

فصل ۵

۱. خط مماس بر منحنی‌ها و مشتق توابع
۲. روش‌های محاسبه مشتق توابع
۳. آهنگ تغییرات
۴. مشتق توابع مثلثاتی
۵. مشتق تابع وارون و توابع مرکب

وقتی هواپیما موشکی را شلیک می‌کند، موشک خط مستقیمی را طی می‌کند که مماس بر مسیر حرکت هواپیما است.

مشتق توابع





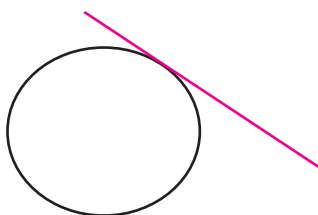
خط مماس بر منحنی‌ها و مشتق توابع

حل یک مسئله



چگونه خط مماس بر یک منحنی را به دست آوریم؟

قبلاً با مفهوم خط مماس بر یک دایره آشنا شده‌ایم.



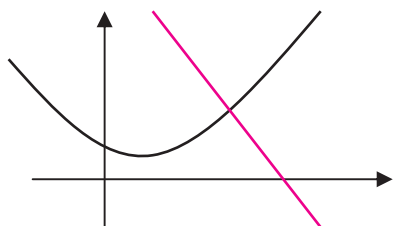
برای آن که خطی در نقطه‌ای بر دایره‌ای مماس باشد کافی است یکی از دو ویژگی‌های زیر برقرار باشد.
الف) خط و دایره فقط و فقط در آن نقطه برخورد داشته باشند.

ب) خط و دایره در آن نقطه برخورد داشته باشند و کل دایره در یک طرف خط قرار بگیرد.

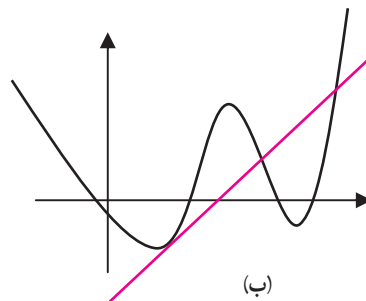
آیا از این ویژگی‌ها می‌توان برای به دست آوردن خط مماس بر منحنی‌های دیگر هم استفاده کرد؟

به شکل‌های زیر توجه کنید و در هر مورد حدس بزنید که آیا خط داده شده در نقطه تقاطع با منحنی، مماس بر آن منحنی محسوب

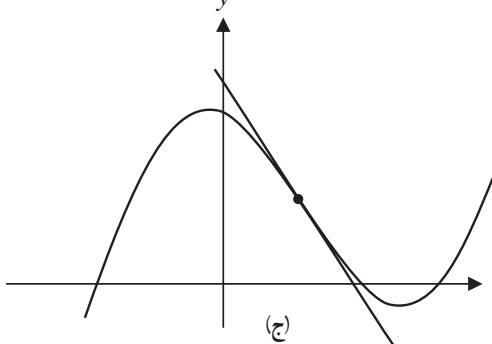
می‌شود یا نه، و کدام یک از دو ویژگی بالا را دارد.



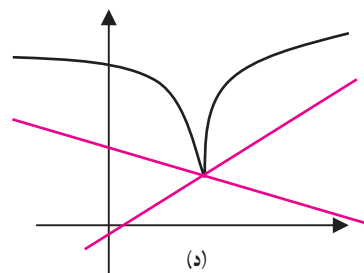
(الف)



(ب)



(ج)



(د)



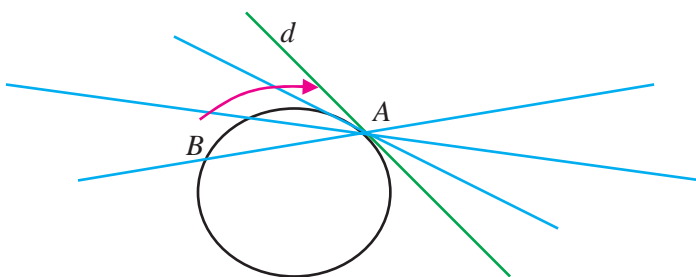
در تجربه صفحه قبل ممکن است حدس‌هایی درست یا نادرست زده باشید. اما این تجربه نشان می‌دهد که شرایط مماس بودن یک خط بر یک منحنی دلخواه با شرایط مماس بودن یک خط بر دایره فرق می‌کند، زیرا دایره منحنی خاصی است و لزومی ندارد برای یک منحنی دلخواه شرایط مماس بودن خط بر منحنی مانند حالت دایره باشد. باید مفهوم خط مماس بر دایره را به شکل دیگری به دست آوریم که برای یک منحنی دلخواه هم قابل قبول باشد.



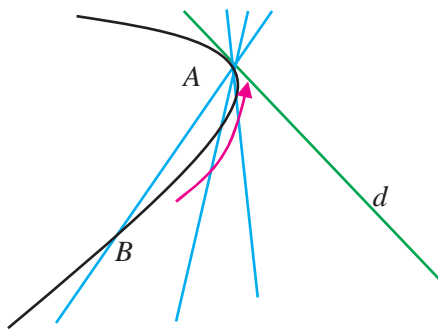
فعالیت ۱



۱- نقطه A را روی دایره زیر به طور ثابت در نظر بگیرید. نقطه دیگری روی دایره مانند B در نظر بگیرید و خط AB را رسم می‌کنیم. نقطه B را روی دایره به نقطه A نزدیک می‌کنیم. خط AB به چه خطی نزدیک می‌شود؟



۲- در منحنی دلخواه زیر، نقطه‌ای مانند A به طور ثابت در نظر بگیرید. نقطه دیگری روی منحنی مانند B در نظر بگیرید و خط AB را رسم می‌کنیم. نقطه B را روی منحنی به نقطه A نزدیک می‌کنیم. خط AB به چه خطی نزدیک می‌شود؟



فعالیت بالا نشان می‌دهد که برای یافتن خط مماس بر یک منحنی در نقطه‌ای مانند A باید نقطه‌ای مانند B روی منحنی در نزدیکی A در نظر بگیریم و با رسم خط AB ، نقطه B را به نقطه A نزدیک کنیم و ببینیم که آیا این خط‌ها به خط خاصی نزدیک می‌شوند. این عمل دقیقاً یک عمل حدگیری است.

از خط مماس بر یک منحنی در یک نقطه، یک نقطه از خط مشخص است (همان نقطه‌ای که خط در آن نقطه بر منحنی مماس



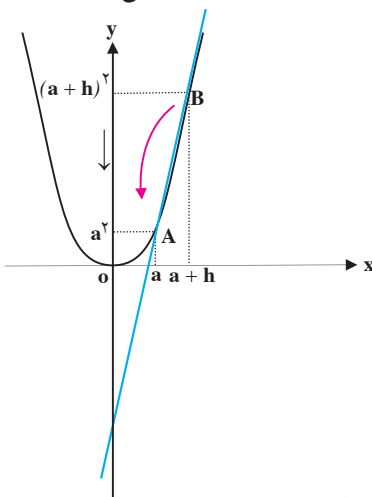
می‌شود)، پس برای مشخص کردن این خط، کافی است شیب آن را مشخص کنیم و شیب با یک عمل حدگیری به دست می‌آید.



فعالیت ۲

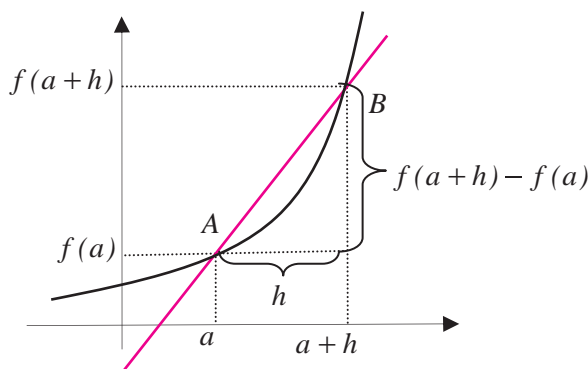


روی نمودار تابع $f(x) = x^2$ نقطه ثابت $A(a, a^2)$ را در نظر بگیرید. برای یک عدد حقیقی کوچک و ناصفر h (مثبت یا منفی) نقطه $B(a+h, (a+h)^2)$ را روی نمودار تابع در نزدیکی A در نظر بگیرید.



- ۱- شیب خط AB را حساب کنید که تابعی از h است.
- ۲- با نزدیک شدن h به صفر نقطه B به چه نقطه‌ای نزدیک می‌شود؟
- ۳- با نزدیک شدن h به صفر شیب خط AB به چه مقداری نزدیک می‌شود؟
- ۴- شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^2$ در نقطه $A(a, a^2)$ چقدر است؟

محاسبات فعالیت بالا را در مورد هر تابع دیگری هم می‌توانیم انجام دهیم. تابع دلخواه $f(x)$ و نقطه ثابت $A(a, f(a))$ را روی نمودار آن در نظر می‌گیریم. برای یک عدد حقیقی کوچک و ناصفر h (مثبت یا منفی) نقطه $B(a+h, f(a+h))$ را روی نمودار تابع در نزدیکی A در نظر می‌گیریم.





شکل صفحه قبل نشان می‌دهد که شیب خط AB برابر است با $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. اگر با نزدیک شدن h به صفر این کسر به عدد خاصی نزدیک شود، این عدد همان شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $A(a, f(a))$ خواهد بود به عبارت دیگر:

مقدار بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در a می‌نامند و با $f'(a)$ نشان می‌دهند.

تعریف:

اگر f تابعی باشد که در یک همسایگی نقطه a تعریف شده است، در این صورت حد زیر را (در صورت وجود)، مشتق تابع f در a می‌نامند و با $f'(a)$ نشان می‌دهند.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

اگر حد بالا موجود نباشد، گوئیم f در a مشتق پذیر نیست.



مثال

۱: مشتق تابع $f(x) = x^3$ را در نقطه دلخواه a حساب می‌کنیم و به کمک آن معادله خط مماس بر نمودار تابع را در نقطه $A(1, 1)$ به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3a^2 + 3ah + h^2) = 3a^2 \end{aligned}$$

از آنجا که $f'(1) = 3$ ، شیب خط مماس بر نمودار این تابع در نقطه $A(1, 1)$ برابر ۳ می‌باشد و معادله خط مماس عبارت است از: $y - 1 = 3(x - 1)$.

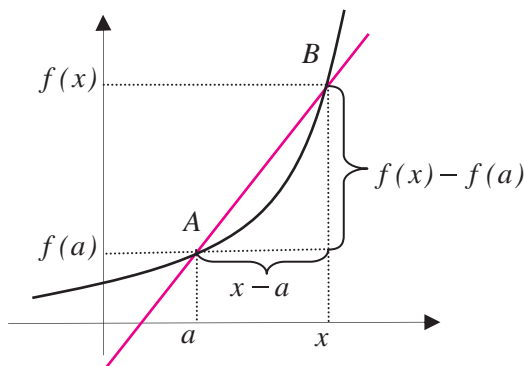
۲: مشتق تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نقطه دلخواه $a \neq 0$ حساب می‌کنیم و به کمک آن معادله خط مماس بر نمودار تابع را در نقطه $A(2, \frac{1}{2})$ به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{a(a+h)} = \frac{-1}{a^2} \end{aligned}$$



از آنجا که $f'(2) = \frac{-1}{4}$ ، شیب خط مماس بر نمودار این تابع در نقطه $A(2, \frac{1}{4})$ برابر $\frac{-1}{4}$ می‌باشد و معادله خط مماس عبارت است از: $y - \frac{1}{4} = \frac{-1}{4}(x - 2)$.

