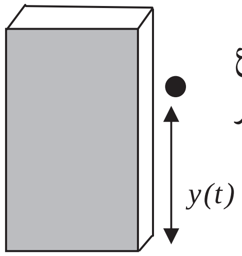
طبق نظریه انفجار بزرگ ، عالم در اثر یک انفجار بزرگ که در یک نقطه روی داده است به وجود آمده است. اگر در زمان به عقب بازگردیم رفته رفته به این نقطه نزدیک می‌شویم.

حد و پیوستگی توابع

۱. حد توابع
۲. حد چپ و حد راست
۳. همسایگی‌های یک نقطه
۴. قضایای حد توابع
۵. محاسبه حد در توابع کسری
۶. پیوستگی توابع

حد توابع



اگر سنگی را از بالای یک ساختمان ۱۶ متری رها کنیم طبق قوانین فیزیکی ارتفاع آن در هر لحظه t به‌صورت $y(t) = 16 - 5t^2$ است که t برحسب ثانیه و $y(t)$ برحسب متر است.

حل یک مسئله

چگونه می‌توان سرعت سقوط این سنگ را در هر لحظه حساب کرد؟

این سؤالی بود که نیوتون از خود پرسید. نیوتون فیزیکدانی بود که حدود ۳۰۰ سال پیش می‌زیسته است و با طرح چنین مسائلی و حل آن‌ها علم حسابان را پایه‌ریزی نمود.

معلم از دانش‌آموزان پرسید : آیا می‌دانید سرعت یک متحرک چیست و آن را چگونه حساب می‌کنند؟

سعید : من ورزشکار هستم و در تمرین‌ها زیاد می‌دوم. معمولاً موقع دویدن در هر ثانیه ۲ متر جلو می‌روم، یعنی سرعت من ۲ متر بر ثانیه است.

معلم : بله اگر متحرکی با سرعت ثابت حرکت کند، در هر ثانیه مسافت یکسانی طی می‌کند و اگر این مسافت v متر باشد، گوییم سرعت آن v متر بر ثانیه است. به طور کلی متحرک‌هایی که با سرعت ثابت حرکت می‌کنند در هر فاصله زمانی (برحسب ثانیه) $[t_1 , t_2]$ اگر a متر طی کرده باشند مقدار $\frac{a}{t_2 - t_1}$ ثابت است و همان سرعت متحرک برحسب متر بر ثانیه است.

علی : اما اگر متحرکی سرعت ثابت نداشته باشد و سرعت آن در حال تغییر باشد در هر لحظه سرعت آن را چگونه حساب کنیم؟

محسن : من هر وقت سوار ماشین می‌شوم، ماشین از حالت ایستاده شروع به حرکت می‌کند و سرعت خود را از صفر تا ۵۰ کیلومتر بر ساعت افزایش می‌دهد و در هر لحظه عقربه سرعت‌شمار مقدار سرعت را نشان می‌دهد که از صفر تا ۵۰ افزایش می‌یابد.

معلم : بله ماشین در هر لحظه سرعتی دارد و این سرعت در حال افزایش است ولی آن‌چه که ما از ماشین می‌توانیم ببینیم آن است که در هر لحظه چند متر به جلو رفته است. آیا با دانستن این مطلب ما می‌توانیم تشخیص دهیم سرعت ماشین در هر لحظه چقدر است؟

سعید : اگر در هر لحظه ما بدانیم متحرک چقدر حرکت کرده است، از یک لحظه t_1 تا چند لحظه بعد مانند t_2 می‌توانیم حساب کنیم چند متر حرکت کرده است. اگر مسافت طی شده بین این دو لحظه a متر باشد مقدار $\frac{a}{t_2 - t_1}$ را می‌توان سرعت متحرک در فاصله زمانی $[t_1 , t_2]$ بدانیم.

محسن : ولی ما می‌خواهیم بدانیم سرعت متحرک در هر لحظه چقدر است، عددی که سعید به دست آورده است بستگی به بازه زمانی $[t_1 , t_2]$ دارد و چیزی در مورد سرعت در هر لحظه نمی‌گوید.

معلم : محسن درست می‌گوید ولی سعید گام مهمی را در حل مسئله برداشته است. مقدار $\frac{a}{t_2 - t_1}$ سرعتی را نشان می‌دهد که اگر متحرک در فاصله زمانی $[t_1 , t_2]$ به‌طور ثابت با آن سرعت حرکت می‌کرد به همان جایی می‌رسید که اکنون رسیده است. این مقدار را در فیزیک سرعت متوسط متحرک در فاصله زمانی $[t_1 , t_2]$ می‌نامند.

محسن : ما چگونه می‌توانیم از طریق سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای برسیم؟

سعید : اگر t_2 به t_1 نزدیک باشد، مقدار متوسط سرعت نیز باید به سرعت لحظه‌ای نزدیک باشد. بنابراین بهتر است ببینیم وقتی که t_2 به t_1 نزدیک می‌شود، سرعت متوسط به چه عددی نزدیک می‌شود؟

معلم : نکات خوبی را مطرح کردید، بیایید ببینیم که آیا با این روش می‌توانیم سرعت سقوط سنگ را در هر لحظه حساب کنیم.

فعالیت ۱

۱ــ در مسئله سقوط سنگ، پس از گذشت ۱ ثانیه سنگ در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار دارد؟

۲ــ اگر h عددی کوچک باشد در لحظه $۱ + h$ سنگ در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار دارد؟

۳ــ بین دو لحظه ۱ و $۱ + h$ سنگ چند متر حرکت کرده و این حرکت در چند ثانیه انجام شده است؟

۴ــ اگر h ناصفر باشد، سرعت متوسط سنگ بین دو لحظه ۱ و $۱ + h$ چقدر است؟

۵ــ اگر h منفی باشد لحظه $۱ + h$ چه معنایی دارد؟

۶ــ جدول زیر را تکمیل کنید.

h	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$-۰/۰۰۱$	$\rightarrow$	۰	$\leftarrow$	$۰/۰۰۱$	$۰/۰۱$	$۰/۱$
سرعت متوسط				$\rightarrow$	?	$\leftarrow$			

۷ــ اگر h ناصفر باشد و آن را به‌تدریج کوچک و کوچک‌تر کنیم و به صفر نزدیک کنیم، سرعت متوسط سنگ به چه عددی نزدیک می‌شود؟ این عدد چه چیزی را نشان می‌دهد؟

در فعالیت بالا سرعت متوسط سنگ بین دو لحظه ۱ و $۱ + h$ وابسته به مقدار h است و تابعی برحسب h می‌باشد که اگر آن را با $g(h)$ نشان دهیم داریم :

$$g(h) = \frac{(۱۶ - ۵ \times ۱^۲) - (۱۶ - ۵(۱ + h)^۲)}{h} = ۵h + ۱۰$$

توجه کنید که $g(h)$ فقط برای hهای ناصفر تعریف شده است و ما حق نداریم به‌جای h صفر قرار دهیم، با این حال ما دقیقاً می‌خواهیم بدانیم مقدار این تابع در $h = ۰$ چقدر باید باشد. (چرا؟).

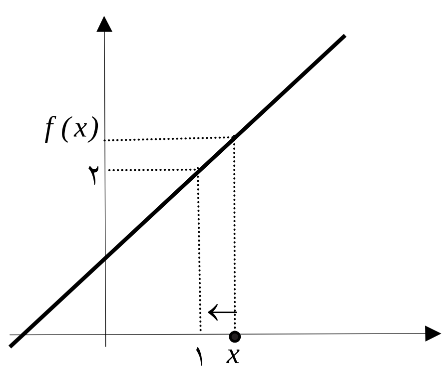
اگرچه ما حق نداریم جای h صفر قرار دهیم ولی می‌توانیم مقدارهای ناصفر کوچک جای h قرار دهیم و هر چقدر دلمان بخواهد آن را کوچک‌تر کنیم و بررسی کنیم مقدارهای $g(h)$ چگونه تغییر می‌کنند و آیا به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟

تمرین در کلاس

۱ـ برای تابع $f(x) = x + ۱$ جدول زیر را تکمیل کنید و سپس حدس بزنید که اگر مقدارهای x را به ۱ نزدیک کنیم مقدارهای $f(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	$\rightarrow$	۱	$\leftarrow$	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
$f(x)$				$\rightarrow$	?	$\leftarrow$			

۲ـ نمودار تابع $f(x) = x + ۱$ در زیر رسم شده است. از روی نمودار توضیح دهید وقتی مقدارهای x به ۱ نزدیک می‌شوند، مقدارهای $f(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند.



