# فصل ۱

## استدلال ریاضی

### «اختلاف کردن در چگونگی و شکل پیل»

پیل اندر خانه‌ی تاریک بود — عرضه را آورده بودندش هنود
از برای دیدنش مردم بسی — اندر آن ظلمت همی شد هر کسی
دیدنش با چشم، چون ممکن نبود — اندر آن تاریکیش کف می‌بِسود
آن یکی را کف به خرطوم اوفتاد — گفت هم‌چون ناودان است این نهاد
آن یکی را دست بر گوشش رسید — آن برو چون باد بیزن شد پدید
آن یکی را کف چو بر پایش بسود — گفت شکل پیل دیدم چون عمود
آن یکی بر پشت او بنهاد دست — گفت خود این پیل چون تختی به‌دست
هم‌چنین هر یک به جزوی که رسید — فهم آن می‌کرد هرجا می‌شنید
از نظرکه، گفتشان شد مختلف — آن یکی دالش لقب داد این الف
در کف هر کس اگر شمعی بُدی — اختلاف از گفتشان بیرون شدی
چشم‌حس هم‌چون کف‌دستست‌وبس — نیست کف را بر همه‌ی او دسترس

### ۱ــ۱ــ درک شهودی

از زمانی که انسان زندگی غارنشینی را آغاز کرد و غار را مأوا ومأمنی برای خود دانست تا امروز که خبری در یک لحظه به سراسر دنیا مخابره می‌شود، او همواره برای درک آن‌چه که در پیرامونش می‌گذشته از شهودش کمک می‌گرفته است. انسان به‌طور فطری خود را تا حدودی با محیط هماهنگ می‌کرده و سعی داشته است تا با مشکلات مبارزه کند و بر آن‌ها چیره شود. برای مثال، قبل از آن‌که انسان بتواند از ساعت شنی یا ساعت خورشیدی برای تنظیم وقت خود استفاده

کند، از حواسش برای نگه‌داشتن حساب روز و ماه بهره می‌گرفت. از بلندی یا کوتاهی سایه‌ی اشیاء پی به‌موقعیت زمان می‌برد و یا برای تشخیص جهت در بیابان‌ها و دریاها از شهود خود کمک می‌گرفت. هرجا که با چشم دل می‌دید و با گوش جان می‌شنید، یا خوب می‌چشید و درست لمس می‌کرد، رازهای ناگفته و نادیده بر او فاش می‌شد و این همه، راه را برای فهم و استنباط و استدلال باز می‌کرد تا او بتواند با درک حقایق، پی به راز آفرینش ببرد و اسرار طبیعت را کشف کند.

برگ درختان سبز در نظر هوشیار　　　هر ورقش دفتریست معرفت کردگار

واین همان شهود است که می‌تواند راهگشای انسان در کشف پدیده‌ها و حلّ مسائل بغرنج شود.

با دقت در شعر «اختلاف کردن در چگونگی و شکل‌پیل» می‌فهمیم چون مردم در تاریکی قرار داشتند، قادر به تشخیص فیل نبودند، امّا با لمس کردن توانستند درکی هرچند مختصر از فیل داشته باشند که گرچه کافی نبود تا حدودی راهگشا بود. با این حال، برای به‌دست آوردن آگاهی کامل، مولوی هشدار می‌دهد که به ابزار قوی‌تری یعنی شمع در کف دست نیازمندیم و این شمع روشنگر همان استدلالی است که باید خالی از ابهام باشد. در این فصل، به معرفی چند نوع استدلال ریاضی می‌پردازیم.

## ۱ــ۲ــ استدلال تمثیلی[1]

در اکثر کارهای روزمرّه از نتیجه‌گیری‌های سطحی تا موفقیت‌های عمده‌ی علمی یا کارهای هنری از **تمثیل** استفاده می‌کنیم. تمثیل که در واقع همان یافتن نوعی مشابهت بین مفاهیم گوناگون است، در تمام سطوح مختلف قابل‌استفاده است. در ادبیات ما نمونه‌های زیبایی از تمثیل وجود دارد که با ظرافت خاصی محدودیت‌های آن مطرح می‌گردد که از آن جمله داستان **بقال و طوطی** در مثنوی معنوی است :

بود بقالی و وی را طوطیی　　　خوش نوایی سبز گویا طوطیی
در دکان بودی نگهبان دکان　　　نکته گفتی با همه سوداگران
در خطاب آدمی ناطق بدی　　　در نوای طوطیان حاذق بدی
جست‌ازسوی دکان‌سویی‌گریخت　　　شیشه‌های روغن گل را بریخت
از سوی خانه بیامد خواجه‌اش　　　بردکان بنشست فارغ خواجه‌وش
دید پر روغن دکان و جامه چرب　　　بر سرش زد گشت طوطی کَل[2] ز ضرب

---

۱ــ Analogy

۲ــ کَل = کچل

روزکی چندی سخن کوتاه کرد　　مرد بقال از ندامت آه کرد
ریش برمی‌کند و می‌گفت ای دریغ　　کآفتاب نعمتم شد زیر میغ
دست من بشکسته بودی آنزمان　　چون زدم من بر سر آن خوش زبان
هدیه‌ها می‌داد هر درویش را　　تا بیابد نطق مرغ خویش را
بعد سه روز و سه شب حیران و زار　　بر دکان بنشسته بُد نومیدوار
می‌نمود آن‌مرغ را هرگون شگفت　　تا که باشد کاندر آید او بگفت
جولقی سر برهنه می‌گذشت　　با سر بی مو چو پشت طاس و طشت
طوطی اندر گفت آمد در زمان　　بانگ بر درویش زد که هی فلان
از چه ای کل با کلان آمیختی　　تو مگر از شیشه روغن ریختی
از قیاسش[1] خنده آمد خلق را　　کو چو خود پنداشت صاحب دلق را
کار پاکانرا قیاس از خود مگیر　　گرچه ماند در نبشتن شیر و شیر
جمله عالم زین سبب گمراه شد　　کم کسی زابدال حق آگاه شد

