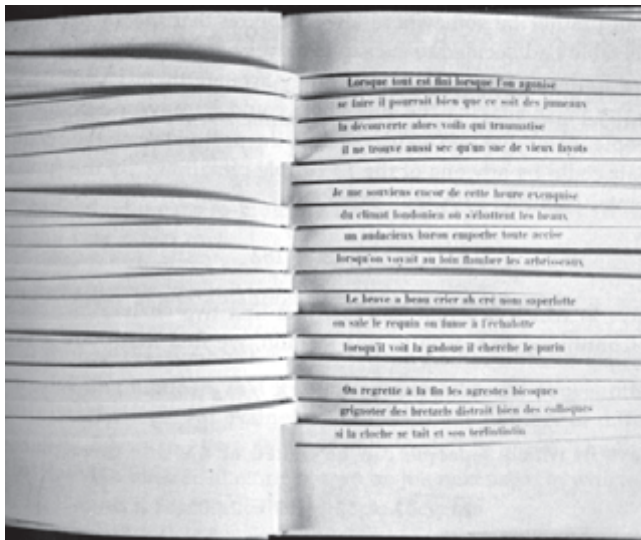


## ترکیبیات

کتاب شعری<sup>۱</sup> شامل صد هزار میلیارد شعر است. هر شعر شامل ۱۴ بیت است و همگی فقط در یک روی صفحه کاغذ نوشته شده اند (نه دو طرف آن).

هر صفحه کاغذ به صورت نوارهای افقی بریده شده به طوری که روی هر نوار یک بیت شعر نوشته شده است. هر نوار به طور منفرد قابل برگرداندن است به گونه‌ای که ابیات شعرها به راه‌های مختلف قابل انتخاب باشند. صرف نظر از نوع انتخاب ابیات، هنوز اشعار به دست آمده از نظر اصول شعری، وزن و قافیه، درست و با معنی هستند. فکر می‌کنید کتاب باید شامل چند صفحه باشد تا بتواند صد هزار میلیارد شعر تولید کند؟



۱- کتاب شعر موسوم به Cent milliards de Poemes نوشته raymond queneau می‌باشد.

فصل سوم، ابزار مناسبی برای حل این مسأله و مسأله‌های جالب دیگری که همگی با شمارش سروکار دارند، به شما می‌دهد.

## ۱-۳- اصل اساسی شمارش

### فعالیت ۱-۳

الف) به چند راه ممکن، می‌توانید هر یک از سه سؤال زیر را با یکی از جواب‌های داده شده جور کنید؟ (آزمون جور کردنی)

#### جواب

#### سؤال

بنگلادش

۱- ایالت آگرا، در کدام کشور قرار دارد؟

هندوستان

۲- شهر داکا در کدام کشور واقع است؟

پاکستان

۳- شهر لاهور در کدام کشور است؟

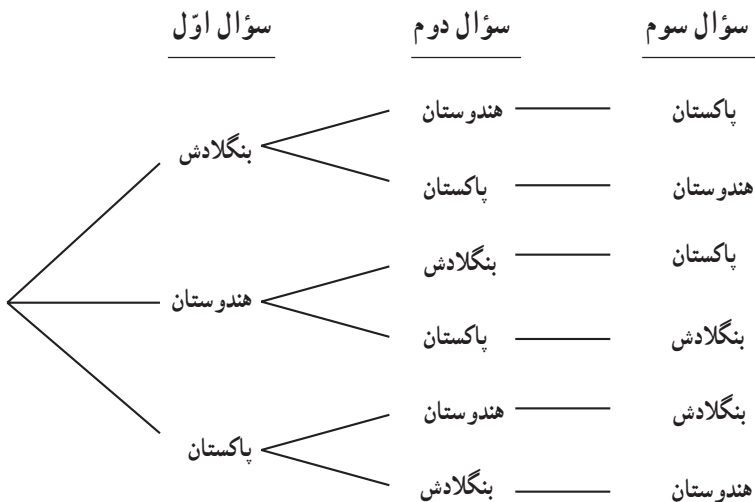
توجه: برای هر سؤال، تنها یک جواب درست وجود دارد. اگر آن جواب را برای سؤالی انتخاب کردید، دیگر نمی‌توانید آن را برای سؤال دیگری انتخاب کنید. در واقع، هر سؤال را باید با یک جواب، جور کنید.



تاج محل - هندوستان

ب) در مجموع، چند راه ممکن برای پاسخگویی به سه سؤال بالا وجود دارد؟  
چرا؟

برای پیدا کردن تعداد راه‌های ممکن، می‌توانید از نمودار زیر استفاده کنید:



اگر دقت کنید، این نمودار شبیه درختی با یک ریشه و شاخه‌های متعدد است.  
به همین علت، به نمودار درختی معروف است.

ب) این درخت، چند شاخه دارد؟

ت) دو شاخه این درخت؛ یعنی دو راه ممکن برای پاسخگویی به سه سؤال بالا، در جدول زیر، مشخص شده است. سایر شاخه‌ها را مشخص کنید و جدول را تکمیل نمایید.

جدول ۱

سؤال سوم	سؤال دوم	سؤال اول	راه‌های ممکن
پاکستان	هندوستان	بنگلادش	۱
هندوستان	پاکستان	بنگلادش	۲
	بنگلادش		۳
		هندوستان	۴
			۵
هندوستان			۶

ث) جواب قسمت (ب) و قسمت (ت) را با هم مقایسه کنید و نتیجه را بنویسید.  
 ج) یک آزمون جورکردنی با پنج سؤال تهیه کنید. به چند راه ممکن می‌توانید پاسخ‌ها را با سؤال‌ها جور کنید؟  
 چ) تعداد راه‌های ممکن پاسخگویی به یک آزمون جورکردنی با ۱۰ سؤال را حدس بزنید (بدون رسم نمودار درختی). بگویید چگونه این حدس را زدید؟  
 ح) آیا می‌توانید از پاسخ خود به قسمت (ج)، یک نتیجه کلی بگیرید؟ توضیح دهید.

اصل اساسی شمارش: برای پیدا کردن تعداد راه‌های ممکن در یک تصمیم‌گیری چند مرحله‌ای، تعداد انتخاب‌های ممکن در هر مرحله از تصمیم‌گیری، درهم ضرب می‌شوند.

یا به بیانی دیگر:

اصل اساسی شمارش: اگر یک تصمیم‌گیری دارای  $k$  مرحله باشد  $(k, \dots, 3, 2, 1)$  و تعداد انتخاب‌های ممکن در مرحله اول  $n_1$ ، در مرحله دوم  $n_2$ ، ... و در مرحله  $k$ ام،  $n_k$  باشد، تعداد انتخاب‌های ممکن در این تصمیم‌گیری، حاصلضرب تعداد انتخاب‌ها در هر مرحله یعنی  $n_1 n_2 \dots n_k$  است.

### تمرین

جدول زیر، تعداد راه‌های ممکن برای پاسخگویی به آزمون جورکردنی با تعداد سؤال‌های متفاوت را نشان می‌دهد.  
 این جدول را کامل کنید.

جدول ۲

۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	تعداد سؤال‌های یک آزمون جورکردنی
				۶	۲	۱	تعداد راه‌های ممکن پاسخگویی به سؤال‌ها

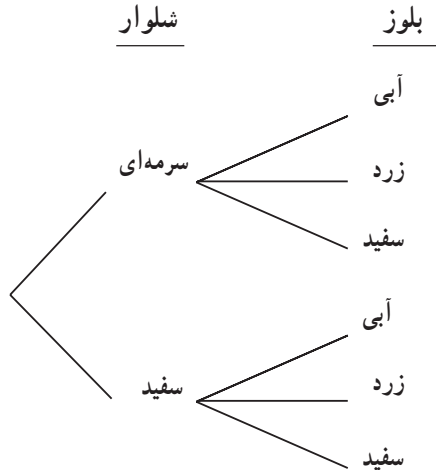
## مثال

امیر حسین، دو شلوار به رنگ‌های سرمه‌ای و سفید و سه بلوز به رنگ‌های آبی، زرد و سفید دارد. نمودار درختی انتخاب‌های ممکن امیر حسین را برای استفاده از لباس‌های خود، رسم کنید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) امیر حسین، به چند شکل متفاوت می‌تواند از لباس‌های خود استفاده کند؟  
ب) با استفاده از اصل اساسی شمارش، چه عددی باید در هم ضرب شوند تا جواب قسمت الف) به دست آید؟

حل: اول، نمودار درختی انتخاب‌های ممکن امیر حسین را برای استفاده از لباس‌های خود،

رسم می‌کنیم.



