

$$B=\{a,b\}$$

$$\varnothing$$

$$B_۱=\{a\}$$

$$B_۲=\{b\}$$

بنابراین

$$P(B)=\{\{a,b\},\varnothing,\{a\},\{b\}\}.$$

چنانکه ملاحظه شد مجموعهٔ B که ۲ عضو داشت، مجموعهٔ توانی آن دارای $۲^۲=۴$ عضو بود و مجموعه A که ۳ عضو داشت، مجموعهٔ توانی آن $۲^۳=۸$ عضوی شد. شاید شما نیز با مشاهدهٔ مثال‌های بالا به حدس زیر رسیده باشید.

قضیه ۳: اگر مجموعهٔ A دارای n عضو باشد، مجموعهٔ توانی آن دارای ۲^n عضو خواهد بود.

برهان: این قضیه را با استفاده از استقرای ریاضی اثبات می‌کنیم.

اگر $n=۱$، مثلاً $A=\{a\}$ آنگاه :

$$P(A)=\{A,\varnothing\}$$

می‌بینیم که در این حالت $P(A)$ دارای $۲^۱$ عضو است و درنتیجه حکم قضیه برقرار است. اگر $n=۲$، مثلاً $A=\{a,b\}$ آنگاه

$$P(A)=\{A,\varnothing,\{a\},\{b\}\}$$

که دارای $۲^۲$ عضو است و درنتیجه حکم قضیه در این حالت نیز برقرار است.

حال درستی حکم را برای $n=k$ فرض می‌کنیم (فرض استقراء)، یعنی فرض می‌کنیم اگر مجموعهٔ A دارای k عضو باشد، مجموعهٔ توانی آن، $P(A)$، دارای ۲^k عضو است.

اگر به مجموعهٔ A یک عضو اضافه کنیم، یعنی مجموعه A، $k+1$ عضوی شود $(n=k+1)$، آنگاه این عضو با 2^k عضو دیگر مجموعهٔ توانی، 2^k مجموعهٔ جدید برای مجموعهٔ توانی پدید خواهد آورد.

یعنی تعداد عضوهای مجموعهٔ توانی A جدید، $2(2^k)$ یعنی 2^{k+1} می‌باشد و به این ترتیب نتیجه می‌شود که حکم قضیه برای هر عدد طبیعی، n برقرار است. ▨

مجموعه‌ای را که تعداد اعضای آن برابر یک عدد حسابی باشد مجموعهٔ **متناهی** می‌نامیم و مجموعه‌ای را که متناهی نباشد، مجموعهٔ نامتناهی می‌نامیم. مثلاً مجموعهٔ اعداد صحیح یک رقمی متناهی است ولی مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ نامتناهی است همچنین مجموعهٔ $\mathbb{N}$ نامتناهی است. تعداد عضوهای یک مجموعهٔ متناهی را **عدد اصلی** آن مجموعه می‌نامیم. مثلاً عدد اصلی مجموعهٔ

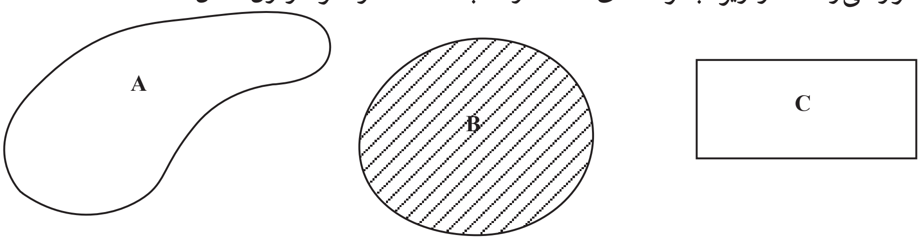
$$A=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$$

۱۰ است، چون تعداد عضوهای آن ۱۰ تاست. عدد اصلی مجموعه‌ای مانند A را با $|A|$ یا $n(A)$ نشان می‌دهیم. باید توجه داشت که همواره می‌توان تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ متناهی را برحسب تعداد اعضای همان مجموعه به‌دست آورد ولی تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ نامتناهی تعریف نشده است.

تذکّر: مجموعهٔ $A=\{x\in\mathbb{R} \mid 0<x<1\}$ نیز نمونه‌ای از مجموعه‌های نامتناهی است.

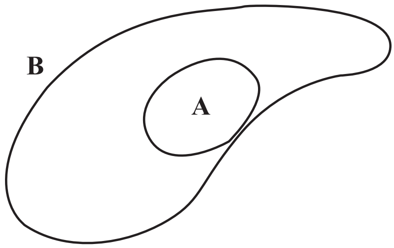
۲ــ۴ــ نمایش هندسی مجموعه‌ها

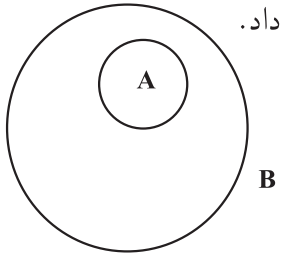
یکی از ابزارهای مهم استدلال‌های شهودی و استقرایی برای فهم بهتر مجموعه‌ها استفاده از تمثیل هندسی است. این‌کار برای بار اوّل توسط ریاضیدانی به‌نام وِن[1] انجام شد و **نمودار ون** نام گرفت. در نمودار ون در حالت کلی اعضای مجموعه درون یک خم بسته در صفحه مانند دایره یا مستطیل نشان داده می‌شود. گاهی ناحیه داخلی شکلی را که برای نمایش مجموعه به‌کار می‌رود هاشور می‌زنند. در زیرمجموعه‌های A، B و C با استفاده از نمودار ون نشان داده شده‌اند.



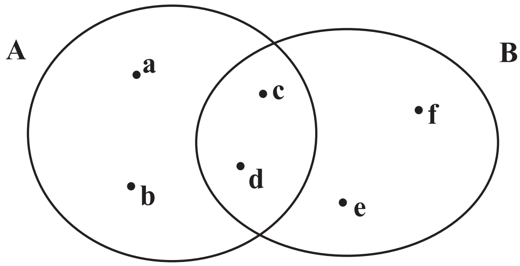
۱ــ Venn

به‌عنوان مثال اگر $A \subseteq B$ و $A \neq B$ ، آنگاه A و B را می‌توان به‌صورت هر یک از نمودارهای زیر نشان داد.



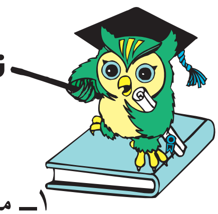


به‌عنوان مثالی دیگر، اگر $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{c, d, e, f\}$ ، آنگاه این مجموعه‌ها را با استفاده از نمودار ون به‌صورت مقابل می‌توان نشان داد.



باید توجه داشت که نمودار ون خود یک نوع تمثیل شهودی و هندسی است و به‌وسیلهٔ آن نمی‌توان یک قضیه ریاضی را ثابت کرد. بلکه برای اثبات می‌توان از آن‌ها ایده گرفت.

تمرین



۱ــ مجموعه‌های زیر را که با بیان خاصیتی معین، مشخص شده‌اند با گزاره‌نما نشان دهید.

الف) مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت

ب) مجموعهٔ اعداد صحیح که مربعشان بزرگتر از ۲۵ نباشد.

پ) مجموعهٔ اعداد حقیقی بین ۲− و ۲

۲ــ مجموعه‌های زیر را که با گزاره‌نما نوشته شده‌اند با نوشتن اعضا نشان دهید :

الف) $A = \{x \in \mathbb{N} | \quad x < ۵\}$

ب) $B = \{x \in \mathbb{Z} | \quad x^۲ \leq ۲۵\}$

پ) $C = \{x \in Q | \quad ۱۰x^۲ + ۳x - ۱ = ۰\}$

ت) $D=\{x\in \mathbb{R} \mid x^{۳}+۱=۰\}$

ث) $E=\{x\in \mathbb{N} \mid x^{۳}+۱=۰\}$

۳ــ هریک از مجموعه‌های زیر را با استفاده از یک گزاره‌نما بنویسید.

الف) $A=\{۱,۴,۹,۱۶,۲۵,\ldots\}$

ب) $B=\{۲,۴,۶,۸,۱۰,\ldots\}$

پ) $C=\left\{۰,\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۴},\ldots\right\}$

ت) $D=\{۱-\sqrt{۳},۱+\sqrt{۳}\}$

۴ــ نشان دهید که مجموعه حروف لازم برای هجی کردن «بینابین» با مجموعهٔ حروف لازم برای هجی کردن «بیان» مساوی است.

۵ــ چه شرایطی بین d,c,b,a وجود داشته باشد تا تساوی زیر برقرار باشد؟

$$\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$$

۶ــ نشان دهید : الف) اگر $A\subseteq\varnothing$ آنگاه $A=\varnothing$

ب) اگر $U\subseteq A$ آنگاه $A=U$

۷ــ تمام زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{-۱,۰,۱\}$ را بنویسید.

۸ــ تمام زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $S=\{۳,\{۱,۴\}\}$ را بنویسید.