**تمرین :** با توجه به داستان، توضیح دهید که طوطی چه تمثیلی به کاربرد و علت خنده‌ی مردم چه بود؟

انواع تمثیل با آن‌که محدودیت‌هایی دارند می‌توانند در ایجاد یک زمینه‌ی شهودی برای درک بسیاری از مفاهیم و اثبات‌های ریاضی کمک مؤثری باشند و نباید اهمیت آن‌ها را نادیده گرفت. مثلاً از تمثیل می‌توان برای درک بهتر این حقیقت که حاصل‌ضرب عدد منفی در عدد منفی، عددی مثبت است استفاده کرد. به نمونه‌ی زیر توجه کنید :

وارد شدن آب به مخزن را عملی مثبت (+) و خروج آب از آن را عملی منفی (−) در نظر می‌گیریم. در نمایش فیلم نیز، جلو بردن فیلم را عملی مثبت (+) و عقب بردن آن را عملی منفی(−) به حساب می‌آوریم. حال اگر فیلمی نمایش داده شود که در آن، آب در حال خروج از یک مخزن است (−) و فیلم را به عقب برگردانیم (−)، آب دوباره به مخزن باز می‌گردد (+)! یعنی حاصل دو عمل منفی (خروج آب و عقب بردن فیلم) عمل مثبت بازگشت آب به مخزن شده است.

---

۱ــ در این‌جا، «قیاس» به همان معنای تمثیل (analogy) به کار برده شده است و با لغت «قیاس» که به معنای sylogism در منطق ارسطویی به کار می‌رود متفاوت است. برای اطلاعات بیشتر به صفحات ۶۶ و ۶۷ کتاب منطق سال چهارم فرهنگ و ادب مراجعه شود.

## ۱ــ۳ــ استدلال استقرایی

فرض کنید یک محقق فرهنگ و تمدن ایران، به قصد جمع‌آوری اطلاعاتی در مورد معماری سنتّی قریه‌ها به آن‌جا سفر می‌کند، در اولین قریه (روستا) مشاهده می‌کند که سقف همه‌ی خانه‌ها گنبدی و دیوارها قطور هستند. در قریه‌ی بعدی نیز مشاهده می‌کند که سقف خانه‌ها گنبدی و دیوارها قطور هستند. به نظر شما مشاهده‌ی دو قریه برای نتیجه‌گیری کلّی در مورد وضعیت معماری روستاهای ایران کافی است؟ شاید توصیه شما به محقق این باشد که به مشاهدات خود تا حصول نتیجه ادامه دهد ؛ شاید بتواند در مورد همه‌ی روستاهای ایران یک ادّعای کلی بکند. عملاً محدودیت امکانات و زمان اجازه نمی‌دهند جستجوها در همه‌ی موارد انجام شوند، در مسائل ریاضی هم وضع به همین منوال است زیرا معمولاً فرایند جستجو متناهی نیست. به مثال زیر توجه کنید :

**مثال ۱ :** می‌خواهیم اعداد فرد متوالی را با هم جمع کنیم، برای این کار به جمع‌آوری اطلاعات می‌پردازیم.

$$۱=۱$$

$$۱+۳=۴$$

$$۱+۳+۵=۹$$

$$۱+۳+۵+۷=۱۶$$

مشاهدات بالا نشان می‌دهد که حاصل جمع اعداد فرد متوالی می‌توانند زوج یا فرد باشند. امّا چهار مورد بالا همگی مربع کامل می‌باشند. پس اولین حدس این است که **حاصل جمع اعداد فرد متوالی مربع کامل است**.آیا با مشاهده‌ی موارد فوق می‌توانیم نسبت به صحت حدس خود مطمئن باشیم؟ مسلماً نه! بنابراین برای حصول اطمینان از حدس اولیه، جستجو را ادامه می‌دهیم.

$$۱+۳+۵+۷+۹=۲۵$$

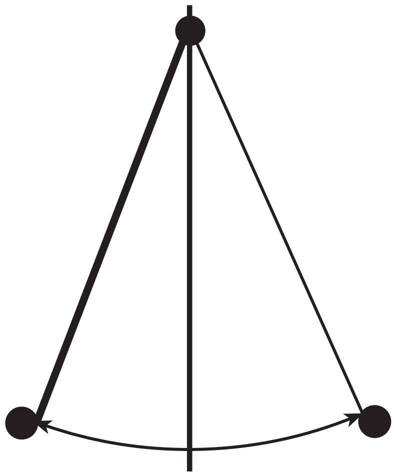
$$۱+۳+۵+۷+۹+۱۱=۳۶$$

این دو نمونه نیز حدس را تأیید کرد، ولی آیا مجموع هر تعداد از اعداد فرد متوالی که از ۱ شروع شود، مربع کامل می‌شود؟

### فعّالیت ۱ــ۱

گالیله دانشمند بزرگ ایتالیایی، با **مشاهده‌ی** رفتار نوسانی وزنه‌های آویزان، موفق به کشف‌هایی شد که درنهایت او را قادر به اختراع ساعت آونگ‌دار کرد. یکی از کشف‌هایی که گالیله را در