الف) شاخه‌های نمودار درختی بالا، انتخاب‌های امیر حسین را نشان می‌دهند. آنها را به ترتیب

می‌نویسیم به طوری که در هر پرانتز، اول شلوار و بعد، بلوز نوشته شود:

(بلوز، شلوار)

(آبی، سرمه‌ای)

(زرد، سرمه‌ای)

(سفید، سرمه‌ای)

(آبی، سفید)

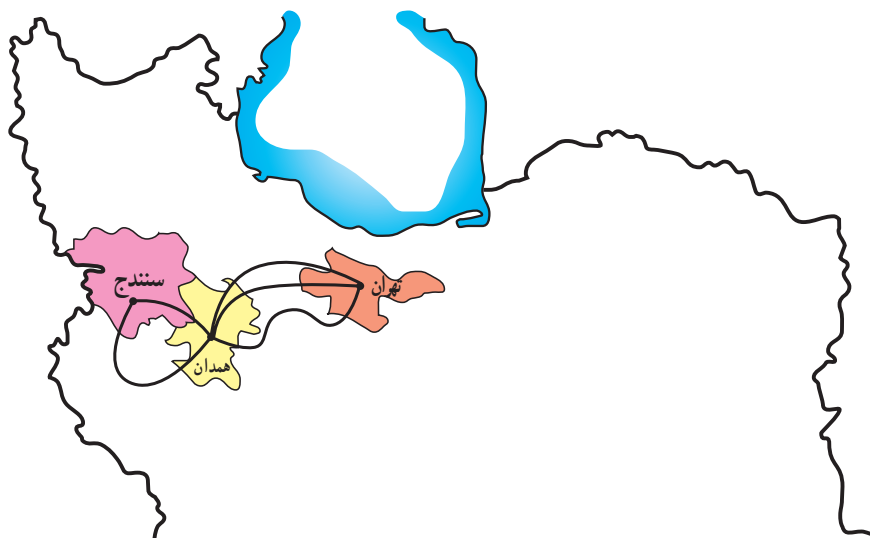
(زرد، سفید)

(سفید، سفید)

پس امیرحسین، به ۶ شکل متفاوت می‌تواند از لباس‌های خود استفاده کند.  
 ب) با استفاده از اصل اساسی شمارش، چون تعداد انتخاب‌های ممکن برای شلوارها ۲ و  
 تعداد انتخاب‌های ممکن برای بلوزها ۳ است، پس تعداد راه‌های ممکن در این تصمیم‌گیری،  
 $۲ \times ۳ = ۶$  است.

### تمرین

نمودار زیر، راه‌های مختلف مسافرت زمینی از تهران به همدان و سپس سنندج را نشان  
 می‌دهد:



با استفاده از اصل اساسی شمارش، تعداد راه‌های ممکن مسافرت زمینی از تهران به سنندج را  
 نشان داده و بنویسید.

### تمرین

از بین ۴ نوع مختلف سوپ، ۳ نوع ساندویچ، ۵ نوع نوشابه و ۴ نوع بستنی، چند ناهار مختلف  
 که شامل یک نوع سوپ، یک نوع ساندویچ، یک نوع نوشابه و یک نوع بستنی باشد، می‌توان انتخاب  
 کرد؟

الف) به سؤال‌های زیر که هر یک دارای دو گزینه «درست - نادرست» هستند پاسخ دهید.

۱- درجه حرارت، تابعی از زمان است.

درست  نادرست

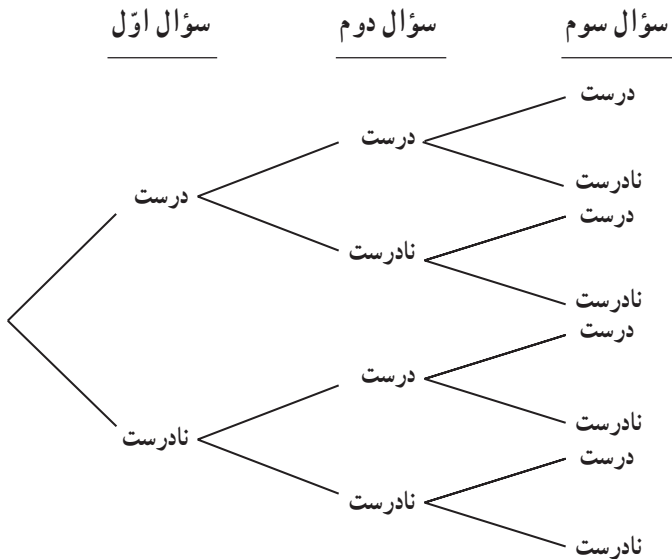
۲- تابع نظیر معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  تابع  $f(x) = ax^2 + bx + c$  است.

درست  نادرست

۳- اگر مقدار مبین معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  صفر شود، معادله دارای دو جواب متمایز خواهد بود.

درست  نادرست

ب) برای هر یک از سؤال‌ها، چند جواب ممکن وجود دارد؟ نمودار درختی زیر، راه‌های ممکن پاسخگویی به این سه سؤال را نشان می‌دهد:



پ) دو شاخه این درخت؛ یعنی دو راه ممکن برای پاسخ‌گویی به سه سؤال بالا، در جدول ۳ مشخص شده است. سایر شاخه‌ها را مشخص کنید و جدول را تکمیل نمایید.

### جدول ۳

راه‌های ممکن	جواب سؤال اول	جواب سؤال دوم	جواب سؤال سوم
۱	درست	درست	درست
۲	درست	درست	نادرست
۳	درست		درست
۴		نادرست	
۵			
۶	نادرست		
۷		نادرست	
۸	نادرست		

چون برای پاسخ دادن به هر سؤال، دو گزینه وجود دارد، پس طبق اصل اساسی شمارش، تعداد راه‌های ممکن برای پاسخگویی به سؤال‌های این آزمون، ضرب تعداد انتخاب‌های ممکن در هر مرحله از تصمیم‌گیری، یعنی  $2 \times 2 \times 2 = 8$  است.

ت) اگر بخواهید به یک آزمون «درست – نادرست» با ۵ سؤال پاسخ دهید، به چند راه ممکن می‌توانید پاسخ‌ها را انتخاب کنید؟

ث) اگر بخواهید به یک آزمون «درست – نادرست» با ۱۰ سؤال پاسخ دهید، به چند راه ممکن می‌توانید پاسخ‌ها را انتخاب کنید؟

ج) فرق بین نمودار درختی این فعالیت، با نمودار درختی فعالیت ۱-۳ چیست؟ توضیح دهید.

چ) تفاوت بین آزمون جورکردنی با آزمون «درست – نادرست» چیست؟ تفاوت بین انتخاب راه‌های ممکن در این دو آزمون کدام است؟

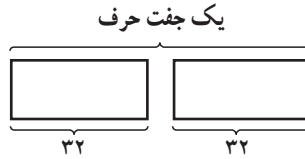
### مثال

با استفاده از اصل اساسی شمارش، نشان دهید چند جفت از حروف الفبای فارسی می‌توانیم

داشته باشیم؟



حل: این تصمیم‌گیری، دارای دو مرحله است. مرحله اول، انتخاب یک حرف از ۳۲ حرف الفبای فارسی و مرحله دوم نیز، انتخاب یک حرف از ۳۲ حرف الفبای فارسی است. پس، در هر مرحله، ۳۲ انتخاب ممکن وجود دارد.



بنابراین، طبق اصل اساسی شمارش، تعداد جفت حروف الفبای فارسی، برابر

$$۳۲ \times ۳۲ = (۳۲^۲) = ۱۰۲۴$$

است.

### تمرین

چند کلمه سه حرفی با حروف الفبای فارسی، می‌توان درست کرد؟ (با معنی بودن کلمه‌ها مهم نیست.)

### مثال

در یک محله که پیش شماره سه رقمی آن مشخص است (یعنی تغییر نمی‌کند)، چند راه ممکن برای شماره تلفن‌های ۷ رقمی وجود دارد؟

حل: ۷ جعبه خالی زیر را برای ۷ رقم شماره تلفن‌ها در نظر می‌گیریم:



چون پیش شماره تغییر نمی‌کند، پس فقط ۴ رقم آخر تغییر می‌کنند. برای هر رقم هم ۱۰ انتخاب ممکن وجود دارد. پس طبق اصل اساسی شمارش، تعداد راه‌های ممکن برای دادن شماره تلفن‌های ۷ رقمی با پیش شماره سه رقمی مشخص (ثابت)،  $۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۱۰^۴$  است.

