

## کاربرد مثلث در نقشه برداری

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از فراگیر انتظار می‌رود:

- ۱- رابطه‌ی فیثاغورث را در هر مثلث قائم‌الزاویه بنویسد.
- ۲- روابط مهم در هر مثلث قائم‌الزاویه مانند ارتباط مربع ارتفاع و مربع هر یک از اضلاع را با تصاویر اضلاع مثلث بنویسد.
- ۳- ارتفاع تنه‌ی درختی که از نقطه‌ی معلوم شکسته است را به کمک رابطه‌ی فیثاغورث محاسبه کند.
- ۴- نسبت‌های مثلثاتی: سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت هر زاویه‌ی حاده در مثلث قائم‌الزاویه را بنویسد.
- ۵- در هر مثلث قائم‌الزاویه، یک زاویه‌ی مجهول را با مشخص بودن اندازه‌ی دو ضلع در هر مثلث قائم‌الزاویه محاسبه کند.
- ۶- در هر مثلث قائم‌الزاویه به کمک یک ضلع و زاویه‌ی معلوم، اندازه‌ی ضلع مجهول را محاسبه کند.
- ۷- در هر مثلث قائم‌الزاویه با استفاده از اندازه‌ی دو ضلع معلوم، اندازه‌ی ضلع دیگر را محاسبه کند.
- ۸- اصطلاحات: اختلاف ارتفاع، طول مایل، زاویه‌ی شیب و طول افقی را روی یک مثلث قائم‌الزاویه مشخص کند و روابط بین آن‌ها را بنویسد و شرح دهد.
- ۹- ارتفاع ساختمان، ستون، درخت، ارتفاع ساختمان از روی ارتفاع پنجره را به کمک روابط مثلثاتی محاسبه کند.
- ۱۰- ارتفاع دکل غیر قابل دسترس را با استفاده از روابط مثلثاتی محاسبه کند.
- ۱۱- مساحت زمین‌های شکل‌های مثلث، با دوزنقه، مربع و ... را به کمک

اندازه‌های داده شده محاسبه کند.

۱۲- با مشخص بودن اندازه‌ی اضلاع در هر مثلث دلخواه به کمک روابط مثلثاتی زوایای مثلث را محاسبه کند.

۱۳- اختلاف ارتفاع دو ساختمان روبروی هم را محاسبه کند.

۱۴- با مشخص بودن زاویه‌ی فراز بلندترین نقطه برج با حرکت به طرف برج و پیمودن مسافت، ارتفاع برج را محاسبه کند.

۱۵- رابطه‌های کسینوس‌ها و سینوس‌ها را در هر مثلث غیرمشخص بنویسد و اندازه‌ی اضلاع را روی یک مثلث دلخواه تشخیص دهد.

۱۶- با رسم یک مثلث و با معلوم بودن دو زاویه و یک ضلع از یک مثلث، اندازه‌ی سایر اضلاع و زوایا را محاسبه کند.

۱۷- با رسم یک مثلث و با معلوم بودن دو ضلع و زاویه‌ی مقابل به یکی از این دو ضلع معلوم، اندازه‌ی سایر اضلاع و زوایا را محاسبه کند.

۱۸- با رسم یک مثلث و با معلوم بودن دو ضلع و زاویه‌ی بین در یک مثلث، اندازه‌ی سایر اضلاع و زوایا را محاسبه کند.

۱۹- با رسم یک مثلث و با معلوم بودن سه ضلع آن، زاویه‌ی سایر اضلاع و زوایا را محاسبه کند.

۲۰- اندازه‌ی زاویه‌ی  $\widehat{BAC}$  که نقاط  $B, C$  آن به علت وجود مانع دیده به طور مستقیم امکان ندارد را محاسبه کند.

۲۱- مثال‌های حل شده در این فصل را فراگیرد.



## آیا می‌دانید

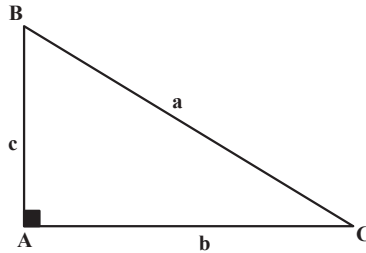
در فرانسه هنوز یک قضیه کسینوس‌ها را به یاد بود  
غیاث‌الدین جمشید کاشانی «تورم کاشی» می‌خوانند.

## ۱-۴- رابطه‌ی فیثاغورث در مثلث قائم الزاویه

در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر :

$$\overline{BC^2} = \overline{AC^2} + \overline{AB^2}$$

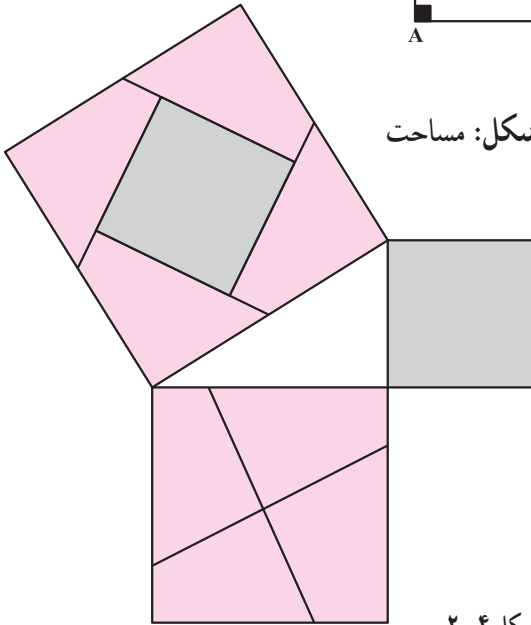
$$a^2 = b^2 + c^2$$



شکل ۱-۴

اثبات رابطه فیثاغورث از طریق شکل: مساحت

مربعی که روی وتر ساخته شده، مساوی است با مجموع مساحت‌های دو مربعی که روی دو ضلع دیگر ساخته شده است (شکل ۲-۴).



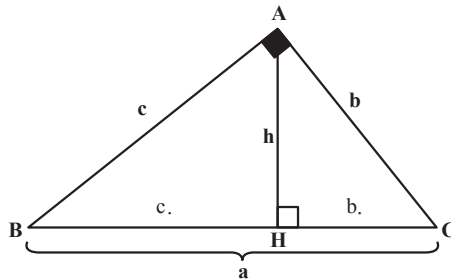
شکل ۲-۴

در هر مثلث قائم الزاویه (مانند شکل ۳-۴) همواره روابط زیر برقرار است :

$$\cdot h^2 = b \cdot c$$

$$\cdot b^2 = ab$$

$$\cdot c^2 = ac$$



شکل ۳-۴

## ۴-۲- مثال‌هایی با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورث

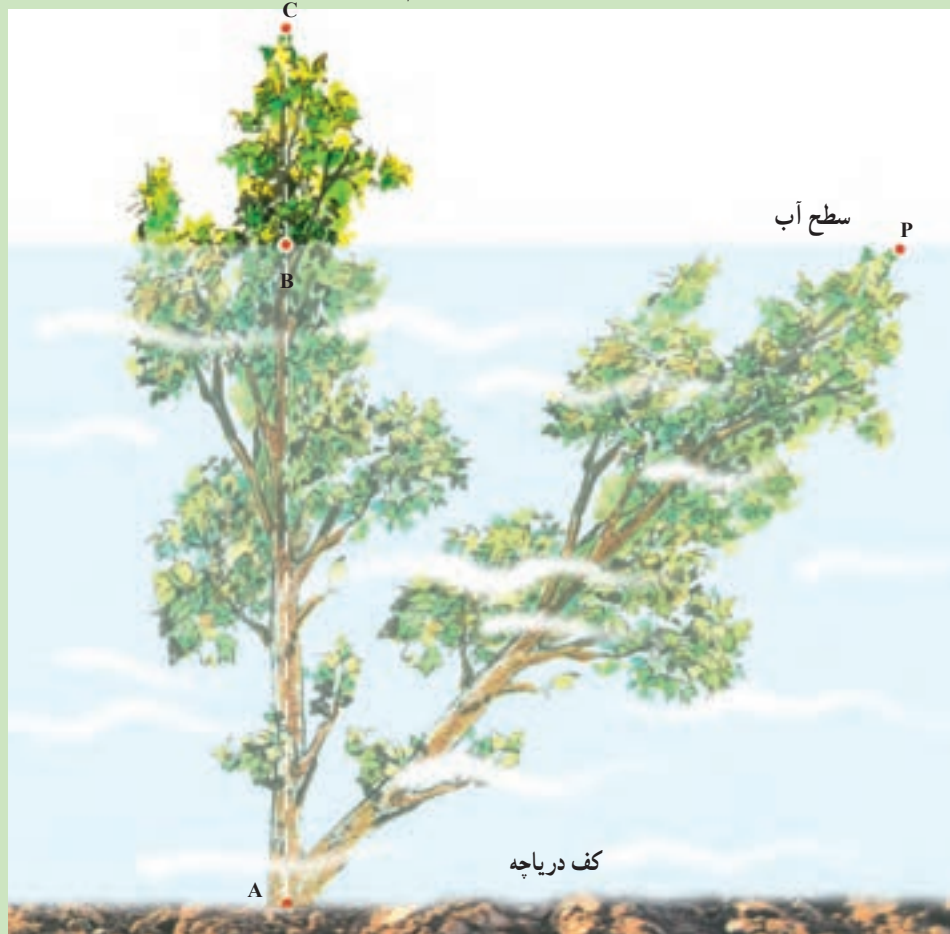
مثال ۴-۱- درختی  $\frac{1}{4}$  متر از آب بیرون است اگر آن را (مطابق شکل ۴-۴ کتاب) خم کنیم