اختراع ساعت آونگ‌دار یاری داد، دیدن **رابطه‌ی** بین **طول** آونگ و **زمان** نوسان بود.
جدول زیر، زمان نوسان چند آونگ با طول‌های متفاوت را نشان می‌دهد :



**جدول (۱)**

| طول پاندول | زمان نوسان |
| --- | --- |
| ۱ واحد | ۱ ثانیه |
| ۴ واحد | ۲ ثانیه |
| ۹ واحد | ۳ ثانیه |
| ۱۶ واحد | ۴ ثانیه |

۱ــ با توّجه به الگویی که در جدول فوق می‌بینید، به‌نظر شما چه نوع رابطه‌ای بین طول آونگ و زمان نوسان وجود دارد؟

۲ــ حدس شما برای طول آونگی با زمان نوسانِ ۷ ثانیه چیست؟

۳ــ حدس شما برای طول آونگی با زمان نوسانِ ۱۰ ثانیه چیست؟

## فعّالیت ۱ــ۲

تا سال **۱۷۷۲** میلادی، تنها شش سیّاره شناخته شده بود و فاصله‌های[۱] واقعی آن‌ها از خورشید به‌دست آمده بود. ستاره‌شناس آلمانی یوهان الِرْت باود[۲]، با **مشاهده‌ی** فاصله‌ی آن سیّارات از خورشید، متوجّه **نظم** و **الگویی** در آن‌ها شد. این الگو به یوهان باود این‌توانایی‌راداد که فاصله‌ی سیّارات (هنوز ناشناخته) از خورشید را **پیش‌بینی** کند. جالب است بدانید که با کشف سیّاره‌های دیگری، **حدسیّه**[۳] یا **فرضیّه‌ای** که او ساخت به **آزمایش** گذاشته شد و درستی آن تأیید گشت!

جدول (۲)، فاصله‌ی نسبتاً واقعی سیّاره‌ها از خورشید و فاصله‌ی پیش‌بینی شده با الگوی یوهان باود را نشان می‌دهد :

---

۱ــ فاصله‌ی زمین تا خورشید ۱۰ واحد فرض شده است و باقی فاصله‌ها بر مبنای آن محاسبه شده است.

۲ــ Johan Elert Bode

۳ــ Conjectures

**جدول (۲)**

| سیّاره | فاصله‌ی واقعی | الگوی یوهان باود |
|---|---|---|
| تیر (عطارد) | ۴ | ۴ = ۴ + ۰ |
| زهره (ناهید) | ۷ | ۷ = ۴ + ۳ |
| زمین (ارض) | ۱۰ | ۱۰ = ۴ + ۶ |
| بهرام (مریخ) | ۱۵ | ۱۶ = ۴ + ۱۲ |
| ؟ | $\square$ | $\square + \square = \square$ |
| مشتری (برجیس) | ۵۲ | ۵۲ = ۴ + $\square$ |
| کیوان (زحل) | ۹۶ | ۱۰۰ = ۴ + ۹۶ |
| ؟ | $\square$ | $\square + \square = \square$ |

با کمی دقّت، متوجّه نزدیکی فاصله‌های واقعی سیّارات از خورشید با فاصله‌هایی که توسط الگوی یوهان باود پیش‌بینی شده بود می‌شویم.

۱ــ به نظر شما، آیا می‌توان رابطه‌ی بین فاصله‌ی بهرام و مشتری را به وسیله‌ی یک معادله نشان داد؟

۲ــ به نظر شما، چگونه می‌توان فاصله‌ی سیّاره‌های بعد از کیوان از خورشید را پیدا کرد؟ الگوی باود چه کمکی در پیدا کردن معادله‌ای برای یافتن فاصله‌ها می‌کند؟

در سال ۱۷۸۱، سیّاره‌ی بعد از کیوان یعنی اورانوس، به وسیله‌ی ویلیام هرشل[۱] کشف شد. فاصله‌ی ۱۹۲ واحدی اورانوس تا خورشید، به‌طور قابل‌توجّهی با فاصله‌ی پیش‌بینی شده به وسیله‌ی معادله‌ی فوق نزدیک بود. به همین دلیل، ستاره‌شناسان به این نتیجه رسیدند که رابطه‌ی بین معادله‌ی باود برای بهرام و مشتری معنای خاصّی دارد.

۳ــ به نظر شما این معنای خاصّ چیست؟

همان‌طور که حدس زدید و به تجربه دریافتید، معادله‌ی باود برای پیدا کردن فاصله‌های تقریبی سیارات از خورشید به‌صورت

$$d = ۴ + (۳ \times ۲^{n-۲}) \quad n \geq ۲$$

بود.

۱ــ William Herschel

در سال ۱۸۰۱، سیاره‌ی کوچکی کشف شد که فاصله‌ی آن تا خورشید ۲۸ واحد بود!

**۴ــ آیا می‌توانیم معنای خاصّ معادله‌ی باود را به عنوان یک نتیجه‌گیری کلّی بپذیریم؟**

گالیله و باود، با جمع‌آوری اطّلاعات و مشاهده‌ی آن‌ها، متوجّه نظم و الگویی در مشاهدات خود شدند. آن‌ها با دیدن این نظم، حدسیه‌هایی ساختند که ایشان را قادر به پیش‌بینی نتایج مشاهدات بعدی می‌کرد. گالیله و باود، با انجام مشاهدات دیگری، پیش‌بینی خود را آزمایش کردند و همان نتایجی را که حدس می‌زدند به‌دست آوردند. این فرایند، گالیله و باود را مطمئن کرد که حدسیّه‌ی آن‌ها درست بوده است. آن‌ها روابطی را که به‌دست آورده بودند، به عنوان یک **نتیجه‌گیری کلّی** اعلام کردند. به روشی که گالیله و باود و به طور کلی عالمان علوم تجربی را به نتیجه‌گیری کلی می‌رساند **استدلال استقرایی**[1] می‌گویند.