## تمرین

در یک آزمون دو گزینه‌ای «درست – نادرست» با ۲۵ سؤال، چند راه ممکن برای پاسخگویی به ۲۵ سؤال، وجود دارد؟

### ۲-۳ انتخاب‌های مستقل و وابسته

در آزمون‌های جورکردنی، انتخاب پاسخ برای هر سؤال، وابسته به انتخاب‌های انجام شده برای سایر سؤال‌ها است؛ یعنی هر پاسخی که انتخاب شد، دیگر نمی‌توانیم آن را انتخاب کنیم و برای پاسخ به سؤال بعدی، تعداد انتخاب‌ها یکی کمتر از سؤال قبلی است. اما در آزمون «درست – نادرست»، انتخاب پاسخ‌ها برای هر سؤال مستقل از هم هستند؛ یعنی پاسخ هر سؤال، مستقل از سؤال‌های قبل و بعد از آن، می‌تواند یکی از دو گزینه «درست» یا «نادرست» باشد. پس تعداد انتخاب‌ها برای هر سؤال (هر مرحله) با هم برابر هستند.

## تمرین

در تمام تمرین‌ها و مثال‌هایی که از شروع فصل سوم تا به حال داشته‌اید، مشخص کنید که کدام انتخاب‌ها مستقل و کدام‌ها، وابسته هستند.

## فعالیت ۳-۳

الف) آزمون ۴ سؤالی زیر را با دو گزینه «درست» یا «نادرست» در نظر بگیرید:

سؤال ۱:  $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

درست  نادرست

سؤال ۲: اگر  $f(x) = 2x^2 + 3$  باشد، آنگاه  $f(x-2) = 2(x-2)^2 + 3$

درست  نادرست

سؤال ۳: یک تابع توانی می‌تواند یک تابع خطی باشد.

درست  نادرست

سؤال ۴: اگر مبین معادله درجه دوم منفی باشد، معادله دارای جواب حقیقی است.

درست  نادرست

(ب) نمودار درختی راه‌های ممکن پاسخگویی به این آزمون چهار سؤالی دوگزینه‌ای را رسم کنید.

(پ) طبق اصل اساسی شمارش، چه عددهایی باید درهم ضرب شوند تا جواب قسمت (ب) به دست آید؟

(ت) جدول زیر را تکمیل کنید.

جدول ۴

۱۰	...	۶	۵	۴	۳	۲	۱	تعداد سؤال‌های یک آزمون «درست – نادرست»
	...				۸	۴	۲	تعداد راه‌های ممکن پاسخگویی به سؤال‌های این آزمون

(ث) پس از تکمیل جدول، راه‌های مختلف پاسخگویی به سؤال‌های این نوع آزمون را، برحسب توان‌های ۲ بنویسید.

(ج) آیا می‌توانید برای پیدا کردن راه‌های ممکن پاسخگویی به سؤال‌های آزمون «درست – نادرست»، شکل دیگری از اصل اساسی شمارش را بنویسید؟

اگر یک تصمیم‌گیری دارای  $k$  مرحله باشد  $(k, 1, 2, 3, \dots)$  و تعداد انتخاب‌های ممکن در هر مرحله، با هم برابر و مساوی  $n$  باشند، آنگاه تعداد انتخاب‌های ممکن در این تصمیم‌گیری، حاصل ضرب تعداد انتخاب‌ها در هر مرحله یعنی

$$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_k \text{ بار}$$

است که مساوی  $n^k$  می‌شود.

مثال

تعداد راه‌های ممکن پاسخگویی به یک آزمون «درست – نادرست» با ۱۵ سؤال چند تا است؟

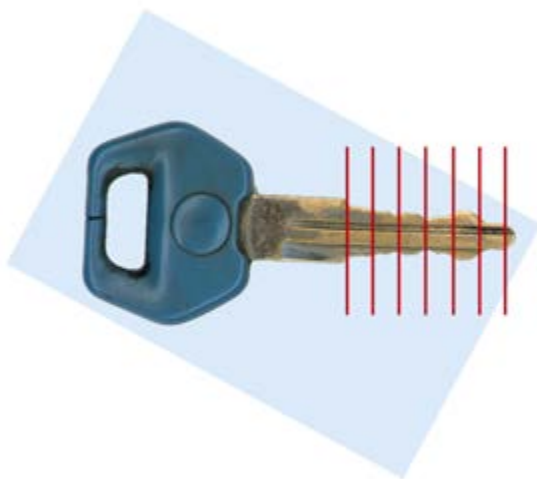
حل: چون برای هر سؤال، دو پاسخ ممکن وجود دارد، پس تعداد راه‌های ممکن،

$$2^{15} = \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{15 \text{ بار}} \text{ است.}$$

## مسائل

۱- سارا می‌خواهد همراه با خانواده خود، برای تعطیلات عیدنوروز به یکی از شهرهای یزد، کرمان، اهواز، مشهد یا ساری برود. آنها می‌توانند برای مسافرت، از خودرو سواری یا اتوبوس یا قطار استفاده کنند. تعداد راه‌های ممکن را که خانواده سارا می‌توانند برای انتخاب شهر و وسیله نقلیه داشته باشند، بنویسید.

۲- کلیدهایی با شکل‌های متفاوت، طوری طراحی می‌شوند که برای هر قسمت آن‌ها، الگوهای مختلفی وجود دارد. کلیدهای پیکان ۶ قسمت دارند.



الف) قبلاً، برای هر قسمت دو الگو وجود داشت. در آن موقع، چند طرح مختلف برای کلیدهای پیکان ممکن بود وجود داشته باشد؟

ب) در حال حاضر، پیکان از سه الگو برای هر قسمت استفاده می‌کند. به این ترتیب، چند طرح مختلف برای کلیدهای پیکان وجود دارد؟

پ) اگر تعداد الگوها برای هر قسمت، به ۴ تا افزایش یابد، چند طرح مختلف برای کلیدهای پیکان وجود خواهد داشت؟

۳- یک اداره، برای شماره کارت پرسنلی کارمندان خود، از یک کُد ۵ شماره‌ای و یک حرف به شکل زیر، استفاده می‌کند:

عدد    عدد    عدد    حرف    عدد  
           

با این شرط که اولین رقم، نمی‌تواند صفر باشد، تعداد راه‌های ممکن برای شماره کارت‌های مختلف پرسنلی را پیدا کنید.

### ۳-۳- جایگشت

برای شرکت در یک میزگرد تلویزیونی مربوط به آینده شغلی فارغ‌التحصیلان رشته علوم انسانی، ۹ کارشناس متخصص، به این برنامه، دعوت شده‌اند.

اولین کسی که می‌خواهد بنشیند، می‌تواند هر یک از ۹ صندلی دور میز را برای نشستن انتخاب کند. نفر دوم می‌تواند هر یک از ۸ صندلی باقی‌مانده را برای نشستن انتخاب کند. طبق اصل اساسی شمارش، این دو نفر به

$$9 \times 8 = 72$$

راه ممکن می‌توانند برای خود، جای نشستن انتخاب کنند.  
 به همین ترتیب

$$9 \times 8 \times 7 = 504$$

راه ممکن برای انتخاب جای نشستن سه نفر از کارشناسان، وجود دارد. با ادامه این کار،

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

راه ممکن، برای نشستن این ۹ نفر روی صندلی‌های دور میز، وجود دارد. توجه کنید که انتخاب



جای نشستن هر نفر، وابسته به انتخاب‌های نفرات قبلی است، زیرا وقتی یک صندلی اشغال شد، نفر بعدی نمی‌تواند روی آن بنشیند. برای همین، هر نفر بعدی، یک انتخاب کمتر از نفر قبل از خودش دارد.

چنین طرز قرار گرفتنی، جایگشت نامیده می‌شود. یعنی، هر یک از راه‌های ممکن قرار گرفتن این ۹ نفر در کنار یکدیگر، یک جایگشت از آن ۹ نفر است که تعداد آن‌ها را با  $P_n$  نشان می‌دهیم.

### تعریف

هر یک از راه‌های ممکن قرار گرفتن  $n$  شیء متمایز کنار یکدیگر، یک جایگشت از آن  $n$  شیء نامیده می‌شود. تعداد جایگشت‌های  $n$  شیء متمایز، با  $P_n$  نشان داده می‌شود.

$$9 \times 8 \times 7 \times \dots \times 1$$

برای نوشتن حاصل ضرب

می‌توانیم از علامت تعجب یعنی (!) استفاده کنیم که در ریاضی، به آن فاکتوریل گفته می‌شود.