تا به نقطه‌ی P در فاصله‌ی ۲ متری جای نخست برسد در زیر آب قرار می‌گیرد. عمق دریاچه، یعنی طول پاره‌خط AB را پیدا کنید؟

راهکار کلی: در این مسئله ابتدا مطابق شکل و فرض مسئله معلومات و مجهولات را مشخص

می‌کنیم اگر فرض کنیم طول  $AB = x$  باشد طبق فرض طول متر  $\frac{1}{4}$  BC و مقدار طول AP برابر

است با:  $AP \cdot AC \cdot AB \cdot BC \cdot x \cdot \frac{1}{4}$



شکل ۴-۴

و همچنین طول متر ۲ BP می باشد و مثلث ABP یک مثلث قائم الزاویه است یعنی  $BP \perp AB$  زیرا سطح آب یک سطح تراز افقی است و امتداد درخت به صورت قائم است.

رابطه فیثاغورث را در این مثلث قائم الزاویه می نویسیم

$$AP^2 + AB^2 = BP^2 \quad (\text{مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر})$$

اگر به جای اضلاع مثلث مقادیر آن را بر حسب x قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\left(x \cdot \frac{1}{4}\right)^2 + x^2 = 2^2$$

روش حل: رابطه ی  $\left(x \cdot \frac{1}{4}\right)^2 + x^2 = 2^2$  را ساده می کنیم

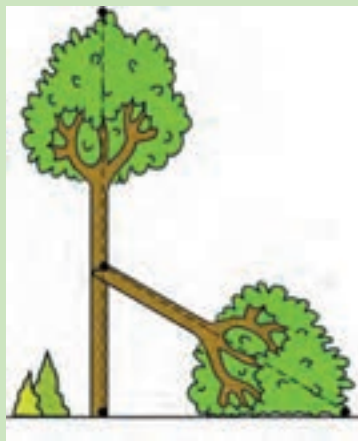
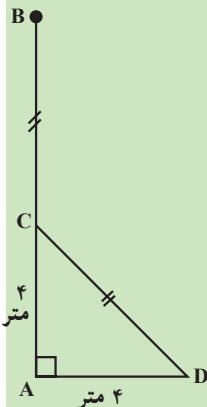
$$x^2 \cdot \frac{1}{4} + x^2 = 4$$

$$\frac{1}{4} \cdot x + 4 \cdot x = 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot x = 3 \cdot x = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3 \quad \text{عمق دریاچه } 75/0 \text{ متر}$$

بحث و بررسی: با توجه به حل مسئله فوق که به شکلی از مثلث قائم الزاویه تشکیل شده است با استفاده از رابطه فیثاغورث بسیاری از مجهولات را می توان محاسبه کرد.

**مثال ۴-۲** تنه ی درخت AB از نقطه ی C که از زمین ۴ متر ارتفاع دارد شکسته شده و رأس آن در نقطه ی D در فاصله ی ۴ متری نقطه ی A به زمین افتاده است. ارتفاع تنه ی درخت (AB) را پیدا کنید (شکل ۴-۵).

**راهکار کلی:** با توجه به شکل مسئله ارتفاع تنه ی درخت برابر است با AB . AC . BC و



طبق فرض مسئله طول متر ۴ AC . و طول متر ۴ AD و  $BC = CD$  می باشد برای به دست آوردن ارتفاع AB کافی است که طول مجهول BC را محاسبه کنیم از طرف دیگر طول BC که با طول CD برابر است از مثلث قائم الزاویه  $\triangle BCD$  رابطه فیثاغورث به دست می آید.

شکل ۴-۵

روش حل: رابطه فیثاغورث را در مثلث  $ACD$  می نویسیم

$$CD^2 + AC^2 = AD^2$$

مقادیر  $AD$  و  $AC$  را که هر کدام ۴ متر است در رابطه فوق قرار می دهیم.

$$CD^2 + 4^2 = 4^2 + 3^2 \quad CD = \sqrt{3^2} = 3 \text{ متر}$$

از طرف دیگر متر  $BC = CD = 3$  می شود

بنابراین  $AB$  برابر است با

$$AB = AC + BC = 4 + 3 = 7 \text{ متر}$$

بحث و بررسی: با توجه به این نوع مسائل که شکلی از مثلث قائم الزاویه هستند و با استفاده از رابطه فیثاغورث پارامترهای مجهول به دست می آید.

### ۳-۴ حل مثلث قائم الزاویه

روابط طولی در مثلث قائم الزاویه

نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه: در مثلث قائم الزاویه (شکل ۴-۶) سینوس هر

زاویه ی حاده عبارت است از نسبت ضلع مقابل آن زاویه بر وتر:

$$\sin B = \frac{b}{a}$$

کسینوس هر زاویه ی حاده عبارت است از نسبت ضلع مجاور آن زاویه بر وتر:

$$\cos B = \frac{c}{a}$$

تانژانت هر زاویه ی حاده عبارت است از نسبت ضلع مقابل آن زاویه بر ضلع مجاور:

$$\tan B = \frac{b}{c}$$

کوتانژانت هر زاویه ی حاده عبارت است از نسبت ضلع مجاور آن زاویه بر ضلع مقابل:

$$\cot B = \frac{c}{b}$$

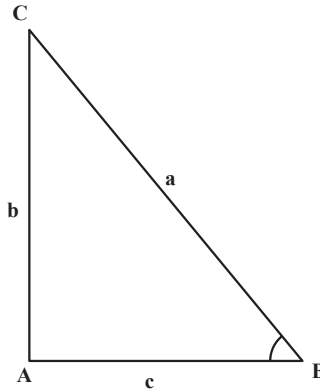
همچنین برای زاویه ی  $C$  نیز می توان نوشت:

$$\sin \hat{C} \cdot \frac{c}{a}$$

$$\cos \hat{C} \cdot \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{tg} \hat{C} \cdot \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{cotg} \hat{C} \cdot \frac{b}{c}$$



شکل ۴-۶

محاسبه‌ی یک زاویه‌ی مجهول از روی دو ضلع معلوم: با در نظر گرفتن این نکته که دو ضلع معلوم نسبت به زاویه‌ی مجهول چه وضعیتی داشته باشد از یکی از روابط زیر استفاده می‌شود:

$$\sin B \cdot \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{b}{a} \quad B = \sin^{-1} \left( \frac{b}{a} \right)$$

$$\cos B \cdot \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{c}{a} \quad B = \cos^{-1} \left( \frac{c}{a} \right)$$

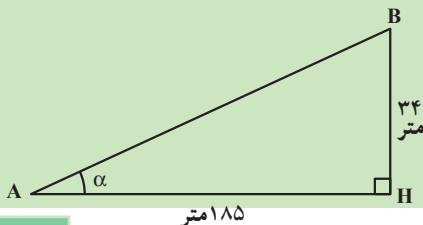
$$\operatorname{tg} B \cdot \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{b}{c} \quad B = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{b}{c} \right)$$

مثال ۳-۴- اختلاف ارتفاع دو نقطه A و B ۳۴ متر است و طول افقی امتداد آن را از طریق

مترکشی ۱۸۵ متر به دست آورده‌ایم شیب و زاویه شیب را محاسبه کنید.

راهکار کلی: شکل زیر را با توجه به صورت مسئله و معلومات داده شده ترسیم می‌کنیم.