***استدلال استقرایی**، روش نتیجه‌گیری کلّی برمبنای مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات است.*

## فعّالیت ۱ــ۳

**الف:**

۱ــ یک عدد سه رقمی انتخاب کنید ؛

۲ــ آن عدد را در ۷ ضرب کنید ؛

۳ــ حاصل‌ضرب به‌دست آمده رادر ۱۱ ضرب کنید ؛

۴ــ حاصل‌ضرب به‌دست آمده در قسمت (۳) را در ۱۳ ضرب کنید.

**ب:**

مراحل ۱ تا ۴ را برای یک عدد سه رقمی دیگر انجام دهید.

**پ:**

۱ــ چه رابطه‌ای بین حاصل‌ضرب‌های به‌دست آمده در قسمت ۴ و عدد انتخابی خود در ۱ می‌بینید؟

---

۱ــ Inductive reasoning

مراحل ۲، ۳ و ۴ را برای چندین عدد سه رقمی دیگر که انتخاب کرده‌اید تکرار کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا می‌توانید ادّعا کنیدکه نتیجه‌ی شما برای تمام اعداد سه رقمی درست است؟

**ت:**

۱ــ حاصل‌ضرب ۱۳×۱۱×۷ را به‌دست آورید ؛

۲ــ بدون استفاده از ماشین حساب، اعداد سه رقمی انتخابی خود را در حاصل‌ضرب به‌دست آمده ضرب کنید. مراحل کار خود را نشان دهید ؛

۳ ــ چه نتیجه‌ای گرفتید؟ آیا می‌توانید ادّعا کنید که اگر هر عدد سه رقمی را در ۷ و ۱۱ و ۱۳ ضرب کنید، به نتیجه‌ی مشابه می‌رسید؟

## ۱ــ۴ــ محدودیت‌های استدلال استقرایی

**آب آن‌قدر می‌جوشد تا آن‌که چیزی از آن باقی نماند ... برف آن‌قدر می‌جوشد تا آن‌که چیزی از آن باقی نماند... یخ آن‌قدر می‌جوشد تا آن‌که چیزی از آن باقی نماند ... هر چیزی آن‌قدر می‌جوشد تا آن‌که چیزی از آن باقی نماند!**

در این‌جا، بعد از آن‌که مرد غارنشین کشف کرد که آب و برف و یخ آن‌قدر می‌جوشند تا آن‌که چیزی از آن‌ها باقی نماند، این مشاهدات را تعمیم داد و ادّعا کرد که «**هر چیزی** آنقدر می‌جوشد تا آن‌که چیزی از آن باقی نماند!» این نتیجه‌گیری کلّی که براساس مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات است، ضعف اساسی استدلال استقرایی را نشان می‌دهد، زیرا همیشه این احتمال وجود دارد که با کشف شواهد بیشتر، درستی نتیجه‌ی به‌دست آمده نقض شود.

## فعّالیت ۱ــ۴

محاسبات زیر را به صورت ستونی و بدون استفاده از ماشین حساب انجام دهید :

**الف:**

۱ــ حاصل‌ضرب ۱۲۴×۱۱۲ را به‌دست آورید ؛

۲ــ حاصل‌ضرب ۴۲۱×۲۱۱ را به‌دست آورید ؛

۳ــ چه رابطه‌ای بین قسمت‌های ۱ و ۲ و جواب‌های به‌دست آمده وجود دارد؟

**ب:**

۱ــ حاصل‌ضرب ۲۲۱×۳۱۲ را به‌دست آورید ؛

۲ــ بدون هیچ محاسبه‌ای، حاصل‌ضرب ۱۲۲×۲۱۳ را حدس بزنید ؛

۳ــ حال حاصل‌ضرب ۱۲۲×۲۱۳ را محاسبه کنید. آیا حدس شما درست بود؟

**پ:**

۱ــ حالا حاصل‌ضرب ۲۲۳×۱۱۳ را محاسبه کنید ؛

۲ــ بدون هیچ محاسبه‌ای، حاصل‌ضرب ۳۲۲×۳۱۱ را حدس بزنید ؛

۳ــ حالا حاصل‌ضرب ۳۲۲×۳۱۱ را محاسبه کنید. آیا حدستان درست بود؟

با انجام این فعالیت متوجه می‌شویم که استدلال استقرایی عمومیت ندارد و با محدودیت‌هایی مواجه است. در واقع، در استدلال استقرایی، اطمینان قطعی به‌درستی نتایج نداریم زیرا نتیجه‌گیری‌های ما برمبنای مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات است.

## ۱ــ۵ــ استقرای ریاضی

آیا مجموع اولین n عدد فرد متوالی، $n^2$ است؟

در مثال ۱، با فرایند استقرایی و جمع‌آوری مشاهدات، جواب سؤال فوق را به‌طور تجربی نشان دادیم. امّا چون تعداد اعداد فرد، نامتناهی است نتوانستیم همه‌ی موارد را تحقیق کنیم. بنابراین، برای اثبات ادعای خود از یک ابزار دقیق و قوی ریاضی یعنی اصل استقرای ریاضی کمک می‌گیریم.