۹ــ از گزاره‌های زیر کدام‌یک درست و کدام‌یک نادرست است.

الف) $\varnothing=\{\varnothing\}$

ب) $\varnothing\in\{\varnothing\}$

پ) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$

ث) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\in\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

۱۰ــ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با هم مساویند.

$A=\{m\in \mathbb{Z} \mid |m|<۲\}$

$B=\{m\in \mathbb{Z} \mid m^{۳}=m\}$

$C=\{m\in \mathbb{Z} \mid m^{۲}\leq ۲m\}$

$D=\{m\in \mathbb{Z} \mid m^{۲}\leq ۱\}$

$E=\{۰,۱,۲\}$

۱۱ــ تعیین کنید که در مجموعه‌های زیر، کدام مجموعه، زیرمجموعهٔ دیگری است.

$A=\left\{x\in \mathbb{R} \mid x^{۲}-۸x+۱۲=۰\right\}$

$B=\{۲,۴,۶\}$

$C=\{۲,۴,۶,۸,...\}$

$D=\{۶\}$

۱۲ــ تعیین کنید کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است.

الف) $x\in\{\{x\},\{x,y\}\}$

ب) $\{x\}\subseteq\{\{x\},\{x,y\}\}$

پ) $\{۱,x,۲\}\subseteq\{۱,۲,x\}$

ت) $\{a,b\}\subseteq\{b,a\}$

ث) $\{x\}\in\{x\}$

۱۳ــ مثال‌هایی از مجموعه‌های دلخواه A و B و C بیاورید که برای آن‌ها احکام زیر درست باشند.

الف) $A\in B$ و $B\in C$ و $A \not\in C$

ب) $A\in B$ و $B\in C$ و $A\in C$

پ) $A\in B$ و $A\subseteq B$

۲ــ۵ــ جبر مجموعه‌ها

همان‌طور که با اعمال جمع و تفریق و ضرب و تقسیم در مجموعهٔ اعداد، اعداد جدیدی حاصل می‌شود، در نظریهٔ مجموعه‌ها نیز اعمالی مانند اجتماع، اشتراک، تفاضل تعریف می‌شود که به کمک آن‌ها می‌توان از دو مجموعهٔ داده شده، مجموعهٔ جدیدی ساخت.

اجتماع دو مجموعه

اجتماع مجموعه‌های A و B،مجموعه‌ای است که اعضایش، همهٔ اعضای A و همهٔ اعضای B را شامل می‌شود. به‌عنوان مثال اگر

$$A=\{۱,۲,۳\} \quad \text{و} \quad B=\{۳,۴,۵\}$$

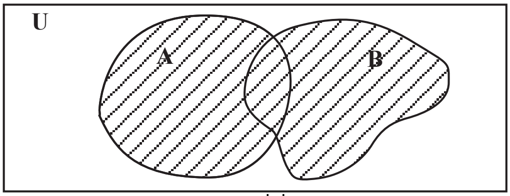
آنگاه اجتماع آن‌ها مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ است. یعنی

اجتماع مجموعه‌های A و B مجموعه‌ای است که اعضایش متعلق به A یا متعلق به B یا متعلق به هر دو مجموعهٔ A و B باشد.

اجتماع A و B را به‌صورت $A\cup B$ نمایش می‌دهیم. لذا داریم :

$A\cup B=\{x|$ x $\in$ A یا x $\in$ B یا x متعلق به هر دو مجموعهٔ A و B است$\}$

با استفاده از نمودار ون، اجتماع دو مجموعه را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد.



$\mathbf{A\cup B}$

تبصره: با توجه به تعریف اجتماع دو مجموعه می‌توان نتیجه گرفت که دو مجموعهٔ $A\cup B$ و $B\cup A$ یکی هستند یعنی :

$$A\cup B=B\cup A$$

همچنین هریک از دو مجموعهٔ A و B زیرمجموعهٔ $A\cup B$ هستند، یعنی

$$A\subseteq A\cup B \quad \text{و} \quad B\subseteq A\cup B$$

مثال ۱: اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ ، $B=\{۲,۴,۶,۸\}$ و $C=\{۳,۴,۵,۶\}$ آنگاه طبق تعریف اجتماع داریم :

$$A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۶,۸\}$$

$$C\cup B=\{۲,۳,۴,۵,۶,۸\}$$

$$B\cup B=\{۲,۴,۶,۸\}$$

در این مثال مشاهده می‌شود که $B\cup B=B$.

مثال ۲: فرض کنید A، B و C مجموعه‌های مثال ۱ باشند. می‌توان نشان داد

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

برای این منظور ابتدا $A\cup B$ را تعیین می‌کنیم

$$A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۶,۸\}$$

سپس اجتماع $A\cup B$ را با C به‌دست می‌آوریم

$$(A\cup B)\cup C=\{۱,۲,۳,۴,۶,۸,۵\}$$

به همین ترتیب برای محاسبهٔ $A\cup(B\cup C)$ ابتدا $B\cup C$ را تعیین می‌کنیم :

$$B\cup C=\{۲,۴,۶,۸,۳,۵\}$$

و بعد اجتماع A و $B\cup C$ را به‌دست می‌آوریم

$$A\cup(B\cup C)=\{۱,۲,۴,۶,۸,۳,۵\}$$

به‌وضوح مشاهده می‌شود که

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

مثال ۳: برای مجموعه‌های $A=\{۱,۲\}$ ، $B=\{۲,۳\}$ و $C=\{۱,۲,۳,۴\}$ ملاحظه می‌شود :

$$A\subseteq C \text{ و } B\subseteq C$$

در این حالت برای مجموعهٔ

$$A\cup B=\{۱,۲,۳\}$$

نیز داریم

$$A\cup B\subseteq C$$

مشاهدهٔ بالا در حالت کلی برقرار است. این مطلب را می‌توان به‌صورت قضیهٔ زیر بیان کرد.

قضیه ۱: اگر $A\subseteq C$ و $B\subseteq C$ آنگاه $A\cup B\subseteq C$.

برهان: فرض می‌کنیم $x\in A\cup B$ آنگاه طبق تعریف اجتماع، $x\in A$ یا $x\in B$. اگر $x\in A$ ، چون طبق فرض قضیه داریم $A\subseteq C$ ، بنابراین $x\in C$ ؛ اگر $x\in B$ ، چون طبق فرض قضیه $B\subseteq C$ ، بنابراین $x\in C$ ؛ یعنی در هر صورت از $x\in A\cup B$ نتیجه می‌شود $x\in C$. بنابراین

$$A\cup B\subseteq C$$ ▨

قضیهٔ زیر خواص مقدماتی اجتماع را بیان می‌کند.

قضیه ۲: برای هر سه مجموعهٔ A، B و C داریم :

الف) $A\cup\varnothing=A$

ب) $A\cup A=A$

پ) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

برهان: بندهای الف و ب با توجه به تعریف به‌سادگی اثبات می‌شود. در اینجا فقط به اثبات قسمت پ می‌پردازیم.

چون $B\subseteq B\cup C$ و $B\cup C\subseteq A\cup(B\cup C)$ بنابراین

$$B\subseteq A\cup(B\cup C)$$

امّا $A \subseteq A\cup(B\cup C)$ بنابراین طبق قضیهٔ ۱

$$A\cup B \subseteq A\cup(B\cup C) \qquad (۱)$$

امّا $C \subseteq B\cup C$ و $B\cup C \subseteq A\cup(B\cup C)$ بنابراین

$$C \subseteq A\cup(B\cup C) \qquad (۲)$$

براساس قضیهٔ ۱، از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$(A\cup B)\cup C \subseteq A\cup(B\cup C)$$

با استدلالی مشابه می‌توان ثابت کرد

$$A\cup(B\cup C) \subseteq (A\cup B)\cup C$$

بنابراین

$$A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$$

با توجه به برابری به‌دست آمده می‌توان پرانتزها را برداشت و نوشت

$$A\cup B\cup C$$

▨

قضیه ۳: اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A\cup B = B$.

برهان: اگر $A \subseteq B$ چون $B \subseteq B$ طبق قضیهٔ ۱ خواهیم داشت :

$$A\cup B \subseteq B$$

اما از طرف دیگر می‌دانیم

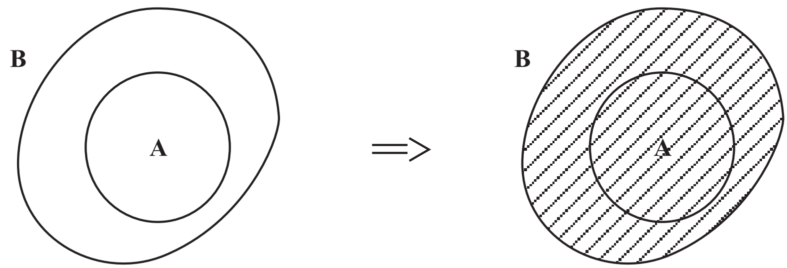
$$B \subseteq A\cup B$$

به این ترتیب از دو رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود :

$$A\cup B = B$$

▨

با استفاده از نمودار وِنْ نیز نتیجهٔ این قضیه را می‌توان مشاهده کرد.