چون مثلث ABH یک مثلث قائم‌الزاویه است از فرمول  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$  استفاده می‌کنیم.



$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{BH}{AH} \text{ دو ضلع معلومند}$$

شکل ۴-۷

که  $\alpha$  از رابطه فوق به دست می‌آید که به آن شیب امتداد AB نیز می‌گویند.

روش حل: در رابطه  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BH}{AH}$  به جای BH و AH مقدارشان قرار می‌دهیم نتیجه می‌شود

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{34}{185} = 0.183 \text{ (با تقریب)}$$

$$\alpha = \operatorname{Arc tg}\left(\frac{34}{185}\right) = \operatorname{Arc tg}(0.183) = 1^\circ, 22', 13''$$

بحث و بررسی: با حل این مسئله می‌توانیم علاوه بر شیب  $(\operatorname{tg}\alpha)$ ، زاویه شیب  $(\alpha)$  را که در نقشه برداری مورد نیاز است را به دست آوریم.

محاسبه‌ی یک ضلع مجهول از روی یک ضلع معلوم و زاویه‌ی معلوم: با در نظر گرفتن این نکته که ضلع و زاویه‌ی معلوم نسبت به ضلع مجهول چه وضعیتی داشته باشد از یکی از روابط زیر استفاده می‌شود:

$$b = \text{وتر} \times \sin(\text{زاویه‌ی مقابل}) = a \sin \hat{B}$$

$$b = \text{ضلع مجاور} \times \operatorname{tg}(\text{زاویه‌ی مقابل}) = \operatorname{cot} g \hat{B}$$

$$a = \frac{\text{ضلع}}{\sin(\text{زاویه‌ی مقابل به ضلع})} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

توضیح این که  $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$  لذا با معلوم بودن یکی، دیگری قابل محاسبه خواهد بود.

محاسبه‌ی یک ضلع مجهول از روی دو ضلع معلوم دیگر: در این حالت می‌توان مستقیماً

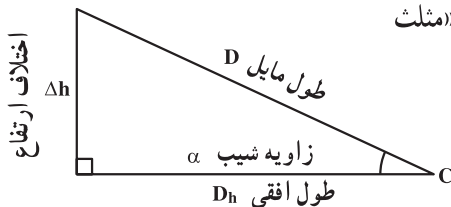
از رابطه‌ی فیثاغورث استفاده نمود:

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ وتر}$$

$$b^2 = a^2 - c^2 \text{ ضلع}$$

نکته: در مساحی مثلث قائم‌الزاویه با عنوان «مثلث

شیب» کاربرد فراوانی دارد.



شکل ۴-۸



با توجه به شکل ۴-۸ و روابط قبل می‌توان دید :

$$\begin{cases} \text{زاویه ی شیب} \times \cos = \text{طول مایل} = \text{طول افقی} \\ D_h = D \times \cos(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{زاویه ی شیب} \times \sin = \text{طول مایل} = \text{اختلاف ارتفاع} \\ \Delta h = D \times \sin(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{زاویه ی شیب} \times \text{tg} = \text{طول افقی} = \text{اختلاف ارتفاع} \\ \Delta h = D_h \times \text{tg}(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\text{اختلاف ارتفاع})^2 = (\text{طول افقی})^2 \times (\text{طول مایل})^2 \\ D^2 = D_h^2 \times \Delta h^2 \end{cases}$$

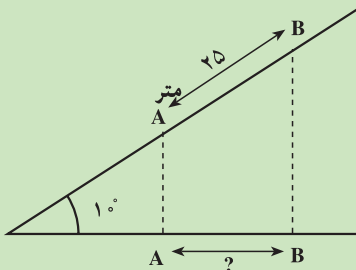
مثال ۴-۴- فاصله ی مایل بین دو نقطه در روی خیابانی با شیب طولی ثابت  $1^\circ$  درجه برابر ۲۵ متر می‌باشد. اختلاف ارتفاع و فاصله ی افقی بین دو نقطه ی فوق چند متر است؟

$$D_h = D \cos \alpha = 25 \cos 1^\circ$$

$$= 24/62 \text{ متر}$$

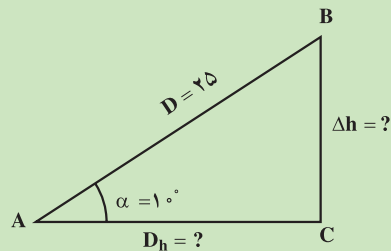
$$\Delta h = D \sin \alpha = 25 \sin 1^\circ$$

$$= 4/34 \text{ متر}$$



(الف)

شکل ۴-۹

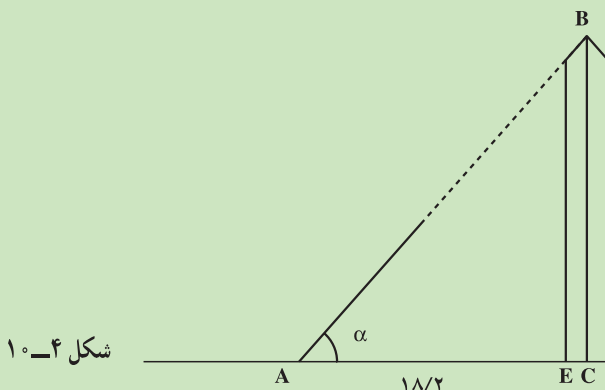


(ب)

#### ۴-۴ کاربرد مثلث قائم الزاویه در مسائل نقشه برداری

روابط مثلثاتی در حل مسائل نقشه برداری کاربرد بسیاری دارد؛ از این رو چند مثال به منظور آشنایی بیشتر آورده می‌شود.

**مثال ۴-۵**— مطلوبست محاسبه ارتفاع ستون سنگی مطابق شکل زیر به طوری که طول سایه آن  $۱۸/۲$  متر و زاویه  $\alpha = ۶۲^\circ, ۷'$  اندازه گیری شده است (تذکر قطر پایه ستون سنگی  $۲$  متر است).



شکل ۴-۱۰

**راهکار کلی:** با استفاده از رابطه تانژانت‌ها در مثلث قائم الزاویه  $\triangle ABC$  می‌توان نوشت:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} \Rightarrow BC = AC \operatorname{tg}\alpha$$

می‌دانیم طول  $AC$  برابر مجموع طول سایه ستون سنگی به اضافه نصف قطر پایه ستون می‌باشد. با داشتن  $\alpha$  و  $AC$  طول  $BC$  محاسبه می‌شود.

**روش حل:** در فرمول  $BC = AC \operatorname{tg}\alpha$  ابتدا مقدار  $AC$  را به دست می‌آوریم

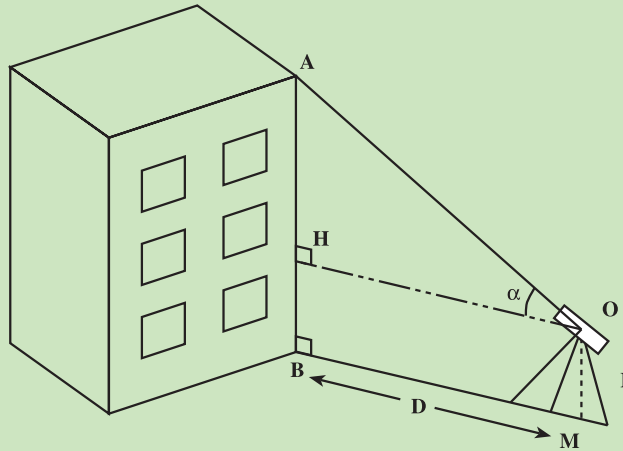
$$AC = AE + EC = ۱۸/۲ + ۱ = ۱۹/۲ \text{ متر} \quad \text{در نتیجه}$$

$$BC = ۱۹/۲ \operatorname{tg}(۶۲^\circ, ۷') = ۳۶/۲۸ \text{ متر (با استفاده از ماشین حساب)}$$

**بحث و بررسی:** فرمول‌های خطوط مثلثاتی از قبیل تانژانت - کتانژانت - سینوس - کسینوس در نقشه برداری کاربرد زیادی دارد که در مساحی فراخواهید گرفت.

**مثال ۴-۶**— برای محاسبه ارتفاع ساختمان دوربین زاویه یاب را مطابق شکل در نقطه  $M$  به فاصله  $۱۵$  متری تا پای ساختمان مستقر کرده و به نقطه بالای ساختمان نشانه روی می‌کنیم زاویه ارتفاعی  $\alpha$  برابر  $۳۵''$ ،  $۳۹'$ ،  $۳۸^\circ$  شده است. اگر ارتفاع زاویه یاب یک متر و پنجاه و چهار سانتی متر

باشد ارتفاع ساختمان (طول AB) را به دست آورید (سطح زمین افقی می باشد).



