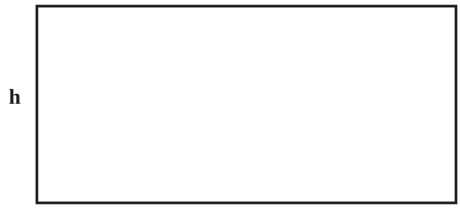
فصل ۶

انتگرال

مساحت

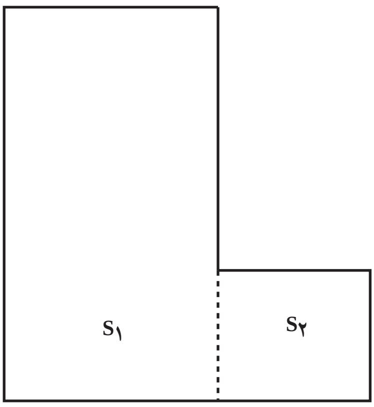
می‌دانیم مساحت یک مستطیل برابر است با حاصل‌ضرب طول و عرض آن؛



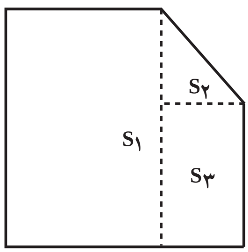
$S = ah$

هرگاه شکلی از مستطیل‌ها یا اشکال دیگری تشکیل شده باشد، مساحت شکل اصلی برابر است با حاصل‌جمع مساحت اجزای تشکیل دهندهٔ آن شکل.

در این شکل‌ها، S مساحت کل شکل و هریک از S_1، S_2 مطابق شکل مساحت یک ناحیه کوچکتر از شکل اصلی است. این ویژگی مساحت را که «مساحت یک شکل نامنظم برابر است با حاصل‌جمع مساحتهای اجزای تشکیل دهنده آن»، ویژگی **جمع‌پذیری** مساحت می‌نامند.

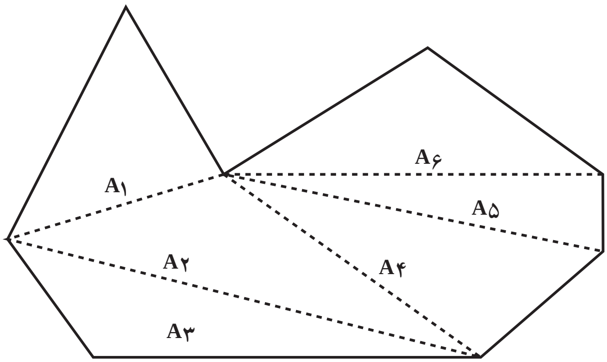


$S = S_1+S_2$



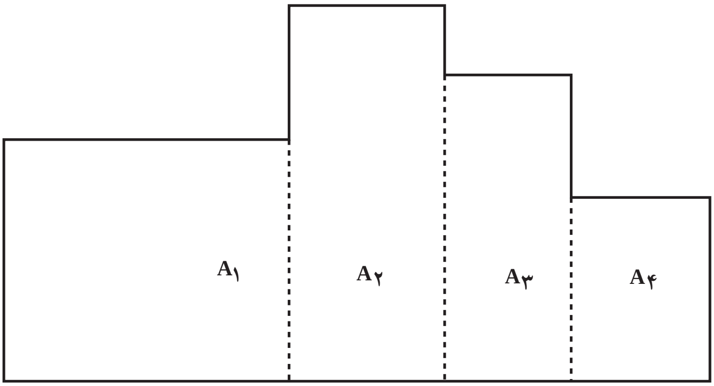
$S = S_1+S_2+S_3$

از این ویژگی برای محاسبه مساحت چند ضلعی‌های غیرمنتظم نیز استفاده می‌کنیم :



$$A = A_۱ + A_۲ + A_۳ + A_۴ + A_۵ + A_۶$$

گاهی مناسب‌تر آن است که شکل مورد نظر را به مستطیل‌های کوچکتر تقسیم کرده و مساحت این مستطیل‌ها را محاسبه و سپس با هم جمع کنیم.



$$A = A_۱ + A_۲ + A_۳ + A_۴$$

یونانیان باستان، این روش را حتی برای محاسبه مساحت شکل‌هایی که محیط آن‌ها از خط مستقیم شکسته تشکیل نمی‌شد به کار می‌بردند. ارشمیدس برای محاسبه مساحت دایره از چندضلعی‌هایی استفاده کرد که برخی از آن‌ها دایره را در برمی‌گرفت (چند ضلعی‌های محیطی) و بعضی از آن‌ها در درون دایره قرار می‌گرفتند. (چند ضلعی‌های محاطی) طبیعی است که مساحت دایره کوچکتر از مساحت چندضلعی‌های محیطی و بزرگتر از مساحت چندضلعی‌های محاطی است و وقتی تعداد اضلاع چنین

چندضلعی‌هایی را بیشتر و بیشتر می‌کنیم مساحت دایره با تقریب دلخواه به مساحت این چندضلعی‌ها نزدیک می‌شود. به زبان فنی‌تر، مساحت دایره حد مساحت‌های چندضلعی‌های محاطی (یا محیطی) است وقتی که تعداد اضلاع را بزرگ می‌کنیم و چندضلعی‌ها را منتظم اختیار کنیم. ارشمیدس با این روش توانست مقدار π را تا چند رقم اعشار محاسبه کرده و برای اولین بار فرمول مساحت دایره $S = \pi r^2$ را برحسب شعاع آن به‌دست آورد.

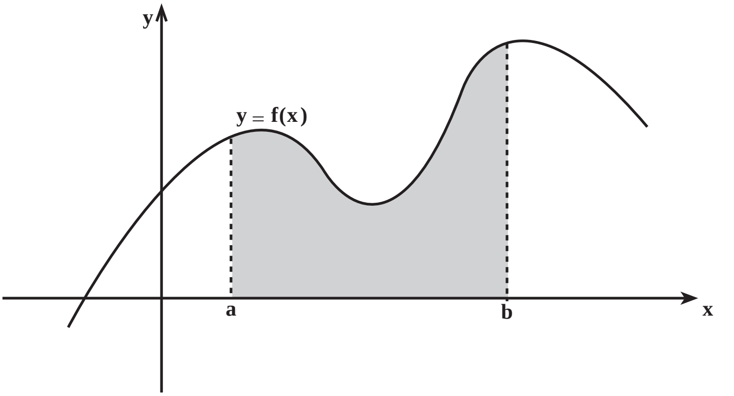
انتگرال معین

روشی که ارشمیدس برای محاسبه مساحت دایره به‌کار برده است اساس تعریف انتگرال معین است. انتگرال معین را می‌توانیم مساحت زیر نمودار یک تابع تعریف کنیم. البته بعد از فرمول‌بندی این مفهوم مایلیم که برای هر تابع که بر یک بازه از اعداد حقیقی تعریف شده باشد انتگرال معین آن را محاسبه کنیم. برای شروع تعریف انتگرال معین، توابعی را مورد نظر قرار می‌دهیم که بر یک بازه تعریف شده و نمودار آن‌ها بالای محور x قرار دارد.

در واقع روشی که در این کتاب برای تعریف انتگرال‌های معین اعمال می‌کنیم در سه مرحله متوالی و مشخص و به طریقه زیر ارائه می‌گردد.

تعریف: فرض کنیم تابع f در بازهٔ بسته [a,b] پیوسته و برای هر $x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$. در این صورت منظور از نِماد $\int_a^b f(x)dx$

(بخوانید انتگرال تابع f (x) از a تا b) مساحت ناحیه زیر نمودار $y = f(x)$ است که بالای محور x و بین خطوط $x = a$ و $x = b$ قرار دارد (شکل الف). مقادیر a و b را **حدود انتگرال‌گیری** می‌نامیم. dx نمایش این است که متغیر انتگرال‌گیری x است.