$A \subseteq B$ $\Longrightarrow$ $A\cup B = B$

عکس قضیهٔ ۳ نیز برقرار است.

قضیه ۴: برای هر دو مجموعهٔ A و B، اگر $A\cup B=B$ آنگاه $A\subseteq B$.

برهان: می‌دانیم $A\subseteq A\cup B$ و طبق فرض قضیه داریم $A\cup B=B$. پس $A\subseteq B$. ▨

اشتراک دو مجموعه

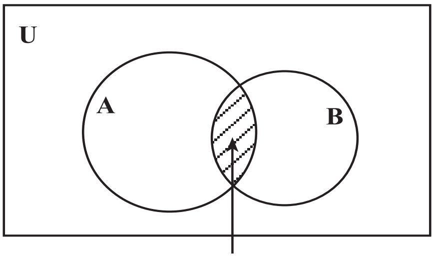
در دو مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۳,۴,۵\}$ ، عدد ۳ مشترک است، لذا مجموعهٔ $\{۳\}$ اشتراک دو مجموعهٔ A و B خوانده می‌شود.

اشتراک دو مجموعهٔ A و B مجموعه‌ای است که اعضایش به هر دو مجموعهٔ A و B تعلق داشته باشد.

اشتراک دو مجموعهٔ A و B را با $A\cap B$ نمایش می‌دهیم، پس

$$A\cap B=\{x|\quad x\in B\ ,\ x\in A\}$$

با استفاده از نمودار ون، اشتراک دو مجموعه را به‌صورت زیر می‌توان نشان داد.



$A\cap B$

تبصره: از تعریف اشتراک دو مجموعه نتیجه می‌شود که

$$A\cap B=B\cap A$$

همچنین چون عضوهای $A\cap B$ هم در A و هم در B قرار دارند بنابراین

$$A\cap B\subseteq A$$

$$A\cap B\subseteq B$$

اگر دو مجموعهٔ غیرتهی A و B عضو مشترک نداشته باشند آنگاه

$$A\cap B=\varnothing$$

در این حالت دو مجموعهٔ A و B را **جدا از هم** یا **مجزا** می‌نامیم.

مشابه ویژگی‌هایی که برای اجتماع دو مجموعه برقرار بود، برای اشتراک هم برقرار است.

قضیه ۵: برای هر سه مجموعهٔ A، B و C داریم :

الف) $A \cap \varnothing = \varnothing$

ب) $A \cap A = A$

پ) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

اثبات این قضیه به‌عنوان تمرین رها می‌شود.

قضیه ۶: برای هر دو مجموعهٔ A و B، اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A \cap B = A$.

برهان: چون $A \cap B \subseteq A$ بنابراین کافی است ثابت کنیم $A \subseteq A \cap B$.

اگر $x \in A$ چون $A \subseteq B$ پس $x \in B$. حال با توجه به این‌که $x \in A$ و $x \in B$ می‌توان نتیجه گرفت که $x \in A \cap B$. یعنی $A \subseteq A \cap B$. حال از دو رابطهٔ $A \cap B \subseteq A$ و $A \subseteq A \cap B$ نتیجه می‌شود $A \cap B = A$. ▨

در پایان دو تساوی وجود دارند که اجتماع و اشتراک را درهم می‌آمیزند. ما این مطلب را در قضیهٔ زیر بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۷: (قوانین پخش‌پذیری)

برای هر سه مجموعهٔ A، B و C داریم :

الف) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(پخش‌پذیری اجتماع نسبت به اشتراک)

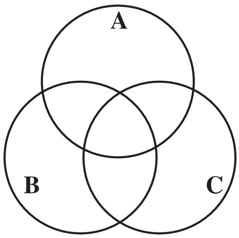
ب) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

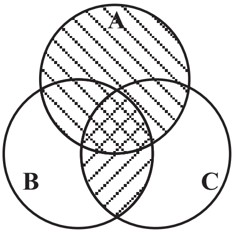
(پخش‌پذیری اشتراک نسبت به اجتماع)

یک راه تصورِ تساوی‌هایی که در قضیهٔ بالا مطرح شد،استفاده از نمودار ون است. برای تحقیق تساوی

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

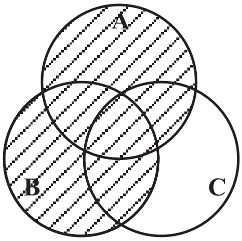
سه دایرهٔ دو به دو متقاطع برای نمایش مجموعه‌های A، B و C درنظر می‌گیریم.



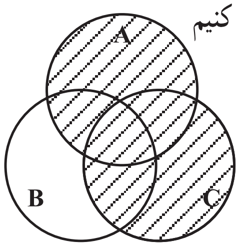


حال $B\cap C$ را سایه می‌زنیم و سپس اجتماع آن ناحیه را با A مشخص می‌کنیم. به این ترتیب ناحیهٔ سایه‌دار مجموعهٔ $A\cup(B\cap C)$ را نمایش می‌دهد.

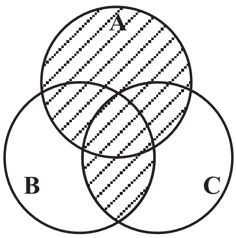
از سوی دیگر اگر دو مجموعهٔ $A\cup B$ و $A\cup C$ را روی شکل مشخص کنیم



$A\cup B$



$A\cup C$



اشتراک این دو ناحیه یعنی :

$(A\cup B)\cap(A\cup C)$

را به‌صورت مقابل خواهیم داشت.

همین‌طور که ملاحظه می‌کنید ناحیه‌های یکسانی به‌دست آمد.

تفاضل دو مجموعه

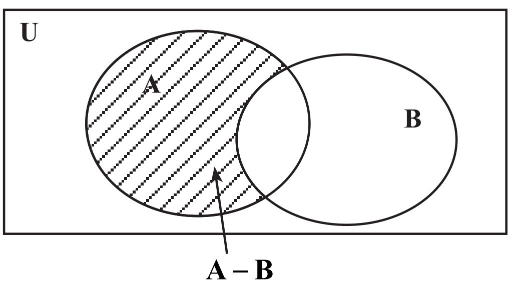
فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند

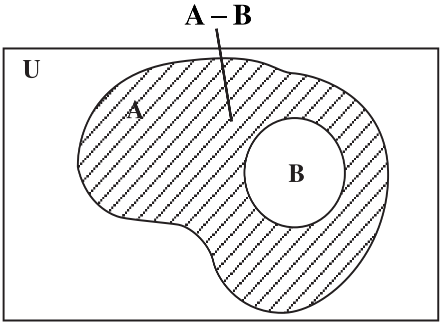
تفاضل مجموعه‌ای $A-B$ عبارت است از مجموعهٔ تمام اعضایی از A که به B تعلق ندارند.

تفاضل دو مجموعه با استفاده از نماد ریاضی چنین بیان می‌شود

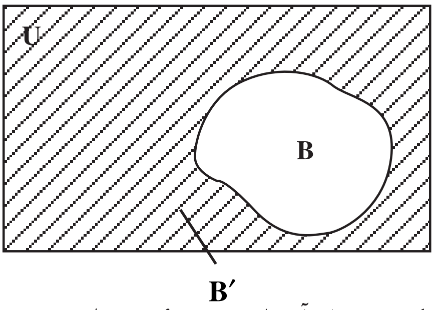
$$A-B=\{x\in A|\ \ x\ ,\ B\}$$

و با استفاده از نمودار ون تفاضل دو مجموعه به‌صورت مقابل نشان داده می‌شود.





اگر B زیرمجموعه‌ای از A باشد، آنگاه $A-B$ را **متمم** B نسبت به A می‌نامیم.



اگر A را برابر U (مجموعهٔ جهانی) بگیریم آنگاه $U-B$ را با B' نشان می‌دهیم و آن را **متمم** مجموعهٔ B نسبت به مجموعهٔ جهانی می‌نامیم. پس

$$U-B=B'$$

عمل متمم‌گیری از قوانین ساده‌ای پیروی می‌کند که برخی از آن‌ها در قضیهٔ زیر مطرح شده است.

قضیه ۸: اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعهٔ جهانی U باشند، آنگاه

الف) $\varnothing'=U$

ب) $U'=\varnothing$

پ) $(A')'=A$

ت) $A-B=A\cap B'$

ث) اگر $A\subseteq B$ آنگاه $B'\subseteq A'$

ج) $A\cap A'=\varnothing$

چ) $A\cup A'=U$

اثبات قضیه به کمک تعریف‌ها به سادگی انجام می‌شود.

به‌عنوان مثال اگر $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی و Q مجموعهٔ اعداد گویا باشد آنگاه $\mathbb{R}-Q$ مجموعهٔ اعداد گنگ است.