شکل ۴-۱۱

**راهکار کلی:** می دانیم طبق فرض مسئله طول  $BH = OM = I$  ارتفاع دستگاه معلوم است همچنین طول افقی  $OH = BM = D$  اندازه گیری شده است چون طول  $BM = D$  در سطح افق می باشد مثلث  $\triangle AOH$  قائم الزاویه است یعنی امتداد  $OH$  موازی  $BM$  عمود بر  $AB$  ارتفاع ساختمان است از رابطه مثلثاتی (تانژانت) برای حل این مسئله استفاده می کنیم.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AH}{HO} \Rightarrow AH = HO \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \boxed{AH = D \operatorname{tg} \alpha}$$

(مقادیر معلوم  $AH$  و  $BH$  را در رابطه فوق قرار می دهیم)

$$\boxed{AB = D \operatorname{tg} \alpha + I}$$

نتیجه می شود

**روش حل:** در فرمول  $AB = D \operatorname{tg} \alpha + I$  طبق فرض متر  $D = 15$  و  $\alpha = 38^\circ, 39', 35''$  و

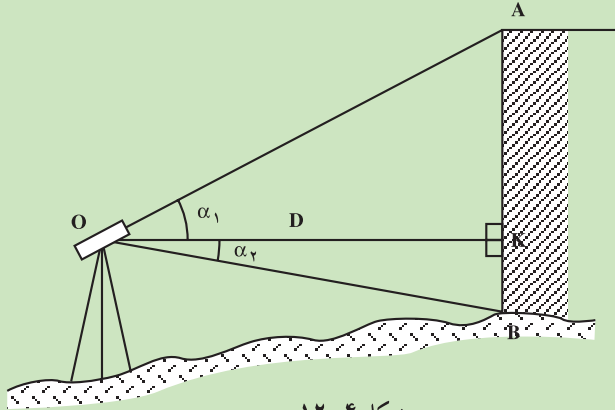
$$I = 1/54 \text{ متر}$$

مقادیر معلوم را جاگذاری می کنیم

$$AB = 15 \operatorname{tg}(38^\circ, 39', 35'') + 1/54 = 11/999 \approx 12 \text{ متر}$$

**بحث و بررسی:** این روش تعیین ارتفاع را که با اندازه گیری زاویه قائم و طول افقی به دست می آید و از روابط مثلثاتی در حل آن استفاده می شود ترازیبی مثلثاتی نیز می گویند و در مواردی که ترازیبی هندسی (مستقیم با نیوو و شاخص) امکان پذیر نباشد به کار می رود.

مثال ۴-۷- برای اندازه‌گیری ارتفاع ساختمان دورین تتودولیت را در فاصله ۲۰ متری ساختمان در نقطه M مستقر می‌کنیم و به بالاترین و پایین‌ترین نقطه ساختمان نشانه‌روی کرده و طبق شکل زیر زاویه‌های  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  را اندازه‌گیری شده و به ترتیب برابرند با  $\alpha_1 = 47^\circ, 43', 35''$  و  $\alpha_2 = 21^\circ, 48', 5''$  مطلوبست محاسبه ارتفاع ساختمان (سطح زمین افقی نیست).



شکل ۴-۱۲

راهکار کلی: می‌دانیم طبق شکل مسئله ارتفاع ساختمان AB از دو قسمت AK و BK تشکیل شده ( $AB = AK + BK$ ) که هر کدام از آن‌ها را می‌توان از مثلث‌های قائم‌الزاویه  $\triangle OAK$  و  $\triangle OBK$  به‌دست آورد.

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{AK}{OK} = \frac{AK}{D} \Rightarrow \boxed{AK = D \operatorname{tg} \alpha_1} \quad \text{در مثلث } \triangle OAK \text{ داریم رابطه ۱}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{BK}{OK} = \frac{BK}{D} \Rightarrow \boxed{BK = D \operatorname{tg} \alpha_2} \quad \text{و در مثلث } \triangle OBK \text{ داریم رابطه ۲}$$

دو طرف رابطه‌های ۱ و ۲ را با هم جمع می‌کنیم

$$AK + BK = D \operatorname{tg} \alpha_1 + D \operatorname{tg} \alpha_2$$

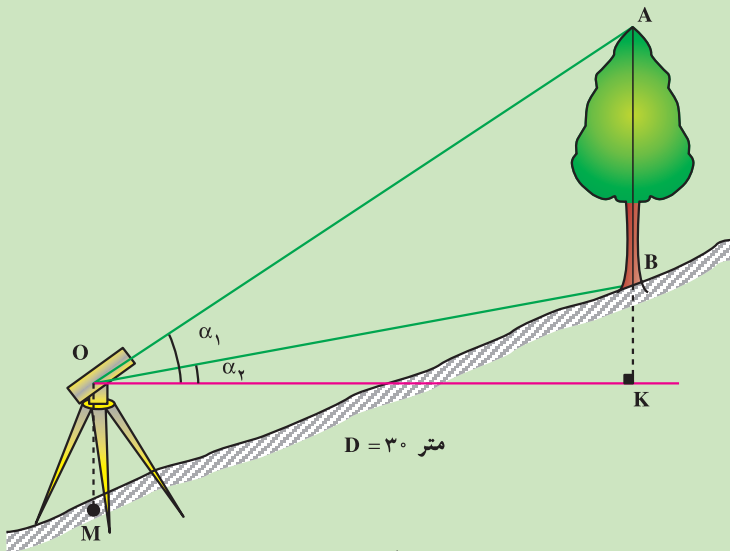
$$\boxed{AB = D(\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2)} \quad \text{رابطه ۳}$$

روش حل مسئله: طبق فرض مسئله مقدار فاصله افقی D برابر است با ۲۰ متر و زوایای  $\alpha_1 = 47^\circ, 43', 35''$  و  $\alpha_2 = 21^\circ, 48', 15''$  بنابراین برای به‌دست آوردن ارتفاع AB پارامترهای معلوم را در رابطه ۳ قرار می‌دهیم.

$$AB = D(\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2) = 20 \cdot [\operatorname{tg}(47^\circ, 43', 35'') + \operatorname{tg}(21^\circ, 48', 5'')] = 30 \text{ متر}$$

بحث و بررسی: این مسئله یک نوع ترازایی مثلثاتی است که با اندازه‌گیری طول افقی و زاویه‌های شیب توسط زاویه‌یاب محاسبه می‌گردد.

مثال ۴-۸- برای اندازه‌گیری ارتفاع درخت زاویه‌یاب را در فاصله (افقی) ۳۰ متری آن قرار می‌دهیم و طبق شکل زوایای  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  را اندازه‌گیری کرده و مقدار آن‌ها  $\alpha_1 = 46^\circ, 50', 51''$  و  $\alpha_2 = 13^\circ, 8', 3''$  شده است مطلوب است محاسبه ارتفاع درخت (AB) (سطح زمین افقی نیست).



شکل ۴-۱۳

راهکار کلی: با توجه به شکل مسئله مقدار ارتفاع AB برابر است با رابطه ۱

$AB = AK - BK$  مقادیر AK و BK را می‌توانیم از مثلث‌های قائم‌الزاویه  $\triangle OAK$  و  $\triangle OBK$  به صورت

زیر به دست آوریم

$$\text{رابطه ۲} \quad \triangle OAK \text{ در مثلث } \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{AK}{OK} = \frac{AK}{D} \Rightarrow \boxed{AK = D \operatorname{tg} \alpha_1}$$

$$\text{رابطه ۳} \quad \triangle OBK \text{ در مثلث } \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{BK}{OK} = \frac{BK}{D} \Rightarrow \boxed{BK = D \operatorname{tg} \alpha_2}$$

رابطه‌های ۲ و ۳ را در رابطه ۱ قرار می‌دهیم

$$AB = AK - BK = D \operatorname{tg} \alpha_1 - D \operatorname{tg} \alpha_2 = D(\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2)$$

$$AB = D(\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2)$$

روش حل: با توجه به فرض مسئله طول افقی متر  $D = 30$  و زاویه‌های  $\alpha_1 = 46^\circ, 50', 51''$  و  $\alpha_2 = 13^\circ, 8', 3''$  می‌باشد اگر مقادیر معلوم فوق را در فرمول قرار دهیم ارتفاع به دست می‌آید

$$AB = D(\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2) = 30 \left[ \operatorname{tg}(46^\circ, 50', 51'') - \operatorname{tg}(13^\circ, 8', 3'') \right] =$$

$$24/999 \cong 25 \text{ متر} \Rightarrow \boxed{AB = 25 \text{ متر}}$$

بحث و بررسی: مسئله فوق نیز یک نوع ترازایی مثلثاتی است که دوربین در سطح افق قرار ندارد و با قرائت زاویه شیب و اندازه‌گیری طول افقی ارتفاع محاسبه می‌شود.