> ***اصل استقرای ریاضی:*** *فرض کنید حکمی درباره‌ی عدد طبیعی n داشته باشیم. اگر این حکم برای $n=1$ درست باشد و برای هر $k \geq 1$، با فرض درستی حکم برای $n=k$ بتوان درستی حکم برای $n=k+1$ را نتیجه گرفت آن‌گاه حکم برای هر عدد طبیعی n درست است.*

می‌خواهیم نشان دهیم که مجموع اولین $n$ عدد فرد متوالی، $n^۲$ است.
همانند گذشته به جمع‌آوری مشاهدات می‌پردازیم :

$$۱ = ۱ = ۱^۲$$

$$۱ + ۳ = ۴ = ۲^۲$$

$$۱ + ۳ + ۵ = ۹ = ۳^۲$$

$$۱ + ۳ + ۵ + ۷ = ۱۶ = ۴^۲$$

$$۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ = ۲۵ = ۵^۲$$

$$۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ = ۳۶ = ۶^۲$$

اگر با دقت به تساوی‌های بالا بنگریم می‌بینیم که :

**مجموع $n$ عدد فرد متوالی اولیه = مربع تعداد آن‌ها = $n^۲$**

یا

(۱) $$\overbrace{۱ + ۳ + ۵ + \ldots\ldots + ۲n - ۱}^{n \text{ تا}} = n^۲$$

**اثبات:** طبق اصل استقرای ریاضی، ابتدا باید درستی حکم فوق را در مورد $n = ۱$ بیازماییم.
اگر رابطه‌ی (۱) را برای $n = ۱$ در نظر بگیریم داریم

$$۱ = ۱^۲$$

پس برای $n = ۱$ حکم درست است.

در گام بعدی، فرض می‌کنیم حکم به ازای $n = k$ درست باشد یعنی

$$۱ + ۳ + ۵ + \ldots\ldots + ۲k - ۱ = k^۲$$

حالا باید ثابت کنیم حکم برای $n = k + ۱$ نیز درست است یعنی

(۲) $$۱ + ۳ + ۵ + \ldots\ldots + ۲k - ۱ + ۲(k + ۱) - ۱ = (k + ۱)^۲$$

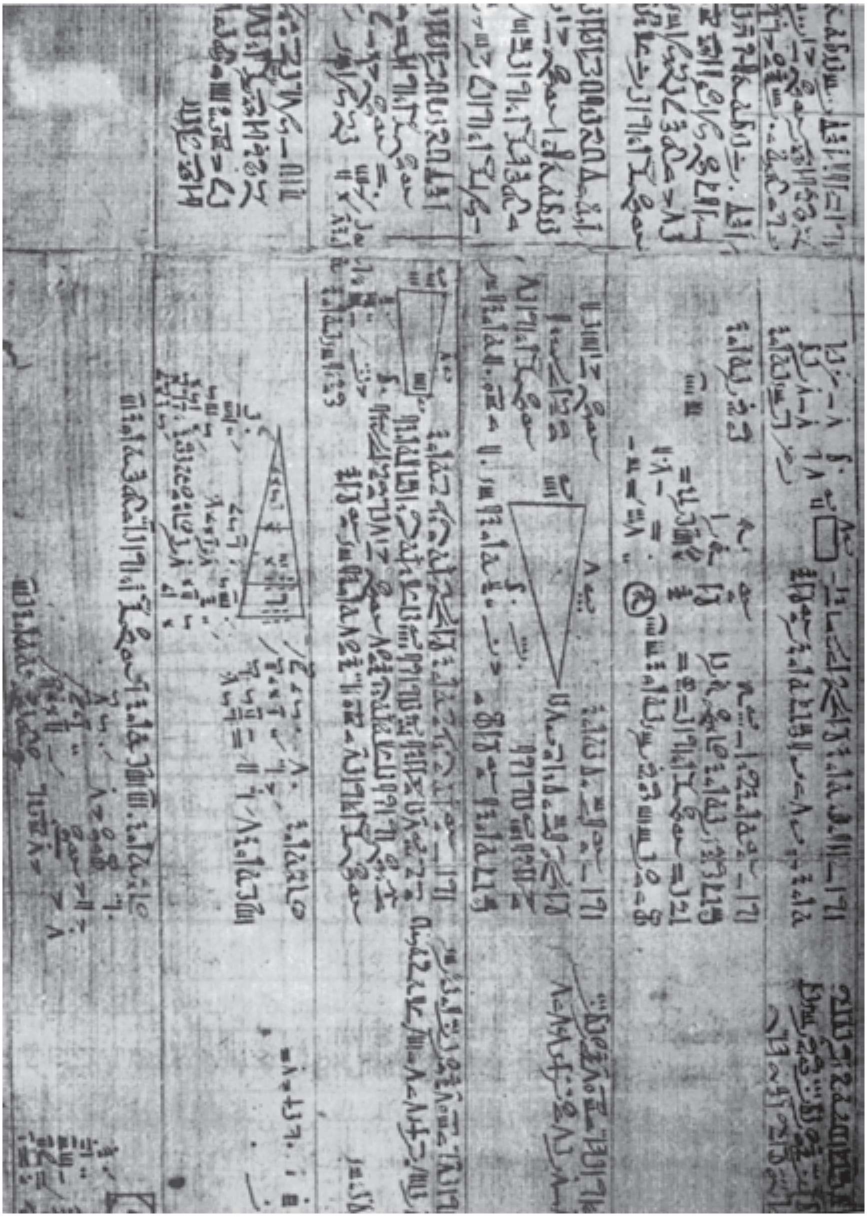
برای اثبات تساوی اخیر (حکم استقرا) به طرفین رابطه‌ی (۱) (فرض استقرا)، جمله‌ی $(k + ۱)$ ام یعنی $۲(k + ۱) - ۱$ را اضافه می‌کنیم

$$\begin{aligned} ۱ + ۳ + ۵ + \ldots\ldots + ۲k - ۱ + ۲(k + ۱) - ۱ &= k^۲ + ۲(k + ۱) - ۱ \\ &= k^۲ + ۲k + ۲ - ۱ \\ &= k^۲ + ۲k + ۱ \\ &= (k + ۱)^۲ , \end{aligned}$$