۳ـ برای توابع $g(x)=\dfrac{x^۲-۱}{x-۱}$ و $k(x)=\begin{cases} x+۱ & x\neq ۱ \\ ۵ & x=۱ \end{cases}$ نیز با رسم جدول و نمودار آن‌ها بررسی کنید وقتی مقدارهای x به ۱ نزدیک می‌شوند، مقدارهای $g(x)$ و $k(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند.

۴ـ سه تابع $f(x)$ و $g(x)$ و $k(x)$ با هم مساوی نیستند. این سه تابع چه تفاوت‌ها و چه شباهت‌هایی دارند و چه چیز باعث شده است که همهٔ آن‌ها با نزدیک شدن x به ۱ به عدد یکسانی نزدیک شوند؟

۵ـ جدول صفحهٔ بعد را تکمیل کنید و سپس حدس بزنید که وقتی مقدار x به صفر نزدیک می‌شود مقدار تابع $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ به چه عددی نزدیک می‌شود؟

x	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$-۰/۰۰۱$	$\rightarrow$	۰	$\leftarrow$	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
$sinx$							۰/۰۰۰۹۹۹۹۹	۰/۰۰۹۹۹۹	۰/۰۹۹۸۳
$\frac{\sin x}{x}$				$\rightarrow$	?	$\leftarrow$			

در تمرین‌های بالا با تابعی مانند $f(x)$ روبه‌رو بودیم که متغیر x (در دامنه f) به عددی مانند a نزدیک می‌شد و این سؤال مطرح بود که آیا مقدارهای $f(x)$ نیز به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟ این مفهوم را حدگیری از تابع f در نقطه a می‌نامند.

با توجه به مطالب فوق می‌توان گفت :

برای یک تابع f اگر مقدارهای x (در دامنه f) به عددی مانند a نزدیک شوند و مشاهده شود که مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند L نزدیک می‌شوند، گوییم تابع f در نقطه a حد دارد و حد آن برابر L است و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

عبارت بالا را به صورت «حد $f(x)$ در نقطه a برابر L است» بخوانید.

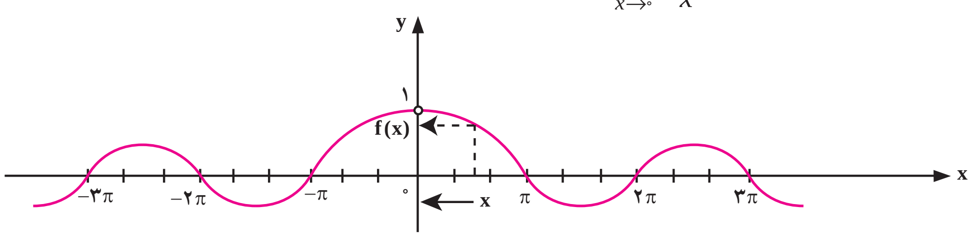
به بیان دیگر :

وقتی می‌نویسیم، $\lim_{x\to a} f(x)=L$ به معنی آن است که می‌توانیم فاصله $f(x)$ تا L را هر چقدر که بخواهیم کم کنیم، به شرط آنکه x در دامنه f به اندازه کافی به a نزدیک شود.

مثال

۱ : حد تابع $f(x)=\frac{x^۲-۱}{x-۱}$ در نقطه ۱ برابر ۲ است، $\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{x-۱}=۲$.

۲ : با محاسبه مقدارهای تقریبی تابع $y=\frac{\sin x}{x}$ برای مقدارهای x نزدیک صفر می‌توان حدس زد که حد آن در نقطه صفر برابر ۱ است، $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$.



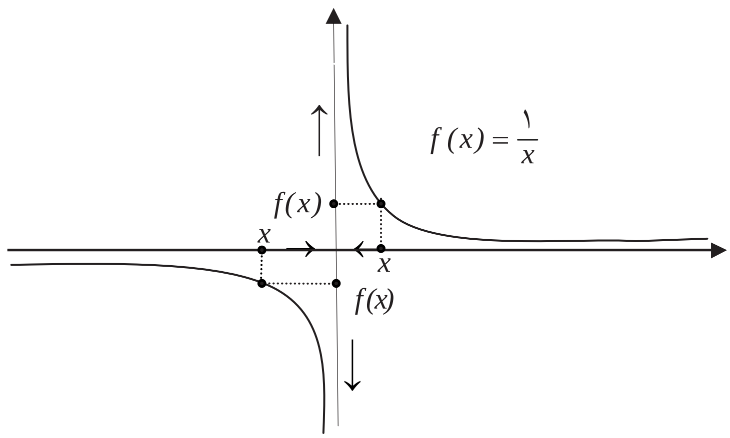
نمودار $f(x)=\frac{\sin x}{x}$

فعالیت ۲

۱ــ برای تابع $\frac{۱}{x}$ جدول زیر را تکمیل کنید و حد این تابع را در صفر بررسی کنید.

x	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$-۰/۰۰۱$	$\rightarrow$	۰	$\leftarrow$	$۰/۰۰۱$	$۰/۰۱$	$۰/۱$
$\frac{۱}{x}$				$\rightarrow$	$?$	$\leftarrow$			

۲ــ آیا مقدارهای $\frac{۱}{x}$ وقتی x به صفر نزدیک می‌شود، به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟ جواب خود را از طریق نمودار تابع $\frac{۱}{x}$ که در زیر آمده است توضیح دهید.



فعالیت بالا نشان می‌دهد این طور نیست که هر تابعی در هر نقطه‌ای حتماً حد داشته باشد. توابعی هستندکه مقدارهای آن‌ها، با نزدیک شدن x (در دامنه تابع) به عددی مانند a به هیچ عددی نزدیک نمی‌شوند. گوییم این‌گونه توابع در آن نقطه حد ندارند.

مثال

تابع $f(x)=\frac{x}{x^{۲}-۱}$ در نقاط ۱ و ۱− حد ندارد، زیرا با نزدیک شدن x به ۱ یا ۱− مقدارهای $\frac{x}{x^{۲}-۱}$ به هیچ عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند و از لحاظ قدرمطلق مرتباً افزایش می‌یابند.

حد چپ و حد راست

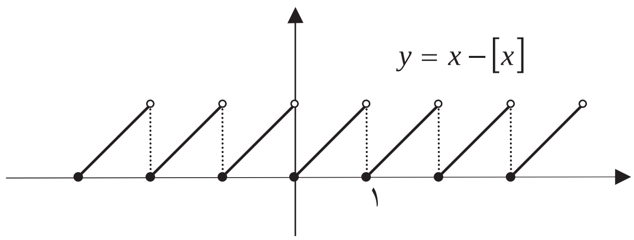
فعالیت ۳

۱ــ جدول زیر را برای تابع $f(x)=x-[x]$ تکمیل کنید.

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	$\rightarrow$	۱	$\leftarrow$	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
$f(x)$				$\rightarrow$	?	$\leftarrow$			

۲ــ اگر x با مقدارهای بزرگ‌تر از ۱ به ۱ نزدیک شود، آیا مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟ اگر x با مقدارهای کوچک‌تر از ۱ به ۱ نزدیک شود، آیا مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟ آیا این دوعدد یکی هستند؟

۳ــ نتایج خود را روی نمودار تابع $f(x)=x-[x]$ که در زیر آمده است توضیح دهید.