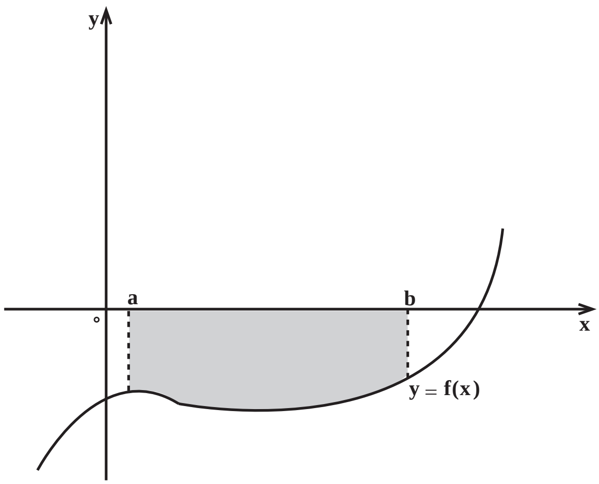


شکل الف) $\int_a^b f(x)dx$ **مساحت ناحیه سایه زده شده می‌باشد و عددی است مثبت.**

بنابراین

انتگرال توابع نامنفی (یعنی توابعی که فقط مقادیر مثبت یا صفر اختیار می‌کنند) همیشه عددی مثبت (یا صفر) است و برابر مساحت ناحیه زیر نمودار و محدود به محور xها و حدود انتگرال‌گیری است.

تعریف : فرض کنیم تابع f در بازهٔ بسته [a,b] پیوسته و برای هر $x \in [a, b]$ ، $f(x) \leq 0$. در این صورت منظور از نماد $\int_a^b f(x)dx$
قرینه مساحت ناحیه بالای نمودار $y = f(x)$ است که به محور x و خطوط $x = a$ و $x = b$ محدود شده باشد (شکل ب).

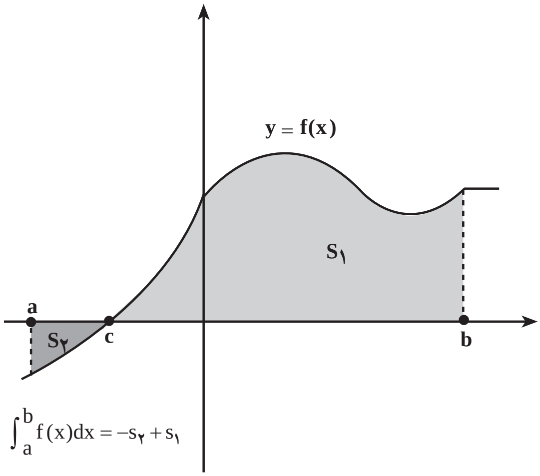


شکل ب) $\int_a^b f(x)dx$ **برابر قرینه مساحت ناحیه سایه زده شده می‌باشد و عددی است منفی.**

بنابراین

انتگرال توابعی که فقط مقادیر منفی (یا صفر) اختیار می‌کنند، یعنی توابعی که نمودار آن‌ها زیر محور x قرار دارد برابر قرینه مساحت ناحیه بالای نمودار و محدود به محورx و حدود انتگرال‌گیری است. پس انتگرال اینگونه توابع همیشه عددی منفی یا صفر است.

تعریف : فرض کنیم f تابعی پیوسته بربازهٔ $[a,b]$, $a<c<b$ و برای هر x که $f(x)$, $x \in [a,c]$ همواره مثبت (منفی) و برای هر x که $f(x)$, $x \in [c,b]$ همواره منفی (مثبت) باشد. در این صورت قرار می‌دهیم. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$



شکل ج) برای توابعی که نمودار آن‌ها در قسمتی از دامنه‌شان پایین محور x و در قسمت دیگری از دامنه بالای محور xها قرار دارد، $\int_a^b f(x)dx$ به عنوان جمع جبری مساحت‌های بالای محور xها و پایین محور xها تعریف می‌گردد. مساحت بالای محور x با همان مقدار (مثبت) و مساحت پایین محور xها با علامت منفی (قرینه مساحت) در محاسبه انتگرال مطابق تعریف‌های قبلی محاسبه می‌گردند.

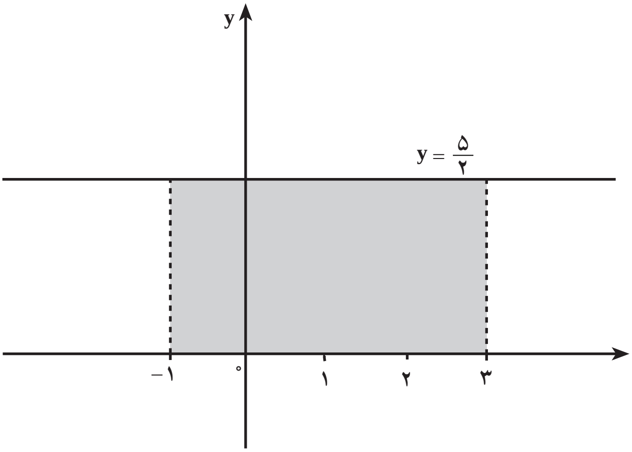
تعریف اخیر در واقع انتگرال معین هر تابع پیوسته را در حالت کلی ارائه می‌دهد. هرگاه در بیش از دو بازه تابع مورد نظر تغییر علامت دهد باز به همین روش عمل می‌کنیم. با این تعریف هر جا نمودار بالای محور xها است اندازه مساحت و هرجا که نمودار پایین محور xها است قرینه مساحت مربوطه را در محاسبه آورده می‌شوند. باید به خاطر داشته باشیم که مساحت همیشه کمیتی است مثبت ولی انتگرال معین می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد.

اکنون با ذکر مثال‌هایی به محاسبه بعضی انتگرال‌های ساده خطی می‌پردازیم.

مثال‌هایی از انتگرال معین

۱ــ فرض کنیم $c>0$ و $f(x)=c$ تابع ثابت با مقدار ثابت c باشد. سطح زیر نمودار این تابع در بازه $[a,b]$ مستطیلی است به ارتفاع c و قاعده $b-a$ که همان طول فاصله انتگرال‌گیری است.

$\int_a^b cdx = c(b-a)$



مساحتی که با $\int_{-1}^{3} \frac{5}{2} dx$ نشان داده شده است.

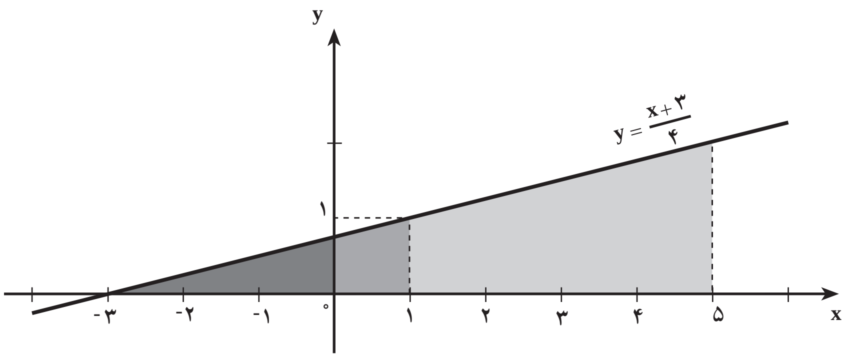
برای مثال

$$\int_{-1}^{3} \frac{5}{2} dx = \frac{5}{2}(3-(-1)) = 10$$

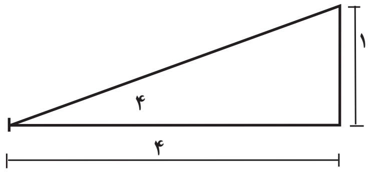
مثال ۱ : مقادیر انتگرال‌های معین زیر را پیدا کنید.

$$\int_{-3}^{1} \frac{x+3}{4} dx \quad , \quad \int_{0}^{5} \frac{x+3}{4} dx$$

حل : برای محاسبه انتگرال‌ها نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x+3}{4}$ را در بازه‌های مربوطه رسم می‌کنیم :