اعمالی که تا اینجا تعریف شدند از دو قانون دیگر به‌نام **قوانین دمرگان** تبعیت می‌کنند.

قضیه ۹: اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ جهانی U باشند، آنگاه :

الف) $(A\cup B)'=A'\cap B'$

ب) $$(A\cap B)' = A'\cup B'$$

برهان: الف) فرض کنیم $x\in(A\cup B)'$ آنگاه $x \notin A\cup B$، پس $x \notin A$ و $x \notin B$ درنتیجه $x\in A'$ و $x\in B'$ بنابراین $x\in A'\cap B'$ به این ترتیب می‌توان نتیجه گرفت

$$(A\cup B)'\subseteq A'\cap B'$$

و اگر مراحل استدلال بالا را وارونه کنیم خواهیم داشت

$$A'\cap B'\subseteq(A\cup B)'$$

از روابط به‌دست آمده می‌توان تساوی

$$(A\cup B)' = A'\cap B'$$

را نتیجه گرفت. ▨

اثبات قسمت (ب) به‌عنوان تمرین به عهدهٔ دانش‌آموز است.

از قوانین دمرگان و بند (پ) قضیهٔ ۸ نتیجه می‌شود که اگر متمم‌گیری را بدانیم آنگاه اجتماع یا اشتراک را می‌توان به‌صورت زیر برحسب دیگری بیان کرد.

$$A\cap B = (A'\cup B')'$$

$$A\cup B = (A'\cap B')'$$

گفتیم اگر برای دو مجموعهٔ A و B داشته باشیم $A\cap B=\varnothing$ آنگاه دو مجموعه را جدا از هم می‌نامیم. حال با توجه به تعریف متمم یک مجموعه، می‌توان ویژگی زیر را برای دو مجموعهٔ جدا از هم A و B نتیجه گرفت.

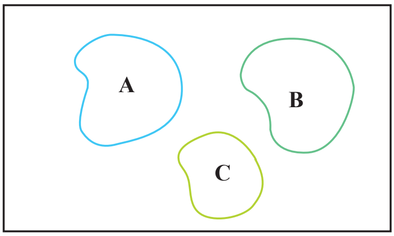
نتیجه: اگر $A\cap B=\varnothing$ آنگاه $A\subseteq B'$ و $B\subseteq A'$.

توجه کنید که مفهوم مجزا بودن سه مجموعه معنایی وسیعتر از

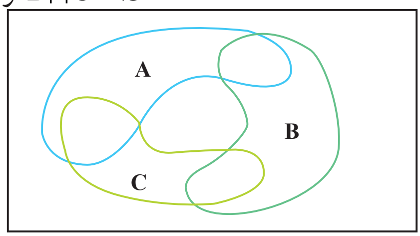
$$A\cap B\cap C=\varnothing$$

دارد. درواقع سه مجموعه A، B و C مجزا هستند اگر

$$A\cap B=\varnothing \text{ و } A\cap C=\varnothing \text{ و } B\cap C=\varnothing$$



A، B و C مجزا هستند



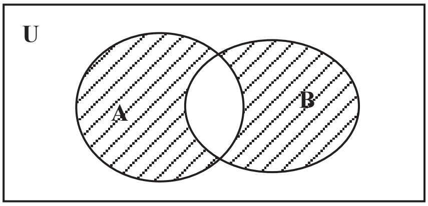
$A\cap B\cap C=\varnothing$
ولی A، B و C مجزا نیستند

تفاضل متقارن

مجموعهٔ تفاضل متقارن دو مجموعهٔ A و B شامل اعضایی است که دقیقاً به یکی از دو مجموعه A یا B تعلق دارند. این مجموعه به‌طور نمادی با $A \Delta B$ نمایش داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

تفاضل متقارن دو مجموعه را با استفاده از نمودار ون به‌صورت زیر می‌توان نمایش داد.



$A \Delta B$

همان‌طور که از روی نمودار ون مشاهده می‌شود

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

بنابراین دو مجموعهٔ $A \Delta B$ و $A \cap B$ مجزا هستند. همچنین سه مجموعهٔ $A - B$ ، $A \cap B$ و $B - A$ نیز مجزا هستند.

این فصل را با اثبات دو اتحاد از طریق جبر مجموعه‌ها به پایان می‌رسانیم.

مثال ۱: می‌خواهیم ثابت کنیم

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

برای اثبات این تساوی به کمک قوانین مجموعه‌ها که جبر مجموعه‌ها خوانده می‌شود از یک طرف تساوی شروع می‌کنیم و به طرف دیگر تساوی می‌رسیم (یا می‌توانیم دو طرف را ساده کنیم تا به‌یک نتیجه برسیم). اکنون سمت راست رابطهٔ بالا را درنظر می‌گیریم :

طبق ت از قوانین متمّم $\quad (A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)'$

قانون دمرگان $\quad = (A \cap B) \cap (A' \cup C')$

پخش‌پذیری اشتراک نسبت به اجتماع

$$= [(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap C']$$

قوانین جابه‌جایی و شرکت‌پذیری

$$= [(A \cap A') \cap B] \cup [A \cap (B \cap C')]$$

طبق ج از قوانین متمم $\quad = (\varnothing \cap B) \cup [A \cap (B \cap C')]$

طبق الف از قضیه ۵ $\quad = \varnothing \cup [A \cap (B \cap C')]$

طبق الف از قضیه ۲ $\quad = A \cap (B \cap C')$

طبق ت از قوانین متمم $\quad = A \cap (B - C)$

مثال ۲: می‌خواهیم ثابت کنیم

$$A \cap (A \cup B) = A$$

از طرف چپ تساوی شروع می‌کنیم

$$\begin{aligned} A \cap (A \cup B) &= (A \cup \varnothing) \cap (A \cup B) \\ &= A \cup (\varnothing \cap B) \\ &= A \cup \varnothing \\ &= A \end{aligned}$$

تمرین

۱ــ اگر $A = \{۱,۲,۳,\{۱,۲,۳\}\}$ و $B = \{۱,۲,\{۱,۲\}\}$ مطلوب است $A \cup B$ ، $A \cap B$ ، $A - B$ و $B - A$.

۲ــ اگر $U = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ ، $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ ، $B = \{۲,۴,۶,۸\}$ و $C = \{۳,۴,۵,۶\}$ مطلوب است :

الف) A' $\qquad$ ب) $(A \cap C)'$

پ) $B - C$ $\qquad$ ت) $(A \cup B)'$

۳ــ اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \left\{ m \in \mathbb{Z} \mid -n \leq m, ۲^m \leq n \right\}$ ، $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ و $A_۴$ را تعیین کنید چه رابطه‌ای بین $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ و $A_۴$ وجود دارد؟

اشتراک $A_۱$ تا $A_۴$ چیست؟ $(\bigcap_{i=۱}^{۴} A_i = ?)$ اجتماع $A_۱$ تا $A_۴$ چیست؟ $(\bigcup_{i=۱}^{۴} A_i = ?)$ ،

(توضیح : $\bigcup_{i=۱}^{n} A_i = A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_n$)

۴ــ اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \left(-\frac{۱}{n} , \frac{۲n-۱}{n} \right)$ ، مطلوب است $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ سپس اجتماع و اشتراک $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ را مشخص کنید.

۵ــ اگر $i \in \{۱ ,۲ ,\ldots ,۱۰\}$ و $A_i = [-i, ۱۰ - i]$ ، $A_۱$ و $A_۲$ و ... و $A_{۱۰}$ را حساب

کنید. سپس $\bigcap\limits_{i=۱}^{۱۰} Ai$ و $\bigcup\limits_{i=۱}^{۱۰} Ai$ را مشخص کنید.

۶ــ با ذکر مثال $n(A\cup B)$ را حساب کنید. آیا $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$ ؟

۷ــ به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید اگر A و B مجموعه باشند. داریم :

الف) $A\cup B=(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)$

ب) $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$

ج) اگر $A \& C$ و $B \& C$ آنگاه $A\cup B \& C$

د) اگر $A \& B$ و $A \& C$ آنگاه $A \& B\cap C$

هـ) اگر $A\cup B=A\cap B$ آنگاه $A=B$

و) اگر $A \& B$ آنگاه $B' \& A'$

۸ــ برای هر دو مجموعهٔ A و B ثابت کنید :

الف) $A\Delta B=B\Delta A$

ب) $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$

ج) اگر $A\cap B=\varnothing$ آنگاه $A\Delta B=A\cup B$

د) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

۹ــ به‌وسیلهٔ نمودار ون نشان دهید که

$$A'-B'=B-A$$

۱۰ــ به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید اگر A و B دو مجموعه باشند آنگاه داریم :

الف) $(A-B)\cap B=\varnothing$

ب) $B-A=B\cap A'$

پ) $A-B=A-(A\cap B)$

ت) $(A\Delta B)\cup(A\cap B)=A\cup B$

۱۱ــ در هریک از موارد زیر به‌جای S یکی از مجموعه‌های $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$ یا $\mathbb{R}$ را چنان جایگزین کنید تا تساوی درستی حاصل شود.