۴ــ آیا تابع $f(x)=x-[x]$ در ۱ حد دارد؟

حد راست

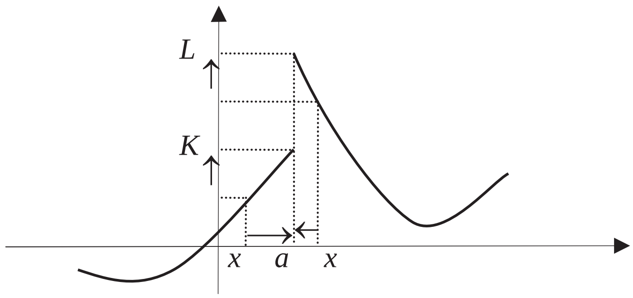
در یک تابع f اگر متغیر x (در دامنه f) با مقدارهای بزرگتر از عددی مانند a به a نزدیک شود و مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند L نزدیک شوند، گوییم تابع f در نقطه a حد راست دارد و مقدار این حد L است. این مطلب را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L$$

حد چپ

در یک تابع f اگر متغیر x (در دامنه f) با مقدارهای کوچکتر از عددی مانند a به a نزدیک شود و مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند K نزدیک شوند، گوییم تابع f در نقطه a حد چپ دارد و مقدار این حد K است. این مطلب را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

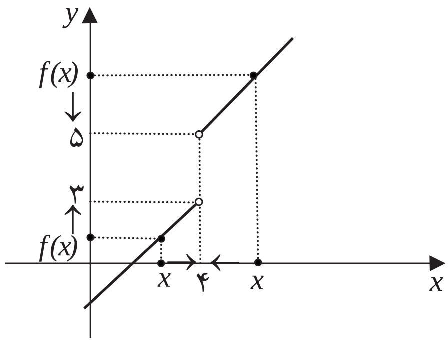
$$\lim_{x\to a^-} f(x)=K$$



مثال

۱ : نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x-1 & x<4 \\ x+1 & 4<x \end{cases}$ در زیر رسم شده است.

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x<4 \\ x+1 & 4<x \end{cases}$$



این تابع در نقطه $x=4$ تعریف نشده است و دیده می‌شود که با نزدیک شدن x به ۴ با مقدارهای بزرگ‌تر از ۴، مقدارهای $f(x)$ به ۵ نزدیک می‌شوند، یعنی

$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=5$$

هم‌چنین با نزدیک شدن x به ۴ با مقدارهای کوچکتر از ۴، مقدارهای $f(x)$ به ۳ نزدیک می‌شوند، یعنی $\lim_{x\to 4^-} f(x)=3$.
بنابراین، این تابع در ۴ حد ندارد.

تذکر : در علامت‌گذاری حد راست و چپ نمادهای «+» و «−» معنای راست و چپ دارند، نه مثبت و منفی.

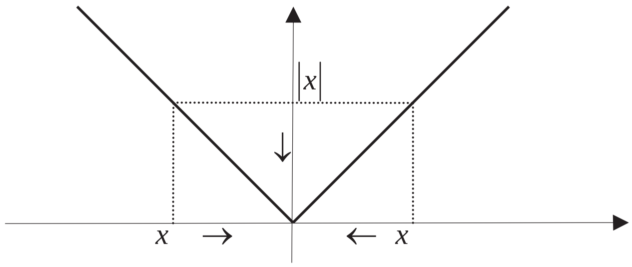
با توجه به مفهوم حدهای چپ و راست، قضیه زیر برقرار خواهد بود.

قضیه :

اگر تابعی در دو طرف نقطه‌ای تعریف شده باشد و در این نقطه حدهای چپ و راست متفاوت داشته باشد، در آن نقطه حد ندارد. اما اگر حدهای چپ و راست تابع در این نقطه موجود و مساوی باشند، تابع در آن نقطه حد دارد و حد آن همان مقدار مشترک حدهای چپ و راست است.

مثال

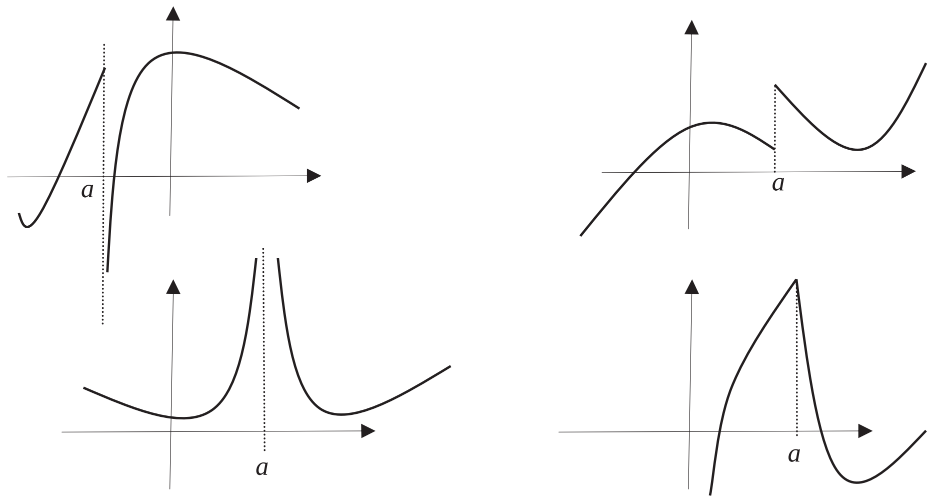
۲ : حد تابع $|x|$ را در صفر بررسی می‌کنیم.



با نزدیک شدن x به صفر چه از چپ و چه از راست $|x|$ به صفر نزدیک می‌شود، یعنی حد چپ و حد راست هر دو موجودند و برابر صفر می‌باشند، پس $\lim\limits_{x\to ۰}|x|=۰$.

تمرین در کلاس

۱ــ در زیر نمودار چند تابع داده شده است. در هر کدام از نمودارهای داده شده در نقطه مشخص شده وجود حدهای چپ و راست و وجود حد تابع را بررسی کنید.



۲ــ با رسم جدول و نمودار توابع زیر وجود حدهای چپ و راست و حد تابع را در نقطه داده شده بررسی کنید و مقدار این حدها را به‌دست آورید.

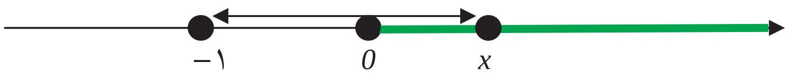
الف) $a=۳\ ,\ y=\sqrt{۱+x}$

ب) $a=۰\ ,\ y=\dfrac{x}{|x|}$

ج) $a=۲\ ,\ y=\begin{cases} x^{۲}-۱ & x<۲ \\ x+۱ & ۲<x \end{cases}$

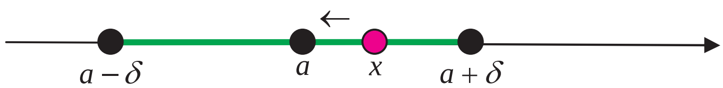
همسایگی‌های یک نقطه

آیا می‌توان از حد تابع $\sqrt{x}$ در نقطه ۱− صحبت کرد؟ شرط اصلی در بررسی حد یک تابع در یک نقطه مانند a آن است که بتوان از نقاط دامنه آن تابع به نقطه a نزدیک شد. اما دامنه تابع $\sqrt{x}$ بازه $[0\,,\infty)$ است و نمی‌توان از نقاط این بازه به ۱− نزدیک شد.



منظور از نزدیک شدن مقدارهای یک متغیر به یک نقطه مانند a آن است که بتوان مقدارهایی برای متغیر قرار داد که فاصله آن تا a از هر عدد انتخاب شده‌ای کمتر شود.

برای آن‌که بتوان از داخل دامنه تابعی، به نقطه‌ای مانند a از دو طرف (راست و چپ) نزدیک شد، دامنه آن تابع باید شامل یک بازه به صورت $(a-\delta\,, a+\delta)$ باشد. البته خود a لزومی ندارد در دامنه آن تابع باشد.



تعریف :

بازه‌های به صورت $(a-\delta\,, a+\delta)$ که δ عددی مثبت است را یک همسایگی a می‌نامند. اگر a را از این همسایگی حذف کنیم آن را یک همسایگی محذوف a می‌نامند.

تذکر :

شرط آن که بتوان از حد (دوطرفه) یک تابع در یک نقطه a صحبت کنیم آن است که آن تابع در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. در این حالت گوییم تابع در اطراف a تعریف شده است.