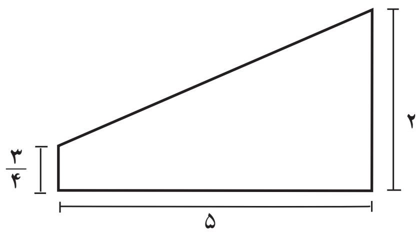


لذا انتگرال معین $\int_{-۳}^{۱} \frac{x+۳}{۴}dx$ برابر است با مساحت مثلث زیر



$$\text{مساحت} = (\frac{۱}{۲}) \times ۴ \times ۱ = ۲$$

و انتگرال معین $\int_{۰}^{۵} \frac{x+۳}{۴}dx$ برابر است با مساحت ذوزنقه زیر



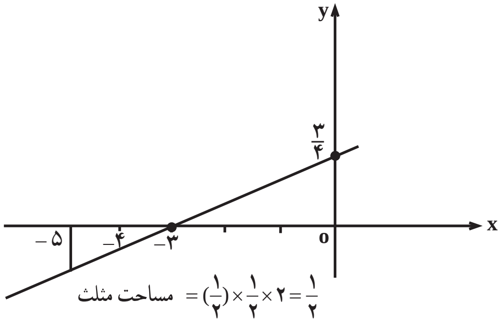
$$\text{مساحت} = \frac{۱}{۲}(\frac{۳}{۴} + ۲) \times ۵ = \frac{۵۵}{۸}$$

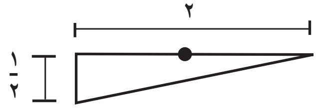
بنابراین داریم

$$\int_{۰}^{۵} \frac{x+۳}{۴}dx = ۶\frac{۷}{۸} \qquad , \qquad \int_{-۳}^{۱} \frac{x+۳}{۴}dx = ۲$$

مثال ۲ : انتگرال معین $\int_{-۵}^{-۳} \frac{x+۳}{۴}dx$ را محاسبه کنید.

حل : در اینجا نمودار تابع را در بازهٔ [۳- , ۵-] درنظر می‌گیریم.





چون مساحت زیر محور x است، انتگرال برابر است با

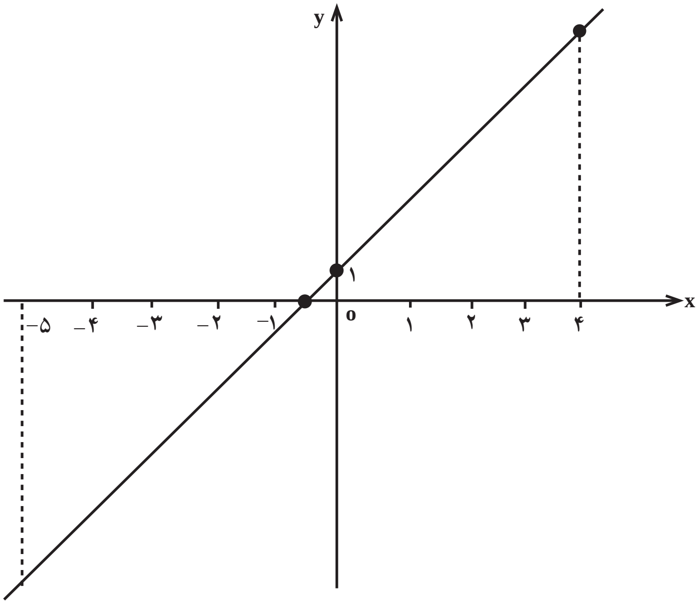
$$\int_{-۵}^{-۳} \frac{x+۳}{۴}dx = -\frac{۱}{۲}$$

مثال ۳ : مقدار $\int_{-۵}^{۴}(۲x+۱)dx$ را محاسبه کنید.

حل : این تابع در قسمتی از بازهٔ انتگرال‌گیری مقادیر مثبت و در قسمت دیگری از آن مقادیر منفی به خود می‌گیرد. و می‌بایست انتگرال مورد نظر را طبق تعریف به مؤلفه‌های مثبت و منفی آن تجزیه کرده و نتایج حاصله را جمع (**جمع جبری**) کنیم.

داریم $۲x+۱=\circ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$

این تابع در بازه $\left[-۵,-\frac{۱}{۲}\right]$ منفی و در بازهٔ $\left[-\frac{۱}{۲},۴\right]$ مثبت می‌باشد.



$$\int_{-۵}^{۴}(۲x+۱)dx=\int_{-۵}^{-\frac{۱}{۲}}(۲x+۱)dx+\int_{-\frac{۱}{۲}}^{۴}(۲x+۱)dx$$

$$\int_{-۵}^{-\frac{۱}{۲}}(۲x+۱)dx=-\left[(\frac{۱}{۲})(\frac{۹}{۲})(۹)\right]=-\frac{۸۱}{۴}$$

$$\int_{-\frac{۱}{۲}}^{۴}(۲x+۱)dx=(\frac{۱}{۲})(\frac{۹}{۲})\times ۹=\frac{۸۱}{۴}$$

بنابراین $$\int_{-۵}^{۴}(۲x+۱)dx=\frac{۸۱}{۴}+\frac{۸۱}{۴}=\circ$$

نکته : اگر $a = b$ سطح زیر (بالای) نمودار تابع تبدیل به یک پاره‌خط می‌گردد. لذا در این حالت انتگرال معین را به‌عنوان ابزاری که مساحت چنین پاره‌خطی را اندازه می‌گیرد تلقی می‌کنیم که البته این مساحت برابر صفر است. به‌عبارت دیگر، برای هر تابع f که در $x = a$ تعریف شده باشد، قرار می‌دهیم

$$\int_{a}^{a} f(x) = ۰$$

برای کلیّت بخشیدن به مفهوم انتگرال، برای وقتی که $b < a$ نیز چنین عمل می‌کنیم :

تعریف : بر طبق قرارداد، توافق می‌کنیم که

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = -\int_{b}^{a} f(x)dx$$

مثلاً برای محاسبه انتگرال‌های $\int_{۴}^{-۵}(۲x+۱)dx$ ، $\int_{-۳}^{-۵}\frac{x+۳}{۴}dx$ ، $\int_{۱}^{-۳}\frac{x+۳}{۴}dx$ داریم

$$\int_{۴}^{-۵}(۲x+۱)dx = -\int_{-۵}^{۴}(۲x+۱)dx = ۰$$

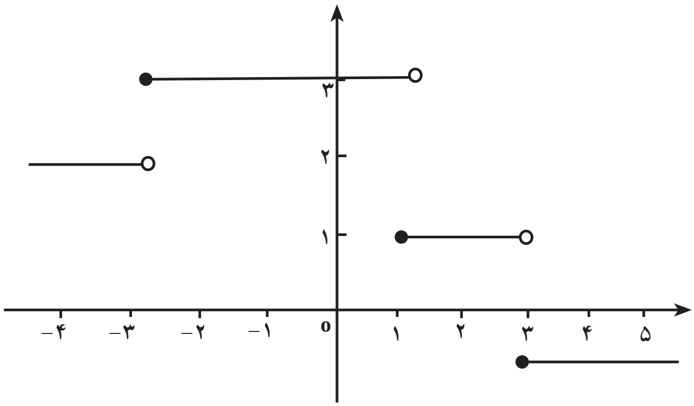
$$\int_{-۳}^{-۵}\frac{x+۳}{۴}dx = -\int_{-۵}^{-۳}\frac{x+۳}{۴}dx = -(-\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}$$

$$\int_{۱}^{-۳}\frac{x+۳}{۴}dx = -\int_{-۳}^{۱}\frac{x+۳}{۴}dx = -(۲) = -۲$$

این سؤال قابل طرح است که چنانچه تابع مورد نظر در بازه انتگرال‌گیری پیوسته نباشد آیا می‌توانیم باز هم برای آن انتگرال معین تعریف کنیم؟

توابعی که پیوسته نیستند اصطلاحاً توابعی بدرفتار تلقی می‌شوند؛ امّا در میان اینگونه توابع بعضی‌ها کمتر بدرفتار هستند. برای نمونه یک تابع پله‌ای گرچه در بعضی نقاط دامنه‌اش پیوسته نیست، چندان هم بدرفتار نمی‌باشد. در این موارد بازه انتگرال‌گیری را در نقاطی از قلمرو که تابع در آنجا پیوسته نیست تجزیه کرده و بازه‌های کوچکتری به‌دست آوریم که تابع مفروض در هریک از این بازه‌ها پیوسته باشد.