مثال ۴-۹- مطابق شکل زیر ارتفاع پنجره ۱/۵ متر می‌باشد تنها با استقرار دوربین در

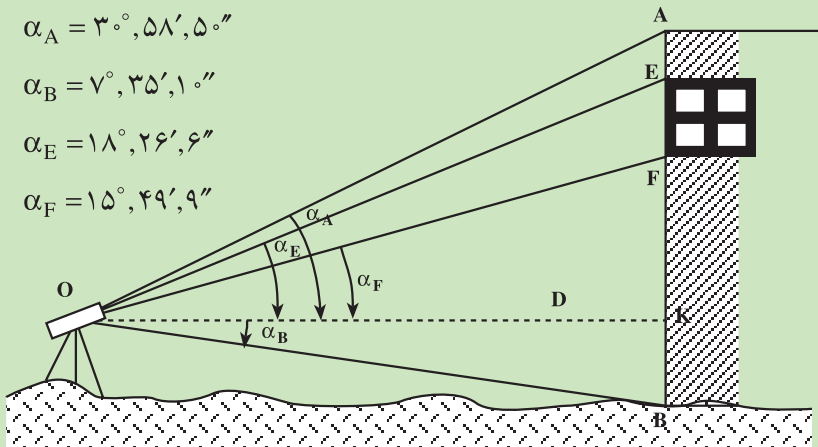
فاصله‌ای از ساختمان و قرائت زوایای ارتفاعی که به ترتیب برابر است با:

$$\alpha_A = 3^\circ, 58', 50''$$

$$\alpha_B = 7^\circ, 35', 10''$$

$$\alpha_E = 18^\circ, 26', 6''$$

$$\alpha_F = 15^\circ, 49', 9''$$



شکل ۴-۱۴

ارتفاع ساختمان را به دست آورید.

راهکار کلی: با توجه به شکل مسئله ارتفاع ساختمان AB برابر است با:

$$AB = AK + KB \quad (\text{و فاصله افقی OK برابر مقدار معلوم D می‌باشد})$$

$$EF = EK - FK$$

مقادیر AK و BK از مثلث‌های قائم‌الزاویه  $\triangle AOK$  و  $\triangle BOK$  به صورت زیر محاسبه می‌گردند:

$$\text{رابطه ۱} \quad \operatorname{tg}\alpha_A = \frac{AK}{OK} = \frac{AK}{D} \Rightarrow \boxed{AK = D \operatorname{tg}\alpha_A}$$

$$\text{رابطه ۲} \quad \text{BOK} \triangle \quad \text{در مثلث } \text{tg}\alpha_B = \frac{BK}{OK} = \frac{BK}{D} \Rightarrow \boxed{BK = D \text{tg}\alpha_B}$$

طرفین رابطه‌های ۱ و ۲ را باهم جمع می‌کنیم

$$\text{رابطه ۳} \quad \boxed{AB = D(\text{tg}\alpha_A + \text{tg}\alpha_B)}$$

و هم چنین مقادیر EK و FK را از مثلث‌های قائم‌الزاویه EOK و FOK به دست می‌آوریم.

$$\text{رابطه ۴} \quad \text{EOK} \triangle \quad \text{در مثلث } \text{tg}\alpha_E = \frac{EK}{OK} = \frac{EK}{D} \Rightarrow \boxed{EK = D \text{tg}\alpha_E}$$

$$\text{رابطه ۵} \quad \text{FOK} \triangle \quad \text{در مثلث } \text{tg}\alpha_F = \frac{FK}{OK} = \frac{FK}{D} \Rightarrow \boxed{FK = D \text{tg}\alpha_F}$$

طرفین دو رابطه ۴ و ۵ را از هم کم می‌کنیم نتیجه می‌شود

$$EK - FK = D \text{tg}\alpha_E - D \text{tg}\alpha_F = D(\text{tg}\alpha_E - \text{tg}\alpha_F)$$

$$\text{رابطه ۶} \quad EF = D(\text{tg}\alpha_E - \text{tg}\alpha_F) \quad \text{نتیجه می‌شود}$$

حال اگر دو رابطه ۳ و ۶ را برهم تقسیم کنیم خواهیم داشت

$$\frac{AB}{EF} = \frac{D(\text{tg}\alpha_A + \text{tg}\alpha_B)}{D(\text{tg}\alpha_E - \text{tg}\alpha_F)} = \frac{\text{tg}\alpha_A + \text{tg}\alpha_B}{\text{tg}\alpha_E - \text{tg}\alpha_F}$$

$$AB = EF \left( \frac{\text{tg}\alpha_A + \text{tg}\alpha_B}{\text{tg}\alpha_E - \text{tg}\alpha_F} \right) \quad \text{بنابراین}$$

با معلوم بودن زوایا و ارتفاع پنجره EF ارتفاع ساختمان (AB) به دست می‌آید.

$$\text{روش حل: در فرمول } AB = EF \left( \frac{\text{tg}\alpha_A + \text{tg}\alpha_B}{\text{tg}\alpha_E - \text{tg}\alpha_F} \right) \text{ مقادیر معلوم طبق فرض مسئله را قرار}$$

می‌دهیم نتیجه می‌شود

$$AB = 1/5 \left[ \frac{\text{tg}(3^\circ, 58', 50'') - \text{tg}(7^\circ, 35', 10'')}{\text{tg}(18^\circ, 26', 6'') - \text{tg}(15^\circ, 49', 9'')} \right] = 18/01 \text{ متر}$$

$$\boxed{AB = 18/01} \quad \text{متر}$$

بحث و بررسی: با استفاده از روابط مثلثاتی و قرائت زاویه‌های ارتفاعی و داشتن طول یک

پارامتر از ساختمان می‌توان ارتفاع آن را به دست آورد.

#### ۴-۵- کاربرد مثلث قائم الزاویه (استفاده از مثلث متساوی الساقین)

می‌دانیم اگر ارتفاع وارد بر قاعده مثلث متساوی الساقین را رسم کنیم، آن را به دو مثلث قائم الزاویه تقسیم کرده‌ایم.

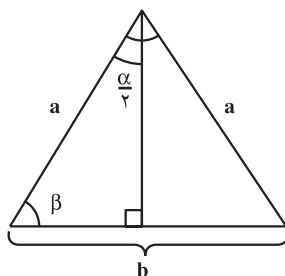
پس طبق شکل خواهیم داشت :

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{b}{2}}{a} = \frac{b}{2a}$$

$$۱) \alpha = 2 \sin^{-1} \left( \frac{b}{2a} \right)$$

$$۲) a = \frac{b}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$۳) b = 2a \sin \frac{\alpha}{2}$$



شکل ۴-۱۵

نکته: چون دو زاویه  $\frac{\alpha}{2}$  و  $\beta$  متمم یکدیگرند، بنابراین می‌توانیم بگوییم :

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \cos \beta$$

حال می‌توانیم فرمول‌های بالا را با زاویه  $\beta$  محاسبه نماییم. (به عهده‌ی هنرجو)

#### ۴-۶- روابط کلی در هر مثلث

برای حل مثلث غیرمستقیم دو فرمول مشهور موجود است: الف) رابطه‌ی کسینوس‌ها، ب) رابطه‌ی سینوس‌ها.