مثال

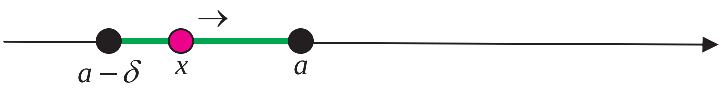
۱ : تابع $\sqrt{1-x^2}$ در اطراف صفر و خود صفر تعریف شده است. زیرا در همسایگی $(-1\,,1)$ از صفر تعریف شده است.

۲ : تابع $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ در اطراف صفر تعریف شده است اما در خود صفر تعریف نشده است زیرا دامنه تعریف آن یک همسایگی محذوف صفر را در بر دارد.

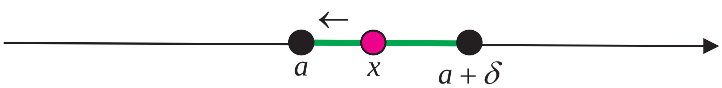
بحث در کلاس

آیا می‌توان از حد چپ یا راست تابع $\sqrt{1-x^2}$ در نقطه ۱ صحبت کرد؟

برای بررسی حد چپ یک تابع f در نقطه‌ای مانند a، متغیر x (در دامنه f) باید بتواند از چپ به a نزدیک شود. این به معنای آن است که دامنه f باید شامل بازه‌ای به‌صورت $(a-\delta\,,\,a)$ باشد. چنین بازه‌هایی را یک همسایگی چپ a نامیم و در این حالت گوییم تابع f در یک همسایگی چپ a تعریف شده است.



به‌طور مشابه، بازه‌های به‌صورت $(a\,,\,a+\delta)$ را یک همسایگی راست a نامیم و اگر دامنه تابعی شامل یک همسایگی راست a باشد، گوییم آن تابع در یک همسایگی راست a تعریف شده است.



مثال

۱ : تابع $\sqrt{1-x^2}$ در یک همسایگی چپ ۱ و در یک همسایگی راست ۱− تعریف شده است، اما دراطراف این دو نقطه تعریف نشده است.

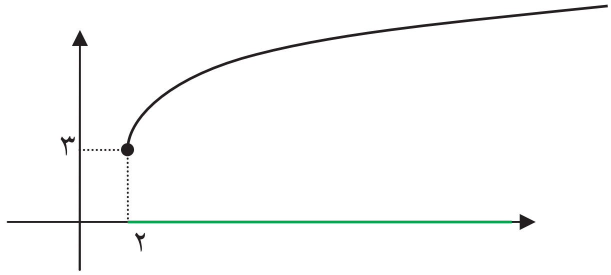
تذکر :

شرط آن که بتوان از حد چپ یک تابع در نقطه‌ای مانند a صحبت کرد آن است که آن تابع در یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد.

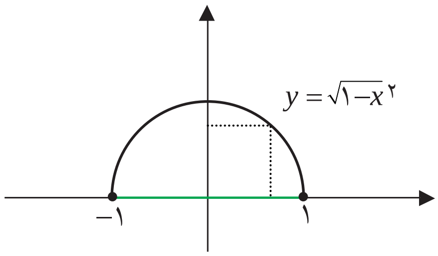
به‌طور مشابه، شرط آن که بتوان از حد راست یک تابع در نقطه‌ای مانند a صحبت کرد آن است که آن تابع در یک همسایگی راست a تعریف شده باشد.

مثال

۲ : تابع $\sqrt{x-۲}+۳$ در اطراف ۲ تعریف نشده است ولی در یک همسایگی راست ۲ تعریف شده است و می‌توانیم حد راست آن را در ۲ حساب کنیم که برابر ۳ است.



۳ : تابع $\sqrt{۱-x^۲}$ در اطراف ۱ تعریف نشده است ولی در یک همسایگی چپ ۱ تعریف شده است و می‌توانیم حد چپ آن را در ۱ حساب کنیم که برابر صفر است.



تمرین در کلاس

برای تابع $y=\dfrac{\sqrt{۹-x^۲}}{x-[x]}$ به سؤالات زیر جواب دهید.

۱ــ این تابع در همسایگی کدام نقاط تعریف شده است؟

۲ــ این تابع در همسایگی محذوف کدام نقاط تعریف شده است که در خود آن نقاط تعریف نشده است؟

۳ــ این تابع در یک همسایگی چپ کدام نقاط تعریف شده است که در هیچ همسایگی راست آن نقاط تعریف نشده است؟

۴ــ این تابع در یک همسایگی راست کدام نقاط تعریف شده است که در هیچ همسایگی چپ آن نقاط تعریف نشده است؟

تذکر :

اگر تابعی مانند f فقط در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، آنگاه نزدیک شدن به a از داخل دامنهٔ f فقط از راست امکان‌پذیر است، بنابراین منظور از حد f در a همان حد راست f در a است و نماد $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ به معنای $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ خواهد بود.

به‌طور مشابه اگر f فقط در یک همسایگی چپ نقطه a تعریف شده باشد، آنگاه نزدیک شدن به a از داخل دامنهٔ f فقط از چپ امکان‌پذیر است، بنابراین منظور از حد f در a همان حد چپ f در a است و نماد $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ به معنای $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ خواهد بود.

مثال

۱ : برای تابع $y=\sqrt{x}$ که نسبت به صفر فقط در یک همسایگی راست صفر تعریف شده است داریم :

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$$

۲ : برای تابع $y=\frac{1}{[x]-2}$ که نسبت به ۲ فقط در یک همسایگی چپ ۲ تعریف شده است داریم :

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{[x]-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{[x]-2}=\lim_{x\to 2^-}-1=-1$$

مسائل

۱ــ با رسم جدول مقدارهای توابع زیر در اطراف نقطه داده شده (در صورت لزوم از ماشین حساب استفاده کنید) بررسی کنید که آیا حد این توابع در آن نقطه موجود است؟ در صورت وجود مقدار حد را تعیین کنید و به زبان ریاضی بنویسید.

الف) $a=0\ ,\ y=\frac{x^2-x}{x}$ ب) $a=-1\ ,\ y=\begin{cases} x^2+1 & x<-1 \\ x^3+3 & -1<x \end{cases}$

ج) $a=2\ ,\ y=x[x]$ د) $a=0\ ,\ y=\sqrt{1-x^2}$

هـ) $a=1, y=\frac{\sqrt{|x(x-1)|}}{x^2-1}$ و) $a=0, y=\frac{1-\cos x}{x^2}$

۲ـ با رسم نمودار توابع زیر در اطراف نقطه داده شده وجود حد راست و حد چپ و مقدار حد را در آن نقاط بررسی کنید.

الف) $a = ۱/۲ \ , \ y = [x]$

ب) $a = ۲ , y = \begin{cases} x^۲ + ۱ & x < ۲ \\ ۶ & x = ۲ \\ -x^۲ + ۹ & ۲ < x \end{cases}$

ج) $a = ۲ \ , \ y = x - [x]$

د) $a = -۳ , y = ۱ - \sqrt{۱ - x}$

هـ) $a = ۰ , y = \dfrac{x}{|x|}$

۳ـ اگر دو تابع f و g در یک همسایگی محذوف نقطه‌ای مانند a بر هم منطبق باشند، توضیح دهید که چرا حد آن‌ها در نقطه a مانند یکدیگر است، یعنی اگر یکی از آن‌ها در a حد داشته باشد، دیگری هم حد دارد و حد آن‌ها مساوی است. همچنین اگر دو تابع f و g در یک همسایگی چپ (یا راست) نقطه‌ای برهم منطبق باشند، توضیح دهید که چرا حد چپ (راست) این دو تابع در این نقطه مانند یکدیگر است.

۴ـ در هر یک از حالت‌های زیر نمودار تابعی را رسم کنید که شرایط گفته شده را داشته باشد.

الف) تابع در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.

ب) تابع در ۱ تعریف نشده باشد ولی در یک همسایگی محذوف ۱ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.

ج) تابع در یک همسایگی صفر تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن غیر از مقدار تابع در صفر باشد.