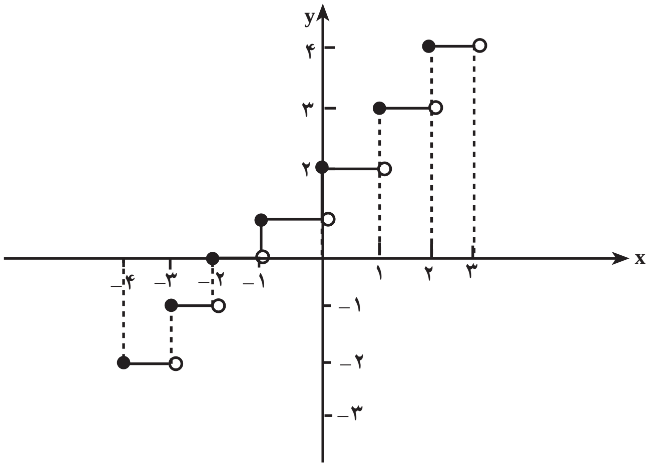
در شکل صفحه بعد نمودار یک تابع پله‌ای نشان داده شده است. همچنان‌که ملاحظه می‌شود این تابع در نقاط $x = -۳$ ، $x = ۱$ و $x = ۳$ پیوسته نیست. ولی جز این نقاط در سایر نقاط تابع پیوسته است. در واقع تعداد اندکی از نقاط دامنه (یا حتی در نقاط یک دنباله نامتناهی) که تابع در آنجا پیوسته نباشد در وجود انتگرال تأثیری ندارد.



مثالی از یک تابع پله‌ای

مثال : انتگرال معین $\int_{-4}^{3}([x]+2)dx$ را محاسبه کنید.

حل : نمودار تابع $f(x) = [x] + 2$ در بازه $[-4, 3]$ در شکل زیر رسم شده است.



این تابع در نقاط صحیح $x = -3$ ، $x = -2$ ، $x = -1$ ، $x = 0$ ، $x = 1$ و $x = 2$ ناپیوسته است.

$$\int_{-4}^{3}([x]+2)dx = \int_{-4}^{-3}([x]+2)dx + \int_{-3}^{-2}([x]+2)dx + \int_{-2}^{-1}([x]+2)dx$$

$$+\int_{-1}^{0}([x]+2)dx + \int_{0}^{1}([x]+2)dx + \int_{1}^{2}([x]+2)dx + \int_{2}^{3}([x]+2)dx$$

$$= (-2) + (-1) + 0 + (+1) + (+2) + (+3) + (+4) = +7$$

مسائل

مقدار انتگرال‌های معین ۱ تا ۱۰ را محاسبه کنید.

۱ــ $\int_{1}^{4}(3x+2)dx$

۲ــ $\int_{1}^{4}(1-x)dx$

۳ــ $\int_{-3}^{2} x\,dx$

۴ــ $\int_{-3}^{3}|x|dx$

۵ــ $\int_{0}^{3}|2x+1|dx$

۶ــ $\int_{-2}^{3}|2-x|dx$

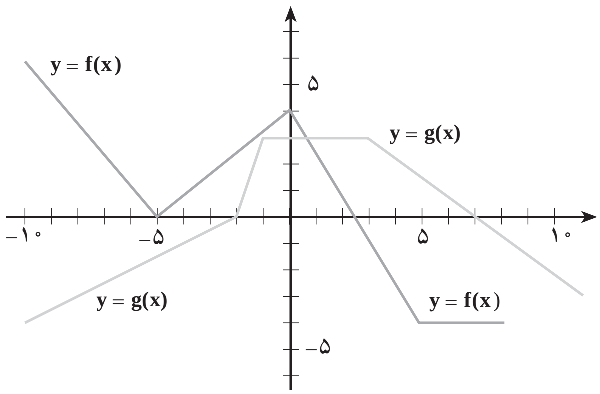
۷ــ $\int_{-2}^{4} 2[x]dx$

۸ــ $\int_{-4}^{3}([x]-1)dx$

۹ــ $\int_{-7}^{-3}(-\frac{5}{2})dx$

۱۰ــ $\int_{6}^{2}(-3)dx$

با استفاده از نمودار توابع f و g نشان داده شده در زیر، انتگرال‌های معین تمرین‌های ۱۱ تا ۲۰ را پیدا کنید.



۱۱ــ $\int_{-6}^{0} f(x)dx$

۱۲ــ $\int_{6}^{10} f(x)dx$

۱۳ــ $\int_{-8}^{2} g(x)dx$

۱۴ــ $\int_{-1}^{8} g(x)dx$

۱۵ــ $\int_{0}^{6} f(x)dx$

۱۶ــ $\int_{2}^{-2} f(x)dx$

۱۷ــ $\int_{-5}^{10} g(x)dx$

۱۸ــ $\int_{6}^{-2} f(x)dx$

۱۹ــ $\int_{-6}^{6} f(x)dx$

۲۰ــ $\int_{-5}^{5} g(x)dx$

انتگرال توابع غیرخطی

همچنان‌که ملاحظه کردیم، در این بخش انتگرال توابع ساده‌ای را که نمودار آن‌ها خطی یا قطعه‌ای خطی است، محاسبه کردیم.

اکنون این سؤال پیش می‌آید که هرگاه نمودار تابع مورد نظر یک منحنی (غیر خطی) باشد، انتگرال آن چگونه محاسبه می‌گردد؟ در این حالت مساحت مورد نظر یک شکل ساده هندسی متشکل از چند مثلث و مستطیل نمی‌باشد تا بتوانیم به آسانی انتگرال معین را محاسبه کنیم.

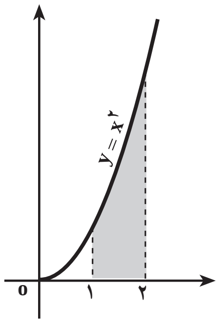
مثلاً $\int_1^4 x^2dx$ چقدر است؟

همچنان‌که در دو شکل«ب» و «ج» نشان داده شده است $\int_1^2 x^2dx$ را می‌توانیم با انتخاب نقاطی در بازهٔ $[1,2]$ و با استفاده از مساحت مستطیل‌های به‌دست آمده با تقریب محاسبه کنیم. در شکل (الف)، بخشی از مساحت مستطیل‌ها زیر نمودار بوده و در مجموع مساحت مستطیل‌ها از مساحت زیر نمودار کمتر است. پس در این حالت انتگرال با تقریب نقصانی محاسبه می‌شود. در شکل (ج)، بخش مساحت مستطیل‌ها بالای نمودار تابع بوده و حاصل‌جمع مساحت مستطیل‌ها افزون بر مساحت زیر منحنی است. در این حالت گوییم انتگرال با تقریب اضافی محاسبه شده است.

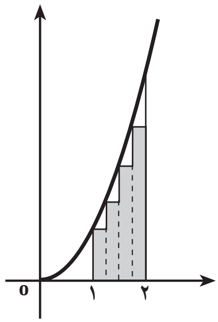
واضح است که هر چقدر تعداد نقاط انتخاب شده در بازه را زیاد کنیم و طول بازه‌های جزء را کوچکتر کنیم مقدار انتگرال محاسبه شده با تقریب‌های بهتری انتگرال واقعی (مساحت زیر نمودار) را به‌دست می‌دهد.

این روش اساس محاسبه انتگرال‌ها با روش‌های تقریبی است که معمولاً در دوره‌های عالی‌تر دروس ریاضیات مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

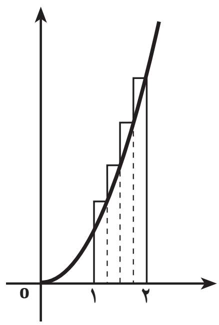
ما در مبحث بعدی با ارائه ارتباط بین مفهوم مشتق و مفهوم انتگرال، روش محاسبه انتگرال‌هایی نظیر توابع فوق را تشریح می‌کنیم. این ارتباط به نام قضیه اساسی حساب دیفرانسیل (حساب مشتق‌ها) و انتگرال شهرت دارد.



شکل الف) از نظر تعریف $\int_1^2 x^2dx$ برابر مساحت زیر نمودار است.