با استفاده از این علامت، به جای  $9 \times 8 \times 7 \times \dots \times 1$  می‌نویسیم  $9!$ .

### تعریف

$n!$  یعنی ضرب  $n$  در تمام اعداد متوالی قبل از خودش تا ۱

پس با توجه به تعریف جایگشت:

تعداد جایگشت‌های  $n$  شیء مختلف،  $n!$  است.

اگر چه در ریاضی، نماد (!) برای تعجب و شگفتی مورد استفاده قرار نمی‌گیرد، اما اغلب اعدادی که توسط این علامت نشان داده می‌شوند، به‌طور شگفت‌آوری بزرگ هستند!

## تمرین

فهرست زیر را تکمیل کنید :

$$۱! = ۱$$

$$۲! = ۲ \times ۱ = ۲$$

$$۳! = ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$$

$$۴! =$$

$$۵! =$$

$$۶! =$$

:

$$۱۰! =$$

توجه: طبق قرارداد،  $۰! = ۱$  تعریف می‌شود.

## تمرین

اگر چه ممکن است تساوی  $۲! + ۲! = ۴!$ ، «به نظر» درست آید، اما می‌دانید که نادرست است، زیرا  $۲! = ۲$  و  $۴! = ۲۴$ ، در نتیجه  $۲ + ۲ \neq ۲۴$ .

با استفاده از فهرستی که در تمرین قبل ساخته‌اید، تحقیق کنید که کدام یک از تساوی‌های زیر درست، و کدام یک نادرست هستند؟

الف)  $۳! + ۳! = ۶!$

ب)  $۱۰! = ۱۰ \times ۹!$

پ)  $۱! + ۴! + ۵! = ۱۴۵$

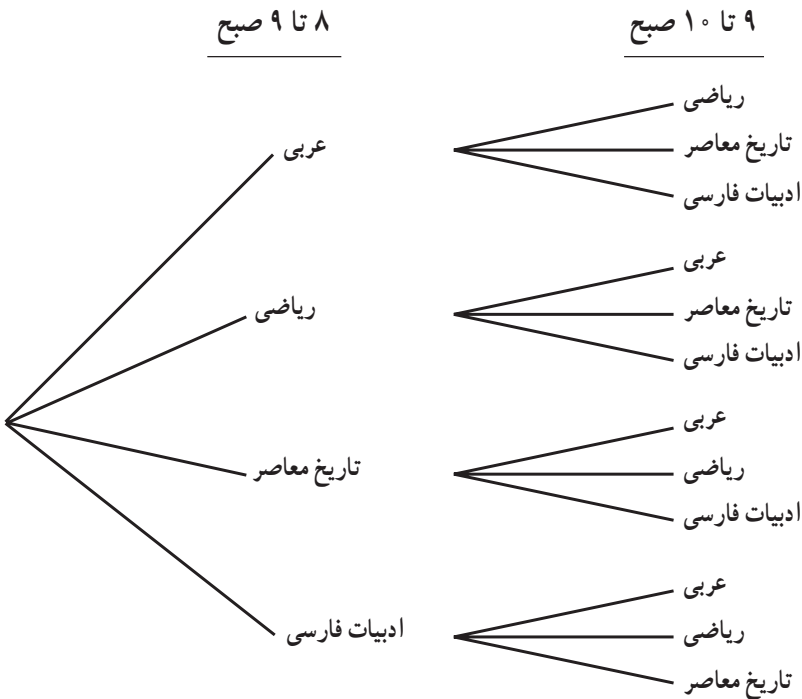
ت)  $\frac{۸!}{۴!} = ۲!$

ث)  $۶! \times ۷! = ۱۰!$

مدیر یک دبیرستان، برای تنظیم برنامه روز شنبه دانش آموزان سال سوم رشته علوم انسانی، انتخاب‌های زیر را برای ساعت ۸ تا ۱۲ ظهر - که طی آن چهار کلاس برگزار می‌شود - دارد:

عربی، ریاضی، تاریخ معاصر، ادبیات فارسی

نمودار درختی زیر، نشان می‌دهد چگونه این مدیر، می‌تواند برنامه ساعت ۸ تا ۹ و ۹ تا ۱۰ صبح را، از بین این چهار ساعت انتخاب کند.



۱- چند راه مختلف، برای تنظیم ساعت‌های دو درس وجود دارد؟

۲- تعداد جایگشت‌های چهار درس در برنامه صبح شنبه رشته علوم انسانی این

دبیرستان، چند تا است؟

۳- نمودار درختی بالا را برای ساعت‌های ۸ تا ۹، ۹ تا ۱۰، ۱۰ تا ۱۱ و ۱۱ تا

۱۲، کامل کنید.



۴- انتخاب‌های ساعت تدریس برای هر درس، مستقل از هم هستند یا وابسته

به هم؟ چرا؟

## مسائل

۱- دبیرستان جلال‌آل احمد، تصمیم گرفته است تا از طریق انتخابات، شورای دانش‌آموزی تشکیل دهد. دانش‌آموزان به چند راه ممکن می‌توانند نام‌های ۵ نامزد انتخاباتی برای شورا را، روی برگه‌های رأی بنویسند؟

۲- به چند راه مختلف، از بین ۸ دوندۀ یک مسابقه، نفرات اول تا سوم می‌توانند مشخص شوند؛ بدون آن که هیچ دو نفری هم‌زمان، به خط پایان برسند؟

۳- به چند راه ممکن، شماره تلفن‌های ۷ رقمی، می‌توانند ساخته شوند، به طوری که در آن‌ها، رقم صفر نباشد؟

۴- اگر وجود رقم صفر در بین رقم‌های شماره تلفن‌های ۷ رقمی مسأله ۳ جایز باشد، چه تغییری در تعداد راه‌های ممکن ایجاد می‌شود؟ چرا؟

۵- به چند راه مختلف، ۸ نفر می‌توانند برای تهیهٔ بلیط سینما، در یک صف بایستند؟

۶- «مرکز گفتگوی تمدن‌ها» در سال ۱۳۸۰، مسابقه‌ای با چهار جایزهٔ ۵۰,۰۰۰ تومانی، ۳۰,۰۰۰ تومانی، ۲۰,۰۰۰ تومانی و ۱۰,۰۰۰ تومانی برای بهترین نقاشی دانش‌آموزان ۱۴ تا ۱۷ سال و با موضوع «نقش دانش‌آموزان در گفتگوی تمدن‌ها» ترتیب داده است. شرط مسابقه این است که کسی نمی‌تواند بیش از یک جایزه را ببرد.

اگر ۱۰۰۳ دانش‌آموز ۱۴ تا ۱۷ سال، نقاشی‌های خود را برای این مسابقه فرستاده باشند، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

الف) به چند راه ممکن، دو جایزهٔ اول و دوم، کسب خواهند شد؟

ب) به چند راه ممکن، سه جایزهٔ اول، دوم و سوم، کسب خواهند شد؟

پ) به چند راه ممکن، هر چهار جایزه، کسب خواهند شد؟

۷- تعداد جایگشت‌های حرف‌های کلمهٔ «قناعت» را بنویسید.

۸- اگر بخواهید با رقم‌های ۲، ۵، ۶، ۹ و ۳، کدهای ۵ رقمی بسازید، تعداد راه‌های ممکن را

بنویسید.