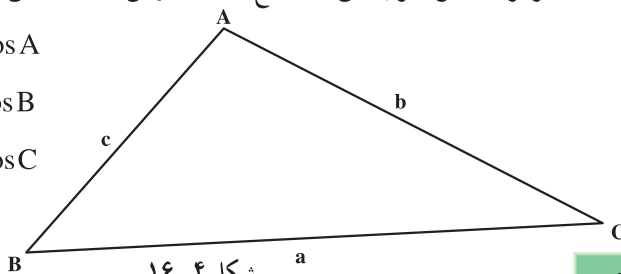
قضیه: مربع اندازه‌ی هر ضلع مثلث مساوی است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر

منهای دو برابر حاصل ضرب این دو ضلع در کسینوس زاویه‌ی بین همین دو ضلع :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



شکل ۴-۱۶



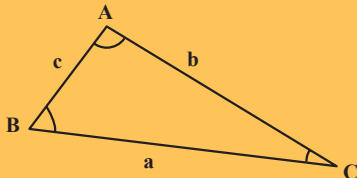
تذکر: برحسب این که C زاویه ی حاده یا منفرجه باشد علامت آن تغییر می کند.  
 قضیه: در هر مثلث نسبت طول هر ضلع بر سینوس زاویه ی مقابل به همان ضلع مساوی دو برابر شعاع دایره ی محیطی است:

$$\frac{a}{\sin A} \cdot \frac{b}{\sin B} \cdot \frac{c}{\sin C} \text{ (رابطه ی سینوس ها)}$$

### آیا می دانید

ابوریحان بیرونی کتاب مقالید علم الهیة که در حقیقت موضوع اصلی آن علم مثلثات کروی است و نخستین کتاب مستقل از علم نجوم درباره مثلثات است به تحریر در آورده به طوری که مثلثات کروی کلید علم هیأت است

رابطه سینوس ها  $\frac{a}{\sin A} \cdot \frac{b}{\sin B} \cdot \frac{c}{\sin C}$  یکی از فرمول های مهم حل مثلث



می باشد که بیرونی آن را در فصل هشتم از مقاله ی سوم کتاب قانون مسعودی اثبات کرده است.

### ۷-۴ حالات کلاسیک حل مثلث

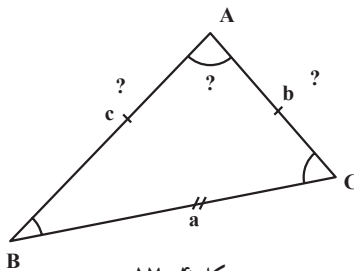
الف) از یک مثلث دو زاویه و یک ضلع معلوم است. برای به دست آوردن بقیه ی پارامترها از این روابط استفاده می کنیم:

A, ۱۸۰, (B, C)

معلوم a, b, c

$$b \cdot \frac{a \sin B}{\sin A} \quad c \cdot \frac{a \sin C}{\sin A}$$

مجهول A, b, c



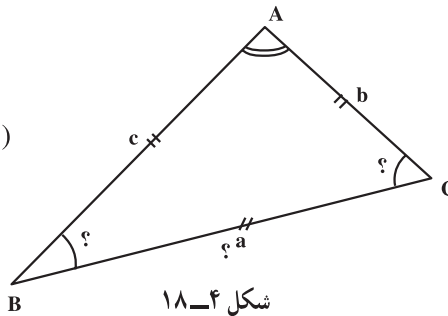
شکل ۷-۴

ب) دو ضلع و زاویه ی مقابل به یکی از دو ضلع معلوم است. برای به دست آوردن زوایا و ضلع دیگر مثلث از این روابط استفاده می کنیم:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

$$C = 180^\circ - (A + B)$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

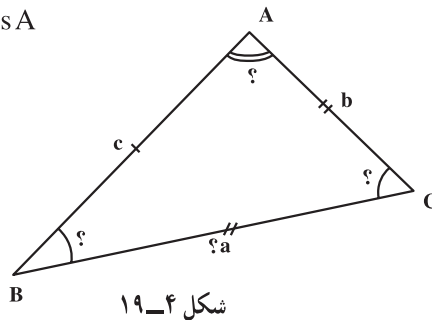


ج) دو ضلع و زاویه‌ی بین از مثلثی معلوم است. برای به‌دست آوردن زوایا و ضلع دیگر مثلث از رابطه‌ی کسینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

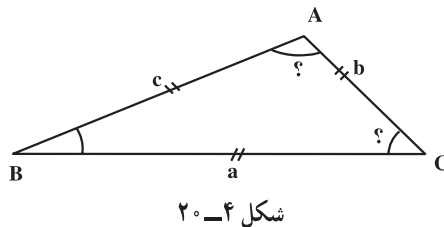
$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B})$$

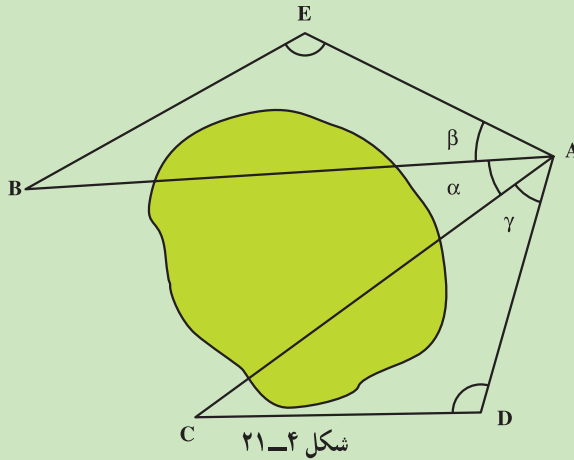


د) سه ضلع از مثلثی معلوم است. برای به‌دست آوردن زوایای مثلث از رابطه‌ی کسینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B})$$



مثال ۴-۱۰- اندازه‌گیری زاویه‌ی  $\hat{BAC} = \alpha$  که نقاط B و C به علت وجود مانع دید دهکده) به‌طور مستقیم امکان ندارد (شکل ۴-۲۱).



حل: نقاط D و E را خارج از محل تعیین می‌کنیم و زوایای  $\hat{D}$ ،  $\hat{E}$  و  $\hat{A}$  را اندازه‌گیری کرده اضلاع AE، EB، AD و DC را نیز اندازه‌گیری می‌کنیم.  
 از حل مثلث ADC زاویه  $\gamma$  و از حل مثلث BEA زاویه  $\beta$ ، سپس با داشتن زاویه A زاویه  $\hat{\alpha}$  به دست می‌آید:

$$\hat{\alpha} = \hat{A} - \hat{\beta} - \hat{\gamma}$$

## آیا می‌دانید

ابو عبدالله محمد بن موسی خوارزمی ریاضیدان و منجم و مورخ و جغرافیدان ایرانی نیمه‌ی دوم سده‌ی دوم و نیمه‌ی اول سده‌ی سوم یکی از زبردست‌ترین دانشمندان مسلمان و بزرگ‌ترین عالم عصر خود بود.

وی در ریاضیات و مخصوصاً نجوم ایران پیش از اسلام و تعالیم مکتب جندی شاپور که در زمان وی هنوز از خاطره‌ها محو نشده بود دست داشت و آن‌ها را با ریاضیات هندی در آمیخت و نخستین کتاب‌های حساب و جبر و نجوم (زیج) را به زبان عربی نوشت و آثار او در بسط و پیشرفت ریاضیات چه در کشورهای اسلامی و چه بعداً در کشورهای اروپایی تأثیر فراوان داشت.

کتاب جبر و مقابله او قدیمی‌ترین کتابی است که در این باره نوشته شده است. این کتاب قرن‌ها مرجع و مأخذ اروپائیان تا سده‌ی شانزدهم میلادی مبنای مطالعات

علمی آنان در این رشته بود.

کتاب حساب خوارزمی نخستین کتابی است که در دوره اسلامی راجع به فن حساب هندی تألیف گردیده است.

خوارزمی در حدود سال ۱۸۰ هـ. ق یا پیش از آن تاریخ در خوارزم متولد شده و در دهه‌ی آخر سده‌ی دوم هجری به حوزه‌ی علمی بغداد رفته و بعد از سال ۲۳۲ درگذشته است و در زمان خلافت مأمون یعنی در بین سال‌های ۱۹۸ تا ۲۱۸ هجری دانشمندی مورد توجه خلیفه وقت بوده.

– واژه‌ی «الگوریتیم» که به معنای یافتن روش کلی حل مسأله است از نام «الخوارزمی» گرفته شده است.

– واژه‌ی «جبر» که امروزه در تمامی جهان و به همین صورت به شاخه‌ای از ریاضیات اطلاق می‌شود از کتاب «الجبر و المقابله» خوارزمی برداشته شده است.

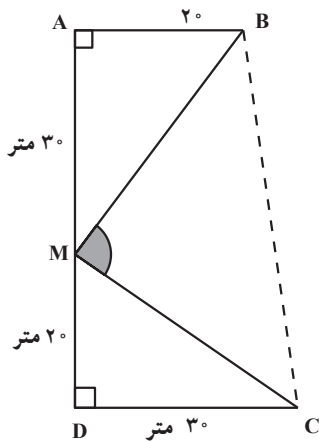
– عددنویسی اگر چه در هند کشف شد، اما به وسیله‌ی ایرانیان تکامل یافت و از طریق ترجمه‌ی کتاب‌های ریاضی دانان ایرانی به اروپا رفت.