شکل ب) حاصل جمع مساحت چهار مستطیل زیر نمودار انتگرال $\int_1^2 x^2dx$ را با تقریب نقصانی به دست می‌دهد.



شکل ج) حاصل‌جمع مساحت مستطیل‌های بالای نمودار، انتگرال $\int_1^2 x^2dx$ را با تقریب اضافی به دست می‌دهد.

اولین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

فرض کنیم f تابعی باشد که در هر نقطهٔ بازه $[a , b]$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت تابع f'، یعنی **تابع مشتق** را در این بازه در دست داریم که مقدار آن درنقطه x، برابر شیب نمودار تابع f در x است :

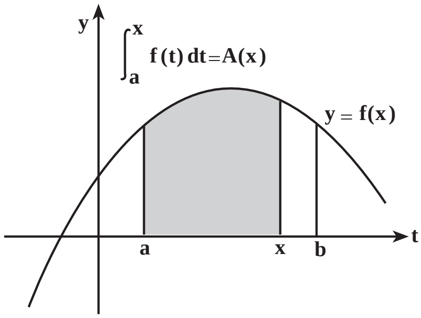
$f'(x) = x$ شیب نمودار تابع f در

اکنون با استفاده از مفهوم انتگرال معین یک تابع جدید از طریق نمودار f می‌سازیم.

فرض کنیم $[a , b]$ یک بازه و f تابعی پیوسته بر این بازه باشد. برای هر x که $a \le x \le b$، مقدار انتگرال معین $\int_a^x f(t)dt$ به x بستگی دارد و در نتیجه تابعی از x است. باید توجه داشت که x به‌عنوان حد بالای انتگرال و t متغیر انتگرال‌گیری است. همچنین در اینجا a را ثابت نگه‌داشته‌ایم. به‌عبارت دیگر، ما به این عبارت انتگرال، به‌عنوان تابعی از x می‌نگریم. هرگاه این تابع را A بنامیم، ضابطهٔ تعریف A چنین است :

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

این تابع را **تابع مساحت** می‌نامیم (شکل زیر).



ضابطه تابع مساحت با $\int_a^x f(t)dt$ نشان داده شده است.

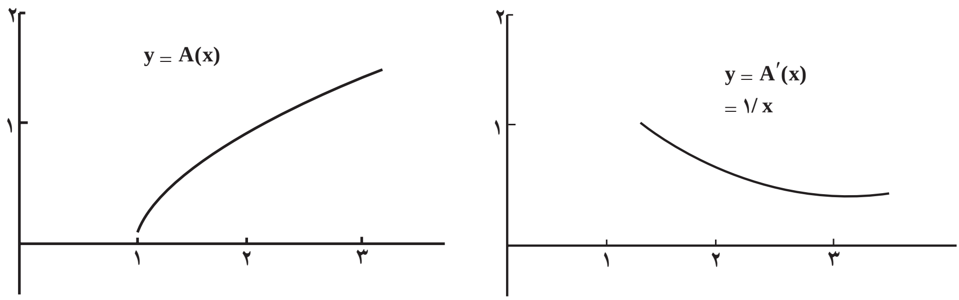
مثال : ضابطهٔ تعریف تابع مساحت را برای تابع $f(t) = \frac{۱}{t}, ۱ \le t \le ۳$ تعریف کرده و نمودار آن را رسم کنید.

حل : تابع مساحت در این مثال دارای ضابطهٔ $A(x) = \int_۱^x \frac{۱}{t}dt$ است که $۱ \le x \le ۳$. با استفاده از یک ماشین حساب که قادر به محاسبه انتگرال معین باشد، یا با استفاده از کاغذ شطرنجی، می‌توانیم برای چندین مقدار از x , A(x) را حساب کنیم.

در جدول زیر بعضی از مقادیر تابع درج شده و سپس نمودار آن نیز رسم شده است.

x	A(x)	x	A(x)
۱/۰	۰/۰۰۰	۲/۱	۰/۷۴۲
۱/۱	۰/۰۹۵	۲/۲	۰/۷۸۸
۱/۲	۰/۱۸۲	۲/۳	۰/۸۳۳
۱/۳	۰/۲۶۲	۲/۴	۰/۸۷۵
۱/۴	۰/۳۳۶	۲/۵	۰/۹۱۶
۱/۵	۰/۴۰۵	۲/۶	۰/۹۵۵
۱/۶	۰/۴۷۰	۲/۷	۰/۹۳۳
۱/۷	۰/۵۳۱	۲/۸	۱/۰۳۰
۱/۸	۰/۵۸۸	۲/۹	۱/۰۶۵
۱/۹	۰/۶۴۲	۳/۰	۱/۰۹۹
۲/۰	۰/۶۹۳		

سؤال : نرخ تغییرات تابع مساحت چیست؟ به‌عبارت دیگر $A'(x)$ کدام است؟ هرگاه با استفاده از نمودار $y = A(x)$ نمودار مشتق A' را رسم کنیم، تصویری به دست می‌آوریم که بسیار شبیه نمودار $y=\frac{۱}{x}$ بر بازهٔ [۱,۳] می‌باشد.



نمودار تابع‌های $y = A(x)$ و $y = A'(x)$ نشان داده شده است.

سؤال : آیا این امر حقیقت دارد که ما به همان تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ بازگشته‌ایم؟ در واقع، اولین قضیهٔ بنیادی حساب انتگرال نشان‌دهنده آن است که این امر همیشه واقعیت دارد. که به‌صورت زیر بیان می‌شود.

قضیه :

فرض کنیم f تابعی پیوسته بر فاصله $[a, b]$ و برای هر x که $a \le x \le b$

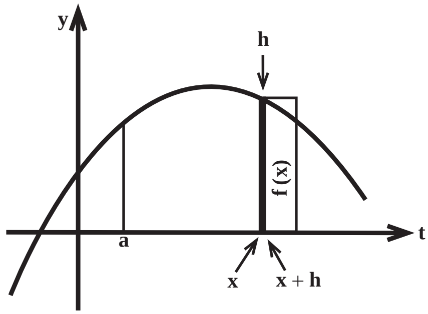
$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

در این‌صورت برای هر x که $a < x < b$، داریم : $A'(x) = f(x)$

برای اثبات قضیه فوق ابتدا محاسبه مشتق $A'(x)$ نسبت نموهای $\dfrac{A(x+h) - A(x)}{h}$

را برای مقادیر کوچک h بررسی می‌کنیم. صورت این کسر متناظر مساحت نوار سیاه شده در شکل زیر بوده و برابر انتگرال معین زیر می‌باشد.

$$\int_x^{x+h} f(t)dt$$



$$A(x+h) - A(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = f(x)h$$

مساحت این ناحیه تقریباً برابر است با مساحت مستطیل باریک و بلندی به عرض h و طول $f(x)$.

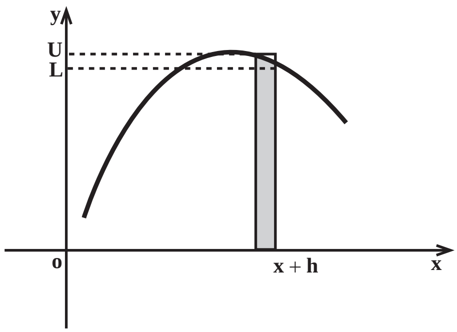
بنابراین :

$$A'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x)h}{h} = f(x)$$

این تقریب وقتی که h کوچکتر می‌شود به مقدار واقعی آن نزدیکتر می‌شود. می‌توانیم نرخ تغییرات واقعی $A(x)$ را به گونه دیگری نیز حساب کنیم. نمو A بین مساحت‌های مستطیل‌های پایینی و

بالایی(شکل زیر) به عرض h قرار دارد.



هر گاه L ارتفاع مستطیل پایینی و U ارتفاع مستطیل بالایی باشد، آنگاه $A(x+h) - A(x)$ بین Lh و Uh قرار دارد. پس :

$$L \le \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \le U$$

وقتی h به صفر نزدیک می‌شود، فاصله مورد نظر یعنی $[x, x+h]$ به نقطهٔ تنهای x تبدیل می‌گردد. چون g پیوسته است، هم مقدار ماکزیمم تابع (U) و هم مقدار می‌نیمم تابع (L) در این فاصله به f (x) نزدیک می‌شود و باید داشته باشیم :

$$\lim_{h\to ۰}\frac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(x)$$

یعنی $A'(x) = f(x)$.