## زنگ تفریح ریاضی!

احمد ۱۳ نفر از دوستان خود را برای تماشای یک فیلم به سینما دعوت کرد. او برای این منظور ۱۴ بلیت در یک ردیف رزرو کرده بود. اگر مسئول سالن بخواهد این ۱۴ نفر را به صندلی‌ها راهنمایی کند، هر یک از ۱۴ نفر می‌تواند صندلی اول را اشغال کند. بعد از او، صندلی دوم می‌تواند توسط هر یک از ۱۳ نفر باقی مانده اشغال شود. با استفاده از اصل اساسی شمارش،  $14 \times 13 = 182$  راه ممکن وجود دارد که دو نفر، بتوانند دو صندلی از ۱۴ صندلی را اشغال کنند. با همین استدلال، تعداد جایگشت‌های ۱۴ نفر یعنی  $P_{14} = 14!$  است که برابر است با:

$$14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 87,178,291,200$$

یعنی ۸۷,۱۷۸,۲۹۱,۲۰۰ راه ممکن، برای نشستن این ۱۴ نفر روی صندلی‌ها وجود دارد. این عدد آن قدر بزرگ است که اگر این ۱۴ نفر، می‌توانستند در هر ثانیه - و بدون توقف - یک ترتیب جدید نشستن درست کنند، بیش از ۲۷۰۰ سال طول می‌کشید تا ۱۴ نفر، با هر جایگشت ممکن، روی صندلی‌ها بنشینند! در این مدت آنها چند فیلم می‌توانستند ببینند!؟



**۱-۳-۳- جایگشت‌های  $r$  شیء از  $n$  شیء متمایز:** با دقت در مسأله‌هایی که راجع به جایگشت تا به حال حل کرده‌اید، حتماً متوجه می‌شوید که فعالیت ۳-۴ و مسأله ۶، با سایر مسأله‌ها، کمی فرق داشت. در فعالیت ۳-۴، مدیر دبیرستان می‌خواست راه‌های ممکن را برای تنظیم ساعت‌های دو درس از چهار درس خود را پیدا کند. در مسأله ۶ نیز، از تمام ۱۰۰۳ نفر شرکت کننده، تنها ۴ نفر موفق به کسب جایزه می‌شدند. یعنی، هر کدام از ۱۰۰۳ نفر شرکت کننده، امکان کسب جایزه اول را داشتند، اما به محض آن که جایزه اول به برنده آن تعلق گرفت، جایزه دوم به یکی از ۱۰۰۲ نفر باقی مانده، جایزه سوم به یک نفر از بین ۱۰۰۱ شرکت کننده دیگر و بالاخره؛ جایزه چهارم به یکی از ۱۰۰۰ شرکت کننده مسابقه تعلق می‌گرفت. یعنی تعداد راه‌های مختلفی که چهار جایزه به چهار نفر برگزیده از بین ۱۰۰۳ نفر تعلق می‌گیرد برابر  $1000 \times 1001 \times 1002 \times 1003$  است که بسیار کوچک‌تر



از ۱۰۰۳! است.

– اگر تعداد دانش‌آموزان شرکت‌کننده در مسابقه  $n$  نفر باشد چهار جایزهٔ اول به چند راه ممکن به چهار نفر از  $n$  نفر تعلق می‌گیرد؟  
 – آیا می‌توانید یک فرمول کلی، برای پیدا کردن تعداد چنین جایگشت‌هایی پیدا کنید؟  
 برای مثال به مسألهٔ ۲ همین فصل

بازگردید؛ دیدید که هر یک از ۸ نفر دوندۀ می‌توانستند برندهٔ مقام اول باشند. وقتی نفر اول تعیین می‌شود، هر یک از ۷ نفر باقیمانده می‌توانند مقام دوم را کسب کنند و بالاخره یکی از بین ۶ نفر باقیمانده مقام سوم را به دست خواهد آورد. پس طبق اصل اساسی شمارش تعداد راه‌های ممکن برای اینکه از بین ۸ دوندۀ ۳ نفر حائز مقام‌های اول تا سوم شوند برابر  $۸ \times ۷ \times ۶ = ۳۳۶$  خواهد بود. در این مسأله، در واقع به جای آن که تعداد جایگشت‌های ۸ یعنی  $۸!$  را حساب کنیم؛ تعداد جایگشت‌های ۳ از ۸ را پیدا کردیم یعنی:

$$۸ \times ۷ \times ۶ = ۸(۸-۱)(۸-۲) \quad (۱)$$

اگر بخواهیم قانونی به دست آوریم که تعداد جایگشت‌های ۳ از ۸ را نشان دهد می‌توانیم به طریق زیر عمل کنیم:

$$۸! = ۸ \times ۷ \times ۶ \times \underbrace{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}_{\text{می‌دانیم}}$$

به جای  $۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$  می‌توانیم  $۵!$  را قرار دهیم. پس:

$$۸! = ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵!$$

دو طرف تساوی را بر  $۵!$  تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۸!}{۵!} = ۸ \times ۷ \times ۶$$

در رابطهٔ (۱) جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{۸!}{۵!} = ۸(۸-۱)(۸-۲)$$

اگر  $۸(۸-۱)(۸-۲)$  را که جایگشت ۳ از ۸ است با  $P(۸, ۳)$  نشان دهیم، آن‌گاه:

$$P(۸, ۳) = \frac{۸!}{۵!}$$

از طرفی،  $5!$  همان  $(8-3)!$  است پس :

$$P(8, 3) = \frac{8!}{(8-3)!}$$

در حالت کلی، برای پیدا کردن تعداد جایگشت‌های  $r$  شیء از  $n$  شیء، یعنی  $P(n, r)$  و با فرض این که  $r \leq n$  است (چرا؟) با استفاده از الگوی استدلالی مثال قبل، می‌نویسیم :

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

از طرفی،

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)(n-r)!$$

$$n! = P(n, r)(n-r)! \quad \text{یا}$$

چون می‌خواهیم  $P(n, r)$  را محاسبه کنیم، پس دو طرف معادله را بر  $(n-r)!$  تقسیم نموده، و معادله را برای  $P(n, r)$  حل می‌کنیم :

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

### تعریف

اگر  $n$  شیء مختلف داشته باشیم، تعداد جایگشت‌های  $r$  شیء از این  $n$  شیء برابر است با

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

که در آن،  $r \leq n$  و  $r$  و  $n$ ، هر دو عدد طبیعی هستند.

### مثال

تعداد جایگشت‌های  $n$  شیء از  $n$  شیء را پیدا کنید.

حل: چون  $r = n$ ، پس :

$$\begin{aligned} P(n, n) &= \frac{n!}{(n-n)!} \\ &= \frac{n!}{0!} = n! \end{aligned}$$

۱- به چند راه ممکن، می‌توان با حرف‌های کلمه «دشت مغان» کلمات سه حرفی ساخت (بی‌معنی بودن کلمات اشکالی ندارد).

۲- با رقم‌های شماره‌تلفن ۲۳۸۵۴۷۸، چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت؟

۳- هر یک از مقادیرهای زیر را محاسبه کنید؛

الف)  $P(۱۳, ۵)$       ب)  $P(۴, ۴)$       پ)  $P(n, ۰)$

۴- به چند راه مختلف، با حرف‌های کلمه «روستا» می‌توان کلمه‌های سه حرفی ساخت؟

۵- از بین ۱۲ داوطلب عضویت در هیأت رئیسه یک مؤسسه، یک نفر به عنوان رئیس، یک نفر معاون و یک نفر خزانه‌دار، توسط اعضای مؤسسه انتخاب شدند. تعداد راه‌های ممکن برای انتخاب این هیأت را پیدا کنید.

۶- مقادیرهای زیر را به دست آورید:

الف)  $P(۱۰۰, ۱)$       ب)  $P(۱۰۰, ۵۰)$

پ)  $P(n, (n-1))$       ت)  $P((n+2), ۴)$

۷- درستی تساوی‌های زیر را نشان دهید؛

الف)  $P(n, (n-1)) = P(n, n)$

ب)  $P((n+2), ۴) = P(n, ۳)$

پ)  $P(n, ۵) = ۱۸P((n-2), ۴)$

۸- از یک گروه ۱۰۰ نفری دانش‌آموزی، به چند راه ممکن می‌توان ۴ نفر را برای فعالیت‌های فوق برنامه مدرسه انتخاب کرد؟ به طوری که یک نفر مسئول گروه سرود، یک نفر مسئول گروه دانش، یک نفر مجری برنامه‌ها و یک نفر مسئول مسابقات علمی شود.