برای محاسبه مشتق یک تابع گاهی مناسب‌تر است نقطه B نزدیک نقطه $A(a, f(a))$ را به صورت $B(x, f(x))$ در نظر بگیریم.



در این حالت شیب خط AB برابر است با $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ و برای محاسبه مشتق f در a باید حد این کسر را در $x = a$ بیابیم، یعنی

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

۳: مشتق تابع $y(x) = \sqrt{x}$ را در نقطه $a > 0$ حساب می‌کنیم.

$$y'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

تعریف:

اگر f تابعی باشد که در تمام نقاط دامنه خود مشتق پذیر است، $f'(x)$ یک تابع را نشان می‌دهد که آن را تابع مشتق می‌نامند.



مثال

۴: اگر $f(x) = x^2$ آنگاه تابع مشتق آن به صورت $f'(x) = 2x$ است.

برخی توابع در همه نقاط دامنه خود مشتق پذیر نیستند، در این صورت دامنه تابع مشتق فقط از نقاطی تشکیل



می‌شود که تابع در آن نقاط مشتق پذیر باشد.

۵: تابع $y(x) = \sqrt{x}$ در همهٔ نقاط بازه $(0, \infty)$ مشتق پذیر است و تابع مشتق آن $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ است.

تمرین در کلاس



مشتق پذیری و مشتق تابع $f(x) = |x|$ را در همهٔ نقاط بررسی کنید و تابع مشتق آن را به دست آورید.

برای محاسبه مشتق یک تابع f در نقطه‌ای مانند a باید حد زیر را (در صورت وجود) حساب کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

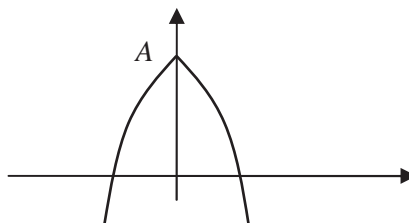
در برخی موارد ممکن است حد بالا موجود نباشد ولی حدهای چپ و راست آن موجود باشند.

فعالیت ۳

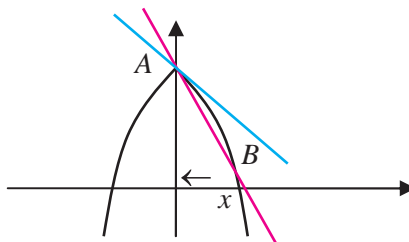


تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$y(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + 4 & x \leq 0 \\ -(x+1)^2 + 4 & 0 < x \end{cases}$$

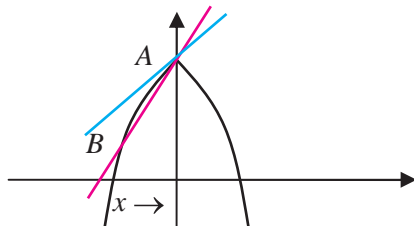


۱- نقطه $A(0, 4)$ ، و نقطه $B(x, f(x))$ را سمت راست A در نظر بگیرید و حد شیب خط AB را وقتی B به A نزدیک می‌شود حساب کنید.





۲- نقطه B را سمت چپ A در نظر بگیرید و حد شیب خط AB را وقتی B به A نزدیک می‌شود حساب کنید.



۳- آیا این تابع در $x = 0$ مشتق پذیر است؟ خط‌هایی که از نقطه A می‌گذرند و شیب آن‌ها اعدادی است که در بندهای قبل به دست آورده‌اید چه وضعیتی نسبت به نمودار تابع دارند؟

تعریف:

اگر تابع f در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، حد راست $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ در $x=a$ را (در صورت وجود) مشتق راست f در a می‌نامند و یا $f'_+(a)$ نشان می‌دهند.

به‌طور مشابه، اگر تابع f در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، حد چپ $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ در $x=a$ را (در صورت وجود) مشتق چپ f در a می‌نامند و با $f'_-(a)$ نشان می‌دهند.

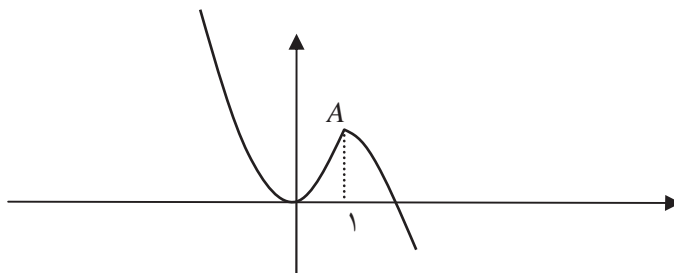
مشتق پذیری یک تابع در یک نقطه درونی مانند a معادل با آن است که مشتق‌های چپ و راست تابع در آن نقطه موجود و با هم مساویند. برای یک تابع مانند $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ، طبق قرارداد مشتق پذیری f در a به معنای وجود مشتق راست f در a و مشتق پذیری f در b به معنای وجود مشتق چپ f در b است.



مثال

نمودار تابع $k(x) = \begin{cases} 2x^2 & x \leq 1 \\ -x^2 + 3 & 1 < x \end{cases}$ در زیر رسم شده است. پیوستگی و مشتق پذیری آن را در $x = 1$

بررسی می‌کنیم.





از روی شکل می‌توان حدس زد که تابع در $x = 1$ باید پیوسته باشد. برای بررسی درستی این حدس، حد تابع را در $x = 1$ بررسی می‌کنیم. از آنجا که وضعیت تابع در سمت چپ و راست ۱ متفاوت است حدهای چپ و راست تابع را در $x = 1$ جداگانه حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -x^2 + 3 = -1 + 3 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x^2 = 2$$

دیده می‌شود که حد تابع $k(x)$ در $x = 1$ موجود است و برابر $k(1)$ است، پس تابع $k(x)$ در $x = 1$ پیوسته است. برای بررسی مشتق پذیری از روی شکل می‌توان حدس زد نمودار تابع در سمت چپ و راست نقطه $A(1, 2)$ متفاوت است و مماس‌های متفاوت دارد. بنابراین مشتق‌های چپ و راست تابع $k(x)$ را جداگانه محاسبه می‌کنیم.

$$k'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{k(x) - k(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x^2 + 3 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x^2 + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} -(x + 1) = -2$$

$$k'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{k(x) - k(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2(x + 1) = 4$$

دیده می‌شود که مشتق‌های چپ و راست تابع $k(x)$ در $x = 1$ موجودند ولی مساوی نیستند. بنابراین این تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست و خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه موجود نیست.

تمرین در کلاس



۱- مشتق تابع $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ را در نقطه ۱- حساب کنید و به کمک آن، معادله خط مماس بر نمودار این تابع را در نقطه $A(-1, 0)$ بنویسید. تابع مشتق g را بیابید و دامنه آن را تعیین کنید.

۲- تابعی بسازید که در $x = 2$ پیوسته باشد و در این نقطه مشتق‌های چپ و راست متفاوت داشته باشد.

۳- فرض کنید $f(x)$ تابعی باشد و به ازای عدد دلخواهی مانند b تابع $g(x)$ را به صورت $g(x) = f(x - b)$ تعریف می‌کنیم.

الف) از طریق نموداری نشان دهید که اگر خط مماس بر نمودار تابع g در نقطه a وجود داشته باشد، آنگاه خط مماس بر نمودار f در نقطه $a - b$ موجود است و این دو خط با هم موازیند.

ب) با محاسبه جبری نشان دهید که اگر g در نقطه a مشتق پذیر باشد آنگاه f در نقطه $a - b$ مشتق پذیر است و $g'(a) = f'(a - b)$.



ج) با محاسبه جبری نشان دهید که اگر $f(x)$ در همه نقاط دامنه خود مشتق پذیر باشد، آنگاه $g(x)$ نیز در همه نقاط دامنه خود مشتق پذیر است و برای هر مقدار x (در دامنه g) داریم: $g'(x) = f'(x-b)$.

مثال

۱: مشتق تابع $y(x) = \frac{1}{x+b}$ را حساب می‌کنیم.

اگر قرار دهیم $f(x) = \frac{1}{x}$ داریم $y(x) = f(x+b)$ بنابراین

$$y'(x) = f'(x+b) = -\frac{1}{(x+b)^2}$$

۲: مشتق تابع $y(x) = \sqrt{x-b}$ را حساب می‌کنیم.

اگر قرار دهیم $f(x) = \sqrt{x}$ داریم $y(x) = f(x-b)$. محاسبه نشان می‌دهد که $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ بنابراین

$$y'(x) = f'(x-b) = \frac{1}{2\sqrt{x-b}}$$

شاید این سؤال برای شما مطرح شده باشد که مشتق پذیری و پیوستگی چه فرقی با هم دارند. آیا هر تابع پیوسته‌ای مشتق پذیر است؟ آیا هر تابع مشتق پذیری پیوسته است؟

پیوستگی به معنای مشتق پذیری نیست. در مثال‌ها دیدید که یک تابع ممکن است در نقطه‌ای پیوسته باشد ولی در آن نقطه مشتق پذیر نباشد. اما از مشتق پذیری یک تابع در یک نقطه می‌توان پیوستگی آن تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت. در فصل قبل دیدیم که پیوستگی یک تابع مانند f در نقطه‌ای مانند a به معنای آن است که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. این تساوی معادل با آن است که $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$ و ما می‌توانیم درستی این تساوی را از شرط مشتق پذیری f در a به دست آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = f'(a) \times 0 = 0$$

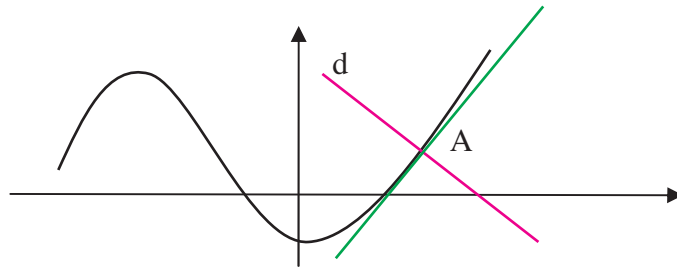
با این استدلال می‌توانیم قضیه صفحه بعد را به دست آوریم.



قضیه :

اگر تابعی در نقطه‌ای مشتق پذیر باشد در آن نقطه پیوسته نیز خواهد بود.

فرض کنید خطی مانند d نمودار تابعی مانند f را در نقطه‌ای مانند $A(a, f(a))$ قطع کند.



گوئیم این خط بر نمودار تابع در نقطه A عمود است، هرگاه d بر خط مماس بر نمودار تابع در A عمود باشد. اگر شیب خط d برابر

$$m \text{ باشد، شرط عمود بودن معادل با آن است که } m = -\frac{1}{f'(a)}$$



مثال

معادله خط قائم بر نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ که در نقطه $A(2, \frac{1}{4})$ این منحنی را قطع می‌کند به دست می‌آوریم.

شیب این خط $-\frac{1}{f'(2)}$ است. از آنجا که $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ داریم $f'(2) = -\frac{1}{4}$ ، پس شیب خط قائم برابر است با ۴. نقطه A روی این خط است، بنابراین معادله این خط عبارت است از:

$$y - \frac{1}{4} = 4(x - 2)$$



مسائل



۱- مشتق توابع زیر را در یک نقطه دلخواه a از دامنه آن‌ها تعیین کنید.