مثال ۱ : اگر $F(x) = \int_{۰}^{x} t^{۲}e^{t}dt$ باشد، $F'(x)$ را محاسبه کنید.

حل : توجّه داریم که تابع $t^{۲}e^{t}$ بر روی IR پیوسته است. بنابراین، با توجه به اولین قضیه اساسی حساب انتگرال خواهیم داشت :

$$F'(x) = x^{۲}e^{x}$$

مثال ۲ : اگر $F(x) = \int_{۰}^{x} \frac{\sin t dt}{t^{۲}+۱}$ باشد، $F'(x)$ را محاسبه کنید.

حل : در اینجا تابع زیر علامت انتگرال $\frac{\sin t}{t^{۲}+۱}$ می‌باشد، این تابع بر روی IR پیوسته است. بنابراین، با توجه به اولین قضیه اساسی حساب انتگرال داریم $F'(x) = \frac{\sin x}{x^{۲}+۱}$ که در آن $x \in IR$.

تعریف : تابع مساحت $A(x)$ را که برای آن داریم :

$$A'(x) = f(x)$$

یک تابع اوّلیه $f(x)$ نیز می‌نامند.

اولین قضیه اساسی نشان‌دهنده این واقعیت است که هر تابع پیوسته دارای یک تابع اولیه است که همان تابع مساحت می‌باشد. البته هرگاه C مقدار ثابت دلخواهی باشد، $A(x) + C$ نیز یک تابع اولیه دیگر تابع $f(x)$ می‌باشد. زیرا :

$$(A(x) + C)' = A'(x) = f(x)$$

بنابراین اگر یک تابع دارای تابع اولیه باشد، دارای توابع اوّلیه بی‌شماری است که از افزودن مقادیر ثابت به هر تابع اوّلیه دیگر به دست می‌آیند. عمل تابع اوّلیه‌گیری در واقع عمل معکوس مشتق‌گیری است.

قضیه : (دومین قضیه اساسی حساب انتگرال)

اگر F یک تابع اوّلیه دلخواه تابع پیوسته f باشد، آنگاه.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

مثال : انتگرال $\int_1^2 x^2dx$ را حساب کنید.

حل : یک تابع اولیه از $f(x) = x^2$ تابع $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ است.

بنابر دومین قضیه اساسی

$$\int_1^2 x^2dx = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

متذکر می‌شویم که هر تابع اولیه دیگر f نیز همان مقدار را برای انتگرال معین به دست خواهد داد. برای نمونه، $G(x) = \frac{x^3}{3} + 47$ یک تابع اولیه دیگر $f(x) = x^2$ است و

$$G(2) - G(1) = (\frac{2^3}{3} + 47) - (\frac{1^3}{3} + 47)$$

$$= \frac{8}{3} + 47 - \frac{1}{3} + 47 = \frac{7}{3}$$

چون مقدار ثابت ۴۷ به عنوان یک جمله هم در محاسبه $G(2)$ و هم در محاسبه $G(1)$ ظاهر می‌شود وقتی که تفاضل این دو مقدار را محاسبه می‌کنیم حذف می‌گردد. هرگاه ۴۷ را با هر مقدار ثابت و دلخواه دیگر C تعویض کنیم باز همان نتیجه به‌دست می‌آید.

نمادی که غالباً برای $F(b) - F(a)$ مورد استفاده قرار می‌گیرد عبارت است از :

$F(x)]_a^b$ و یا $F(x)]_{x=a}^{x=b}$

معمولاً تابع اولیه تابع $f(x)$ را با نماد $\int f(x)dx$

نیز نشان می‌دهند، دومین قضیه اساسی را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx]_a^b$$

$\int f(x)dx$ را **انتگرال نامعین** تابع $f(x)$ نیز می‌نامند.

مثال : مساحت زیر نمودار تابع $y=\frac{۱}{x^۲}$ از $x=۱$ تا $x=۴$ را حساب کنید.

حل : چون تابع $\frac{۱}{x^۲}$ در بازه $[۱,۴]$ مثبت و پیوسته است و $-\frac{۱}{x}$ یک تابع اوّلیه تابع $\frac{۱}{x^۲}$ می‌باشد

با توجه به دومین قضیه اساسی حساب انتگرال S مساحت موردنظر از رابطه زیر بدست می‌آید

$$S=\int_۱^۴ \frac{dx}{x^۲}=\left[-\frac{۱}{x}\right]_۱^۴=-\frac{۱}{۴}+۱=\frac{۳}{۴}$$

اکنون ببینیم چگونه دومین قضیه اساسی را می‌توانیم از اولین قضیه اساسی نتیجه‌گیری کنیم.

استدلال : فرض کنیم f تابعی پیوسته و F یک تابع اولیه آن باشد.

تابع مساحت :

$$A(x)=\int_a^x f(t)dt$$

را در نظر می‌گیریم.

از اینجا نتیجه می‌شود که $A(a)=۰$ و

$$(۱)\quad A(b)=\int_a^b f(t)dt$$

به استناد اولین قضیه اساسی می‌دانیم که A نیز یک تابع اولیه g می‌باشد. چون تفاضل دو تابع اولیه از یک تابع پیوسته مقدار ثابتی است (چرا؟) عدد ثابتی چون C هست به قسمی که

$$(۲)\quad A(x)=f(x)+C$$

اکنون مقدار C را پیدا می‌کنیم. با جایگزینی $x=a$ داریم :

$$A(a)=۰=F(a)+C$$

پس

$$(۳)\quad C=-F(a)$$

اکنون با جایگزینی $x=b$ در روابط (۱) و (۲) به دست می‌آوریم :

$$A(b)=\int_a^b f(x)dx \quad , \quad A(b)=F(b)+C$$

از این دو رابطه و رابطه (۳) خواهیم داشت :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

نکته : اهمیت دومین قضیه اساسی در این است که کافی است برای یافتن مقادیر انتگرال‌های معین توجه‌مان را به محاسبه توابع اولیه معطوف بکنیم. بنابراین لازم است روش‌های محاسبه توابع اولیه (انتگرال‌های نامعین) را قبلاً در دست داشته باشیم.

محاسبه تابع اولیه

همانگونه که قبلاً گفتیم تابع اولیه عکس مشتق‌گیری است. عمل محاسبه تابع اولیه تابعی مانند f به منزلهٔ یافتن تابعی مانند g است که :

$$g'(x) = f(x)$$

به عبارت دیگر مشتق تابعی در دست است می‌خواهیم خود تابع را پیدا کنیم. به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۱ : یک تابع اولیه تابع $f(x) = ۲x$ را پیدا کنید.

حل : چون $(x^۲)' = ۲x$ بنابراین تابع $F(x) = x^۲$ یک تابع اولیه تابع $f(x) = ۲x$ است.

مثال ۲ : یک تابع اولیه تابع $g(x) = \cos x$ را پیدا کنید.

حل : چون $(\sin x)' = \cos x$، ملاحظه می‌کنیم که $G(x) = \sin x$ یک تابع اولیه f می‌باشد.

متذکر می‌شویم که ما صحبت از «یک تابع اولیه» می‌کنیم نه «تابع اولیه»، زیرا هر تابع می‌تواند تعداد بی‌شماری تابع اولیه داشته باشد. برای مثال، هر یک از توابع

$$f_۳(x) = x^۲ + \sqrt{۳} \quad \text{و} \quad f_۲(x) = x^۲+۳ \quad \text{و} \quad f_۱(x) = x^۲$$

و $f_۴(x) = x^۲+\pi$ تابع اولیهٔ تابع $f(x)=۲x$ می‌باشند. زیرا مشتق هریک از آن‌ها برابر ۲x می‌باشد.

ولی همه این توابع در یک چیز مشترک‌اند. همگی به صورت $f(x) = ۲x + C$ می‌باشند که در آن C مقدار ثابتی است (در مثال‌های فوق به ترتیب $C = ۰$، $C = ۳$، $C = \sqrt{۳}$ و $C = \pi$). یقیناً برای هر مقدار عددی دلخواه که به C نسبت دهیم یک تابع اولیه دیگر از تابع $x \mapsto ۲x$ حاصل خواهد شد.