الف) $\{x\in S|\ \ x^{۳}=۵\}=\varnothing$

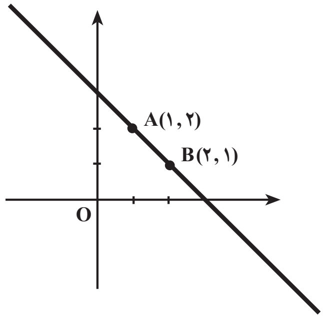
ب) $\{x\in S|\ \ -۱\le x\le ۱\}=\{۱\}$

پ) $\{x\in S|\ \ ۲<x^{۲}<۵\}-\{x\in S|\ \ x>۰\}=\{-۲\}$

ت) $\{x\in S|\ \ ۱<x\le ۴\}=\{x\in S|\ \ x^{۲}=۴\}\cup\{۳,۴\}$

۲ـ۶ـ حاصلضرب دکارتی دو مجموعه

دیدید که با اجتماع واشتراک ومتمم‌گیری و تفاضل مجموعه‌های مفروض، مجموعه‌های جدیدی حاصل می‌شوند. حاصلضرب دکارتی دو مجموعه روش دیگری برای ساختن یک مجموعهٔ جدید از مجموعه‌های مفروض است، ولی این کار با استفاده از مفهوم **زوج مرتب** انجام می‌شود. همان طور که خوانده‌اید اگر دستگاه محورهای مختصات در صفحه را در نظر بگیریم هر نقطه از صفحه با یک زوج مرتب منحصر به فردی مانند (x,y) مشخص می‌شود که x و y اعداد حقیقی‌اند و x را مختص یا مؤلّفهٔ اوّل و y را مختص یا مؤلّفهٔ دوم می‌نامیم. معمولاً در صفحهٔ مختصات x را طول و y را عرض نقطهٔ مفروض می‌گویند. به شکل روبرو که نمودار خط $y=-x+۳$ است،توجّه کنید. ملاحظه می‌کنید که نقاط A و B به ترتیب به مختصات $(۱,۲)$ و $(۲,۱)$ با این‌که متعلق به نمودار خط هستند ولی با هم متفاوتند بنابراین دو زوج (x,y) و (y,x) در حالت کلی با هم برابر نیستند.



پس دو زوج مرتب (a,b) و (c,d) زمانی مساویند که مؤلفه‌های اوّل آنها با هم و مؤلّفه‌های دوّم آنها نیز با هم مساوی باشند. $(c=a)$ و $(b=d)$

مثال ۱: x و y را طوری تعیین کنید که زوج‌های مرتب $(x+y,۶)$ و $(-۵,xy)$ با هم مساوی باشند.

حل: طبق شرط تساوی دو زوج مرتب باید $\begin{cases} x+y=-۵ \\ xy=۶ \end{cases}$ که پس از حل دستگاه $x=-۲$ و $y=-۳$ بدست می‌آید.

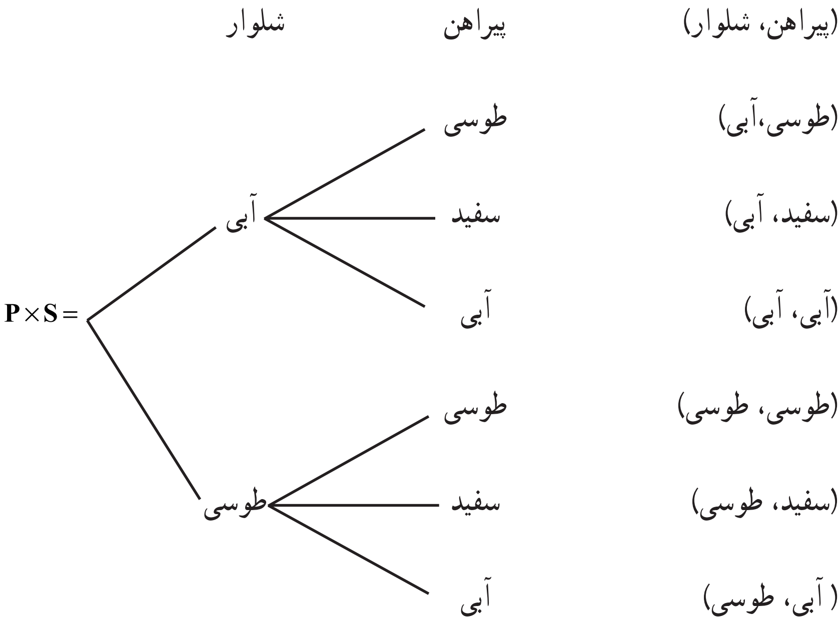
اکنون به مثال زیر توجّه کنید.

اگر شخصی دو شلوار طوسی و آبی و سه پیراهن آبی، سفید و طوسی داشته باشد به شش طریق می‌تواند یک شلوار و یک پیراهن را انتخاب کند:

(طوسی، آبی) و (سفید، آبی)و(آبی،آبی)و(طوسی،طوسی)و(سفید،طوسی)و(آبی،طوسی). ملاحظه می‌کنید برای هر انتخاب یک زوج مرتب تشکیل شده است. اگر {شلوار طوسی، شلوار آبی } = P و {پیراهن آبی، پیراهن سفید، پیراهن طوسی } = S آنگاه مجموعهٔ همهٔ زوج‌های مرتّب تشکیل شده را به صورت $P\times S$ نشان می‌دهیم یعنی

$P\times S=$ { (آبی، طوسی) ، (سفید، طوسی) ، (طوسی، طوسی) ، (آبی، آبی) ، (سفید، آبی) ، (طوسی، آبی) }

و نمودار درختی آن به‌صورت زیر است :



به‌عبارتی اگر x را رنگ شلوار و y را رنگ پیراهن بنامیم

$$P\times S=\{(x,y)|\quad x\in P\ ,\ y\in S\}$$

$P\times S$ را حاصلضرب دکارتی مجموعهٔ P درمجموعهٔ S می‌نامیم. دقّت کنید که چون مؤلفه‌های اوّل زوج‌ها نمایندهٔ شلوار و مؤلّفه‌های دوّم زوج‌ها نماینده پیراهن است ترتیب آن‌ها اهمیّت دارد.

تعریف: *حاصلضرب دکارتی مجموعهٔ A در مجموعهٔ B که با $A\times B$ نشان می‌دهیم، مجموعهٔ همهٔ زوج‌های مرتب (a,b) است که a عضوی از A و b عضوی از B است یعنی :*

$$A\times B=\{(a,b)|\quad a\in A\ ,\ b\in B\}$$

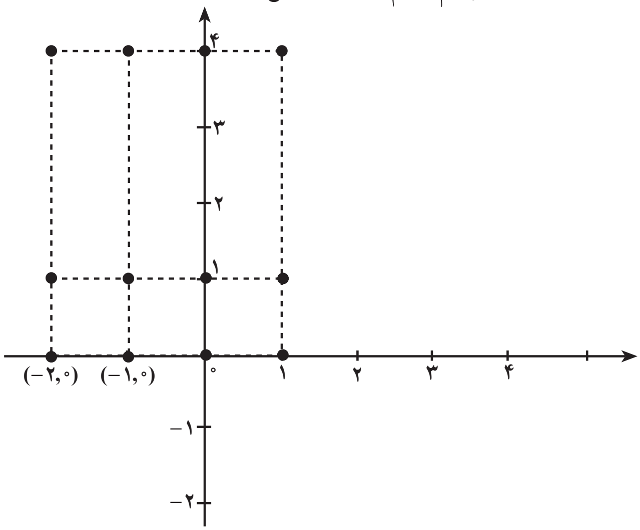
اگر $A=B$ باشد $A\times A$ را با A^{2} نشان می‌دهیم و $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ یعنی $\mathbb{R}^{2}$ را صفحهٔ مختصات می‌نامیم.

مثال ۲: اگر $A=\{-1,0,1,-2\}$ و $B=\{1,4,0\}$ ، $A\times B$ را مشخص کنید و نمودار مختصاتی $A\times B$ را رسم کنید.

حل: حاصلضرب دکارتی A در B به‌صورت زیر است :

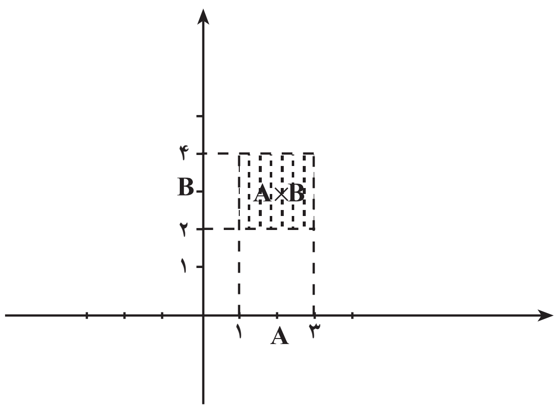
$$A\times B=\{(-۱,۱),(-۱,۴),(-۱,۰),(۰,۱),(۰,۴),(۰,۰),(۱,۱),(۱,۴),(۱,۰),(-۲,۱),(-۲,۴),(-۲,۰)\}$$

برای رسم نمودار مختصاتی $A\times B$ کافی است هر عضو آن را به عنوان مختصات یک نقطه درنظر بگیریم و در صفحهٔ مختصات رسم کنیم. مانند شکل.