بنابراین حکم استقراء یعنی (۲) را اثبات کردیم. درنتیجه برای هر عدد طبیعی $n$ داریم.

$$۱ + ۳ + \ldots\ldots + ۲n - ۱ = n^۲ .$$

## ۱ــ۶ــ استدلال استنتاجی



در مقدّمه‌ی پاپیروس رایند ــ ۱۶۵۰ سال قبل از میلاد ــ که شاید قدیمی‌ترین تاریخ موجود ریاضی باشد، چنین آمده است: «به جرأت می‌توان گفت که بارزترین مشخّصه‌ی شعور انسان که نشان‌دهنده‌ی درجه‌ی تمدّن هر ملّت است، همان قدرت استدلال کردن است و به‌طور کلّی این قدرت به بهترین وجهی می‌تواند در مهارت‌های ریاضی افراد آن ملّت به نمایش گذاشته شود.»

دو مسأله‌ی بازی با اعداد در تاریخ ریاضی مصر(پاپیروس رایند) موجود است که طبق دستورالعمل‌های این دو مسأله، عددی انتخاب می‌شود و سپس چندین کار دیگر روی آن انجام می‌گیرد و در پایان بدون در نظر گرفتن عدد انتخابی، نتیجه همیشه یکسان است! با یکی از این دو مسأله آشنا می‌شویم.

## فعّالیت ۱ــ۵

مثال‌های زیر یکی از انواع سرگرمی با اعداد است.

**مثال ۲:** هر مرحله از این بازی در سمت راست و نتایج هر مرحله برای ۴ عددکه به‌طور تصادفی انتخاب شده‌اند، در سمت چپ جدول زیر نشان داده شده است.

**جدول (۳)**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **یک عدد انتخاب کنید** | ۵ | ۸ | ۱۷ | ۴۶ |
| **آن را در ۳ ضرب کنید** | ۱۵ | ۲۴ | ۵۱ | ۱۳۸ |
| **به آن ۶ اضافه کنید** | ۲۱ | ۳۰ | ۵۷ | ۱۴۴ |
| **آن را بر ۳ تقسیم کنید** | ۷ | ۱۰ | ۱۹ | ۴۸ |
| **عددی را که از ابتدا انتخاب کرده بودید از این نتیجه‌ی تقسیم کم کنید** | ۲ | ۲ | ۲ | ۲ |

بررسی بالا ما را مطمئن می‌سازد که نتیجه همیشه برابر با ۲ است.

اگر چه با استدلال استقرایی می‌توان دریافت که این نتیجه **شاید** برای همه‌ی اعداد درست باشد، امّا برای اثبات کلی این مطلب، یعنی **تبدیل شاید به باید**، به استدلال استنتاجی نیازمندیم.

**مثال ۳:** همان مثال قبلی را با اندکی تغییر بررسی می‌کنیم و به جای انتخاب یک یا چند عدد،درموقع شروع از علامت‌گذاری استفاده می‌کنیم. در طیّ بازی، مربّع کوچک معرّف عدد انتخابی اوّلیّه است و برای هربارافزودن یاکاستن اعدادجدید، از یک دایره‌ی کوچک استفاده می‌کنیم.

**جدول (۴)**

| | |
|---|---|
| **عدد انتخابی** | □ |
| عدد انتخابی ضرب در ۳ | □□□ |
| نتیجه‌ی قبلی به اضافه‌ی ۶ | □□□○○○○○○ |
| حاصل تقسیم بر ۳ | □○○ |
| کم کردن عدد اوّلیه | ○○ |

در مثال ۱ دیدیم که نتیجه همیشه عدد ۲ است. حال به وضوح می‌بینیم که عدد انتخابی اوّلیه هر چه که باشد باز هم نتیجه عدد ۲ است.

شاید مربع‌ها و دایره‌ها نمادهای جالبی برای استفاده‌ی همیشگی نباشند. در ریاضیّات معمولاً از **حروف** برای نشان دادن اعداد دلخواه استفاده می‌کنیم.

**مثال ۴:** حال مثال قبلی را با نماد جبری، یعنی با استفاده از یک حرف به‌جای عدد انتخابی اوّلیّه، دوباره بررسی می‌کنیم :

**جدول (۵)**

| | |
|---|---|
| **عدد انتخابی** | **n** |
| عدد انتخابی ضرب در ۳ | ۳n |
| نتیجه‌ی قبلی به اضافه‌ی ۶ | ۳n + ۶ |
| حاصل تقسیم بر ۳ | n + ۲ |
| کم کردن عدد اوّلیه | ۲ |

نکته‌ای که در هر سه مثال به چشم می‌خورد این است که نتایجی را بر مبنای عباراتی که درستی آن‌ها را قبول کرده‌ایم به دست آوردیم یعنی از استدلال استنتاجی استفاده کردیم.