(الف) $f(x) = c$ (ب) $g(x) = 3x + 5$ (ج) $x(t) = t^4$

(د) $y(u) = \frac{u}{1+u}$ (ه) $k(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

۲- معادله خط مماس و خط عمود بر نمودار توابع زیر را در نقطه داده شده به دست آورید.

(الف) $x = 1$ ، $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (ب) $x = -1$ ، $y(x) = \sqrt{4-x^2}$



۳- نمودار توابع زیر را رسم کنید و حدس بزنید این توابع در چه نقاطی مشتق پذیر نیستند و در این نقاط مشتق‌های چپ و راست را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$y(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 0 \\ -x^2 + 1 & 0 < x \end{cases} \quad \text{(ب)} \quad y(x) = 2|x+1| \quad \text{(الف)}$$

$$y(x) = -|x| + |x-1| \quad \text{(د)} \quad y(x) = |1-x^2| \quad \text{(ج)}$$

۴- نمودار تابع $y(x) = \sqrt{x}$ را رسم کنید. اگر خط $y=2x$ را به موازات خود در صفحه بالا و پایین ببریم آیا جایی پیدا می‌شود که خط جا به جا شده بر نمودار این تابع مماس شود؟ در کدام نقاط این اتفاق می‌افتد؟
 ۵- فرض کنید $f(x)$ تابعی مشتق پذیر در نقطه‌ای مانند a باشد. به ازای عدد دلخواهی مانند b تابع $g(x)$ را به صورت $g(x) = f(x) + b$ تعریف می‌کنیم. از طریق نموداری و وجود خط مماس بر نمودار f در نقطه به طول a نشان دهید g نیز در a مشتق پذیر است و $g'(a) = f'(a)$. از طریق حدگیری و محاسبه نیز درستی این تساوی را به دست آورید.

۶- از مبدأ به نقاط مختلف نمودار تابع $f(x) = x^2 + 1$ خط رسم می‌کنیم. آیا نقطه یا نقاطی یافت می‌شوند که خط رسم شده بر نمودار این تابع مماس شود؟ در کدام نقاط این اتفاق می‌افتد؟ درستی محاسبات خود را با رسم نمودار این تابع بررسی کنید.

۷- فرض کنید $f(x)$ تابعی مشتق پذیر باشد و a عددی حقیقی باشد، با محاسبه و حدگیری نشان دهید تابع $g(x) = f(ax)$ نیز مشتق پذیر است و $g'(x) = af'(ax)$.

روش‌های محاسبه مشتق توابع

در مثال‌ها و تمرین‌های صفحات قبل مشتق برخی از توابع را حساب کرده‌ایم. برای مثال مشتق برخی توابع خاص را در زیر محاسبه می‌کنیم.

۱- اگر $f(x) = c$ تابع ثابت باشد، مشتق آن در هر نقطه صفر است، یعنی برای هر مقداری از x ، $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

۲- اگر $f(x) = x^n$ که n عددی طبیعی است، مشتق آن برای هر مقدار x به صورت $f'(x) = nx^{n-1}$ است.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$$



$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1})}{x-a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}) = a^{n-1} + a^{n-1} + \dots + a^{n-1} = na^{n-1}$$

۳- اگر $f(x) = \sqrt{x}$ در مثال‌های قبل دیدیم که برای هر مقدار مثبت x داریم $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.



فعالیت ۴



۱- مشتق دو تابع $f(x) = x$ و $g(x) = x^2$ را در یک نقطه دلخواه مانند a می‌شناسید. مشتق تابع $f + g$ را در همین نقطه a حساب کنید.

۲- چه ارتباطی بین $(f+g)'(a)$ و $f'(a)$ و $g'(a)$ مشاهده می‌کنید.

۳- آیا این ارتباط برای هر دو تابع دیگری هم برقرار است؟

فرض کنید دو تابع f و g در نقطه‌ای مانند a مشتق پذیر باشند. می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا تابع $f+g$ نیز در a مشتق پذیر است.

$$\begin{aligned} (f+g)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f+g)(a+h) - (f+g)(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + g(a+h) - f(a) - g(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) + g(a+h) - g(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = f'(a) + g'(a) \end{aligned}$$

محاسبه بالا نشان می‌دهد که $f+g$ نیز در a مشتق پذیر است و مشتق آن مجموع مشتق‌های f و g در a است. بنابراین قضیه زیر برقرار است.

قضیه:

اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای مانند a مشتق پذیر باشند، تابع $f+g$ نیز در a مشتق پذیر است و

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$



مثال

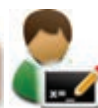
۱: مشتق تابع $y = x^3 + \sqrt{x}$ را در یک عدد مثبت x حساب می‌کنیم.

$$(x^3 + \sqrt{x})' = (x^3)' + (\sqrt{x})' = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

۲: مشتق تابع $y = \frac{x^5 + 1}{x}$ را در یک عدد ناصفر x حساب می‌کنیم.

$$\left(\frac{x^5 + 1}{x}\right)' = \left(x^4 + \frac{1}{x}\right)' = (x^4)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 4x^3 - \frac{1}{x^2}$$

تمرین در کلاس



۱- مشتق تابع $y = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ را در یک عدد مثبت a حساب کنید.

۲- اگر f تابع مشتق‌پذیری در نقطه a باشد و c عدد دلخواهی باشد، با محاسبه نشان دهید تابع cf نیز در نقطه a مشتق‌پذیر است و $(cf)'(a) = cf'(a)$.

۳- اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای مانند a مشتق‌پذیر باشند، نشان دهید تابع $f-g$ نیز در a مشتق‌پذیر است و $(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$.

۴- برای سه تابع f و g و k که همگی در نقطه‌ای مانند a مشتق‌پذیرند، نشان دهید $f+g+k$ نیز در a مشتق‌پذیر است و $(f+g+k)'(a) = f'(a) + g'(a) + k'(a)$. آیا این تساوی برای جمع تعداد بیشتری از توابع نیز درست است؟

دیدیم که اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای مانند a مشتق‌پذیر باشند، تابع $f+g$ نیز در a مشتق‌پذیر است. یک سؤال مهم آن است که آیا fg نیز در a مشتق‌پذیر است و مشتق آن چه خواهد بود؟ شاید اولین حدس این باشد که fg در a مشتق‌پذیر است و $(fg)'(a) = f'(a)g'(a)$. اما نادرستی این تساوی را در یک مثال می‌توانید مشاهده کنید. مثلاً برای دو تابع $f(x) = 1$ ، $g(x) = x$ نادرستی آن تساوی را بررسی کنید. برای یافتن مشتق تابع fg در a بهتر است مستقیماً آن را محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned} (fg)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a))g(x) + f(a)(g(x) - g(a))}{x - a} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(x) + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \rightarrow a} g(x) + f(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\
 &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a)
 \end{aligned}$$

این محاسبه نشان می‌دهد که قضیه زیر برقرار است.

قضیه :

اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای مانند a مشتق پذیر باشند، تابع fg نیز در a مشتق پذیر است و

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$


مثال

۱: مشتق تابع $x^3 \sqrt{x}$ را در یک عدد مثبت x حساب می‌کنیم.

$$(x^3 \sqrt{x})' = (x^3)' \sqrt{x} + x^3 (\sqrt{x})' = 3x^2 \sqrt{x} + x^3 \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

۲: مشتق تابع $\frac{1}{x^2}$ را در یک عدد ناصفر x حساب می‌کنیم.

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-2}{x^3}$$

تمرین در کلاس



۱- اگر $f(x)$ تابع مشتق پذیری باشد، با استفاده از فرمول مشتق حاصلضرب دو تابع نشان دهید

$$((f(x))^2)' = 2f(x)f'(x)$$

در حالت کلی تر (با استقرا) برای یک عدد طبیعی n نشان دهید:

$$((f(x))^n)' = nf(x)^{n-1} f'(x)$$

۲- اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابع مشتق پذیری باشند و بتوانیم تابع $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ را تشکیل دهیم داریم $k(x)g(x) = f(x)$. با فرض آن که می‌دانیم $k(x)$ تابعی مشتق پذیر است، با استفاده از فرمول مشتق حاصلضرب دو تابع نشان دهید:

$$k'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

در مسائل آخر این بخش ثابت خواهید کرد که $k(x)$ حتماً مشتق پذیر است.



مثال

۱: مشتق تابع $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ را در یک مقدار دلخواه $x \neq 1$ حساب می‌کنیم.

$$f'(x) = \frac{(x^2)'(x-1) - (x-1)'x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

۲: تابع مشتق تابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ را حساب می‌کنیم.

$$f'(x) = \frac{(x)'\sqrt{x+1} - (\sqrt{x+1})'x}{(\sqrt{x+1})^2} = \frac{\sqrt{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}x}{x+1} = \frac{2(x+1) - x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{x+2}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

مسائل

۱- مشتق توابع زیر را در یک نقطه دلخواه حساب کنید.

(الف) $y = x^4 - \frac{1}{x^4} - \sqrt{3}$ (ب) $y = (x^3 - x^2 - 1)(x - \sqrt{x} + 5)$

(ج) $y = (2x+1)(4-3x)(x^2+x+5)$ (د) $y = \frac{2}{x^3-1}$ (ه) $y = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$

۲- نقاطی از نمودار تابع $y(x) = x^3 - 2x - 6$ را معین کنید که مماس بر نمودار تابع در این نقاط موازی نیمساز ربع اول و سوم باشد. در چند نقطه این اتفاق می‌افتد؟

۳- نمودار تابع $y(x) = -4x^2 + 16x + 1$ را رسم کنید. به کمک مشتق تابع معین کنید در چه نقاطی از این نمودار، مماس بر نمودار تابع موازی محور x ها است. در چند نقطه این اتفاق می‌افتد؟ این نقطه چه ویژگی خاصی دارد؟

۴- نمودار تابع $y = x^2$ را رسم کنید. اگر خط دلخواهی را که موازی محور y ها نیست به موازات خود در صفحه بالا و پایین ببریم آیا جایی پیدا می‌شود که خط جا به جا شده بر نمودار این تابع مماس شود؟ در چند نقطه این اتفاق می‌افتد؟ جواب را از طریق هندسی حدس بزنید و حدس خود را با محاسبات جبری ثابت کنید. همین مسئله را برای تابع $y(x) = \sqrt{|x|}$ تکرار کنید.

۵- نقطه‌ای در صفحه بیابید که از آن نقطه دو خط مماس بر سهمی $y = x^2$ بتوان رسم کرد و این خط‌ها بر هم عمود باشند. این مسئله چند جواب دارد؟ مجموعه جواب‌های این مسئله را ترسیم کنید.



- ۶- اگر f تابعی باشد که در یک همسایگی نقطه a تعریف شده باشد و ناصفر باشد و f در a مشتق پذیر باشد، با استفاده از تعریف نشان دهید که $\frac{1}{f}$ نیز در a مشتق پذیر است و $(\frac{1}{f})'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$. نتیجه بگیرید که برای دو تابع f و g که در a مشتق پذیرند و $g(a) \neq 0$ ، تابع $\frac{f}{g}$ در a مشتق پذیر است.
- ۷- برای تابع $f(x) = \sqrt[k]{x} = x^{\frac{1}{k}}$ روی دامنه $(0, \infty)$ داریم $(f(x))^k = x$. با فرض آن که می‌دانیم $f(x)$ تابعی مشتق پذیر است، با محاسبه مشتق طرفین ثابت کنید $f'(x) = \frac{1}{k}x^{\frac{1}{k}-1}$.
- ۸- اگر r عدد گویای مثبتی باشد به کمک مسئله قبل نشان دهید تابع $y(x) = x^r$ که روی اعداد مثبت تعریف شده است، مشتق پذیر است و $y'(x) = rx^{r-1}$. سپس درستی این رابطه را برای اعداد گویای منفی هم به دست آورید.
- ۹- مشتق تابع $y = 6\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[4]{x}$ را حساب کنید.