۲-۳- جایگشت‌های متمایز<sup>۱</sup>

### مثال

با حروف کلمه BANANA، چند ترتیب مختلف می‌توان ساخت؟  
حل: اگر تمام حرف‌های کلمه BANANA از هم متمایز بودند، ما می‌توانستیم ۶! ترتیب مختلف بسازیم (که همان تعداد راه‌های ممکن ساختن کلمات جدید با این ۶ حرف است). در واقع،

<sup>۱</sup> - Distinguishable Permutation

اگر  $A$ ها و  $N$ ها را شماره گذاری کنیم تا از هم متمایز شوند، تعداد راه‌های ممکن، همان تعداد جایگشت‌های  $۶$  حرف یعنی  $۶!$  است. اما  $(A_1A_2A_3)$  می‌توانند به  $۳!$  راه مختلف، جایگشت داشته باشند. تعداد جایگشت‌های  $(N_1N_2)$  نیز  $۲!$  است. اما چون واقعاً  $A$ ها و  $N$ ها از هم متمایز نیستند، پس  $۳! \times ۲!$  ترتیب مشابه داریم. یعنی  $۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶ = ۶!$ ، از تعداد واقعی راه‌های ممکن (یا ترتیب‌های ممکن) ساختن کلمات با حرف‌های کلمه BANANA،  $۲ \times ۳ \times ۲ = ۱۲$ ،  $۳! \times ۲!$  بار بزرگتر است. به همین دلیل، برای پیدا کردن تعداد واقعی راه‌های ممکن، باید  $۶!$  را بر  $۳! \times ۲!$  تقسیم کنیم. برای وضوح بیشتر، به نمونه زیر توجه کنید:

$A_1BN_1A_2NA_3$	$A_1BN_1A_2NA_3$
$A_1BN_2A_2NA_3$	$A_1BN_2A_2NA_3$
$A_2BN_1A_1NA_3$	$A_2BN_1A_1NA_3$
$A_2BN_2A_1NA_3$	$A_2BN_2A_1NA_3$
$A_3BN_1A_1NA_2$	$A_3BN_1A_1NA_2$
$A_3BN_2A_1NA_2$	$A_3BN_2A_1NA_2$

همان‌طور که می‌بینید، برای هر راه ممکن،  $۱۲$  گروه از کلماتی داریم که اگر  $A$ ها و  $N$ ها را با شماره گذاری متمایز نکنیم، همگی یکسان هستند؛ پس باید تعداد کل راه‌های ممکن را بر  $۳! \times ۲!$  که همان  $۱۲$  باشد، تقسیم کنیم.

به طور کلی، تعداد جایگشت‌های  $n$  شیء، که در آن،  $a_1$  شیء مثل هم  $a_2$  شیء مثل هم و  $a_k \dots$  شیء مثل هم باشند برابر است با:

$$\frac{n!}{a_1! a_2! \dots a_k!}$$

## مسائل

۱- راه‌های مختلفی که حروف کلمه نادر را می‌توان مرتب کرد، در زیر آمده است:

نردا	نراد	ندرا	ندار	نارد	نادر
اردن	ارند	ادرن	ادنر	انرد	اندر
دران	درنا	دارن	دانر	دنرا	دنار
ردان	ردنا	رادن	راند	رندا	رناد

- نشان دهید که بدون تهیة این فهرست، چگونه این تعداد به دست می‌آید؟
- ۲- فهرستی از تمام راه‌های مختلفی که می‌توان حروف کلمه سارا را مرتب کرد، تهیة کنید.
- ۳- چرا تعداد راه‌هایی که می‌توان حروف کلمه سارا را مرتب کرد، کمتر از تعداد راه‌هایی است که می‌توان حروف کلمه نادر را مرتب کرد؟
- نشان دهید که بدون تهیة فهرست، چگونه تعداد راه‌های مرتب کردن حرف‌های کلمه سارا به دست می‌آید؟
- ۴- کدام یک از کلمه‌های زیر، دارای تعداد ترتیب‌های مساوی با کلمه سارا است؟  
دارا، سوسن، شبنم، زهرا، مریم و مهدی
- ۵- الف) فهرستی از تمام راه‌هایی که می‌توان حروف کلمه بابا را مرتب کرد، بنویسید.  
ب) نشان دهید چگونه این تعداد، بدون تهیة فهرست به دست می‌آید؟
- ۶- به چند طریق ممکن، می‌توان جایگشت‌های مختلفی با رقم‌های عدد ۲۸۵۸۸۸۸۸۸۸ ساخت؟
- ۷- شماره پلاک ماشینی ۴۴۴ ک ۲۲ است. چند پلاک ماشینی با همین ۵ رقم و حرف «ک» می‌توان ساخت؟

### فعالیت ۳-۵

شعر فردوسی را در نظر بگیرید :



حسین کیانکابانی  
تذهیب، گواش و آبرنگ

تمام راه‌های ممکنه که بتوان حروف این بیت شعر را جابه‌جا کرد؛ یعنی تعداد تمام جایگشت‌های ۳۶ حرف این شعر را پیدا کنید (به عبارتی دیگر، تمام ترتیب‌های مختلف را پیدا کنید). برای این کار، از رابطه زیر می‌توانید استفاده کنید:

$$36!$$

$$\frac{36!}{4!6!4!4!6!2!3!}$$

الف) فاکتوریل‌های رابطه بالا از کجا آمده‌اند؟

ب) رابطه‌ای بنویسید که با آن، بتوان تعداد راه‌های مختلف ترتیب حروف ۶ کلمه مصرع اول را نوشت.

پ) آن راه‌ها، چند تا هستند؟

ت) رابطه‌ای بنویسید که با آن، بتوان تعداد راه‌های مختلف نوشتن ۱۲ حرف اول این بیت را پیدا کرد.

ث) آن راه‌ها، چند تا هستند؟

ج) فرمول  $\frac{n!}{a_1! a_2! \dots a_k!}$  را با نتیجه این فعالیت مقایسه کنید سپس تعریف

جایگشت را مجدداً، از زبان خود، بنویسید.

## مسائل

۱- با استفاده از فرمول  $\frac{n!}{a_1! a_2! a_3! \dots a_k!}$ ، تعداد ترتیب‌های مختلف عبارت «آفتاب آمد دلیل آفتاب» را بنویسید.

۲- با رقم‌های عدد ۲۴۲۳۳۷۳، چند ترتیب مختلف می‌توانید داشته باشید؟

۳- عنوان مجله‌ای که با هدف آموزش شهروندان برای استفاده صحیح از نان، به تازگی اجازه انتشار گرفته است، نان و نان<sup>۱</sup> است. این عنوان غیرمعمول است؛ زیرا اگر آن را از سمت چپ هم بخوانید، باز همان نان و نان می‌شود. یعنی با برعکس کردن ترتیب حرف‌های نان و نان، ترتیب عنوان تغییر نمی‌کند.

با استفاده از فرمول «جایگشت‌های متمایز»، تعداد ترتیب‌های مختلف حرف‌های این عنوان را پیدا کنید.

۱- به این نوع واژه‌ها که از هر دو طرف یک‌جور خوانده می‌شوند، متقارن می‌گویند. برای اطلاعات بیشتر به کتاب «مهارت‌های پایه ریاضی» سال اول متوسطه مراجعه کنید.



### ۴-۳ ترکیب<sup>۱</sup>



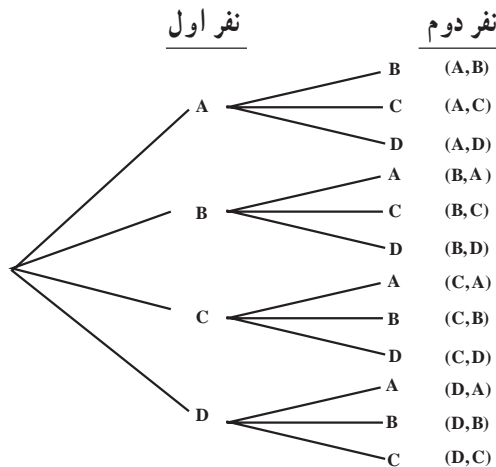
الکساندر گراهام بل

اولین مبادله صدا توسط تلفن، در شهر نیویورک در ایالت کانکتیکت ایالات متحده آمریکا، در سال ۱۸۷۸ انجام شد. این شبکه، در توسعه خود توانست ۲۱ مشترک تلفن را به هم مرتبط کند. اولین کتاب راهنمای تلفن که در همان سال، در شهر نیویورک چاپ شد، شامل فهرست نام ۵۰ مشترک تلفن بود. این شبکه در فاز اول، توانست ۲۱ مشترک تلفن را به

۲۱ راه مختلف، دوبه دو به هم مرتبط کند (از طریق مبادله صدا بین هر جفت از آنها). با راه اندازی فاز بعدی شبکه، ۵۰ مشترک تلفن به ۱۲۲۵ راه مختلف، توانستند دوبه دو با هم مرتبط شوند. به نظر شما، این تعداد راه‌ها، چگونه محاسبه شده‌اند؟

### فعالیت ۳-۶

راه‌هایی که می‌توان از بین چهار نفر داوطلب نمایندگی شورای شهر، دو نفر را انتخاب کرد، در نمودار درختی زیر نشان داده شده است.



الف) اگر ترتیب مهم باشد، چند راه در نمودار نشان داده شده است؟ (یعنی اگر  $(A, B)$  با  $(B, A)$  فرق داشته باشد).

ب) با استفاده از اصل اساسی شمارش، چه عددی را باید در هم ضرب کنید تا این جواب به دست آید؟

پ) اگر ترتیب مهم نباشد (مثلاً  $(A, B)$  با  $(B, A)$  یکی باشد)، چند راه ممکن برای انتخاب دو نماینده، وجود دارد؟

ت) آیا می‌توانید این جواب را، بدون نگاه کردن به نمودار درختی، به دست آورید؟ چگونه؟ بحث کنید.