> ***استدلال استنتاجی*** *روش نتیجه‌گیری کلی با استفاده از حقایقی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.*

## فعّالیت ۱ــ۶

در فعالیّت ۱ــ۳، دیدیم که اگر اعداد سه رقمی مختلفی را انتخاب کنیم و آن‌ها را در ۷ ، ۱۱ و ۱۳ ضرب کنیم، حاصل یک عدد شش رقمی خواهد بود که تکرار عدد سه رقمی انتخابی اولیّه است. حال از زاویه‌ای دیگر به آن فعالیّت نگاه می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم که $\overline{abcabc}$ نشان‌دهنده‌ی هر عدد شش رقمی‌ای است که از تکرار عدد سه رقمی $\overline{abc}$ به‌دست آمده است. می‌خواهیم ثابت کنیم که $\overline{abcabc}$ بر۷، ۱۱ و۱۳ بخش‌پذیراست.

عدد $\overline{abcabc}$ را به‌صورت تجزیه شده می‌نویسیم

$$\overline{abcabc}=۱۰۰{,}۰۰۰\ a+۱۰{,}۰۰۰\ b+۱۰۰۰\ c+۱۰۰\ a+۱۰\ b+c$$

با دقّت در صورت تجزیه شده‌ی $\overline{abcabc}$ و فاکتورگیری از عوامل مشترک، عدد ۱۰۰۱ را ردیابی می‌کنیم. این همان عددی است که در فعالیت ۱ــ۳، از ضرب ۱۳×۱۱×۷ به دست آوردیم

$$\overline{abcabc}=\underline{۱۰۰{,}۰۰۰\ a}+\underline{\underline{۱۰{,}۰۰۰\ b}}+\underline{\underline{\underline{۱۰۰۰\ c}}}+\underline{۱۰۰\ a}+\underline{\underline{۱۰\ b}}+\underline{\underline{\underline{c}}}$$

$$=۱۰۰a(۱۰۰۰+۱)+۱۰b(۱۰۰۰+۱)+c(۱۰۰۰+۱)$$

$$=۱۰۰a(۱۰۰۱)+۱۰b(۱۰۰۱)+c(۱۰۰۱)$$

مجدداً از عامل مشترک ۱۰۰۱ فاکتور می‌گیریم

(۱) $$۱۰۰۱(۱۰۰a+۱۰b+c)$$

داخل پرانتز، صورت تجزیه شده‌ی عدد سه رقمی $\overline{abc}$ است

(۲) $$۱۰۰۱\ \overline{abc}$$

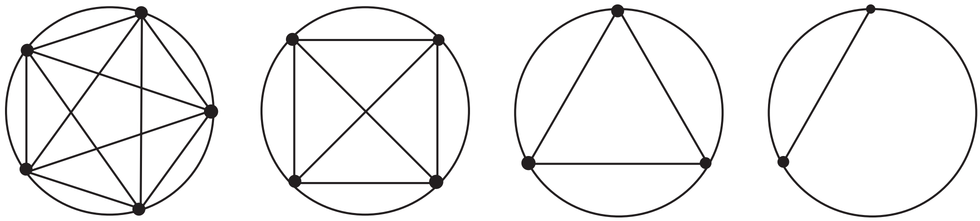
از (۲) نتیجه می‌گیریم که $\overline{abcabc}$ بر ۷ و ۱۱ و ۱۳ بخش‌پذیر است این نتیجه‌گیری قابل تعمیم است زیرا ما بدون هیچ محدودیّتی، $\overline{abcabc}$ را به عنوان نماینده‌ی **هر** عدد شش رقمی که از تکرار یک عدد سه رقمی تشکیل شده است، انتخاب کردیم و باز هم توانستیم نشان دهیم که این عدد بر ۷، ۱۱ و ۱۳ بخش‌پذیر است زیرا دارای ضریب ۱۰۰۱ است.

فرق اساسی فعالیت ۱ــ۳ و این فعالیّت در آن است که در مورد قبلی، براساس مجموعه‌ی محدودی از شواهد، به یک نتیجه‌گیری کلّی رسیدیم امّا در این فعالیّت، حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم مبنایی برای بررسی‌ها و نتیجه‌گیری‌های کلّی ما شد.

## ۱ـ۷ـ مثال نقض

استدلال استنتاجی به ما اطمینان می‌دهد که نتیجه‌ی به‌دست آمده حتماً درست است. این جامعیّت، یکی از نشانه‌های اقتدار و زیبایی این نوع استدلال است. گاهی اتفاق می‌افتد که با مثالی، عمومیت نتیجه‌ای که حدس می‌زنیم، نقض می‌شود.

**مثال۵:** اگر دو نقطه‌ی اختیاری بر روی پیرامون دایره را به وسیله‌ی یک پاره خط به هم وصل کنیم، دایره به دو ناحیه تقسیم می‌شود. با اتّصال سه نقطه‌ی اختیاری بر روی دایره، دایره به ۴ ناحیه تقسیم می‌شود. شکل زیر این موضوع را برای ۲، ۳، ۴ و ۵ نقطه‌ی اختیاری بر روی دایره نشان می‌دهد :



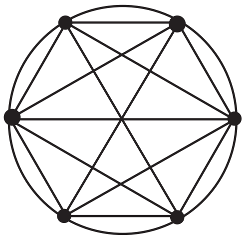
(الف) (ب) (پ) (ت)

آیا اگر تعداد نقاط ۶ باشد، تعداد ناحیه‌ها ۳۲ می‌شود؟ ۶ نقطه بر روی دایره اختیار می‌کنیم و آن‌ها را به وسیله‌ی پاره‌خط‌هایی به هم وصل می‌کنیم. با توجه به شکل می‌بینیم که تعداد ناحیه‌ها به‌صورت ۲، ۴، ۸، ۱۶،...، افزایش می‌یابد.