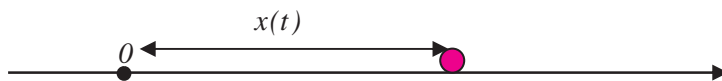
آهنگ تغییرات



فعالیت ۵



متحرکی روی محور x ها طبق ضابطه $x(t) = t^2 - t$ حرکت می‌کند. یعنی متحرک در لحظه t در مکان $x(t)$ قرار دارد. $x(t)$ را تابع حرکت متحرک می‌نامند.



- ۱- لحظه t_0 را به طور ثابت در نظر بگیرید. سرعت متوسط متحرک بین دو زمان $t_0 + h$ و t_0 (عدد h ناصفر و کوچک) را بنویسید.
- ۲- با نزدیک کردن h به صفر مقدار بالا به چه عددی نزدیک می‌شود؟
- ۳- عدد بالا با مشتق تابع $x(t)$ چه رابطه‌ای دارد؟
- ۴- سرعت این متحرک در هر لحظه با مشتق تابع $x(t)$ چه رابطه‌ای دارد؟

اگر متحرکی روی یک محور طبق تابع حرکت $x(t)$ حرکت کند، سرعت متوسط آن بین دو لحظه $t_0 + h$ و t_0 برابر است با

$$\frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}$$



با نزدیک کردن h به صفر، اگر کسر بالا به عددی نزدیک شود، این عدد همان سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظه t است. از طرف دیگر، این عدد همان حد کسر بالا در $h=0$ است که قبلاً آن را مشتق $x(t)$ در t نامیده‌ایم. بنابراین:

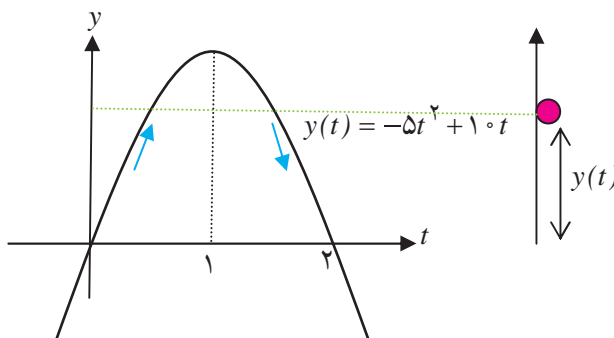
قضیه:

اگر $x(t)$ تابع حرکت متحرکی روی محور باشد، سرعت آن در هر لحظه t برابر است با $x'(t)$.



مثال

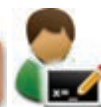
مثال: اگر سیبی را در راستای عمودی به بالا پرتاب کنیم، ابتدا رو به بالا حرکت می‌کند و سپس به زمین باز می‌گردد. تابع حرکت این سیب می‌تواند به شکل $y(t) = -5t^2 + 10t$ باشد. t را بر حسب ثانیه و $y(t)$ را بر حسب متر در نظر بگیرید.



نمودار $y(t)$ نشان می‌دهد که سیب در لحظه‌های صفر و ۲ در زمین قرار دارد و بین این دو لحظه از زمین به طرف بالا رفته و پس از مدتی به زمین برگشته است. دامنه اعتبار تابع $y(t)$ فاصله $[0, 2]$ است، زیرا خارج از این فاصله حرکت سیب با این تابع انجام نمی‌شود.

مشتق $y(t)$ در یک لحظه دلخواه به صورت $y'(t) = -10t + 10$ است. از آنجا که $y'(0) = 10$ ، سرعت سیب در شروع حرکت ۱۰ متر بر ثانیه است. با افزایش t مقدار $y'(t)$ کم می‌شود تا در لحظه $t = 1$ صفر می‌شود. یعنی سیب در این لحظه یک ایست‌آنی دارد. این همان لحظه‌ای است که سیب به بالاترین ارتفاع خود رسیده است. برای $t > 1$ ، $y'(t)$ منفی می‌شود که به معنای آن است که سیب رو به پایین در حال حرکت است. از آنجا که $y'(2) = -10$ ، سرعت سیب در موقع برخورد با زمین همان ۱۰ متر بر ثانیه است ولی جهت حرکت رو به پایین است.

تمرین در کلاس



۱- تابع حرکت متحرکی روی محور x ها به صورت $x(t) = 1$ است. شیوه حرکت متحرک را توصیف کنید. سرعت حرکت متحرک در هر لحظه چقدر است؟ مشتق $x(t)$ در هر لحظه چقدر است؟

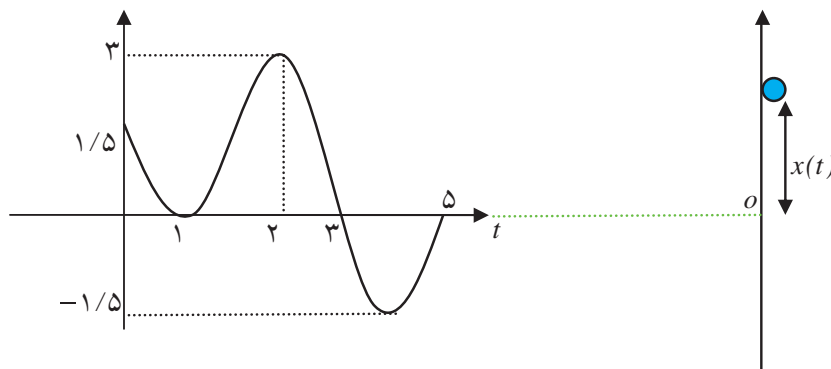


۲- تابع حرکت متحرکی روی محور x ها به صورت $x(t) = 2t + 1$ است. شیوه حرکت متحرک را توصیف کنید. سرعت حرکت متحرک در هر لحظه چقدر است؟ مشتق $x(t)$ در هر لحظه چقدر است؟

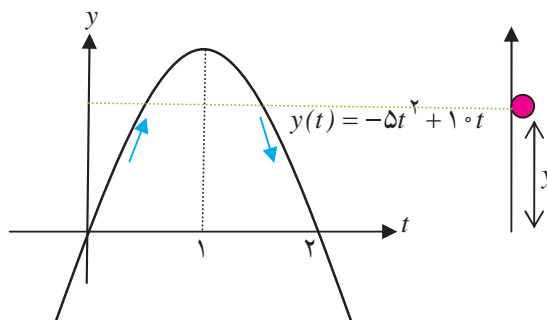
۳- تابع حرکت متحرکی روی محور x ها در فاصله زمانی $[0, 4]$ به صورت $x(t) = -t^2 + 4t + 1$ است. بارسم نمودار این تابع، شیوه حرکت متحرک را توصیف کنید. با استفاده از مشتق گیری تعیین کنید سرعت متحرک در هر لحظه چقدر است. متحرک حداکثر چقدر از مبدأ فاصله می گیرد؟ سرعت متحرک در نقطه ای که حداکثر فاصله از مبدأ را دارد چقدر است؟

۴- تابع حرکت متحرکی $x(t)$ است. واحد زمان را ثانیه و واحد مکان را متر در نظر بگیرید. نمودار $x(t)$ در شکل زیر داده شده است. چگونگی حرکت این متحرک را از لحاظ مدت زمان حرکت و مکان هایی که رفته است و سرعت آن توصیف کنید.

- (الف) از چه نقطه ای حرکت شروع شده است و در چه نقطه ای حرکت پایان یافته است؟
- (ب) در چه نقاطی سرعت صفر شده است و جهت حرکت تغییر کرده است؟
- (ج) چند بار در مبدأ قرار گرفته است و در چه زمان هایی قرار گرفته است؟
- (د) حداکثر فاصله آن از مبدأ در چه زمانی رخ داده است و این فاصله چقدر بوده است؟



در یکی از مثال ها دیدیم که اگر سیبی را در راستای عمودی به بالا پرتاب کنیم، ابتدا رو به بالا حرکت می کند و سپس به زمین باز می گردد. تابع حرکت این سیب را به صورت $y(t) = -5t^2 + 10t$ در نظر گرفته بودیم که t بر حسب ثانیه و $y(t)$ بر حسب متر بوده است.



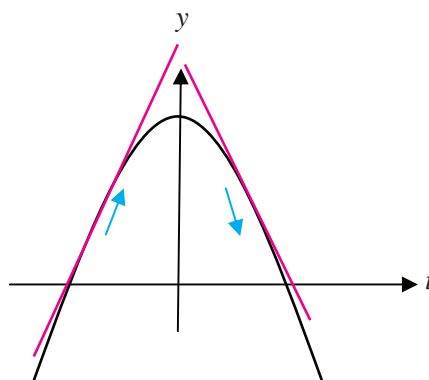


فعالیت ۶



- ۱- در دو لحظه $t_1 = \frac{1}{4}$ و $t_2 = \frac{3}{4}$ سیب در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار دارد؟
- ۲- سرعت سیب را در این دو لحظه حساب کنید. چرا علامت سرعت در این دو لحظه متفاوت است؟
- ۳- علامت سرعت با افزایش یا کاهش ارتفاع سیب چه رابطه‌ای دارد؟
- ۴- اندازه سرعت در لحظه $t=1$ از بقیه لحظات کمتر است و صفر است و اندازه سرعت در لحظات صفر و ۲ از بقیه لحظات بیشتر است. اندازه سرعت با چگونگی افزایش یا کاهش ارتفاع سیب چه رابطه‌ای دارد؟

در زیر نمودار تابع $y(x) = 4 - x^2$ و چند خط مماس بر آن رسم شده است.



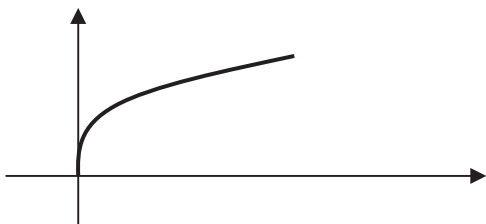
مشتق این تابع به صورت $y'(x) = -2x$ است. در x های منفی مشتق تابع، مثبت است که یعنی شیب خط مماس مثبت است. این نکته نشان دهنده آن است که در این نقاط، تابع در حال افزایش است و صعودی است. البته هر چه به نقطه و طول صفر نزدیک می‌شویم اندازه مشتق کم می‌شود که به معنای آن است که میزان افزایش یا صعود تابع کم می‌شود. در x های مثبت مشتق تابع، منفی است که یعنی شیب خط مماس منفی است. این نکته نشان دهنده آن است که در این نقاط، تابع در حال کاهش است و نزولی است. هر چه در اعداد مثبت مقدارهای x بزرگتری انتخاب کنیم مشتق تابع هم چنان منفی است ولی از لحاظ اندازه بزرگتر می‌شود. این به معنای آن است که میزان کاهش و نزول تابع مرتباً در حال افزایش است.

نکته :

- نامنفی بودن مشتق یک تابع در یک بازه به معنای آن است که تابع در آن بازه صعودی است و اندازه مشتق در نقاط آن بازه نشان می‌دهد شدت صعود تابع در آن نقاط چقدر است.
- نامثبت بودن مشتق یک تابع در یک بازه به معنای آن است که تابع در آن بازه نزولی است و اندازه مشتق در نقاط آن بازه نشان می‌دهد شدت نزول تابع در آن نقاط چقدر است.