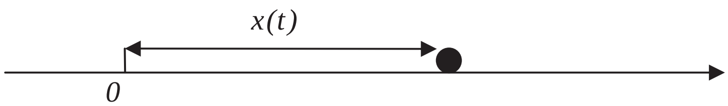
د) تابع در یک همسایگی ۱− تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد و حد تابع برابر مقدار تابع در ۱− باشد.

هـ) تابع در یک همسایگی راست ۲ تعریف شده باشد ولی در هیچ همسایگی چپ ۲ تعریف نشده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.

و) تابع در یک همسایگی محذوف صفر تعریف شده باشد و در صفر حد چپ و راست متفاوت داشته باشد.

ز) تابع در یک همسایگی محذوف صفر تعریف شده باشد و در صفر حد چپ داشته باشد ولی حد راست نداشته باشد.

۵ـ متحرکی روی محور xها به گونه‌ای حرکت می‌کند که در هر لحظه t $(۰ \le t)$ در مکان $x(t)$ قرار دارد و $x(t) = t^۲ - t$.



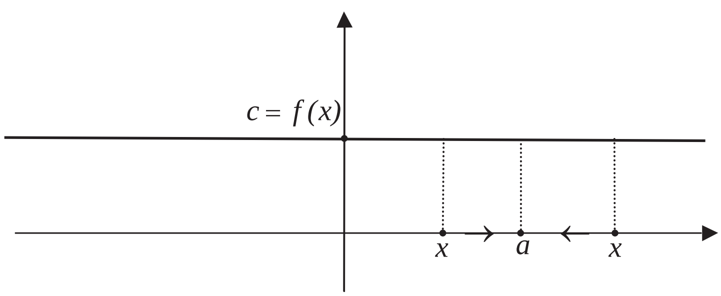
با رسم نمودار این تابع در دامنه داده شده چگونگی حرکت این متحرک را توصیف کنید و سرعت لحظه‌ای آن را در لحظه $t = ۲$ به‌دست آورید.

قضایای حد توابع

حد برخی توابع خاص را به‌سادگی می‌توان به‌دست آورد.

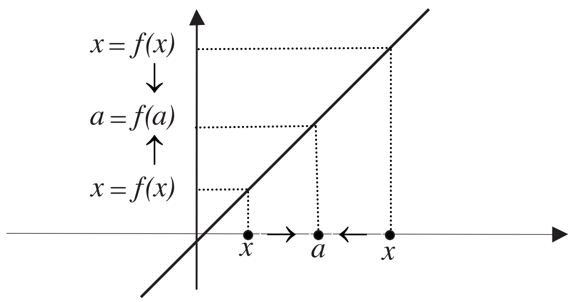
مثال

۱ : تابع ثابت $f(x) = c$ در همه نقاط حد دارد و حد آن در همه نقاط c است.



$$\lim_{x \to a} c = c$$

۲ : تابع $f(x) = x$ در همه نقاط حد دارد و حد آن در هر نقطه مانند a برابر a است.



$$\lim_{x \to a} x = a$$

بحث در کلاس

اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در اطراف نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشند و در این نقطه حد داشته باشند، آیا تابع $f(x) + g(x)$ نیز در a حد دارد؟ حد آن‌چه می‌تواند باشد؟ در مورد تابع $f(x)g(x)$ چه می‌توان گفت؟

فعالیت ۴

۱ــ دو تابع $f(x) = ۳ + ۲x$ و $g(x) = ۲ - x$ را در نظر بگیرید و توابع $f(x) + g(x)$ و $f(x)g(x)$ را بسازید.

۲ــ برای بررسی حد این چهار تابع در صفر جدول زیر را تکمیل کنید.

x	۰/۱- ۰/۰۱- ۰/۰۰۱- → ۰ ← ۰/۰۰۱ ۰/۰۱ ۰/۱
$f(x)$	→ ? ←
$g(x)$	→ ? ←
$f(x)+g(x)$	→ ? ←
$f(x)g(x)$	→ ? ←

۳ــ حد توابع $f(x)$ و $g(x)$ در صفر چیست؟

۴ــ حد توابع $f(x) + g(x)$ و $f(x)g(x)$ در صفر چیست؟

۵ــ چه ارتباطی بین حد توابع $f(x) + g(x)$ و $f(x)g(x)$ و حد توابع $f(x)$ و $g(x)$ می‌یابید؟

اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim_{x\to a} g(x)=K$ با نزدیک شدن مقدارهای x به a مقدارهای $f(x)$ به L و مقدارهای $g(x)$ به K نزدیک می‌شوند، پس مقدارهای $f(x) + g(x)$ به $L + K$ نزدیک می‌شوند و میزان نزدیک شدن از هر مقداری می‌تواند کمتر شود. پس تابع $f(x) + g(x)$ در a حد دارد و حد آن $L + K$ است. همچنین مقدارهای $f(x)g(x)$ به LK نزدیک می‌شوند و میزان نزدیک شدن از هر مقداری می‌تواند کمتر شود. پس تابع $f(x)g(x)$ در a حد دارد و حد آن LK است. به عبارت دیگر قضایای زیر برقرارند.

قضیه :

اگر دو تابع f و g روی دامنه یکسانی تعریف شده باشند و در نقطه a حد داشته باشند آن‌گاه توابع $f + g$ و $f.g$ نیز در a حد دارند و

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$$

مثال

۱ : تابع $y=x$ در هر نقطه‌ای مانند a حد دارد و حد آن a است بنابراین تابع $y=x^۲$ نیز در a حد دارد و حد آن $a^۲$ است، زیرا

$$\lim_{x\to a} x^۲ = (\lim_{x\to a} x)(\lim_{x\to a} x) = a.a = a^۲$$

۲ : دو تابع $y=x$ و $y=x^۲$ در هر عددی مانند a حد دارند و حد آن‌ها به ترتیب a و $a^۲$ است، بنابراین

$$\lim_{x\to a}(x^۲+x) = \lim_{x\to a} x^۲ + \lim_{x\to a} x = a^۲ + a$$

۳ : حد تابع $y=(x^۲+\frac{x}{۲})(x-۱)$ را در نقطه ۴ به‌دست می آوریم.

$$\lim_{x\to ۴}(x^۲+\frac{x}{۲})(x-۱) = \lim_{x\to ۴}(x^۲+\frac{x}{۲}).\lim_{x\to ۴}(x-۱) = (۴^۲+\frac{۴}{۲})(۴-۱) = ۵۴$$

توجه داشته باشید که اگر دو تابع با دامنه‌های غیر یکسان را جمع یا ضرب کنیم، ابتدا این دو تابع را روی دامنه‌های یکسان تحدید می‌کنیم و سپس در صورت امکان قضیه قبل را برای توابع تحدید یافته به‌کار می‌بریم.

تمرین در کلاس

۱ــ با استقرا ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم :

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n$$

۲ــ ثابت کنید برای هر تابع چندجمله‌ای مانند $P(x)$ داریم :

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$$

در بالا دیدیم که توابع چندجمله‌ای به‌گونه‌ای هستند که در هر نقطه حد دارند و حد آن‌ها همان مقدار تابع در آن نقاط است. بسیاری از توابع مهمی که تا این‌جا دیده‌ایم این خاصیت را دارند که بدون اثبات برخی از آن‌ها را در این‌جا بیان می کنیم. با رسم نمودار این توابع می‌توانید درستی حدهای زیر را توجیه کنید.

$$\lim_{x\to a} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{a}$$ $a \geq ۰$ است وقتی عدد k زوج باشد

$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$$

$$\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$$

$$\lim_{x\to a} b^x = b^a$$

در حدگیری‌های بالا، a نقطه‌ای از دامنه تابع است.