**جدول (۶)**

| تعداد نقطه‌ها | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ |
|---|---|---|---|---|
| تعداد ناحیه‌ها | ۲ | ۴ | ۸ | ۱۶ |

با استدلال استقرایی به نظر می‌رسد پاره‌خط‌هایی که ۶ نقطه را به‌هم متّصل می‌سازند، دایره را به ۳۲ ناحیه تقسیم می‌کنند.



(ث)

امّا با شمردن ناحیه‌ها، می‌بینیم که تعداد آن‌ها ۳۰ است، که نادرست بودن نتیجه‌ی فوق را نشان

می‌دهد. اگر حتّی یک نمونه پیدا شود که حدس ما را رد کند، گوییم که با مثال نقض، نادرستی حدس ثابت شده است.

*به مثالی که کلیت حکمی را نقض کند، **مثال نقض** می‌گویند.*

**مثال۶:** برای هر دو عدد گنگ x و y می‌خواهیم ببینیم آیا $x+y$ نیز گنگ است یا خیر؟

**حل:** کافی است نشان دهیم که x و yای پیدا می‌شوند که گنگ هستند امّا مجموع آن‌ها، یعنی $x+y$ گنگ نیست. برای این کار اگر دو عدد گنگ $x=۲+\sqrt{۲}$ و $y=۲-\sqrt{۲}$ را انتخاب کنیم، می‌بینیم که $x+y=(۲+\sqrt{۲})+(۲-\sqrt{۲})=۲+۲=۴$ که یک عدد گویا است. پس این مثال، کلیّت این حکم را که مجموع دو عدد گنگ همیشه یک عدد گنگ است نقض می‌کند.

## مسائل[۱]

۱ــ با استفاده از استدلال استنتاجی، نتایج زیر را کامل کنید.

الف) اگر باران ببارد، زمین مرطوب می‌شود. الآن باران می‌بارد.

**نتیجه:** زمین $\boxed{\phantom{xx}}$ است.

ب) خطوط موازی هیچگاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند. خطوط $L_۱$ و $L_۲$ موازی هستند.

**نتیجه:** $L_۱$ و $L_۲$ $\boxed{\phantom{xxxxxxxxxx}}$.

۲ــ آیا نتایج زیر از عبارات داده شده حاصل می‌شوند؟ جواب خود را توضیح دهید.

الف) تمام دانش‌آموزانی که ریاضی یاد می‌گیرند می‌توانند استدلال کنند.

حمید دانش‌آموزی است که ریاضی یاد می‌گیرد.

**نتیجه:** حمید می‌تواند استدلال کند.

ب) بعضی از دانش‌آموزان با طرز کار کامپیوتر آشنا هستند.

نرگس دانش‌آموز است.

**نتیجه:** نرگس با طرز کار کامپیوتر آشنا است.

پ) مثلث متساوی‌الساقین دارای حداقل دو ضلع مساوی است.

مثلث متساوی‌الاضلاع دارای سه ضلع مساوی است.

**نتیجه:** هر مثلث متساوی‌الاضلاع، یک مثلث متساوی‌الساقین است.

---

۱ــ تمرین‌های ۱ تا ۵ از کتاب **جبر و احتمال** سال سوم ریاضی نظام جدید گرفته شده است.

۳ــ نشان دهید که مجموع دو عدد زوج همیشه زوج است.

۴ــ علی، احمد،کامران، داوود و ابراهیم عضو تیم بسکتبال مدرسه‌ی خود هستند. با توجّه به اطلاعات زیر، آن‌ها را برحسب افزایش قد مرتّب کنید :

الف) حداقل دو نفر از آن‌ها از علی کوتاه‌تر هستند ؛

ب) داوود از کامران کوتاه‌تر است ؛

پ) احمد کوتاه‌ترین پسر نیست ؛

ت) داوود از علی بلندتر است.

۵ ــ کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست است. در صورت نادرست بودن یک مثال نقض پیدا کنید.

الف) اگر ۱ با هر عدد فردی جمع شود، نتیجه همیشه یک عدد زوج است ؛

ب) توان دوم یک عدد همیشه از آن بزرگ‌تر است ؛

پ) مجموع دو زاویه‌ی حادّه کمتر از $۱۸۰^\circ$ است ؛

ت) همیشه ارتفاع یک مثلث داخل آن قرار می‌گیرد ؛

ث) هر مستطیلی یک مربع است ؛

ج) هر مربعی یک مستطیل است.

۶ــ نمونه‌های زیر را درنظر بگیرید :

$$۶=۱^۲+۱^۲+۲^۲,$$
$$۱۴=۱^۲+۲^۲+۳^۲,$$
$$۲۴=۲^۲+۲^۲+۴^۲,$$
$$۵۹=۱^۲+۳^۲+۷^۲,$$
$$۶۱=۳^۲+۴^۲+۶^۲,$$
$$۸۹=۲^۲+۲^۲+۹^۲,$$

نتیجه‌ی احتمالی آن است که : «هر عدد طبیعی را می‌توان به‌صورت مجموع سه مربع کامل نوشت». با ارائه‌ی یک مثال نقض نشان دهید که نتیجه‌گیری فوق نادرست است.

۷ ــ کدام یک از احکام زیر درست است؟

الف) اگر $x$ گنگ و $y$ گویا باشد، آن‌گاه $x+y$ گویا است.

ب) اگر $x$ و $y$ هردو گویا باشند، آن‌گاه $x+y$ گویا است.

احکام درست را اثبات کنید و برای رد احکام نادرست مثال‌های نقض بیاورید.