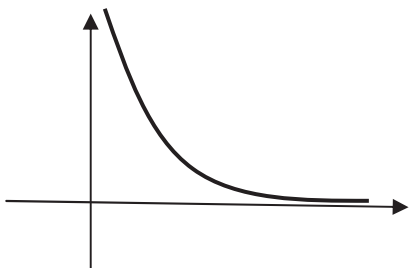
مثال



۱: برای تابع $y = \sqrt{x}$ که دامنه آن بازه $[0, \infty)$ است

داریم $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. مقدار مشتق مثبت است، پس تابع همواره در حال افزایش است ولی با افزایش x مقدار مشتق کم می‌شود و این به معنای آن است که شدت افزایش تابع در حال کم شدن است.

نمودار بالا نیز این مطلب را به خوبی نشان می‌دهد که اگرچه تابع در حال افزایش است اما شدت افزایش در حال کاهش است.



۲: تابع $y = \frac{1}{x}$ را روی بازه $(0, \infty)$ در نظر می‌گیریم. مشتق این

تابع به صورت $y' = -\frac{1}{x^2}$ است و مقدار آن همواره منفی است. پس این تابع همواره نزولی است. برای x های نزدیک صفر مقدار مشتق از لحاظ قدر مطلق بسیار بزرگ است، یعنی برای x های نزدیک صفر تابع به شدت در حال نزول است. ولی برای x های بزرگ مقدار مشتق منفی و بسیار کوچک می‌شود، یعنی تابع در حال نزول است ولی بسیار آهسته نزول می‌کند. نمودار تابع این حقیقت را به خوبی نشان می‌دهد.

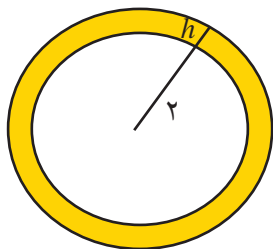
فعالیت ۷



مساحت یک دایره تابعی از شعاع آن است. دایره به شعاع r دارای مساحت $S(r) = \pi r^2$ است.

۱- اگر دایره‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر داشته باشیم و شعاع آن را h سانتی‌متر

افزایش دهیم، مساحت آن چقدر افزایش می‌یابد (بر حسب h به دست می‌آید)؟



۲- نسبت افزایش مساحت دایره به افزایش شعاع چقدر است؟ این مقدار را آهنگ تغییرات متوسط مساحت

دایره بین دو شعاع ۲ و $2+h$ می‌نامند.



- ۳- آهنگ تغییرات متوسط مساحت دایره بین دو شعاع ۲ و $2+h$ وقتی h را به صفر نزدیک می‌کنیم به چه عددی نزدیک می‌شود؟ این عدد را آهنگ تغییرات مساحت دایره نسبت به شعاع، در شعاع ۲ سانتی‌متر می‌نامند.
- ۴- آهنگ تغییرات مساحت دایره نسبت به شعاع، با مشتق $S(r)$ چه رابطه‌ای دارد؟

اگر کمیتی مانند A تابعی از کمیت دیگری مانند r باشد و این تابع را به صورت $A(r)$ نشان دهیم، یک سؤال مهم این است که تغییرات در مقدار r چه مقدار تغییرات در A ایجاد می‌کند؟ نسبت افزایش مقدار $A(r)$ به افزایش مقدار r چقدر است؟ اگر مقدار کمیت r برابر r_0 باشد و آن را h واحد افزایش دهیم، مقدار A از $A(r_0)$ به $A(r_0+h)$ تغییر می‌کند و نسبت افزایش مقدار A به افزایش مقدار r برابر است با:

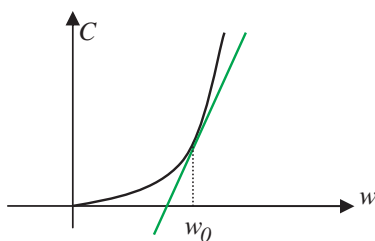
$$\frac{A(r_0+h) - A(r_0)}{h}$$

این کسر را آهنگ تغییرات متوسط کمیت A به کمیت r در دو مقدار r_0 و r_0+h می‌نامند. حد این کسر در $h=0$ را آهنگ تغییرات کمیت A به کمیت r در $r=r_0$ می‌نامند که همان مشتق تابع $A(r)$ در r_0 است.



مثال

- ۱: مساحت هر دایره‌ای تابعی از محیط آن است. اگر مساحت را با S و محیط را با P نشان دهیم داریم $S(P) = \frac{1}{4\pi} P^2$. آهنگ تغییرات مساحت دایره نسبت به محیط آن برای دایره‌ای به محیط 3π برابر است با $S'(3\pi) = \frac{3}{2}$. از آنجا که $S'(P) = \frac{1}{2\pi} P$ ، خواهیم داشت $S'(3\pi) = \frac{3}{2}$.
- ۲: هزینه ساخت هر برجی تابعی از ارتفاع آن برج است. هزینه را با C و ارتفاع را با w نشان می‌دهیم و فرض کنید تابع $C(w)$ نموداری به شکل زیر داشته باشد.



آهنگ تغییرات C نسبت به w در ارتفاع w_0 همان شیب خط مماس بر نمودار تابع $C(w)$ در نقطه به طول w_0 است. اندازه این شیب نشان می‌دهد که برای اضافه کردن یک واحد به ارتفاع برجی که ارتفاع آن w_0 است، تقریباً چقدر باید هزینه شود.

همان‌طور که دیده می‌شود برای مقدارهای کم w_0 ، شیب خط مماس کم است، یعنی هزینه بالابردن برج از ارتفاع‌های پایین زیاد نیست. ولی با زیاد شدن w_0 شیب خط مماس زیاد می‌شود، یعنی هر چه ارتفاع برج بالاتر می‌رود هزینه اضافه کردن ارتفاع برج هم بالاتر می‌رود.



تمرین در کلاس

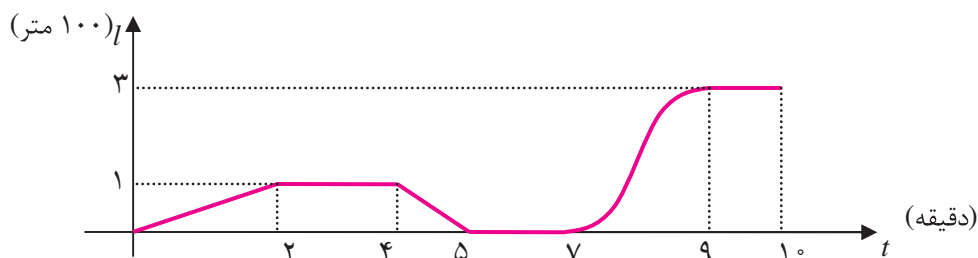


- ۱- آهنگ تغییرات مساحت یک مربع را نسبت به محیط آن برای مربعی که محیط آن ۸ واحد است به دست آورید.
- ۲- آهنگ تغییرات محیط یک مربع را نسبت به مساحت آن برای مربعی که مساحت آن ۴ واحد است به دست آورید.
- ۳- آهنگ تغییرات مکان متحرکی که روی یک محور حرکت می‌کند نسبت به زمان چه معنایی دارد؟

مسائل



- ۱- محیط هر دایره‌ای تابعی از مساحت آن است. آهنگ تغییرات محیط دایره را نسبت به مساحت آن برای دایره‌ای به مساحت π حساب کنید.
- ۲- بادکنکی کروی توسط تلمبه‌ای در لحظه $t=0$ شروع به باد شدن می‌کند. هر ثانیه ۴ سانتی‌متر مکعب هوا وارد بادکنک می‌شود. حداکثر حجمی که این بادکنک تحمل می‌کند $\pi 4500$ سانتی‌متر مکعب است.
 - (الف) آهنگ تغییرات شعاع بادکنک نسبت به زمان در هر لحظه چقدر است؟
 - (ب) آهنگ تغییرات مساحت سطح بادکنک نسبت به زمان در هر لحظه چقدر است؟
 - (ج) آهنگ تغییرات شعاع بادکنک نسبت به سطح بادکنک (در هر مقداری از سطح بادکنک) چقدر است؟
 - (د) در آخرین لحظه که بادکنک می‌ترکد، آهنگ تغییرات سطح بادکنک نسبت به شعاع بادکنک چقدر است؟
- ۳- ماشینی که با سرعتی ثابت در حال حرکت است در لحظه $t=0$ ترمز می‌کند تا این که متوقف می‌شود. فاصله مکان ماشین از نقطه‌ای که ترمز گرفته است را با s نشان می‌دهیم. فرض کنید s (برحسب متر) به عنوان تابعی از t (برحسب ثانیه) به صورت $s(t) = 25t - \frac{5}{4}t^2$ باشد.
 - (الف) نمودار $s(t)$ را رسم کنید و دامنه اعتبار آن را مشخص کنید.
 - (ب) سرعت ماشین در لحظه شروع ترمز چقدر بوده است؟
 - (ج) سرعت ماشین پس از چند ثانیه صفر می‌شود؟
 - (د) ماشین از شروع ترمز چند متر را طی می‌کند تا متوقف شود؟
- ۴- مدرسه علی در انتهای خیابانی است که خانه علی در آن خیابان است. علی موقع رفتن به مدرسه ممکن است راه برود یا بدود یا برای دیدن مغازه‌ها بایستد یا به عقب برگردد یا برای به موقع رسیدن سوار ماشین شود. نمودار حرکت یکی از روزهایی که علی به مدرسه رفته است به شکل صفحه بعد است. واحد زمان را دقیقه و واحد مکان را 100 متر در نظر بگیرید.



۵- با توجه به نمودار بالا به سؤالات زیر پاسخ بگویید.

الف) فاصله مدرسه علی تا خانه او چقدر است و چقدر طول کشیده است تا علی به مدرسه برسد؟

ب) در دو دقیقه اول حرکت سرعت حرکت علی چقدر بوده است؟

ج) در دو دقیقه دوم حرکت احتمالاً علی چکار می کرده است؟

د) در دقایق بین ۴ و ۵ علی با چه سرعتی و در چه جهتی حرکت می کرده است؟ در حال دویدن بوده است یا

راه رفتن؟

ه) در دقایق بین ۵ و ۷ علی کجا بوده و احتمالاً چه می کرده است؟

و) در بین دقایق ۷ و ۹ حدوداً سرعت حرکت او چقدر بوده است و احتمالاً علی چه عملی انجام داده است؟

ز) بین دقایق ۹ و ۱۰ علی کجا بوده است و احتمالاً چه می کرده است؟

مشتق توابع مثلثاتی

اگر تابع حرکت متحرکی روی محور x ها به صورت $x(t) = \sin t$ باشد، این متحرک یک حرکت تناوبی حول مبدأ دارد و مرتباً به جلو و عقب حرکت می کند. سرعت این متحرک نیز حالت تناوبی خواهد داشت و مرتباً در حال افزایش و کاهش و تغییر جهت است. برای تشخیص چگونگی سرعت این متحرک باید مشتق تابع $\sin x$ را محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned}
 (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos(x + \frac{h}{2})}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{h}{2}) = 1 \cdot \cos x = \cos x
 \end{aligned}$$

به کمک تساوی $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ می توانیم مشتق تابع $\cos x$ را نیز محاسبه کنیم.

$$(\cos x)' = (\sin(\frac{\pi}{2} - x))' = (-\sin(x - \frac{\pi}{2}))' = -\cos(x - \frac{\pi}{2}) = -\sin x$$



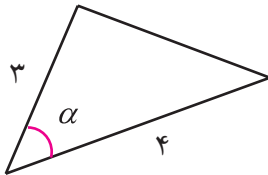
۱- نشان دهید مشتق تابع $\tan x$ در هر نقطه از دامنه اش به شکل زیر است.