ترکیب، انتخابی از شیء‌هاست که در آن، ترتیب مهم نیست.

برای پیدا کردن تعداد ترکیب‌های ممکن، اول از اصل اساسی شمارش شروع کنید و سپس، بر تعداد راه‌هایی که آن شیء‌ها می‌توانند مرتب شوند، تقسیم کنید.

در واقع، تفاوت ترکیب با جایگشت  $r$  شیء از  $n$  شیء در این است که چون ترتیب در ترکیب مهم نیست؛ در نتیجه، تعداد ترکیب‌ها به نسبت جایگشت‌های  $r$  یعنی  $r!$ ، از  $P(n, r)$  کوچک‌تر است.

به همین علت است که بر تعداد راه‌هایی که  $r$  شیء می‌توانند مرتب شوند، تقسیم می‌کنیم و تعداد ترکیب‌ها را با  $C(n, r)$  نشان می‌دهیم:

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} \quad (1)$$

اما

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (2)$$

پس با جایگزینی (۲) در (۱)، داریم:

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

## مثال

در روز تولد امام رضا (ع)، ده نفر در فهرست انتظار پرواز ساعت ۴ بعد از ظهر تهران - مشهد هواپیمایی جمهوری اسلامی ایران - هما قرار داشتند.

الف) اگر سه جای خالی در این پرواز وجود داشته باشد، به چند راه مختلف، ممکن است نام سه نفر به ترتیب، برای سوار شدن به هواپیما خوانده شود؟

ب) چند ترکیب مختلف از این سه نفر، برای پرواز ذکر شده می توان انتخاب کرد؟  
حل:

الف) طبق اصل اساسی شمارش، برای نفر اول ۱۰ انتخاب، برای نفر دوم ۹ انتخاب و برای نفر سوم، ۸ انتخاب وجود دارد. یعنی تعداد انتخاب های ممکن،  $10 \times 9 \times 8 = 720$  است. این عدد را می توان از فرمول جایگشت ۳ از ۱۰ نیز به دست آورد

$$P(10, 3) = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} \\ = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 720$$

ب) برای پیدا کردن تعداد ترکیب های خواسته شده، باید تعداد جایگشت ها را بر تعداد جایگشت های ۳ یعنی ۳! تقسیم کنیم پس

$$C(10, 3) = \frac{P(10, 3)}{3!} = \frac{720}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

## مسائل

۱- مقدارهای زیر را محاسبه کنید:

$$C(n, n) \quad \text{الف)} \quad C(n, 0) \quad \text{ب)} \quad C(7, 3) \quad \text{پ)}$$

۲- یکی از راه هایی که معماها و بازی های مختلف کلامی ساخته می شوند، به هم ریختن حروف کلمات و ساختن کلمات جدید (با معنی یا بی معنی) است، به چند راه مختلف، می توان از تغییر ترتیب حرف های کلمه های زیر، ترکیب های جدید ساخت؟

$$\text{الف) کامیاران} \quad \text{ب) مینادشت باغدشت} \quad \text{پ) سوسنگرد} \quad \text{ت) بندر لنگه}$$

خط بریل به زبان فارسی که توسط افراد نابینا مورد استفاده قرار می‌گیرد، از کُدی با ۶۳ کاراکتر تشکیل شده است. کاراکترها ترکیب‌هایی از نقاط برجسته هستند که از ۱ تا ۶ در تغییرند.



نمونه‌هایی از حروف فارسی به خط بریل، در زیر نشان داده شده است.

● ●	○ ●	● ●	○ ●	● ●	● ○	● ○
○ ○	● ●	○ ●	● ●	● ○	● ○	○ ○
○ ○	○ ○	○ ●	● ○	● ○	○ ○	○ ○
ج	ج	ث	ت	پ	ب	الف

دایره‌های توپُر معرّف نقاط برجسته و دایره‌های توخالی نشان دهندهٔ موقعی هستند که کاغذ صاف است و برجستگی ندارد.

به چند راه مختلف ممکن است :

الف) یکی از ۶ نقطه برجسته شود؟

ب) دو تا از ۶ نقطه برجسته شوند؟

پ) ۳ تا از ۶ نقطه برجسته شوند؟

ت) ۴ تا از ۶ نقطه برجسته شوند؟

ث) ۵ تا از ۶ نقطه برجسته شوند؟

ج) تمام ۶ نقطه برجسته شوند؟

چ) آیا کُد بریل، از تمام ترکیب‌های مختلف ۱ تا ۶ نقطه، استفاده کرده است؟

۱- پرچم‌های نه کشور دنیا، الگویی دارند که در زیر می‌بینید :



رنگ هر یک از این سه نوار عمودی پرچم، در جدول ۵ آمده است :

جدول ۵

پرچم	نوار سوم	نوار دوم	نوار اول	کشور
	قرمز	زرد	سیاه	بلژیک
	قرمز	زرد	آبی	چاد
	قرمز	سفید	آبی	فرانسه
	سبز	زرد	قرمز	آلمان
	طلایی	سفید	سبز	ایرلند
	قرمز	سفید	سبز	ایتالیا
	سبز	سفید	طلایی	ساحل عاج
	قرمز	زرد	سبز	مالی
	سبز	سفید	سبز	نیجریه

الف) اگر نوارهای اول و سوم فقط سیاه، آبی، طلایی، سبز یا قرمز باشند و نوار دوم سفید یا زرد باشد، چند پرچم مختلف با این الگو ممکن است وجود داشته باشند؟

ب) اگر هر نوار پرچم بتواند یکی از هفت رنگ جدول باشد، اما هر نوار دارای رنگ متفاوتی باشد، چند پرچم مختلف با این الگو می‌توان داشت؟  
۲- عبارت‌های زیر را ساده کنید :

الف)  $\frac{n!}{(n-5)!}$

ب)  $\frac{(2n)!}{4(2n-3)!}$

۳- نشریه‌ای، تصمیم گرفته بود یک مسابقه ادبی برگزار کند. در این مسابقه، تصویر چهار شاعر معروف ایرانی قرن هفتم هجری قمری؛ مولانا جلال‌الدین محمد بلخی مشهور به مولانا، سعدی شیرازی، خواجه کرمانی و عطار نیشابوری؛ همراه با چهار بیت شعر، چاپ شده و از خوانندگان، خواسته شده بود تا هر بیت شعر را با سراینده آن جور کنند و برای دریافت یک سکه بهار آزادی به



عنوان جایزه، حداکثر تا ۱۰ روز پس از انتشار نشریه، جواب‌های خود را به دفتر نشریه ارسال کنند و شانس خود را امتحان کنند! احسان مصر بود که این جایزه را ببرد. برای این منظور، او تصمیم گرفت تمام پاسخ‌های ممکن به این سؤال را به دفتر نشریه ارسال کند.

الف) تعداد پاسخ‌های ممکن چند تا بود؟

ب) آیا به نظر منطقی می‌رسید که احسان فکر کند اگر تمام انتخاب‌ها را به درستی انجام دهد، یک سکه بهار آزادی را حتماً به دست می‌آورد؟

۴- از فهرست نام ۲۴ عضو یک باشگاه ورزشی، ۴ نام برای انتخاب رئیس، نایب رئیس، خزانه‌دار و منشی باشگاه، به قید قرعه انتخاب می‌شوند. تعداد راه‌های ممکن برای انتخاب این ۴ نفر چند تاست؟

(توجه کنید که با وجودی که ترتیب باید مهم باشد، اما این ترتیب رعایت نشده است. چرا؟!)

۵- یک بستنی فروشی، ۱۰ طعم مختلف بستنی دارد که عبارتند از: وانیلی، پرتغالی، زعفرانی، توت‌فرنگی، موز، شاه‌توت، آناناس، قهوه، شکلاتی و پسته‌ای.

الف) اگر بخواهید از این بستنی فروشی، یک بستنی قیفی با سه طعم مختلف بخرید، چند انتخاب ممکن از بین ۱۰ طعم بالا وجود دارد؛ به شرطی که ترتیب قرار گرفتن طعم‌های مختلف، برای شما مهم باشد؟

ب) اگر بخواهید از این بستنی فروشی، یک بستنی قیفی با سه طعم مختلف بخرید و اگر ترتیب قرار گرفتن طعم‌های مختلف، برای شما مهم نباشد، چند انتخاب ممکن از بین ۱۰ طعم بالا، وجود دارد؟

۶- درستی تساوی‌های زیر را نشان دهید.

$$\text{الف) } C(n, m) = \frac{P(n, m)}{m!} \quad \text{ب) } C(n, n) = C(n, 0)$$

۷- عبارت «زندگی یعنی امید به آینده»<sup>۱</sup> را در نظر بگیرید و به سؤال‌های زیر، پاسخ دهید.