مثال ۳: اگر $A=\{x\in\mathbb{R}|\ ۱\le x\le ۳\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}|\ ۲<x<۴\}$ نمودار $A\times B$ را در صفحه نمایش دهید.

حل: $A\times B=\{(x,y)\ |۱\le x\le ۳$ و $۲<y<۴\}$



تمرین

۱ــ x و y را طوری تعیین کنید که زوج‌های مرتّب زیر با هم مساوی باشند.

الف ــ $(0,3)$ و $((x-1)^2+(y-1)^2\ ,3)$

ب ــ $(13,xy)$ و $(x^2+y^2,6)$

۲ــ اگر مجموعهٔ A دارای m عضو و مجموعهٔ B دارای n عضو باشد، مجموعهٔ $A\times B$ چند عضو دارد؟ تعداد زیرمجموعه‌های $A\times B$ چند تاست؟

۳ــ اگر $A=\{2k+1 \mid k\in\mathbb{Z}\ ,\ -2\le k\le 0\}$ و $B=\{y \mid y\in\mathbb{N}\ ,\ y^2\le 9\}$

الف ــ $A\times B$ را به صورت زوج‌های مرتّب بنویسید.

ب ــ تعداد اعضای مجموعه‌های $(A\times B)\cup(B\times A)$ و $(A\times B)\cap(B\times A)$ را بنویسید.

ج ــ A^2-B^2 چند زیرمجموعه دارد؟

۴ــ اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی باشند درچه شرایطی $A\times B=B\times A$ ؟ و در چه شرایطی $(A\times B)\cap(B\times A)$ تهی است؟

۵ــ اگر شهر B بین دو شهر A و C باشد و برای رفتن از شهر A به شهر B سه راه و برای رفتن از B به C چهار راه موجود باشد به چند طریق یک مسافر می‌تواند از شهر A به شهر C برود؟ به چند طریق می‌تواند برگردد؟ آیا راه‌های رفت و برگشت یکی است؟

۶ــ در پرتاب دو سکهٔ ۲ ریالی و ۵ ریالی با هم، چند زوج مرتب از پشت و روی سکه‌ها حاصل می‌شود؟

۷ــ هریک از مجموعه‌های زیر را در صفحهٔ مختصات نمایش دهید.

الف) $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid\ x=y\}$

ب) $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x>y\}$

ج) $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid\ |x+y|\le 1\}$

۸ــ حاصلضرب دکارتی هر یک از مجموعه‌های زیر را در دستگاه مختصات رسم کنید.

الف) $A=[-3,2]$ ، $B=(-2,0]$

ب) $A=(3,.\ )$ ، $B=(-\infty,-2)$

ج) $A=[-2,2]$ ، $B=[1,2]$

۹ــ روابط زیر را ثابت کنید.

الف) $A\times B=\varnothing \Leftrightarrow A=\varnothing$ یا $B=\varnothing$

ب) $A\times C=B\times C \Rightarrow A=B$ و $C\neq\varnothing$

۲ــ۷ــ رابطه

یکی از مهمترین مفاهیم در نظریه مجموعه‌ها، مفهوم رابطه است که نه تنها در تمام ریاضیات بلکه در خارج از ریاضیات نیز کاربرد دارد. عبارات «بزرگتر است از»، «کوچکتر است از»، «عاد می‌کند»، «برابر است با» در اعداد و «زیرمجموعه‌ای است از»، «متعلّق است به»، درمجموعه‌ها و «x برادر y است» ، « x فرزند y است» در مجموعهٔ انسان‌ها، هر یک مثالی از رابطه است آنچه در تمام این مثال‌ها مشترک است این است که همهٔ عبارات به دو شئ اشاره می‌کنند یعنی یک زوج مانند (x,y) و این‌که در هر حالت شئ اوّل با شئ دوم در رابطه هست یا نیست. مثلاً $x>y$ که x و y اعداد حقیقی باشند، یا درست است یا نادرست ($۲>۳$ درست است ولی $۳>۲$ نادرست).

بنابراین $x>y$ کاملاً با $y>x$ متفاوت است یعنی $(x,y)\neq(y,x)$ (مفهوم زوج مرتّب) پس هر رابطه را می‌توان مجموعه‌ای از زوج‌های مرتّب در نظر گرفت. از طرفی هرکدام از روابط در مجموعهٔ مشخصی تعریف شده‌اند مانند مجموعهٔ اعداد، مجموعهٔ انسان‌ها و ... حتماً دقت کرده‌اید که مثلاً $x>y$ یک گزاره‌نما در مجموعهٔ اعداد است.

پس می‌توان رابطهٔ «x بزرگتراست از y» در اعداد حقیقی را مجموعه‌ای از زوج‌های مرتّب به‌صورت $\{(x,y)|x>y\}$ در نظر گرفت.

مثال ۱: فرض کنیم مجموعهٔ عام مجموعهٔ انسان‌ها و گزاره‌نمای $p(x,y)$ به معنی «x پدر y است» باشد بنابراین رابطهٔ پدری در مجموعهٔ انسان‌ها چنین است :

$$\text{رابطهٔ پدری}=\{(x,y)\ |\ \text{است } y \text{ پدر } x\}$$

یا

$$\text{رابطهٔ پدری}=\{(x,y)\ |\ p(x,y)\}$$

بنابراین **شرط** این‌که حسن پدر تقی باشد آن است که زوج مرتب (تقی ، حسن) متعلّق به مجموعهٔ رابطهٔ پدری باشد.

پس می‌توان رابطه را به کمک مجموعه‌ای از زوج‌های مرتّب تعریف کرد، یک راه ساختن زوج‌های مرتّب به کمک ضرب دکارتی مجموعه‌هاست.

تعریف: *فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند هر زیرمجموعه از حاصلضرب دکارتی $A\times B$ رابطه‌ای از A در B است. اگر رابطه را با R[۱] نشان دهیم، $R \& A\times B$*

جملهٔ «از A در B» یعنی اوّلین مؤلّفه‌های زوج‌های مرتّب، عضوهای A و دومین مؤلّفه‌های زوج‌های مرتّب عضوهای B می‌باشند.

اگر $A=B$ ، گوییم R رابطه‌ای روی A است.

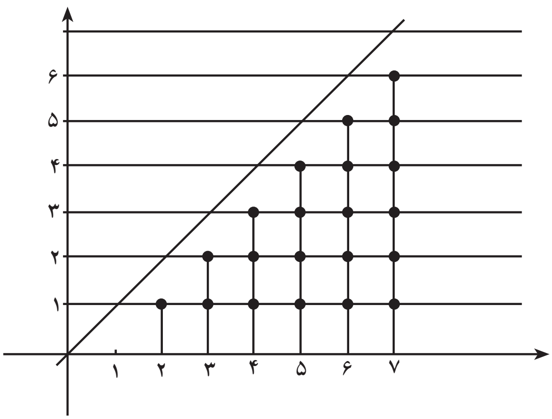
اگر $a\in A$ و $b\in B$ گوییم a با b توسط R در رابطه هستند هرگاه $(a,b)\in R$ ، متداولتر است که نماد aRb را به معنی $(a,b)\in R$ به کار ببریم. در صورتی که $(a,b) , R$ می‌نویسیم $a \not R b$

مثال ۲: فرض کنیم، $\mathbb{Z}$ مجموعهٔ عام باشد یکی از مهمترین رابطه‌های ریاضی رابطهٔ عادکردن در $\mathbb{Z}$ است که با علامت «|» نمایش داده می‌شود اگر بنویسیم : $a|b$ یعنی عدد صحیحی مانند c هست که $b=ac$.

مثلاً ۶|۳− ، ۶|۲ ، ۶−|۳ که ۶|۳− معادل ۶R۳− یا معادل $(-۳,۶)\in R$ است پس $a|b$ معادل aRb است که به صورت $a|b$ / aRb یا $R=\{(a,b)|\ a,b\in \mathbb{Z}, a|b\}$ نشان می‌دهیم.