– اصطلاحات مثلثات مثل «سینوس و کسینوس و تانژانت» دقیقاً ترجمه‌ی واژه‌هایی است که در نوشته‌های ریاضی دانان ایرانی و به خصوص کتاب «کشف القناع» خواجه نصیرالدین طوسی به کار رفته است. در واقع در هیچ زمینه‌ای از ریاضیات محاسبه‌ای مثل حساب و جبر و مثلثات نمی‌توان قانون یا دستوری را یافت که به وسیله‌ی ریاضی دانان ایرانی کشف نشده باشد.

## خودآزمایی

۱- زمینی است به شکل مثلث متساوی الاضلاع که هر ضلع آن ۵۸ متر است. با استفاده از قضیه ی فیثاغورث ابتدا اندازه ی ارتفاع مثلث، سپس مساحت آن را حساب کنید.

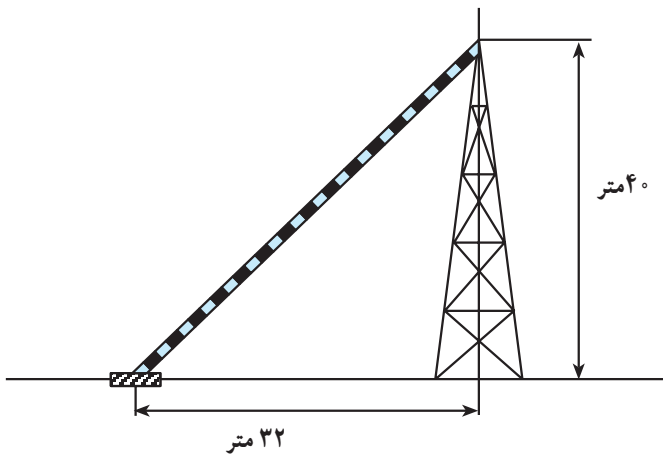
۲- در شکل روبه‌رو زمینی به شکل ذوزنقه که اندازه ی اضلاع  $AB$ ،  $MA$ ،  $MD$  و  $DC$  داده



شده است و زوایای  $\hat{A}$ ،  $\hat{D}$ ،  $90^\circ$  است.  
 نخست، ثابت کنید زاویه ی BMC # برابر  $90^\circ$  است.  
 سپس، اندازه ی طول BC را حساب کنید.

شکل ۴-۲۲

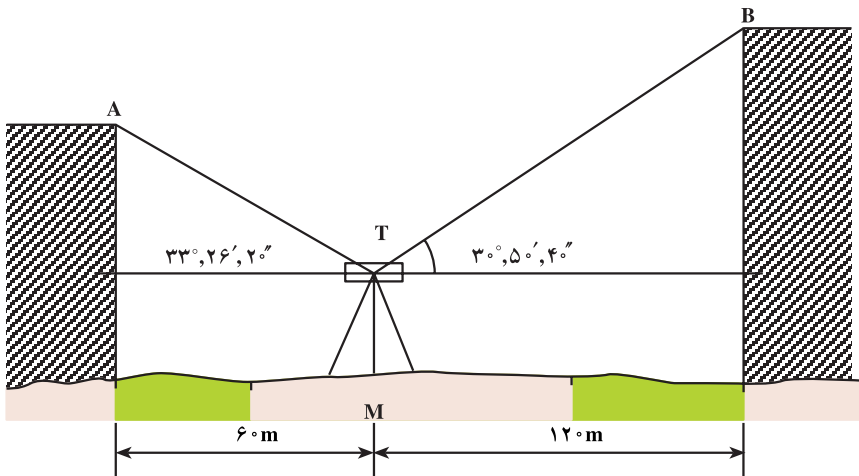
۳- مساحت باغچه‌ای مربع شکل ۱۴۴ مترمربع است. طول قطر باغچه چه قدر است؟  
 ۴- با استفاده از رابطه ی فیثاغورث برای ترسیم پاره خطی به طول  $\sqrt{3}$  چگونه عمل می‌کنیم؟  
 ۵- یک آنتن تلویزیونی از ارتفاع  $40^\circ$  متری با یک سیم به شکل قائم نگه داشته شده است. این سیم به فاصله ی ۳۲ متر از پایه ی آنتن به زمین وصل شده است (شکل ۴-۲۳) طول این سیم چند متر است؟



شکل ۴-۲۳

۶- اندازه‌های سه ضلع مثلثی ۸، ۱۰ و ۱۲ متر است. زوایای مثلث را حساب کنید.

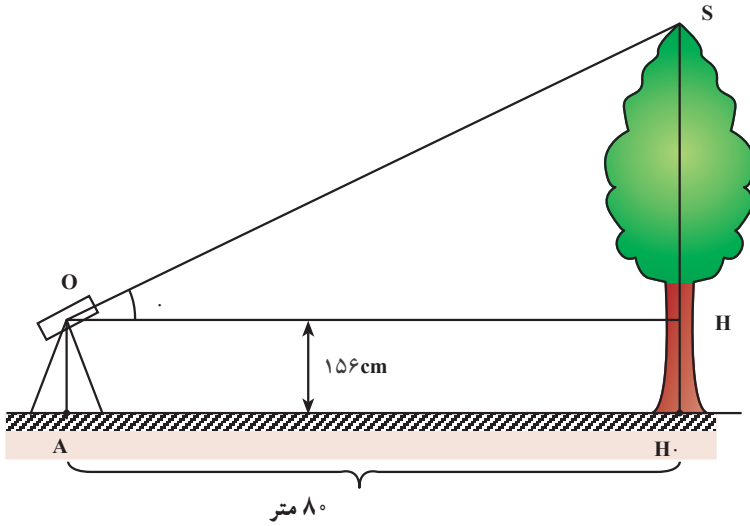
۷- دو ساختمان بلند روبه‌روی هم در کنار جاده‌ای مطابق شکل ۴-۲۴ قرار دارند. می‌خواهیم اختلاف ارتفاع آن‌ها را به دست آوریم. بدین منظور، یک دستگاه دوربین زاویه‌یاب را در نقطه‌ی M (مطابق شکل) مستقر می‌کنیم (به گونه‌ای که فاصله‌ی افقی دوربین از ساختمان A ۶۰ متر و از ساختمان B ۱۲۰ متر باشد) و به لبه‌ی پشت‌بام ساختمان‌ها نشانه روی کرده زوایای شیب را اندازه‌گیری می‌کنیم زاویه‌ی شیب ساختمان A  $33^{\circ}, 26', 20''$  و ساختمان B  $30^{\circ}, 50', 40''$  است:



شکل ۴-۲۴

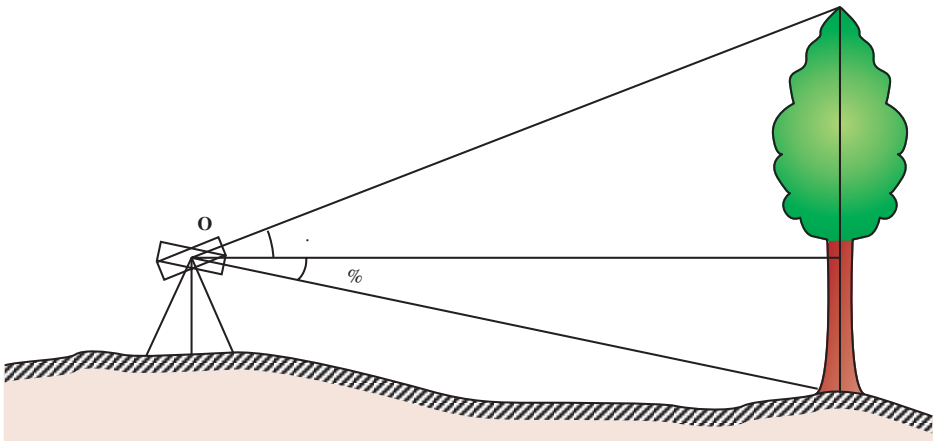
## مسائل

مسئله‌ی ۱- برای به دست آوردن ارتفاع یک درخت دستگاه زاویه‌یابی را مطابق شکل ۴-۲۵ به فاصله‌ی ۸۰ متر از درخت مستقر کرده زاویه‌ی شیب آن یعنی زاویه‌ی  $\alpha$  را اندازه‌گیری می‌کنیم که  $36^{\circ}, 24'$  می‌شود. اگر ارتفاع دستگاه زاویه‌یاب ۱۵۶ سانتی متر باشد ارتفاع درخت را محاسبه کنید (حالت خاص سطح زمین را افقی فرض می‌کنیم).