الف) چند ترتیب مختلف با حرف‌های این عبارت می‌توانیم بسازیم؟

ب) اگر بخواهیم کلمه «امید»، همه جا به همین شکل بیاید، آن وقت چند ترتیب مختلف با حرف‌های این عبارت می‌توانیم بسازیم؟

۸- ۱۰۰ عضو یک باشگاه کوهنوردی دانش‌آموزی، به همراه دو مربی، قصد صعود به بلندترین

۱- این جمله را استاد بیرشک در موقعی که دانشگاه شهید بهشتی در سال ۱۳۷۷، به ایشان، دکترای افتخاری ریاضی را اعطا کرد، بیان نمودند و گفتند که این عبارت، شعار دانشگاه ملی سابق (شهید بهشتی فعلی) بوده است.

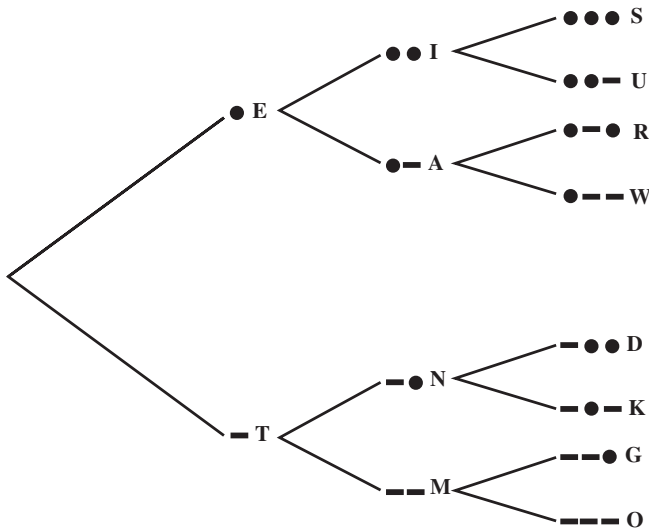
قله شهر خود را دارند. قرار است برای حفظ نظم و ایمنی دانش‌آموزان، همگی با صف حرکت کنند و یکی از مرتبی‌ها پیشاپیش و دیگری، در انتهای صف، به صعود خود ادامه دهند. تعداد ترتیب‌های مختلفی که افراد می‌توانند در صف ظاهر شوند، عددی است که باورنکردنی بزرگ است. نگاه کنید!

۹۳,۳۲۶,۲۱۵,۴۴۳,۹۴۴,۱۵۲,۶۸۱,۶۹۹,۲۳۸,۸۵۶,۲۶۶,۷۰۰,۴۹۰,۷۱۵,۹۶۸,۲۶۴,  
 ۳۸۱,۶۲۱,۴۶۸,۵۹۲,۹۶۳,۸۹۵,۲۱۷,۵۹۹,۹۹۳,۲۲۹,۹۱۵,۶۰۸,۹۴۱,۴۶۳,۹۷۶,۱۵۶,  
 ۵۱۸,۲۸۶,۲۵۳,۶۹۷,۹۲۰,۸۲۷,۲۲۳,۷۵۸,۲۵۱,۱۸۵,۲۱۰,۹۱۶,۸۶۴,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,  
 ۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰

شکل کوتاهتری برای این عدد بنویسید.

## مجله ریاضی

کُد مورس، حدود سال ۱۸۳۸ توسط ساموئل مورس<sup>۱</sup> و برای استفاده در تلگراف، اختراع شد. کُد مورس از الگوهایی که با نقطه و خط فاصله ایجاد شده است استفاده می‌کند تا حروف الفبا را معرفی کند. بخشی از نماد بین‌المللی این کُد، توسط نمودار درختی زیر، نشان داده شده است:



۱- Samuel Morse



این نمودار نشان می‌دهد که اگر فقط از یک نماد استفاده شود یعنی • که معرف E و – که معرف T است، دو الگو ممکن است.

الف) چند الگو را می‌توان با استفاده از ۲ نماد ساخت؟

ب) چند الگو را می‌توان با استفاده از ۳ نماد ساخت؟

پ) به نظر شما، با استفاده از ۴ نماد، چند الگو می‌توان ساخت؟

ت) آیا تمام حروف الفبای انگلیسی را می‌توان با الگویی که دارای ۴ نماد یا

کمتر هستند، نشان داد؟ توضیح دهید.



ساموئل مورس

## منابع

1- Brousseau, G. (1997). **Theory of Didactical Situations in Mathematics**. Edited and translated by N. Balacheff; M.Cooper; R. Sutheland; and V. Warfield. Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers.

2 - De lange, J. (1998). Real Problems with Real world Mathematics, In C. Alsina & et. al (eds). **Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education**, S. A. E. M. THALES.

3 - Eisner, E. (1994). **The Educational Imagination: On the Design and Evaluation of school Programs**. Third Edition. Macmillan College Publishing Company.

4 - Ferrini - Mundy, J. & Lauter, D. (1993). Teaching and Learning Calculus. In P. S. Wilson. [ed.] **Research Ideas for the Classroom: High school Mathematics**: National Council of Teachers of Mathematics Research Interpretation Project. Academic Macmilan Publishing Company.

5 - Hubbard, E. & Robinson, R. D. (1999). **Elementary and Intermediate Algebra**. Houghton Mifflin Company. Boston - Ny.

6 - Hughes - Hallett, D. and et. al. (1994). **Calculus: Harvard Project**. John Wiley & Sons, Inc.

7 - Jacobs, H. R. (1982). **Mathematics: A Human Endeavor**. (2nd Ed.) Freeman & company, Ny.

8 - Larson, R. E. & Hostetler, R. P. (1993). **Precalculus**. D. C. Heath & Company.

9 - National Council of Teachers of Mathematics (1996). Communication in Mathematics k -12 and Beyond: 1996 year Book. Reston, VA. Author.

10 - National Council of Teachers of Mathematics. (2000). **Principles and**

Standards for school. Reston, Va. Author.

11 - Skemp, R. R. (1978). Relational Understanding and Instrumental understanding. **Arithmetic Teacher**. pp. 9-15.

12 - Spence, L. E & et al. (1990). **Applied Mathematics for the Management, Life, and Social Sciences**. Scott, Foresman / Little, Brown Higher Education.

۱۳- انگلیش، لین ووارن، الیزابت، (۱۳۷۷) معرفی مفهوم متغیر از طریق الگویابی. ترجمه سهیلا غلام‌آزاد. **مجله رشد آموزش ریاضی**. شماره ۵۴، زمستان ۱۳۷۷.

۱۴- بابلیان، اسماعیل و همکاران (۱۳۸۰)، **ریاضیات ۲: نظری (رشته‌های علوم تجربی - ریاضی و فیزیک)**. فنی و حرفه‌ای. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۵- بیشاپ، آلن (۱۳۷۶). رابطه بین آموزش ریاضی و فرهنگ. ترجمه زهرا گویا. **مجله رشد آموزش ریاضی**، شماره ۵۰.

۱۶- توماس، جرج و فینی، راس (۱۹۸۸). **حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی: جلد اول**. ترجمه مهدی بهزاد و همکاران. (چاپ اول سال ۱۳۷۰ - ویرایش هفتم). مرکز نشر دانشگاهی.

۱۷- داریوش همدانی، حمیده و همکاران (۱۳۷۹). **مهارت‌های پایه ریاضی**. سال اول دبیرستان. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۸- غلام‌آزاد، سهیلا (۱۳۸۰). دوباره نگرى به برنامه جبر دبیرستانی، **مجله رشد آموزش ریاضی**. شماره ۶۳.

۱۹- گویا، زهرا و همکاران (چاپ ششم، ۱۳۷۹). **ریاضی پایه دوره پیش دانشگاهی رشته علوم انسانی**. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۲۰- گویا، زهرا (ترجمه) (۱۳۷۷). مرکز بین‌المللی مطالعه تیمز - کالج بوستون: سومین مطالعه بین‌المللی ریاضیات و علوم، **مجله رشد آموزش ریاضی**. شماره ۵۲، تابستان ۱۳۷۷.

۲۱- گویا، زهرا (۱۳۷۷)، روایت معلمان. **مجله رشد آموزش ریاضی**. شماره ۵۴، زمستان ۱۳۷۷.