بحث در کلاس

اگرتابع $f(x)$ در اطراف نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد و در a حد داشته باشد، آیا تابع $\frac{1}{f(x)}$ نیز در a حد دارد؟ حد آن چه می‌تواند باشد؟

فعالیت ۵

۱ــ تابع $f(x) = 2x - 1$ را در نظر بگیرید. برای بررسی حد دو تابع $f(x)$ و $\frac{1}{f(x)}$ در نقطه ۲ جدول زیر را تکمیل کنید.

x	۱/۹ ۱/۹۹ ۱/۹۹۹ $\rightarrow$ $\leftarrow$ ۲/۰۰۱ ۲/۰۱ ۲/۱
$f(x)$	$\rightarrow$? $\leftarrow$
$\frac{1}{f(x)}$	$\rightarrow$? $\leftarrow$

۲ــ حدهای دو تابع $f(x)$ و $\frac{1}{f(x)}$ در نقطه ۲ چه مقدار هستند و چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۳ــ برای بررسی حد دو تابع $f(x)$ و $\frac{1}{f(x)}$ در نقطه $\frac{1}{2}$ جدول زیر را تکمیل کنید.

x	۰/۴ ۰/۴۹ ۰/۴۹۹ $\rightarrow$ $\leftarrow$ ۰/۵۰۱ ۰/۵۱ ۰/۶
$f(x)$	$\rightarrow$? $\leftarrow$
$\frac{1}{f(x)}$	$\rightarrow$? $\leftarrow$

۴ــ آیا حدی برای $\frac{1}{f(x)}$ می‌یابید؟ دلیل آن را چه می‌دانید؟

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ به معنای آن است که با نزدیک شدن مقدارهای x (در دامنه f) به a مقدارهای $f(x)$ به L نزدیک می‌شوند.

اگر $L = 0$ مقدارهای $\frac{1}{f(x)}$ از لحاظ قدرمطلق در حال افزایش هستند و به هیچ عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند و تابع $\frac{1}{f(x)}$ در a حد نخواهد داشت. اما اگر $L \neq 0$ مقدارهای $\frac{1}{f(x)}$ به عدد $\frac{1}{L}$ نزدیک می‌شوند و میزان نزدیک شدن از هر مقداری می‌تواند کمتر

شود. پس در این حالت تابع $\frac{1}{f(x)}$ در a حد دارد و حد آن $\frac{1}{L}$ است. بنابراین می‌توانیم قضیه زیر را بیان کنیم.

قضیه :

اگر $\lim_{x\to a} f(x)\neq 0$ آن‌گاه $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\lim_{x\to a} f(x)}$

مثال

۱ : حد تابع $y=\frac{1}{\sin x}$ را در $\frac{\pi}{4}$ حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}$$

۲ : حد تابع $y=\frac{x}{x^2+1}$ را در $x=-1$ حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to-1}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to-1} x\frac{1}{x^2+1}=\lim_{x\to-1} x\lim_{x\to-1}\frac{1}{x^2+1}=-1\times\frac{1}{\lim_{x\to-1} x^2+1}=-\frac{1}{2}$$

۳ : حد تابع $f(x)=\frac{1}{1+\cos x}$ را در π بررسی می‌کنیم. از آن‌جا که $\lim_{x\to\pi}(1+\cos x)=0$ تابع $f(x)$ در $x=\pi$ حد ندارد.

تمرین در کلاس

۱ــ حد توابع زیر را در نقطه داده شده در صورت وجود بیابید.

الف) $y=\cos^2 x+x^2$ در π ب) $y=\frac{\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}}$ در ۴

ج) $y=\frac{x\sin x}{(1+x)\cos x}$ در π د) $y=2^{x+1}-3^{2x}$ در ۲

۲ــ اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ دامنه یکسانی داشته باشند و در a حد داشته باشند، نشان دهید تابع $f(x)-g(x)$ نیز در a حد دارد و

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)$$

۳ــ اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ دامنه یکسانی داشته باشند و در a حد داشته باشند و $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$ نشان دهید تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ نیز در a حد دارد و

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

محاسبه حد در توابع کسری

در محاسبه بسیاری از حدهای مهم به حالتی برخورد می‌کنیم که تابع به‌صورت $\frac{f(x)}{g(x)}$ است و حد صورت و مخرج در نقطه موردنظر صفر است. قضایای بالا هیچ کمکی برای محاسبه حد این‌گونه توابع نمی‌کنند. این حالت را اصطلاحاً حالت $\frac{0}{0}$ می‌نامند. برای محاسبه حد این‌گونه توابع (در صورت وجود) یکی از راه‌ها، ساده‌سازی این کسر و تبدیل آن به حالتی است که عمل محاسبه حد طبق قضایای بالا امکان‌پذیر باشد.

مثال

۱ : حد تابع $y=\frac{\sin 2x}{\sin x}$ را در ۰ بررسی می‌کنیم.
در حالت $\frac{0}{0}$ قرار داریم و لازم است ابتدا یک ساده‌سازی از کسر به عمل آوریم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}2\cos x=2$$

۲ : حد تابع $y=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ را در ۱ بررسی می‌کنیم.

محاسبه این حد به‌طور مستقیم امکان‌پذیر نیست، ولی می‌توانیم آن را به شکل زیر ساده کنیم و سپس حد را حساب کنیم.

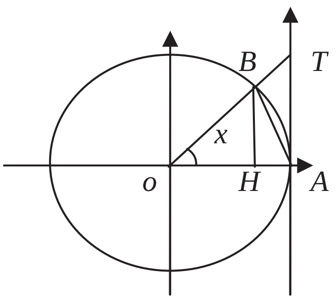
$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)=2$$

اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند و در محاسبه حد $\frac{P(x)}{Q(x)}$ در نقطه a در حالت $\frac{0}{0}$ باشیم، این به معنای آن است که $P(a)=0$ و $Q(a)=0$. یعنی صورت و مخرج بر $x-a$ بخش‌پذیرند و می‌توان کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را ساده کرد و عامل $x-a$ را از صورت و مخرج حذف کرد. با ادامه این عملیات در صورت وجود حد، می‌توان آن را محاسبه کرد.

یکی از حدهای مهم حد تابع $\frac{\sin x}{x}$ در ۰ است. این حد نیز از حالات $\frac{0}{0}$ است ولی نمی‌توان با ساده کردن معمولی این کسر، حد آن را حساب کرد. قبلاً با محاسبات تقریبی تابع $\frac{\sin x}{x}$ در نزدیکی‌های صفر حدس زده‌ایم که حد آن ۱ است ولی در این‌جا می‌خواهیم استدلال دقیق‌تری برای آن بیابیم.

فعالیت ۶

شکل مقابل یک دایره مثلثاتی را نشان می‌دهد.



۱ــ مساحت‌های مثلث‌های OBA و OTA و قطاع OBA از دایره را برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه (مثبت) x (برحسب رادیان) و خود زاویه x محاسبه کنید و نشان دهید :

$$\frac{1}{2}\sin x \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}\tan x$$

۲ــ نتیجه بگیرید برای مقدارهای کوچک و مثبت x داریم :

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

۳ــ با نزدیک شدن x به صفر $\frac{1}{\cos x}$ به چه عددی نزدیک می‌شود؟ با نزدیک شدن x به صفر برای تابع $\frac{x}{\sin x}$ چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ حد راست $\frac{x}{\sin x}$ در صفر چقدر است؟

۴ــ با توجه به زوج بودن تابع $\frac{x}{\sin x}$ حد چپ آن در صفر چیست؟ حد این تابع در صفر چقدر است؟

۵ــ نتیجه بگیرید $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

مثال

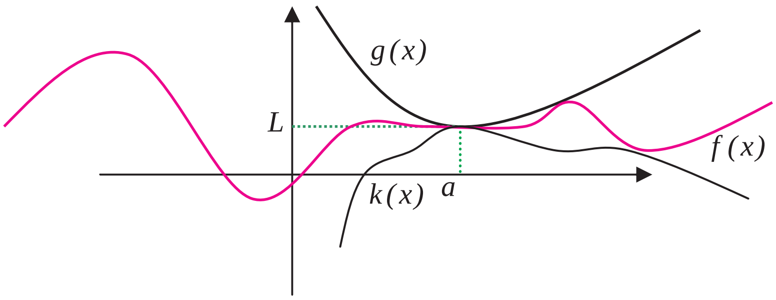
۱ : حد تابع $y=\frac{1-\cos 2x}{x^2}$ را در ۰ حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2$$

در فعالیت قبل برای یافتن حد تابع $\frac{x}{\sin x}$ دیدیم که این تابع بین تابع $\frac{۱}{\cos x}$ و تابع ثابت ۱ قرار گرفته است و این دو تابع در صفر حد یکسان ۱ دارند. از این نکته نتیجه می‌شود که تابع $\frac{x}{\sin x}$ نیز به ناچار با نزدیک شدن x به صفر باید به ۱ نزدیک شود. این مطلب در حالت کلی هم درست است که آن را قضیه افشردگی می‌نامند.