مثال ۳: فرض کنیم $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ رابطهٔ «>» را روی A درنظر می‌گیریم یعنی $(a,b)\in R$ معادل است با $a>b$ برای نمایش این رابطه ابتدا حاصلضرب دکارتی $A\times A$ را به‌دست می‌آوریم. و روی مختصات دکارتی مشخص می‌کنیم.

$$A\times A=\{(۱,۱),(۱,۲),\dots,(۱,۷),(۲,۱),\dots,(۲,۷),\dots,(۷,۷)\}$$



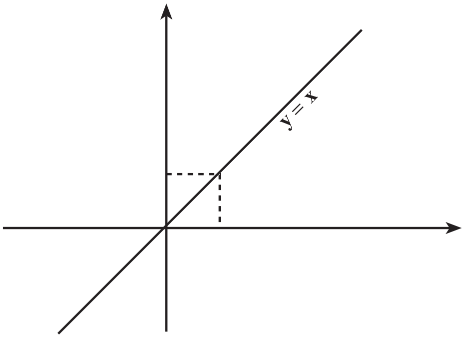
روی شکل، زیرمجموعهٔ $A\times A$ که با نقاط پررنگ مشخص شده‌اند، نمودار رابطهٔ R می‌باشد که $R=\{(۲,۱),(۳,۱),\dots,(۷,۱),(۳,۲),(۴,۲),(۴,۳)\dots,(۷,۶)\}$

۱ـ Relation

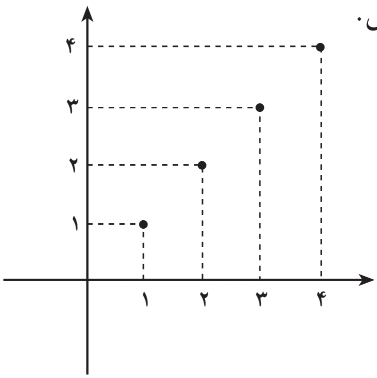
مثال ۴: فرض کنیم رابطهٔ تساوی روی $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده باشد.

$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid\ y=x\right\}$$

نمودار مختصاتی این رابطه خط راست $y=x$ است که نیمساز ربع اوّل و سوم دستگاه مختصات است.



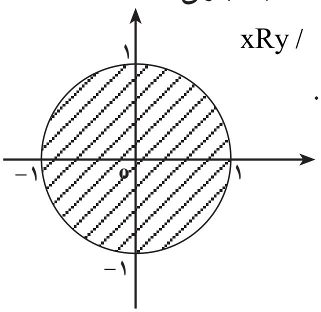
تذکر: اگر $A=\mathbb{N}$ رابطهٔ تساوی فقط نقاطی از خط $y=x$ می‌باشند که مؤلّفه‌های صحیح مثبت داشته باشند مانند شکل.



مثال ۵: در صفحه xoy رابطه R را چنین تعریف می‌کنیم که x با y در رابطه است اگر (x,y) نقطه‌ای در داخل یا روی دایرهٔ واحد باشد یعنی $x^2+y^2\leq 1$ به عبارتی

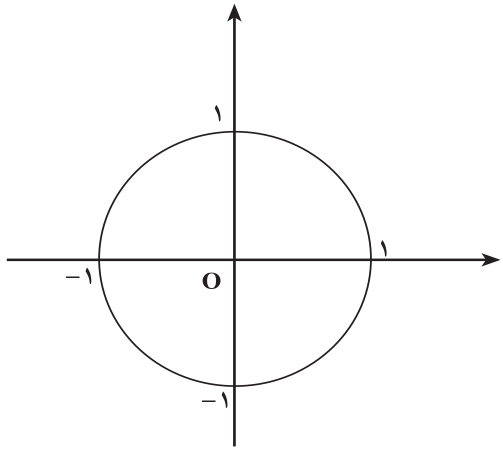
$$xRy\ /\qquad x^2+y^2\leq 1$$

بنابراین نمودار این رابطه قرصی به‌شکل زیر است.

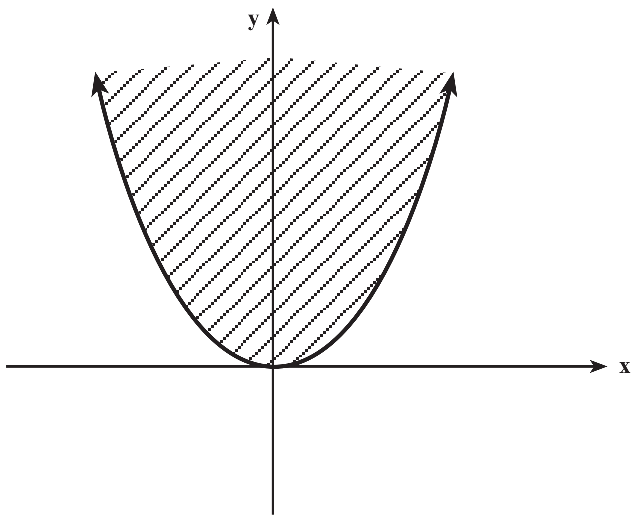


با توجه به مثال‌ها، تاکنون متوجه شده‌اید که کلیّهٔ معادلات و نامعادلات (نامساوی‌ها) دو متغیّره‌ای که قبلاً خوانده‌اید می‌توانند به عنوان رابطه در نظر گرفته شوند.

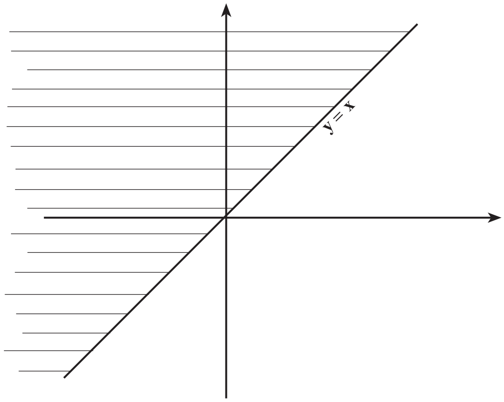
مثال ۶: نمودار رابطهٔ $R=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^{۲} \mid x^{۲}+y^{۲}=۱\right\}$ یک دایره به شعاع ۱ است که مرکز آن $O(۰,۰)$ می‌باشد.



مثال۷: نمودار رابطهٔ $R=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^{۲} \mid y\geq x^{۲}\right\}$ نقاط مرز و داخل سهمی $y=x^{۲}$ می‌باشد. مانند شکل



مثال ۸: نمودار رابطهٔ «$\le$» در اعداد حقیقی یعنی رابطهٔ $R=\{(x,y)\in \mathbb{R}^{۲} \mid x\le y\}$ سطح یک نیم صفحه است. (ناحیه سایه‌دار در شکل زیر)



تمرین

۱ــ رابطهٔ $R=\{(۱,\pi),(۰,۲),(\pi,۱),(۲,۲)\}$ در $A=\{۰,۱,\pi,۲,۴\}$ تعریف شده است.

الف ــ تحقیق کنید کدام یک از موارد زیر درست است؟

$۱R۲$ ، $\pi R۱$ ، $۱R\pi$ ، $۲R۰$ ، $۴R۱$

ب ــ مجموعهٔ اعضایی از A که با ۲ رابطه دارند را مشخص کنید.

۲ــ چند رابطه در مجموعهٔ A از تمرین ۱ می‌توان نوشت؟

۳ــ آیا $\varnothing$ یک رابطه است؟

۴ــ در مجموعهٔ $A=\{۰,۱,۲,\dots,۹\}$ رابطهٔ $R=\{(x,y) \mid x,y\in A, x|y\}$ تعریف شده است R را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید، دامنه و برد R را تعیین کنید.

۵ــ اعضای رابطهٔ $R=\{(x,y) \mid x^{۲}+y^{۲}=۴\}$ را در $\mathbb{Z}$ به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب مشخص کنید و نمودار آن را رسم کنید.

۶ــ اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ نمودار رابطه‌های زیر را رسم کنید.

الف) $a,b\in A \quad aRb / \quad a+b\le ۴$

ب) $aRb / \quad a(b+۱)\le ۶$

ج) $aRb / \quad -۱۰\le a+۵b\le ۱۰$

د) $xRy / \quad x^{۲}+y^{۲}\le ۴$

۷ــ رابطهٔ f از $\mathbb{R}$ در فاصلهٔ بستهٔ $[0,1]$ به صورت $y=\frac{1}{x^2+1}$ / xfy تعریف شده است نمودار رابطهٔ f را رسم کنید.