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

۲- نشان دهید مشتق تابع $\cot x$ در هر نقطه از دامنه اش به شکل زیر است.

$$(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$$

۳- مثلثی ساخته ایم که طول دو ضلع آن ۳ و ۴ است و زاویه بین آن‌ها را مقدار متغیر α قرار می‌دهیم.



الف) آهنگ تغییرات مساحت این مثلث نسبت به a را در زاویه α به دست آورید.

ب) در کدام زاویه‌ها آهنگ تغییرات منفی است و معنای آن چیست؟

ج) در کدام زاویه‌ها آهنگ تغییرات مثبت است و معنای آن چیست؟

د) در کدام زاویه آهنگ تغییرات صفر است و در این زاویه مساحت مثلث به دست آمده چه ویژگی دارد؟



مثال

۱: مشتق تابع $y(x) = \sin x (1 + \cos x)$ را حساب می‌کنیم.

$$y'(x) = (\sin x)'(1 + \cos x) + \sin x(1 + \cos x)'$$

$$= \cos x(1 + \cos x) + \sin x(-\sin x) = \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$$

۲: مشتق تابع $y(x) = \frac{x \sin x}{\sin x + \cos x}$ را حساب می‌کنیم.

$$y'(x) = \frac{(x \sin x)'(\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x)'x \sin x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{(\sin x + x \cos x)(\sin x + \cos x) - (\cos x - \sin x)x \sin x}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + \sin x \cos x + x \cos x \sin x + x \cos^2 x - x \cos x \sin x + x \sin^2 x}{1 + \sin 2x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + \sin x \cos x + x}{1 + \sin 2x}$$



مسائل



۱- مشتق توابع زیر را حساب کنید.

الف) $y(x) = \sin^3 x$ ب) $y(x) = x \tan \frac{x}{2}$ ج) $y(x) = \sin^2 x$

د) $y(x) = \frac{\sin x}{x}$ هـ) $y(x) = \frac{\tan x}{1 + \tan x}$ و) $y(x) = \frac{x^2 - \sin^2 x}{1 + \cos^2 x}$

۲- مشتق تابع $y = \cos x$ را مستقیماً از طریق تعریف به دست آورید.

۳- نمودار تابع $y = \sin x$ با چه زاویه‌ای از مبدأ می‌گذرد (زاویه خط مماس بر نمودار تابع نسبت به محور x ‌ها)؟
نمودار تابع $\tan x$ با چه زاویه‌ای از مبدأ می‌گذرد؟

۴- در چه نقاطی خط مماس بر نمودار تابع $y(x) = \sin^3 x$ موازی محور x ‌ها است.

۵- آیا می‌توان بر نمودار تابع $y(x) = \sin x + \cos x$ خط مماسی رسم کرد که با خط $y = 3x - 1$ موازی باشد؟

۶- در خط $y = mx + 2$ چه مقدارهایی می‌تواند داشته باشد تا بتوان بر نمودار تابع $y(x) = \tan^3 x$ خط مماسی رسم کرد که با آن موازی باشد.

۷- تابع حرکت متحرکی روی محور x ‌ها به صورت $x(t) = 1 + 2 \sin^2 t$ است. چگونگی حرکت این متحرک را توصیف کنید. در چه نقاطی روی محور x ‌ها این متحرک ایست‌آنی دارد؟ در چه نقاطی این متحرک بیشترین سرعت را دارد و مقدار این سرعت چقدر است؟

مشتق تابع وارون و توابع مرکب



حل یک مسئله



مشتق یک تابع وارون‌پذیر و مشتق وارون آن چه رابطه‌ای با هم دارند؟

نمودار یک تابع و وارون آن نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه یکدیگرند، پس مماس‌های برای این دو نمودار در نقاط متناظر نیز قرینه هم خواهند بود و شیب‌های آن‌ها رابطه مشخصی با هم خواهند یافت. برای یافتن این رابطه در فعالیت زیر در حالتی خاص این رابطه را جستجو می‌کنیم.



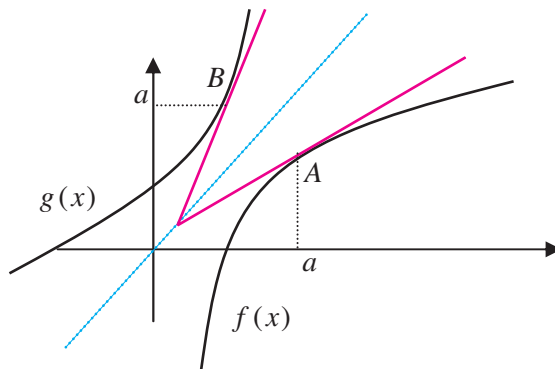
تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ روی دامنه $[1, \infty)$ تعریف شده است و صعودی است. وارون $f(x)$ تابع $g(x) = x^2 + 1$ با دامنه $[0, \infty)$ است.

۱- نمودارهای این دو تابع را رسم کنید و نقطه $A(5, 2)$ روی نمودار f و نقطه $B(2, 5)$ روی نمودار g را مشخص کنید.

۲- وضعیت خط‌های مماس بر نمودارهای این دو تابع در این نقاط نسبت به نیمساز ربع اول و سوم چگونه است؟ شیب‌های این دو خط مماس چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۳- آیا برای نقاط دیگر هم چنین رابطه‌ای وجود دارد؟ چه حدسی می‌زنید؟ حدس خود را ثابت کنید.

فرض کنید $f(x)$ تابعی وارون پذیر و مشتق پذیر باشد و وارون آن را با $g(x)$ نشان دهیم. فرض کنید $A(a, b)$ نقطه‌ای از نمودار f باشد ($f(a) = b$)، در این صورت $B(b, a)$ نقطه‌ای از نمودار g خواهد بود که در شکل زیر نمایش داده شده‌اند.



نمودار g قرینه نمودار f نسبت به نیمساز ربع اول و سوم است. این نکته باعث می‌شود خط مماس بر نمودار g در نقطه $B(b, a)$ نیز قرینه خط مماس بر نمودار f در نقطه $A(a, b)$ شود. در فصل دوم دیدیم که شیب‌های این دو خط وارون یکدیگرند. اما شیب‌های این دو خط $f'(a)$ و $g'(b)$ هستند، بنابراین

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}$$

این نتیجه نشان می‌دهد که باید $f'(a) \neq 0$.

اگر $f'(a) = 0$ ، خط مماس بر نمودار f در نقطه $A(a, b)$ موازی محور x ها خواهد بود و در نتیجه خط مماس بر نمودار g در نقطه $B(b, a)$ موازی محور y ها خواهد بود که به معنای آن است که g در b مشتق‌پذیر نیست. به طور کلی قضیه زیر برقرار است.



قضیه :

اگر f تابعی وارون پذیر و مشتق پذیر با مشتق ناصفر باشد و وارون آن تابع g باشد، در این صورت g نیز مشتق پذیر است و

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$


مثال

۱: تابع $f(x) = x^k$ در دامنه $(0, \infty)$ صعودی و وارون پذیر و مشتق پذیر با مشتق ناصفر است و وارون آن تابع $g(x) = \sqrt[k]{x}$ است. بنابراین

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{kg(x)^{k-1}} = \frac{1}{k\sqrt[k]{x^{k-1}}}$$

۲: تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ وارون پذیر و مشتق پذیر با مشتق ناصفر است و وارون آن خودش است. بنابراین باید داشته باشیم $f'(x) = \frac{1}{f'(f(x))}$. درستی این تساوی را بررسی می‌کنیم.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'(f(x)) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = -x^2$$

در بسیاری از موارد تابع وارون ممکن است قابل محاسبه نباشد اما مشتق آن را می‌توانیم با استفاده از این فرمول حساب کنیم.

تمرین در کلاس



۱- $g(x) = \sin^{-1}x$ وارون تابع $f(x) = \sin x$ است که دامنه f را به فاصله $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ محدود کرده‌ایم. دامنه g فاصله $[-1, 1]$ است. به کمک فرمول مشتق تابع وارون، ثابت کنید برای x های در فاصله $(-1, 1)$ داریم:

$$(\sin^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

در نقاط $x = \pm 1$ وضعیت مشتق پذیری $\sin^{-1}x$ چگونه است؟

۲- $g(x) = \cos^{-1}x$ وارون تابع $f(x) = \cos x$ است که دامنه f را به فاصله $[0, \pi]$ محدود کرده‌ایم. دامنه g فاصله $[-1, 1]$ است. به کمک فرمول مشتق تابع وارون، ثابت کنید برای x های در فاصله $(-1, 1)$ داریم:

$$(\cos^{-1}x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$



در نقاط $x = \pm 1$ وضعیت مشتق پذیری $\cos^{-1} x$ چگونه است؟

۳- $g(x) = \tan^{-1} x$ وارون تابع $f(x) = \tan x$ است که دامنه f را به فاصله $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ محدود کرده ایم. دامنه g کل IR است. به کمک فرمول مشتق تابع وارون، ثابت کنید برای هر مقدار x داریم:

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$



مثال

۱: مشتق تابع $f(x) = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ را حساب می کنیم.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

صفر شدن مشتق این تابع در همه نقاط به معنای آن است که این تابع، ثابت است. قبلاً در فصل سوم دیدیم که

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

۲: مشتق تابع $f(x) = (x + \sin x) \sin^{-1} x$ را حساب می کنیم.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x + \sin x)' \sin^{-1} x + (x + \sin x) (\sin^{-1} x)' \\ &= (1 + \cos x) \sin^{-1} x + \frac{x + \sin x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

اگر f و g دو تابع صعودی باشند، $f \circ g$ نیز تابعی صعودی است. اگر شدت صعود g در نقطه ای مانند a برابر m_1 (یعنی، $m_1 = g'(a)$) و شدت صعود f در نقطه $g(a)$ برابر m_2 (یعنی، $m_2 = f'(g(a))$) باشد، شدت صعود $f \circ g$ در نقطه a چه خواهد بود؟ به عبارت دیگر چه رابطه ای بین $g'(a)$ و $f'(g(a))$ و $(f \circ g)'(a)$ وجود دارد؟ برای داشتن یک حدس مناسب بهتر است چند مثال را بررسی کنیم.



فعالیت ۹



- ۱- برای دو تابع $f(x) = m_1 x$ و $g(x) = m_2 x$ ، تابع $f(g(x))$ را محاسبه کنید و با محاسبه $g'(x)$ و $f'(g(x))$ و $(f \circ g)'(x)$ ، بررسی کنید که چه رابطه ای بین آن‌ها وجود دارد.
- ۲- برای تابع دلخواه $f(x)$ و $g(x) = m_2 x$ ، تابع $f(g(x))$ را محاسبه کنید و با محاسبه $g'(x)$ و $f'(g(x))$ و $(f \circ g)'(x)$ ، بررسی کنید که چه رابطه ای بین آن‌ها وجود دارد.