قضیه :

اگر تابعی مانند $f(x)$ در یک همسایگی محذوف نقطه‌ای مانند a بین دو تابع $g(x)$ و $k(x)$ قرار گیرد، مثلاً $k(x)\le f(x)\le g(x)$، و g و k در نقطه a دارای حد یکسان L باشند، نتیجه می‌شود $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$.



مثال

۲ : حد تابع $x\cos\frac{۱}{x}$ را در صفر حساب می‌کنیم.

از آن‌جا که $-۱\le \cos\frac{۱}{x}\le ۱$ برای مقدارهای مثبت x داریم $-x\le x\cos\frac{۱}{x}\le x$ و برای مقدارهای منفی x داریم $x\le x\cos\frac{۱}{x}\le -x$. توابعی که در دو طرف نامساوی هستند در صفر حد یکسان صفر دارند، پس $\lim\limits_{x\to ۰} x\cos\frac{۱}{x}=۰$

مسائل

۱ــ حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{x-۴}{\sqrt{x}-۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^n-۱}{x-۱}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{x^۲+\sin^۲ x}{x^۲}$

د) $\lim\limits_{x\to -۱}\frac{x^۳+x+۲}{x^۲-۱}$

هـ) $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\sqrt{x+1}$

و) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$

ز) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$

ح) $\lim_{x\to \pi} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin\frac{x}{2}}$

ط) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$

۲ــ ثابت کنید که $\lim_{x\to a} f(x)=L$ معادل با آن است که $\lim_{x\to a}(f(x)-L)=0$.

۳ــ با توجه به ایده شهودی حد تابع توضیح دهید که چرا دو شرط $\lim_{x\to a} f(x)=0$ و $\lim_{x\to a} |f(x)|=0$ با یکدیگر معادلند.

۴ــ اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابعی باشند که در اطراف نقطه a تعریف شده‌اند و f در a حد دارد ولی g در a حد ندارد، نشان دهید $f+g$ در a حد ندارد.

۵ــ دو تابع f و g مثال بزنید که در اطراف صفر تعریف شده‌اند و هیچ‌کدام در صفر حد ندارند ولی $f+g$ در صفر حد دارد.

۶ــ دو تابع f و g مثال بزنید که در اطراف a تعریف شده‌اند و f در a حد داشته باشد ولی g در a حد نداشته باشد، با این‌حال fg در a حد داشته باشد.

۷ــ آیا تابع $\sin\frac{1}{x}$ در اطراف صفر تعریف شده است؟ آیا این تابع در صفر حد دارد؟ درستی نامساوی زیر را ثابت کنید.

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|$$

با توجه به این نامساوی در مورد حد تابع $x\sin\frac{1}{x}$ در صفر اظهارنظر کنید و دلیل درستی نظر خود را توضیح دهید.

پیوستگی توابع

فعالیت ۷

۱ــ نمودار دو تابع $f(x)=x+1$ و $g(x)=\begin{cases} x+1 & x\neq 2 \\ 1 & x=2 \end{cases}$ را رسم کنید.

۲ــ حد این دو تابع را در نقطه ۲ به‌دست آورید.

۳ــ این دو تابع چه شباهت‌ها و چه تفاوت‌هایی دارند و چرا حد آن‌ها در نقطه ۲ با هم مساوی است؟

۴ــ حد این دو تابع در نقطه ۲ با مقدارهای این دو تابع در نقطه ۲ چه رابطه‌ای دارند؟

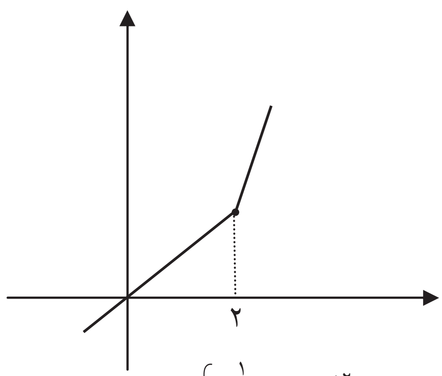
۵ــ یکسانی حد f و مقدار f در نقطه ۲ و تفاوت حد g و مقدار g در نقطه ۲، موجب پیدایش کدام ویژگی در نمودار این دو تابع شده است.

در بررسی حد یک تابع در یک نقطه، لزومی ندارد تابع در آن نقطه تعریف شده باشد، اما اگر تابع در آن نقطه تعریف شده باشد در صورت وجود حد، دو حالت ممکن است رخ دهد.

الف) حد تابع در آن نقطه مساوی مقدار تابع در آن نقطه است.

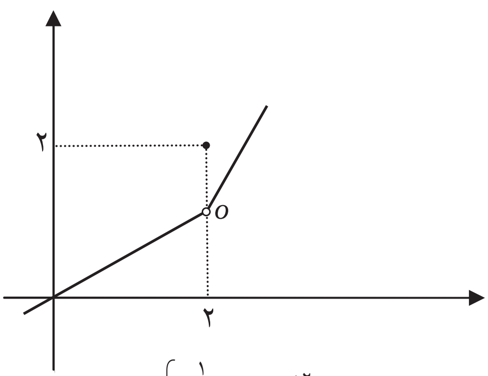
ب) حد تابع در آن نقطه مساوی مقدار تابع در آن نقطه نیست.

برای مثال، این دو حالت در نمودار توابع زیر نشان داده شده‌اند.



$$y=\begin{cases} \frac{1}{2}x & x<2 \\ 1 & x=2 \\ 2x-3 & 2<x \end{cases}$$

حالت (الف)



$$y=\begin{cases} \frac{1}{2}x & x<2 \\ 2 & x=2 \\ 2x-3 & 2<x \end{cases}$$

حالت (ب)

همان‌طور که مشاهده می‌شود در حالت (الف) نمودار تابع یک‌پارچه و به هم پیوسته است ولی در حالت (ب) نمودار تابع از هم گسسته شده است. علت این موضوع آن است که در حالت (الف) حد تابع در هر نقطه برابر مقدار تابع در همان نقطه است ولی در حالت (ب) در نقطه ۲ حد تابع و مقدار تابع مساوی نیستند. به همین خاطر تعریف زیر بنا می‌شود.

تعریف :

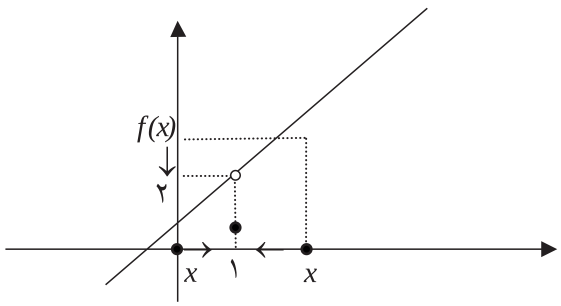
فرض کنید تابع f در نقطه a و در یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) a تعریف شده باشد. اگر حد این تابع در a موجود و برابر $f(a)$ باشد، یعنی $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$، گوییم تابع f در a پیوسته است.