۸ــ رابطه‌های زیر روی مجموعهٔ $A=\{1,2,3,6\}$ تعریف شده‌اند اولاً هر رابطه را به صورت زوج‌های مرتّب نشان دهید ثانیاً نمودار رابطه‌ها را رسم کنید.

$$R_1=\{(x,y)|\ x|y\} \quad , \quad R_2=\{(x,y)|\ x<y\}$$

$$R_3=\{(x,y)|\ x=y\} \quad , \quad R_4=\{(x,y)|\ x\neq y\}$$

$$R_5=\{(x,y)|\ x^2\leq y\} \quad , \quad R_6=\{(x,y)|\ x+y \text{ فرد است}\}$$

۹ــ رابطه‌های زیر روی مجموعهٔ $\mathbb{R}$ تعریف شده‌اند نمودار آن‌ها را رسم کنید.

$$R_1=\{(x,y)\ |\ x^2+y^2\leq 4\}$$

$$R_2=\{(x,y)\ |\ x^2+y^2\leq 1\ ,\ y\geq x\}$$

$$R_3=\{(x,y)\ |\ |x|=|y|\}$$

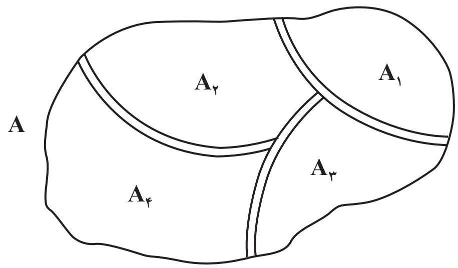
$$R_4=\{(x,y)\ |\ |y|=-x\}$$

۲ــ۸ــ افراز یک مجموعه

مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ را به صورت $\mathbb{Z}=\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$ در نظر می‌گیریم. این مجموعه را می‌توان به دو زیرمجموعهٔ اعداد فرد و اعداد زوج تقسیم کرد. مسلماً $\mathbb{Z}_O\cap\mathbb{Z}_E=\varnothing$ زیرا هیچ عددی نمی‌تواند هم زوج و هم فرد باشد و $\mathbb{Z}_O\cup\mathbb{Z}_E=\mathbb{Z}$ ، این تقسیم را افراز $\mathbb{Z}$ به دو مجموعهٔ $\mathbb{Z}_E$ و $\mathbb{Z}_O$ می‌نامیم همچنین هرمجموعهٔ A با متمم خود یعنی A' یک افراز برای مجموعهٔ عام U می‌باشند زیرا :

$$A\cap A'=\varnothing \quad \text{و} \quad A\cup A'=U$$

می‌توان این ایده را تعمیم داد. در شکل زیر مجموعهٔ A به چهار مجموعهٔ A_1 و A_2 و A_3 و A_4 افراز شده است.



تعریف: فرض کنیم A یک مجموعهٔ غیر تهی باشد گوییم A به n زیرمجموعهٔ A_1 و A_2 و ... و A_n *افراز شده است اگر* :

الف ـ برای هر $1 \le i \le n$, $A_i \neq \varnothing$

ب ـ برای هر $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(1 \le j \le n)$

ج ـ $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \cup_{i=1}^{n} A_i = A$

مثال: اگر $A = \{1, 2, 3\}$ آنگاه A دارای ۵ افراز به صورت زیر است :

(۱) $\{1\}, \{2\}, \{3\}$

(۲) $\{1\}, \{2, 3\}$

(۳) $\{2\}, \{1, 3\}$

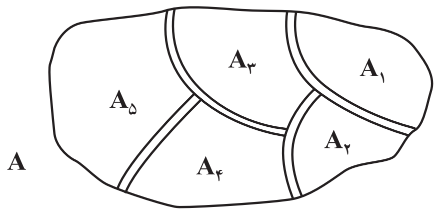
(۴) $\{3\}, \{1, 2\}$

(۵) $\{1, 2, 3\}$

۲ــ۹ــ رابطهٔ هم‌ارزی

مثال: فرض کنیم که مجموعهٔ A به قطعات مجزای از یکدیگر مانند شکل، افراز شده باشد می‌توانیم رابطهٔ «$\sim$» را چنین تعریف کنیم.

x و y هر دو در یک قطعه هستند $x \sim y /$



برای داشتن شهودی بهتر فرض کنید A نقشهٔ یک کشور باشد و زیرمجموعه‌های A_1 و A_2 و A_3 و A_4 و A_5 استان‌های این کشور باشند رابطه‌ای که بین هر دو شهروند این کشور برقرار است رابطهٔ هم‌استانی بودن است. یعنی

x و y در یک استان هستند $x \sim y /$

بنابراین اگر x متعلق به استان A_1 است و y متعلق به استان A_2 ، x و y رابطه‌ای باهم ندارند.

این رابطه دارای این خواص است که اگر x و y و z افرادی از این کشور باشند :

۱ــ x با خودش هم‌استان است.

۲ــ اگر x با y هم‌استان باشد y نیز با x هم‌استان است.

۳ــ اگر x با y و y با z هم‌استان باشند، x نیز با z هم‌استان است.

برعکس می‌توانیم ناحیه‌ها را با رابطهٔ «~» بازسازی کنیم. ناحیه‌ای که x متعلق به آن است (استانی که x در آن زندگی می‌کند) با E_x نمایش می‌دهیم. که عبارت است از :

$$E_x = \{y \in A | \ x \sim y\}$$

یعنی استانی که x متعلق به آن است مجموعهٔ تمام شهروندان کشور A است که با x در یک استان زندگی می‌کنند. یعنی مجموعهٔ E_x یکی از استان‌های کشور است یا یکی از ناحیه‌های مورد نظر است. بنابراین اگر $x \in A_۲$ باشد آنگاه $E_x = A_۲$ و اگر $x \in A_۵$ آنگاه $E_x = A_۵$ پس دقیقاً رابطهٔ هم‌استانی بودن، کشور را به استان‌ها تقسیم می‌کند. به طور کلّی می‌توان گفت : رابطه‌ای که دارای خواص (۱) و (۲) و (۳) باشد یک رابطه هم‌ارزی است.

تعریف: *رابطه‌ای چون «~» روی مجموعهٔ A یک رابطهٔ هم‌ارزی است اگر به ازای هر x و y و z از A سه خاصیت زیر برقرار باشد :*

الف ــ $x \sim x$ یعنی هر عضو با خودش رابطه داشته باشد. (بازتابی یا انعکاسی)

ب ــ اگر $x \sim y$ آنگاه $y \sim x$ (تقارنی)

ج ــ اگر $x \sim y$ و $y \sim z$ آنگاه $x \sim z$ (تعدی یا تراگذری)

مثال : رابطهٔ توازی خطوط در صفحه و رابطهٔ همنهشتی دو مثلث رابطه‌های هم‌ارزی روی صفحه هستند.

ملاحظه کردید که هرگاه مجموعهٔ A را به قطعات مجزا تقسیم کنیم، رابطهٔ (x هم‌استان است با y) یک رابطه‌ای هم‌ارزی است و برعکس. بنابراین

هر رابطهٔ هم ارزی روی یک مجموعه آن مجموعه را به زیرمجموعه‌های مجزا که هر یک از آنها دسته یا کلاس هم‌ارزی نامیده می‌شود تقسیم می‌کند.

دستهٔ هم‌ارزی a را با علامت [a] نشان می‌دهیم. a را نمایندهٔ دسته می‌گوییم و به صورت $[a] = \{x \ | \ xRa\}$ تعریف می‌کنیم.

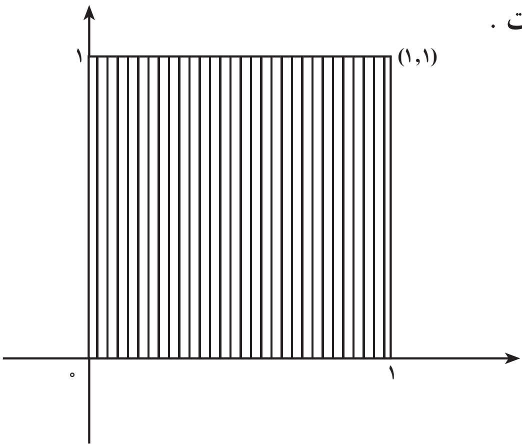
مثال: سطح مربع واحد $D=[۰,۱]\times[۰,۱]$ را در نظر بگیرید هر دو نقطه از این مربع را با رابطهٔ این‌که مؤلّفه‌های اوّل آن‌ها با هم برابرند تعریف می‌کنیم یعنی :

$$(x,y)R(a,b) / \quad x=a$$

این رابطه یک رابطهٔ هم‌ارزی روی D است. و مجموعهٔ D (صفحهٔ D) را به دسته‌های هم‌ارزی افراز می‌کند، دسته‌های هم‌ارزی خطوط عمود بر محور xها می‌باشند زیرا مثلاً دستهٔ $(۰,۰)$ عبارت است از :

$$[(۰,۰)]=\{(x,y)\mid(x,y)R(۰,۰)\}$$
$$=\{(x,y)\mid x=۰\}$$

که نمودار آن خط $x=۰$ است .



تمرین

۱ــ رابطهٔ R در $\mathbb{Z}$ به‌صورت

$$xRy \quad / \quad ۳|x-y$$

تعریف شده است. اولاً ثابت کنید R یک رابطهٔ هم‌ارزی است. ثانیاً رابطهٔ R مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را به چند کلاس هم‌ارزی افراز می‌کند ؛ این کلاس‌های هم‌ارزی را مشخص کنید.

۲ــ ثابت کنید رابطهٔ تشابه دو مثلث، یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

۳ــ از رابطه‌های زیر که روی $\mathbb{R}^۲$ تعریف شده‌اند کدام‌یک هم‌ارزی است؟

الف) $(a,b)R(c,d) \quad / \quad a+d=b+c$

ب) $(a,b)R(c,d) \quad / \quad (a-c)(b-d)=۰$

پ) $(a,b)R(c,d) \quad / \quad ab=cd$