نماد انتگرال $\int$ وقتی بدون حدود انتگرال‌گیری به کار می‌رود منظور یک تابع اولیه عمومی است. به همین خاطر

$$\int f(x)\,dx$$

را **انتگرال نامعین یا تابع اولیه** عمومی f می‌نامیم.

وقتی تابع پیوسته f و یک تابع اولیه مشخص و بخصوص آن، مثل F در دست باشد ($F' = f$) تابع اولیه عمومی f را می‌توانیم به صورت

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

بنویسیم. این فرمول همهٔ توابع اولیه‌های ممکن تابع f را به دست می‌دهد. به عبارت دیگر، وقتی یک تابع اولیه f را پیدا بکنیم، اساساً همهٔ توابع اولیه f نیز مشخص شده‌اند. به عنوان مثال

$$\int ۲x\,dx = x^۲ + C$$

که در آن C مقدار ثابتی است. بعد از این، در محاسبات توابع اولیه از ذکر این که C مقدار ثابتی است خودداری می‌کنیم.

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

نکته : در مسائل کاربردی که غالباً در علوم دیگر (فیزیک، شیمی، مکانیک و کلیه علوم وابسته به ریاضیات) با آن سروکار داریم، معمولاً یک تابع اولیه با شرایط ویژه‌ای موردنظر می‌باشد. این شرایط ویژه را شرایط اولیه (یا داده‌های اولیه) می‌نامند. به ذکر مثالی در این مورد می‌پردازیم.

مثال : تابع اولیه F از تابع f با ضابطهٔ $f(x) = ۳x^۲$ را که در شرط اولیه $F(-۲) = ۵$ صدق کند، به دست آورید.

حل : چون $(x^۳)' = ۳x^۲$، تابع اولیه F باید به صورت :

$$F(x) = x^۳ + C$$

باشد که C مقدار ثابتی است. شرط اولیه مشخص می‌کند که

$$۵ = F(-۲) = (-۲)^۳ + C = (-۸) + C$$

و از این‌جا $C = ۱۳$ به‌دست می‌آید. بنابراین

$$F(x) = x^۳ + ۱۳$$

تابع اولیه مورد نظر است.

چکیده

استفاده‌های مختلف از نماد $\int$ نتیجه‌های بسیار مختلفی به دست می‌دهد. وقتی این نماد بدون حدود انتگرال‌گیری باشد، انتگرال نامعین زیر

$$\int f(x)\,dx$$

همان تابع اولیه عمومی f می‌باشد، و این نمایشگر خانواده کاملی از توابع می‌باشد.

از طرف دیگر، وقتی حدود انتگرال‌گیری موجود باشد، انتگرال معین

$\int_a^b f(x)dx$

یک عدد حقیقی مشخص A است که با مساحت علامت‌دار (مثبت یا منفی) تحت نمودار $y = f(x)$ بر فاصله $[a, b]$ متناظر می‌گردد.

مثال : $\int (۴x - ۳)\, dx$ و $\int_۱^۲ (۴x - ۳)dx$ را حساب کنید.

حل : چون $(۲x^۲ - ۳x)' = ۴x - ۳$، انتگرال نامعین عبارت است از :

$$\int (۴x - ۳)\, dx = ۲x^۲ - ۳x + C$$

که در آن C مقدار ثابتی است. از سوی دیگر، انتگرال معین

$$\int_۱^۲ (۴x - ۳)dx = ۳$$

و این برابر مساحت ناحیه ذوزنقه‌ای شکل تحت نمودار $y = ۴x - ۳$ بر فاصله $[۱,۲]$ می‌باشد.

فرمول‌ها و ویژگی‌های تابع اولیه

هر فرمول مشتق برای هر تابع مشتق‌پذیر به طور خودکار یک فرمول تابع اولیه نظیر فراهم می‌کند.

مثال : $\int x^r dx$ را که در آن r ثابت و $r \neq -۱$ پیدا کنید.

حل : می‌دانیم که برای هر r , $(x^{r+۱})' = (r + ۱)x^r$. چون مشتقات دارای ویژگی

$$(cf)' = cf'$$

هستند، ملاحظه می‌کنیم که :

$$\left(\frac{x^{r+۱}}{r+۱}\right)' = x^r$$

در اینجا ذکر این نکته مهم است که به منظور احتراز از تقسیم بر صفر لازم است که : $r \neq -۱$ نتیجه می‌گیریم که

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+۱}}{r+۱} + C \qquad (r \neq -۱)$$

که در آن C ثابت دلخواهی است.

فرمول‌های خطی : ویژگی‌های خطی مشتق طبیعتاً ویژگی‌های خطی توابع اولیه را سبب می‌گردند. به عبارت دیگر، برای هر مقدار ثابت c،

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

ویژگی‌های خطی انتگرال‌گیری به ضمیمه فرمولی که در مثال قبل ارائه گردید به ما این امکان را می‌دهد تا بتوانیم تابع اولیه هر تابع چند جمله‌ای را محاسبه کنیم.

مثال : $\int(5x^4 - 3x^3 + 7x^2 + x - 8)dx$ را حساب کنید.

حل : جمله به جمله انتگرال‌گیری کرده، ضرایب را بیرون برده و از فرمول $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$ استفاده می‌کنیم.

$$\int(5x^4 - 3x^3 + 7x^2 + x - 8)dx$$

$$= 5\int x^4dx - 3\int x^3dx + 7\int x^2dx + \int xdx - 8\int dx$$

$$= 5\frac{x^5}{5} - 3\frac{x^4}{4} + 7\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 8x + C$$

$$= x^5 - \frac{3x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 8x + C$$

می‌توانیم پاسخ خود را با مشتق‌گیری کنترل و آزمایش کنیم :

$$(x^5 - \frac{3x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 8x + C)'$$

$$= 5x^4 - 3x^3 + 7x^2 + x - 8$$

این یک راه مطمئن برای آزمون درستی تابع اولیه است. **از جواب مشتق گرفته و آن را با تابع نخستین مقایسه کنید.**

مثال : $\int(\frac{4x^{\frac{2}{3}}}{7} - 5\sqrt{x} + \frac{\pi}{3x^2})dx$ را حساب کنید.

حل : به منظور آسانی در عمل از نماهای کسری برای هر جمله استفاده می‌کنیم

$$\int(\frac{4x^{\frac{2}{3}}}{7} - 5\sqrt{x} + \frac{\pi}{3x^2})dx$$

$$= \int(\frac{4}{7}x^{\frac{2}{3}} - 5x^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{3}x^{-2})dx$$

$$= (\frac{4}{7}\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - 5\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{3}\frac{x^{-1}}{-1}) + C$$

$$=\frac{۱۲x^{\frac{۵}{۳}}}{۳۵}-\frac{۱۰x^{\frac{۳}{۲}}}{۳}-\frac{\pi}{۳x}+C$$

دیگر فرمول‌های تابع اولیه‌گیری را می‌توان با معکوس کردن عمل مشتق‌گیری به دست آورد.
برخی فرمول‌های اساسی تابع اولیه‌گیری (انتگرال‌گیری) در زیر آمده است.
(k مقدار ثابت)

۱ـ $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

۲ـ $\int du = u + C$

۳ـ $\int \frac{du}{u} = Ln|u| + C$

۴ـ $\int \sin u\,du = -\cos u + C$

۵ـ $\int \cos u\,du = \sin u + C$

۶ـ $\int [f(u) \pm g(u)]du = \int f(u)du \pm \int g(u)\,du$

۷ـ $\int u^p du = \frac{۱}{p+۱}u^{p+۱} + C \quad , \quad (p \neq -۱) \quad , \quad (p \in IR)$

مسائل

فرمولی به صورت $F(x) + C$، که در آن F یک تابع اولیه برای تابع زیر انتگرال است، برای هر یک از انتگرال‌های نامعین زیر بیابید.