۳- برای تابع $f(x) = x^3$ و تابع دلخواه $g(x)$ ، تابع $f(g(x))$ را محاسبه کنید و با محاسبه $g'(x)$ و $f'(g(x))$ و $(f \circ g)'(x)$ ، بررسی کنید که چه رابطه‌ای بین آن‌ها وجود دارد.

تمام مثال‌های بالا نشان می‌دهند که شدت صعود $f \circ g$ در نقطه‌ای مانند a برابر است با حاصلضرب شدت صعود g در a در شدت صعود f در $g(a)$ ، به عبارت دیگر:

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

درستی این رابطه در حالت کلی قابل اثبات است و قضیه زیر برقرار است.

قضیه :

اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، آنگاه $f \circ g$ نیز مشتق‌پذیر است و

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$



مثال

۱: مشتق تابع $\sin x^2$ را حساب می‌کنیم.

اگر قرار دهیم $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x^2$ داریم $\sin x^2 = f(g(x))$. بنابراین

$$(\sin x^2)' = f'(g(x))g'(x) = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2$$

۲: مشتق تابع $\sqrt{1 + \sin^2 x}$ را حساب می‌کنیم.

اگر قرار دهیم $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 1 + \sin^2 x$ داریم $\sqrt{1 + \sin^2 x} = f(g(x))$. بنابراین

$$(\sqrt{1 + \sin^2 x})' = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 + \sin^2 x}} \times 2 \sin x \cos x = \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$$

۳: مشتق تابع $\sin \sqrt{1 + x^2}$ را حساب می‌کنیم.

اگر قرار دهیم $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$ داریم $\sin \sqrt{1 + x^2} = f(g(x))$. بنابراین

$$(\sin \sqrt{1 + x^2})' = f'(g(x))g'(x) = \cos \sqrt{1 + x^2} \times (\sqrt{1 + x^2})'$$

$$= \cos \sqrt{1 + x^2} \times \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \times 2x = \frac{x \cos \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}}$$



تمرین در کلاس



- ۱- مشتق تابع $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ را حساب کنید.
- ۲- مثلثی ساخته‌ایم که طول دو ضلع آن ۱ و ۳ می‌باشد و زاویه بین این دو ضلع α است که قابل تغییر از صفر تا π رادیان است. طول ضلع سوم را l بنامید.
- الف) l را بر حسب α و آهنگ تغییرات l نسبت به α را به دست آورید. علامت آهنگ تغییرات چیست و چه معنایی دارد؟
- ب) α را بر حسب l و آهنگ تغییرات α نسبت به l را به دست آورید. علامت آهنگ تغییرات چیست و چه معنایی دارد؟
- ج) آهنگ تغییرات در (الف) و (ب) چه رابطه‌ای با هم دارند؟



مسائل



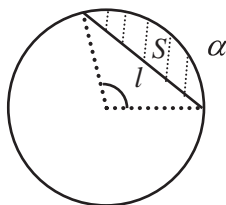
- ۱- مشتق توابع زیر را حساب کنید و تعیین کنید که در کدام نقاط از دامنه خود مشتق پذیری برقرار نیست.
- الف) $y(x) = \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$ ب) $f(t) = \cos \sqrt[3]{t}$
- ج) $g(\alpha) = \sqrt[3]{1+\tan \alpha}$ د) $y(\alpha) = \tan^2\left(\frac{\pi}{3} + \sin^{-1} \alpha\right)$
- ه) $x(t) = \sqrt{1+\sqrt{1+t^2}}$ و) $k(z) = \sqrt{1+\cos^2 \sqrt{1+z^2}}$
- ۲- آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق پذیر است؟ آیا تابع $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق پذیر است؟

- ۳- دامنه و برد تابع $f(x) = \sin^{-1}(\sin x)$ را تعیین کنید و نشان دهید این تابع متناوب است و نمودار آن را رسم کنید. این تابع در چه نقاطی مشتق ناپذیر است و مشتق آن را در بقیه نقاط تعیین کنید.
- ۴- تابع $y(x) = 1$ را در نظر می‌گیریم و از نقطه $(x, 1)$ روی نمودار این تابع خطی موازی با محور x می‌کشیم. زاویه این خط با محور x ها را α می‌نامیم که تابعی از x است. تابع $\alpha(x)$ و دامنه و برد آن را حساب کنید و مشتق α نسبت به x را حساب کنید. مقدار α با افزایش x افزایش می‌یابد یا کاهش؟ علامت مشتق α چگونه است؟
- ۵- در مثلثی طول دو ضلع آن ۲ و ۴ می‌باشد و طول ضلع سوم مقدار متغیر l می‌باشد. زاویه مقابل به این ضلع را با α نشان می‌دهیم.
- الف) l تابعی از α است این تابع را محاسبه کنید و دامنه و برد آن را بیابید.



ب) تابع وارون تابع قسمت (الف) چه چیزی را نشان می‌دهد؟
 ج) مساحت این مثلث تابعی از α است، این تابع را حساب کنید و آهنگ تغییرات آن را به دست آورید. آهنگ تغییرات به ازای چه مقدارهای α مثبت است و معنای آن چیست؟ آهنگ تغییرات به ازای چه مقدارهای α منفی است و معنای آن چیست؟ آهنگ تغییرات به ازای چه مقدار α صفر است و مثلث در این مقدار چگونه است و مساحت آن چه ویژگی دارد؟

۶- در شکل زیر وتری از دایره به شعاع واحد به طول l رسم شده است که کمانی به زاویه α را از دایره جدا کرده است. مساحت قسمت هاشور خورده را با S نشان می‌دهیم.



الف) S را بر حسب α و α را بر حسب l و S را بر حسب l حساب کنید.
 ب) آهنگ تغییرات S را نسبت به α و آهنگ تغییرات α را نسبت به l و آهنگ تغییرات S را نسبت به l را حساب کنید.

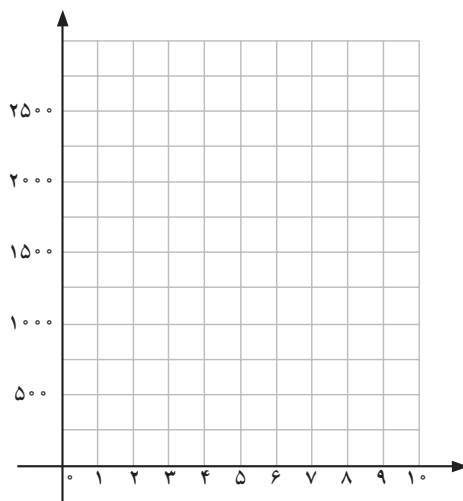


تمرین‌های دوره‌ای

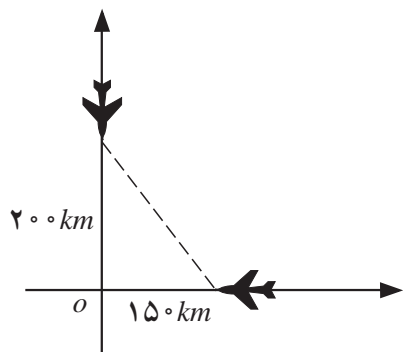
۱- قرار است یک مزرعه مستطیلی شکل برای پرورش گل ساخته شود. برای این کار ۲۰۰ متر نرده چوبی برای محصور کردن این ناحیه در اختیار داریم. ابعاد این مستطیل را چقدر در نظر بگیریم تا بزرگترین مساحت ممکن برای این مزرعه را به دست آوریم؟
 با طی مراحل زیر، این مسئله را حل کنید.
 الف) جدول زیر را تکمیل کنید.

x یک ضلع مستطیل	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰	۱۰۰
ضلع دیگر				۷۰							
مساحت S				۲۱۰۰							

- ب) مساحت این مستطیل را به صورت تابعی از x به دست آورید.
 ج) دامنه و برد این تابع را به دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.
 د) آیا از روی نمودار می‌توانید بزرگترین مساحت ممکن برای مزرعه گل را به دست آورید؟
 ه) به روش جبری و با کمک ضابطه تابع، بزرگترین مساحت ممکن برای مزرعه را به دست آورید.



۲- دو هواپیما مطابق شکل صفحه بعد در ارتفاع یکسان در دو مسیر عمود برهم، با سرعت ۹۰۰ کیلومتر در ساعت در حال حرکت هستند. یک هواپیما ۱۵۰ کیلومتر و هواپیمای دیگر ۲۰۰ کیلومتر از نقطه O فاصله دارند. الف) پس از ۲ دقیقه فاصله بین دو هواپیما چقدر است؟



ب) فاصله بین دو هواپیما را بر (حسب کیلومتر) به عنوان تابعی از زمان (دقیقه) به دست آورید. (شکل زمان $t = 0$ را نشان می دهد.)
 ج) از طریق این تابع استدلال کنید که این دو هواپیما به هم برخورد نخواهند کرد.

۳- اگر $h(x) = (2x + 5)^2$ ، $h(x)$ را به صورت ترکیب دو تابع مانند g ، f بنویسید به قسمی که $h(x) = (f \circ g)(x)$ و $g(0) = 5$.

۴- قیمت معمولی یک کالا x (هزار) تومان است. فرض کنید:

$$f(x) = x - 400, \quad g(x) = 0.75x$$

الف) g و f چه چیزی را بر حسب قیمت کالا توصیف می کنند؟

ب) $f \circ g$ را بیابید و توضیح دهید که $f \circ g$ چه چیزی را بر حسب قیمت کالا توصیف می کند.

ج) $g \circ f$ چه چیزی را بر حسب قیمت کالا توصیف می کند؟

۵- فرض کنید f و g توابعی از IR به IR هستند و دامنه f شامل برد g است. ثابت کنید:

الف) اگر f و g صعودی باشند آنگاه $f \circ g$ صعودی است.

ب) اگر f و g نزولی باشند آنگاه $f \circ g$ صعودی است.

ج) اگر f صعودی و g نزولی باشد آنگاه $f \circ g$ نزولی است.

د) برای هر یک از موارد (الف) و (ب) و (ج) مثالی ارائه کنید.

۶- درستی یا نادرستی گزاره های زیر را بررسی کنید.

الف) اگر f روی بازه $[a, b]$ صعودی باشد، در هیچ نقطه ای محور x ها را قطع نمی کند.

ب) اگر f روی بازه $[a, b]$ اکیداً صعودی باشد، حداکثر در یک نقطه محور x ها را قطع می کند.

۷- تحت چه شرایطی تابع خطی $f(x) = ax + b$ زوج است؟ تحت چه شرایطی فرد است؟

۸- اگر $h(x) = x + 3$ ، $g(x) = x^2 + 2$ ، $f(x) = \sqrt{x-1}$ ، تابع $f \circ g \circ h$ را به دست آورید.

۹- فرض کنید $h(x) = (f(x))^2 + g(x)$ که توابع f و g ممکن است زوج یا فرد باشند.

الف) تحت چه شرایطی h حتماً یک تابع زوج می شود؟

ب) تحت چه شرایطی h حتماً یک تابع فرد می شود؟

۱۰- الف) فرض کنید که g یک تابع زوج باشد و $h = f \circ g$ ، آیا در مورد زوج یا فرد بودن h می توان اظهار نظر

قطعی کرد؟

ب) اگر g یک تابع فرد باشد و $h = f \circ g$ ، آیا در مورد زوج یا فرد بودن h می توان اظهار نظر قطعی کرد؟



ج) اگر f و g دو تابع فرد باشند، در مورد زوج یا فرد بودن $f \circ g$ چه می‌توان گفت؟
 ۱۱- فرض کنید که $f(x)$ روی بازه $[-2, 7]$ صعودی باشد.