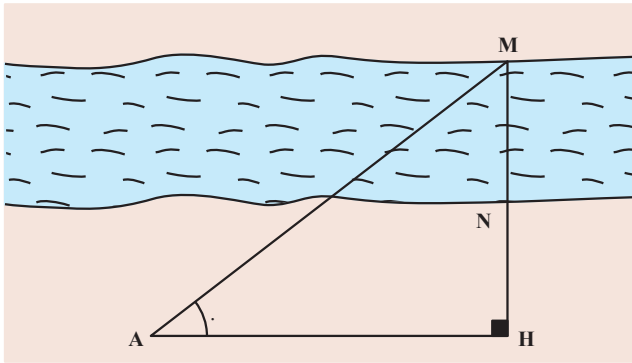
شکل ۲۵-۴

مسأله‌ی ۲- اگر براساس مسأله‌ی ۱، زمین افقی نباشد (مطابق شکل ۲۶-۴) می‌خواهیم با اطلاعات زیر ارتفاع درخت را محاسبه کنیم. زوایای شیب  $15^\circ$ ،  $23^\circ$  و  $1^\circ$ ،  $12^\circ$  می‌باشد. اگر فاصله‌ی افقی دستگاه تا درخت  $183$  متر باشد ارتفاع درخت را به دست آورید.



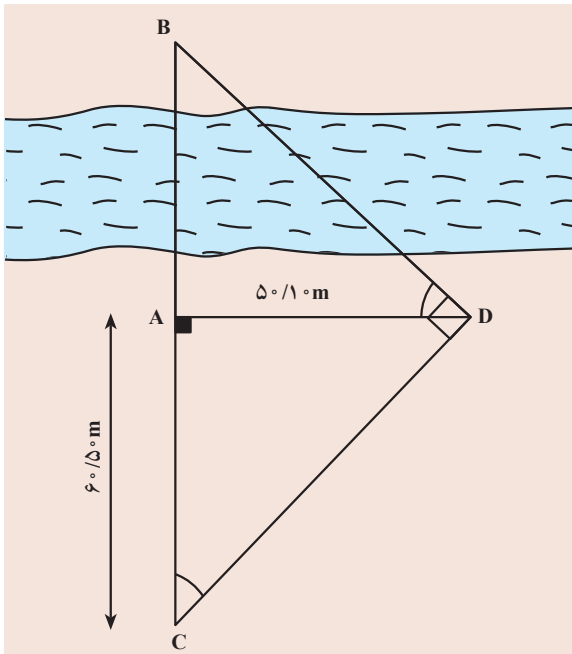
شکل ۲۶-۴

مسأله‌ی ۳— عرض یک رودخانه‌ی عبورناپذیر برای احداث پلی مورد نیاز است. برای این کار دستگاه زاویه‌یابی را در نقطه‌ی دل‌خواه A مستقر کرده مطابق شکل ۴-۲۷ زاویه‌ی افقی را اندازه‌گیری می‌کنیم که نتیجه ۲۵°, ۴۳° شده است. اگر طول‌های AH و NH که بر هم عمودند به ترتیب ۵° و ۲° متر باشد عرض رودخانه یعنی طول MN را به دست آورید.



شکل ۴-۲۷

مسأله‌ی ۴— در شکل ۴-۲۸ امتداد CD عمود بر ضلع BD و امتداد AD عمود بر AB است.



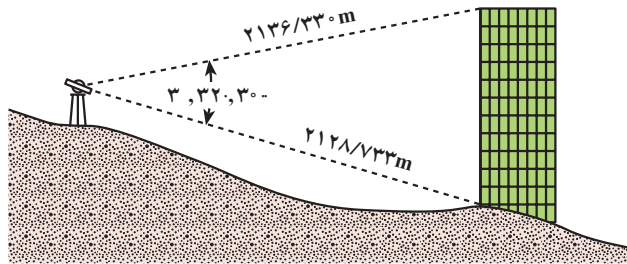
اگر طول  $AD = 50/10\text{m}$  است و طول  $AC = 60/50\text{m}$  باشد مطلوب است محاسبه‌ی طول AB.

شکل ۴-۲۸



مسئله ۵- زمینی به شکل مثلث روی نقشه ترسیم شده است و اندازه‌های دو ضلع ۱۵ و ۲۰ سانتی‌متر و اندازه‌ی زاویه‌ی بین این دو ضلع ۱۲۰ درجه است. ضلع سوم را به دست آورید.

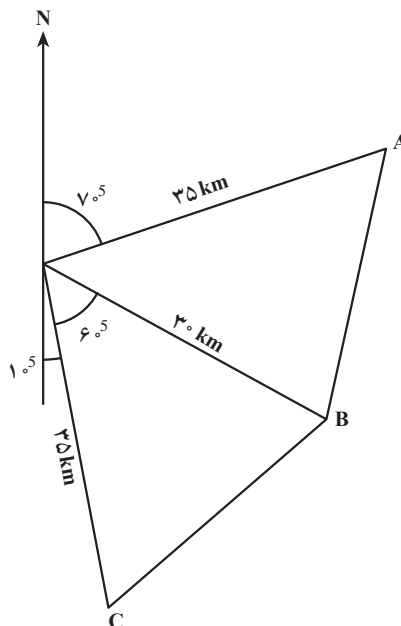
مسئله ۶- مطلوب است محاسبه‌ی ارتفاع برج مطابق شکل ۴-۲۹.



شکل ۴-۲۹

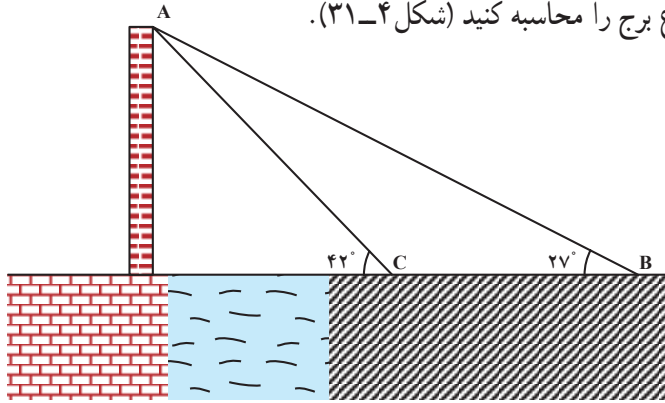
مسئله ۷- براساس اطلاعاتی که در شکل ۴-۳۰ داده شده مطلوب است محاسبه‌ی اضلاع

AB و BC :



شکل ۴-۳۰

مسأله ۸- از نقطه ی B زاویه ی فراز سربرجی (زاویه ی فراز بلندترین نقطه ی برج) ۲۷ است. با حرکت کردن به طرف برج و پیمودن مسافت ۱۹/۶۳ متر زاویه ی فراز همان نقطه از برج ۴۲ است ارتفاع برج را محاسبه کنید (شکل ۴-۳۱).

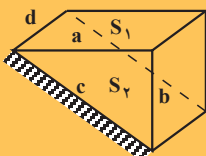


شکل ۴-۳۱

## کار گروهی

مانند فصل اول و دوم، با نظارت سرگروه، کار آموزش با زبان خود را تکرار کنید و با طرح سؤال میزان یادگیری اعضای گروه را ارزیابی کنید.

**نکته:** خرید و فروش زمین در سطح شیبدار کوهستانی: از آنجایی که در اندازه گیری ها، فواصل افقی و سطوح مستوی مد نظر قرار می گیرد، لذا زمین هایی که در دامنه ی کوه ها و تپه ها برای ویلاسازی خرید و فروش می شود و چنانچه که به بحث ظریف نقشه برداری آن توجهی نشود، باعث خسارت های مالی فراوان برای خریدار می شود؛ چرا که خریدار در واقع باید مساحت زمین مورد نظر در سطح شیبدار را به صفحه ی افقی تصویر کرده و مساحت سطح مستوی آن را پرداخت نماید. طبق شکل زیر  $a^2 \cdot c^2 \cdot b^2$  می باشد در صورتی که توجه به امر فوق نشود باعث می شود که به جای پرداخت برای  $S_1 \cdot ad$  مقدار بیشتری یعنی برای  $S_2 \cdot cd$  پرداخت می شود.



به عنوان مثال اگر قسمت زمینی به مساحت یک هکتار که در یک منطقه شیبدار با شیب ۲۰٪ قرار گرفته باشد حدود ۵۰۰ میلیون به مبلغ ۴۹۰ میلیون تومان کاهش پیدا خواهد کرد.