۱ـ $\int (x^۲ + x + ۱)dx$

۲ـ $\int (۳x^۲ + ۲x + ۱)dx$

۳ـ $\int \frac{x^۴}{۲}dx$

۴ـ $\int \sqrt{۱۷}dx$

۵ـ $\int \sqrt{x}dx$

۶ـ $\int \frac{۲}{x^۴}dx$

۷ـ $\int (۵\sin(x) - ۳\cos(x))dx$

۸ـ $\int \sqrt[۵]{x}dx$

۹ـ $\int x^{\frac{۷}{۳}}dx$

۱۰ـ $\int \frac{x^۳ - x^{-۳}}{۳}dx$

۱۱ـ $\int \pi x^{۱۰۰}dx$

۱۲ـ $\int (\sin^۲(x) + \cos^۲(x))dx$

فرض کنیم G تابع مساحت با ضابطه تعریف $G(x) = \int_۱^x \frac{\sin(۲t)}{۱+t^۲}dt$ باشد در هریک از تمرین‌های

زیر y' را پیدا کنید.

۱۳ـ $y = G(x^2)$

۱۴ـ $y = G(x)$

۱۵ـ $y = (G(x))^2$

۱۶ـ $y = x^2 G(x)$

۱۷ـ $y = G'(x)$

۱۸ـ $y = \frac{G(x)}{x^2}$

با استفاده از دومین قضیه اساسی، انتگرال‌های معین مفروض در تمرین‌های ۱۹ تا ۲۴ را محاسبه کنید :

۱۹ـ $\int_{-1}^{3} (x^2 + x + 1)dx$

۲۰ـ $\int_{1}^{2/5} (3x^2 + 2x + 1)dx$

۲۱ـ $\int_{4}^{9} \sqrt{x}dx$

۲۲ـ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (5\sin x - 3\cos x)dx$

۲۳ـ $\int_{1}^{3} (\sin^2 x + \cos^2 x)dx$

۲۴ـ $\int_{-4}^{-1} \frac{1}{x^2}dx$

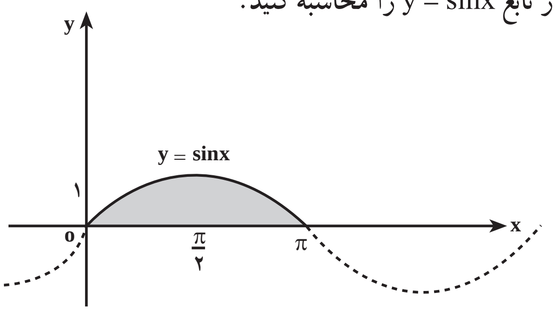
۲۵ـ دانش‌آموزی از دومین قضیه اساسی استفاده کرده و انتگرال زیر را محاسبه کرده است :

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big]_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2$$

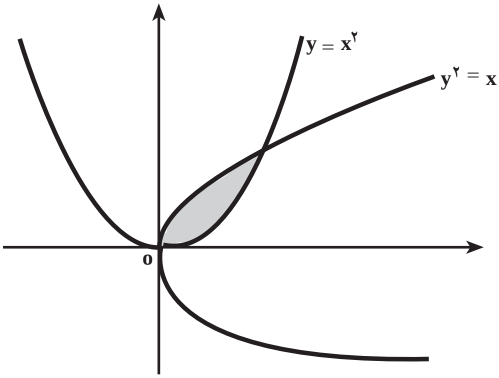
آیا این جواب قابل قبول است؟

نمودار $y = \frac{1}{x^2}$ را رسم کنید و بگویید که چرا جواب فوق قابل قبول نیست. اشتباه دانش‌آموز در کجاست؟

۲۶ـ مساحت یک طاق تحت نمودار تابع $y = \sin x$ را محاسبه کنید.



۲۷ـ مساحت ناحیه هاشور زده در شکل زیر را محاسبه کنید.



۲۸ـ $\int_۰^۱ e^{۲x}dx$ را محاسبه کنید.

۲۹ـ $\int_۱^۵ \frac{dx}{x}$ را محاسبه کنید.

۳۰ـ $\int_۱^۵ \frac{xdx}{x^۲+۱}$ را محاسبه کنید.

۳۱ـ $\int_۰^۲ e^{۵x}dx$ را محاسبه کنید.

نیوتن و لایبنیتز

بسیاری از مورخین علوم را باور بر این است که اسحاق نیوتن بزرگترین متفکر ریاضی همه قرون و اعصار بوده است. نیوتن در بین سال‌های ۱۶۴۲ و ۱۷۲۷ می‌زیسته است. کتاب **اصول ریاضیات** نیوتن که در سه مجلد به رشته تحریر درآمده است به عنوان مؤثرترین اثر علمی تاریخ علم شناخته شده است. مشهور است که نیوتن با افتادن سیبی از درخت، که به سر وی اصابت کرد، موفق شد که قانون جاذبه عمومی را کشف کند. البته از سال‌ها قبل فیزیکدان‌هایی نظیر گالیله و کپلر در پی آن بودند تا علت گردش سیاره‌ها را به دور خورشید توجیه کنند. به هر تقدیر صرف‌نظر از این‌که چنین روایتی در مورد نیوتن درست باشد یا نه، نیوتن و ریاضیدان آلمانی گاتفریدلایبنیتز (متولد به سال ۱۶۴۶ و متوفی به سال ۱۷۱۶ میلادی)، قطعاً اولین کسانی بودند که به اهمیت رابطه اساسی بین شیب یک نمودار و مساحت تحت آن پی‌بردند. شواهد نسبتاً قوی در دست است که نیوتن و لایبنیتز تفکر یکسانی در این مورد داشتند، لکن مستقل از یکدیگر عمل می‌کردند. تفکر این دو ریاضیدان به سرعت به عنوان انقلابی در علوم ریاضی تلقی گردید. متأسفانه مشاجره‌های تلخی نیز بین این دو برسر کشف حساب دیفرانسیل و انتگرال پدید آمد و اتهاماتی به یکدیگر نسبت دادند. معهذا با آن که نیوتن و لایبنیتز تحولات شگرفی در ریاضیات قرن هفدهم پدید آوردند، ما می‌توانیم سابقه بسیاری از پایه‌های فکری مفاهیم دیفرانسیل و انتگرال را به روزگاران بسیار گذشته و ارشمیدس نسبت دهیم. نظریه‌های نیوتن و لایبنیتز در مورد حساب دیفرانسیل و انتگرال در واقع، باروری و بهره‌وری قرن‌ها توسعه و تصفیه افکار کسانی چون ارشمیدس می‌باشد.

خود نیوتن، دینی را که به ارشمیدس داشته است چنین بیان می‌دارد: «اگر من توانسته‌ام بیشتر از دیگران چیزها را ببینم (کشف کنم) به واسطه آن است که بر شاخ‌های غول‌هایی چون ارشمیدس ایستاده‌ام».

آری به درستی که کار مستمر و تلاش گروهیِ نسل‌های انسانی است که در برهه‌هایی از زمان به‌ثمر می‌رسد و شکوفا می‌گردد، نه تلاش‌های فردی که در لحظاتی از زمان چون موجی عظیم بروز می‌کند ولی دیری نمی‌پاید که فروکش کرده و محو می‌گردد.

منابع

فارسی

۱ ــ غلامحسین مصاحب، آنالیز حقیقی، انتشارات جیبی ۱۳۴۵

۲ ــ دکتر محمدحسن بیژن‌زاده، غلامعلی فرشادی، یدالله ایلخانی‌پور، حسابان ۱ و ۲، وزارت آموزش و پرورش چاپ ۱۳۷۶

۳ ــ حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، ریچارد. ا. سیلورمن ترجمه دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده

انگلیسی

4 _ Calculus, Larson and others, 4 th Edition, Heath & Compang, 1990.

5 _ Calculus and analytic geometry, Pre–University Level, Leithold.

6 _ Intermediate Algebra for colledge Students, Allen R. Angel, Prentice Hall, New Jersey.

معلّمان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیای آنان می‌توانند نظر اصلاحی خود را درباره مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۱۵۸۵۵/۳۶۳ - گروه درسی مربوط و یا پیام نگار (**Email**) **talif@talif.sch.ir** ارسال نمایند.

دفتر تألیف کتاب‌های درسی ابتدایی و متوسطه نظری