الف) دامنه تابع $y = f(x+3)$ را بیابید و تعیین کنید روی کدام بازه صعودی است؟

ب) دامنه تابع $y = f(x-4)$ را بیابید و تعیین کنید روی کدام بازه صعودی است؟

ج) در مورد صعودی یا نزولی بودن تابع $y = -f(x)$ چه می‌توان گفت؟

د) در مورد صعودی یا نزولی بودن تابع $y = f(-x)$ چه می‌توان گفت؟

۱۲- هزینه اجاره در بست یک اتوبوس (برای هر نفر) به وسیله تابع $C(x) = \frac{100 + 5x}{x}$ داده می‌شود که در آن x تعداد افراد در یک گروه و $C(x)$ بر حسب هزار تومان است و داریم:

$$x \in \{1, 2, 3, \dots, 40\}$$

$C^{-1}(x)$ را به دست آورید و توضیح دهید که چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۱۳- یک سیلندر به شکل استوانه در اختیار داریم که ارتفاع آن برابر قطر قاعده آن است. شعاع قاعده این

سیلندر را با x نشان می‌دهیم.

الف) حجم این سیلندر استوانه‌ای شکل را به عنوان تابعی از x به دست آورید. برای شعاع قاعده 10° متر حجم

استوانه چقدر است؟

ب) $V^{-1}(x)$ را به دست آورید و معنای آن را توصیف کنید.

ج) اگر حجمی برابر $\pi \cdot 24^\circ$ مترمکعب نیاز داشته باشیم، با استفاده از هر یک از فرمول‌ها که ساده‌تر است

شعاع را بیابید.

۱۴- درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید.

الف) یک تابع زوج می‌تواند وارون پذیر هم باشد.

ب) اگر f روی بازه $[0, 5]$ صعودی باشد f^{-1} روی بازه $[f(0), f(5)]$ صعودی است.

ج) اگر g روی بازه $[0, 5]$ نزولی باشد، g^{-1} روی بازه $[g(5), g(0)]$ نزولی است.

د) اگر f و g وارون یکدیگر باشند، دامنه آن‌ها با هم برابر است.

۱۵- اگر $f(x) = \frac{ax+b}{x+d}$ ، $f^{-1}(x)$ را بیابید. تحت کدام شرایط برای a, b, d داریم $f = f^{-1}$ ؟

۱۶- وزن ایده آل w برای مردان (بر حسب کیلوگرم) به عنوان تابعی از قد h (بر حسب سانتی متر) به صورت

تقریبی از رابطه $w(h) = 9h - 88$ به دست می‌آید.

الف) وزن ایده آل برای یک مرد 170° سانتی متری چقدر است؟

ب) h را به عنوان تابعی از w به دست آورید. این تابع چه چیزی را نشان می‌دهد؟

ج) با نشان دادن $w(h(b)) = b$ ، $h(w(a)) = a$ ثابت کنید که $w(h)$ ، $h(w)$ وارون یکدیگرند.

د) قد ایده آل مردی که وزن او 80° کیلوگرم است چند سانتی متر است.

رابطه وزن ایده آل برای زنان به صورت $w(h) = 9h - 82/5$ است.



۱۷- توابعی مانند g و f بیابید که برای آن‌ها داشته باشیم

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$$

۱۸- در هر یک از حالت‌های زیر تابع خطی $f(x) = ax + b$ را به گونه‌ای به دست آورید که شرط خواسته شده برقرار گردد.

$$\text{الف) } f(f(x)) = 4x + 3 \quad \text{ب) } f(1-x) = 5x + 1$$

$$\text{ج) } f(2x+3) = 3x-2$$

۱۹- تعداد باکتری‌ها در یک غذای منجمد با تابع $n(d) = 2 \cdot d^2 - 8 \cdot d + 500$ با شرط $2 \leq d \leq 14$ داده می‌شود که d دمای غذا است. وقتی که غذا از انجماد خارج می‌شود دما با تابع $d(t) = 4t + 2$ ، $0 \leq t \leq 3$ داده می‌شود که t زمان بر حسب ساعت است. مطلوب است:

الف) تابع مرکب $n(d(t))$

ب) تعداد باکتری‌ها در غذا وقتی که $t = 2$.

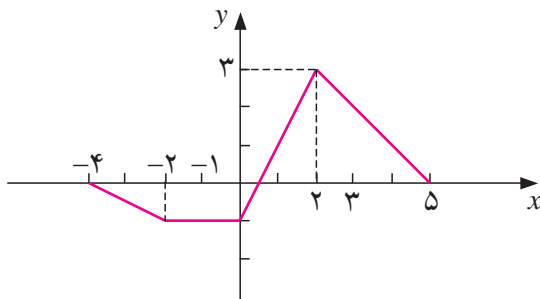
ج) پس از چه زمانی تعداد باکتری‌ها به 2420 می‌رسد؟

۲۰- ثابت کنید که تابع $f(x) = \frac{|x|+1}{|x|}$ تابعی زوج است و با استفاده از آن برد تابع را به دست آورید.

۲۱- ثابت کنید که تابع $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$ تابعی فرد است و با استفاده از آن برد تابع را به دست آورید.

۲۲- نمودار تابع $f(x)$ در شکل زیر داده شده است. دامنه توابع داده شده را معلوم کنید و نمودار آن‌ها را رسم

کنید.



$$\text{الف) } y = |f(x)|$$

$$\text{ب) } y = f(|x|)$$

$$\text{ج) } y = f(-x)$$

$$\text{د) } y = -f(x)$$

۲۳- اگر f یک تابع زوج و غیر ثابت باشد، تعیین کنید که در هر یک از حالات زیر آیا g زوج یا فرد یا آن که نه زوج است و نه فرد.

$$\text{ب) } g(x) = f(-5x)$$

$$\text{الف) } g(x) = -f(x)$$

$$\text{د) } g(x) = -f(x-3)$$

$$\text{ج) } g(x) = f(x) + 3$$

۲۴- تابع $f(x) = x^2 - 2x$ را روی دامنه $[1, \infty)$ در نظر بگیرید.

الف) با رسم نمودار این تابع نشان دهید این تابع وارون پذیر است و برد آن را به دست آورید.

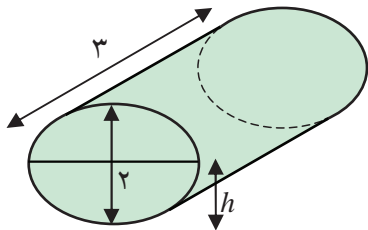


(ب) با رسم نمودار تابع وارون، دامنه و برد تابع وارون را به دست آورید.
 (ج) تابع وارون f را با g نشان دهید و برای یک نقطه دلخواه از دامنه g مانند x قرار دهید $g(x) = y$. با توجه به آن که داریم $x = f(y)$ ، y را بر حسب x حساب کنید.
 (د) ضابطه تابع وارون f را بنویسید.
 ۲۵- ثابت کنید که تابع $f(x) = 1 + \sqrt{1-x^2}$ روی دامنه $[0, 1]$ یک به یک است و وارون آن را به دست آورید.

۲۶- دو تابع g و f وارون یکدیگرند. آیا توابع $f \circ g$ ، $g \circ f$ با هم مساویند؟

۲۷- برای هر عدد صحیح q ، نشان دهید $[x+q] = [x] + q$.

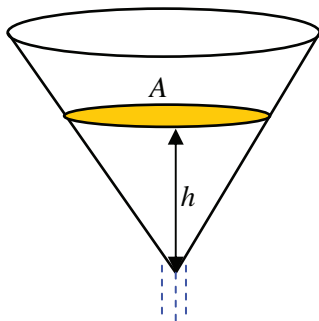
۲۸- یک منبع گازوئیل به شکل استوانه در اختیار داریم که به شکل خوابیده روی زمین قرار دارد. قطر دایره قاعده آن ۲ متر و ارتفاع آن (که به طور افقی روی زمین است) برابر ۳ متر است.



(الف) اگر حجم گازوئیل موجود در منبع (بر حسب سانتی متر مکعب) را با V و ارتفاع گازوئیل موجود در منبع (بر حسب سانتی متر) را با h نشان دهیم، V تابعی از h است. این تابع را محاسبه کنید و دامنه و برد آن را تعیین کنید. با توجه به شیوه تعریف، نشان دهید این تابع صعودی است.

(ب) h نیز تابعی از V است، دامنه و برد آن را تعیین کنید. آیا می‌توانید این تابع را محاسبه کنید؟

۲۹- از نقطه $A(2, 5)$ به نقاط مختلف نمودار تابع $y = (x-2)^2$ خط رسم می‌کنیم. آیا نقطه یا نقاطی یافت می‌شوند که خط رسم شده بر نمودار این تابع عمود شود؟ در کدام نقاط این اتفاق می‌افتد؟ درستی محاسبات خود را با رسم نمودار این تابع نشان دهید.



۳۰- قیفی به شکل مخروط دوار داریم که ارتفاع آن 10° سانتی متر و شعاع قاعده آن ۵ سانتی متر است. این قیف را پر از آب می‌کنیم و در لحظه $t = 0$ شیر آن را باز می‌کنیم و آب با سرعت دو سانتی متر مکعب در ثانیه از آن خارج می‌شود.

(الف) اگر ارتفاع آب باقیمانده در قیف را با h نشان دهیم، حجم آب باقیمانده را بر حسب h به دست آورید.

(ب) h را بر حسب زمان به دست آورید و آهنگ تغییرات h را نسبت به زمان در هر لحظه حساب کنید.

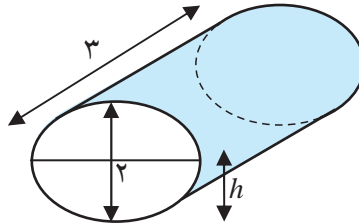
(ج) سطح آب باقیمانده در قیف را با A نشان می‌دهیم. با محاسبه A بر حسب زمان، آهنگ تغییرات A را نسبت



به زمان در هر لحظه حساب کنید.

(د) با محاسبه A بر حسب h ، آهنگ تغییرات A را نسبت به h در هر مقداری از h حساب کنید.

۳۱- یک منبع گازوئیل به شکل استوانه در اختیار داریم که به شکل خوابیده روی زمین قرار دارد. قطر دایره قاعده آن ۲ متر و ارتفاع آن (که به طور افقی روی زمین است) برابر ۳ متر است.



اگر منبع خالی را به گونه‌ای پر کنیم که ارتفاع گازوئیل با سرعت ثابت ۳ سانتی متر بر دقیقه افزایش یابد، سرعت افزایش حجم گازوئیل در هر لحظه t چقدر خواهد بود؟

مراجع

- ۱- رام کردن و پرورش مسئله‌های ریاضی، عبدالحسین مصحفی، انتشارات مدرسه، چاپ اول، زمستان ۱۳۷۷
- ۲- آموزش هنر حل مسئله، یحیی تابش، جواد حاجی بابایی و آرش رستگار، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، ۱۳۸۰
- ۳- Success in maths Sim Pupiles Book
Addison wesley longman 1998
- ۴- اصول آنالیز ریاضی، والتر رودین
- ۵- حساب دیفرانسیل و انتگرال، (جلد اول)، سیاوش شهشهانی
- ۶- حساب دیفرانسیل و انتگرال (جلد اول)، آدامز
- ۷- حساب دیفرانسیل و انتگرال، جیمز استوارت، ترجمه ارشک حمیدی، (جلد اول)، انتشارات فاطمی.