مثال

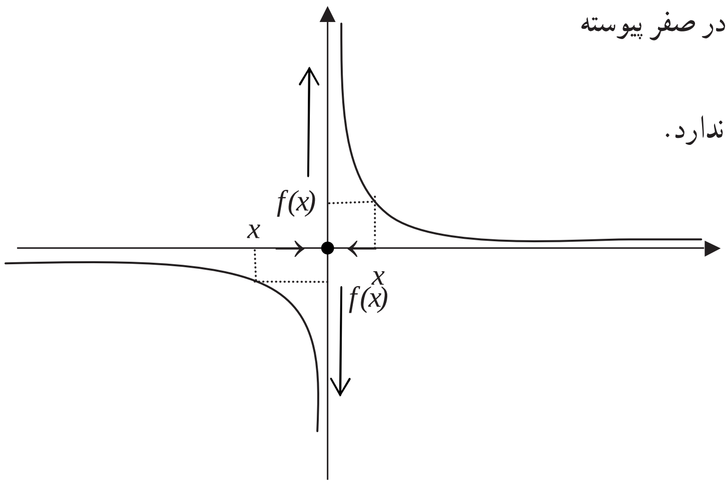
۱ : توابع چندجمله‌ای در هر نقطه‌ای پیوسته‌اند، زیرا قبلاً دیدیم که برای هر تابع چندجمله‌ای $P(x)$ در هر نقطه a داریم : $\lim\limits_{x\to a} P(x)=P(a)$.

۲ : توابع $\sqrt[k]{x}, \sin x, \cos x, b^x$ در همه نقاط دامنه خود پیوسته‌اند.

۳ : تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x\neq 1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$ در نقطه ۱ پیوسته نیست، زیرا حد آن در نقطه ۱ برابر ۲ است ولی $f(1)=1$.



۴ : تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ در صفر پیوسته نیست، زیرا این تابع در صفر حد ندارد.



۵ : تابع $f(x)=\sqrt{x-۱}$ در نقطه ۱ پیوسته است. زیرا در نقطه ۱ حد دارد و حد آن برابر مقدار تابع در ۱ است.

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to ۱}\sqrt{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\sqrt{x-۱}=۰=f(۱)$$

توجه داشته باشید که پیوستگی توابع در نقاط انتهایی دامنه خود به‌معنای آن است که حد چپ یا راست تابع در آن نقطه برابر مقدار تابع در آن نقطه باشد.

آیا تابع $f(x)=\frac{x^۲-۱}{x-۱}$ در ۱ پیوسته است؟ از پیوستگی این تابع در ۱ نمی‌توانیم صحبت کنیم چون این تابع در ۱ تعریف نشده است. شرط صحبت از پیوستگی یا ناپیوستگی یک تابع در یک نقطه آن است که تابع در آن نقطه و یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) آن نقطه تعریف شده باشد.

تمرین در کلاس

با رسم نمودار توابع زیر، پیوستگی آن‌ها را در نقطه داده شده بررسی کنید.

۱ـ $y=\frac{۱}{x}$ در نقطه دلخواه $a\neq ۰$

۲ـ $y=\begin{cases} x^۲+x & x\leq ۰ \\ x^۲-x & ۰<x \end{cases}$ در نقطه $a=۰$

۳ـ $y=\begin{cases} \frac{۱}{x} & x\leq -۱ \\ x+۱ & -۱<x \end{cases}$ در نقطه $a=-۱$

۴ ـ $y=[x]$ با دامنه $[-۱, ۱]$ در نقطه $a=-۱$

تعریف :

اگر تابعی در تمام نقاط دامنه خود پیوسته باشد، آن را تابعی پیوسته می‌نامند.

مثال

۱ : توابع چندجمله‌ای و $b^x, \cos x, \sin x, \sqrt[k]{x}$ در همه نقاط دامنه خود پیوسته‌اند و در نتیجه توابعی پیوسته‌اند.

۲ : تابع $y=\frac{1}{x}$ پیوسته است زیرا در تمام نقاط دامنه خود پیوسته است. (صفر در دامنه این تابع نیست)

۳ : تابع $y=[x]$ که روی IR تعریف شده است در نقاط صحیح ناپیوسته است. اما اگر تابع $y=[x]$ را با دامنه $[0,2]$ درنظر بگیریم، این تابع در نقطه صفر پیوسته است ولی در نقاط ۱ و ۲ هم‌چنان ناپیوسته است.

اگر $f(x)$ تابعی با مقدارهای مثبت باشد و تابع $\sqrt{f(x)}$ را بسازیم و $f(x)$ در نقطه‌ای مانند a حدی برابر L داشته باشد، آیا تابع $\sqrt{f(x)}$ نیز در a حد دارد؟ آیا حد آن $\sqrt{L}$ می شود؟

$\sqrt{t}$ تابعی پیوسته است و اگر مقدارهای t به عددی مانند L نزدیک شوند مقدارهای $\sqrt{t}$ نیز به $\sqrt{L}$ نزدیک می‌شوند. با نزدیک شدن مقدارهای x به a، مقدارهای $f(x)$ به L نزدیک می‌شوند، در نتیجه مقدارهای $\sqrt{f(x)}$ به $\sqrt{L}$ نزدیک می‌شوند، یعنی تابع $\sqrt{f(x)}$ در a حد دارد و حد آن $\sqrt{L}$ است. به عبارت دیگر :

قضیه :

اگر $f(x)$ تابعی با مقدارهای نامنفی باشد و در نقطه‌ای مانند a حد داشته باشد، آنگاه $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}$.

علت درستی رابطه بالا پیوستگی تابع $y=\sqrt{x}$ است و مطلب بالا برای هر تابع پیوسته دیگری هم برقرار است. اگر $g(x)$ تابعی پیوسته و $f(x)$ تابعی باشد که در نقطه‌ای مانند a حدی برابر L داشته باشد و ترکیب $g(f(x))$ قابل انجام باشد (برد f زیرمجموعهٔ دامنه g باشد) و L در دامنه g باشد، آنگاه تابع $g(f(x))$ نیز در a حد دارد و حد آن $g(L)$ است. به عبارت دیگر با شرایط بالا داریم :

$$\lim_{x\to a} g(f(x))=g(\lim_{x\to a} f(x))$$

مثال

۴ : حد تابع $y=\sqrt{\sin x}$ را در نقطه $\frac{\pi}{۶}$ می‌یابیم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}} \sqrt{\sin x} = \sqrt{\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}} \sin x} = \sqrt{\frac{۱}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۵ : حد تابع $\sin\sqrt{\pi^۲ - x^۲}$ را در نقطه $a=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}\pi$ می‌یابیم.

$$\lim_{x\to a} \sin\sqrt{\pi^۲ - x^۲} = \sin(\lim_{x\to a} \sqrt{\pi^۲ - x^۲}) = \sin\sqrt{\lim_{x\to a}(\pi^۲ - x^۲)}$$

$$= \sin\sqrt{\pi^۲ - \frac{۸\pi^۲}{۹}} = \sin\sqrt{\frac{\pi^۲}{۹}} = \sin\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

مسائل

۱ــ با رسم نمودار توابع زیر تعیین کنید کدام‌یک از آن‌ها ناپیوستگی دارند و در چه نقاطی ناپیوسته‌اند؟

الف) $y=|x-۱|+۲$ ب) $y=x+[x]$

ج) $y=x+|x|$ د) $y=\begin{cases} x(x-۱) & x\le ۱ \\ -x+۲ & ۱<x \end{cases}$

۲ــ در تابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع پیوسته باشد.

$$y=\begin{cases} x^۲-ax+۱ & x\le ۱ \\ x-۲a & ۱<x \end{cases}$$

۳ــ ثابت کنید به ازای هیچ مقداری برای a تابع زیر پیوسته نخواهد بود.

$$y=\begin{cases} \frac{ax}{|x|} & x\ne ۰ \\ ۱ & x=۰ \end{cases}$$

۴ــ نمودار یک تابع را رسم کنید که در صفر ناپیوسته باشد ولی در صفر حد داشته باشد.

۵ــ نمودار یک تابع را رسم کنید که در دو نقطه صفر و ۱ ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد.

۶ــ اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابع پیوسته‌ای با دامنه یکسان باشند، نشان دهید توابع $f(x)+g(x)$ و $f(x)g(x)$ نیز پیوسته‌اند. در مورد پیوستگی $\frac{f(x)}{g(x)}$ چه می‌توان گفت؟

۷ــ اگر f و g توابع پیوسته‌ای با دامنه IR باشند در مورد پیوستگی تابع $g\circ f$ چه می‌توان گفت؟