فصل دوم | بُردار

همان‌طور که در ابتدای کتاب راهنمای معلّم نیز اشاره شد بهتر است در رشته الکتروتکنیک تدریس کتاب مدارهای الکتریکی در شروع سال تحصیلی (بعد از آموزش فصل مقدماتی) با این فصل آغاز گردد و پس از اتمام فصل هفتم کتاب از ابتدای فصل اوّل ادامه تدریس کتاب درسی پی گرفته شود.

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل از هنرجو انتظار می رود:

۱ـ بردار را تعریف کند و هم‌سنگ یک بردار را به‌دست آورد.

۲ـ جمع و تفاضل بردارها را به روش هندسی معین کند.

۳ـ برایند چندین بردار را به روش تحلیلی محاسبه کند.

۴ـ ضرب داخلی دو بردار را تعریف کرده و اندازه ضرب داخلی آنها را معین کند.

۵ـ مفهوم توان الکتریکی را شرح دهد.

۶ـ توان ظاهری، حقیقی، غیر مؤثر و ضریب توان را تعریف کند.

۷ـ توان ظاهری، حقیقی، غیر حقیقی و ضریب توان را از معادلات زمانی ولتاژ و جریان به دست آورد.

۸ ـ مثلث توان ها را رسم کند و از روی آن ضریب توان کل، توان اکتیو و راکتیو کل شبکه را تعیین کند.

۱ـ۲ـ مقدمه

همکاران گرامی، یکی از مباحث بسیار مهم که در این فصل مطرح می‌گردد و در صنعت برق کاربرد وسیعی دارد بحث توان‌ها است برای همین منظور کاربرد توان راکتیو و آثار آن را به عنوان نمونه انتخاب و ارائه می‌نماییم.

۱ـ۱ـ۲ـ کاربردهای توان راکتیو

توان اکتیو(مصرفی) جهت تولید کار و انرژی به صورت‌های نور، حرارت و حرکت به مصرف می‌رسد ولی توان راکتیو در توضیحی که در صفحات آتی این راهنما ارائه شده است از مبدأ تولید انرژی الکتریکی تا مصرف در حرکت رفت و برگشت است موارد استفاده این توان اشاره می گردد:

۱ــ حوزه میدان دوّار الکتروموتورها، مخصوصاً هنگام راه‌اندازی آنها، چون مقدار cosφ بسیار کم است(در حدود ۰/۲۵ ~ ۰/۲) پس مقدارsinφ زیاد بوده و در نهایت الکتروموتور به توان راکتیو Q نیاز دارد.

۲ــ در حوزه انتقال توان الکترومغناطیسی (کوپلینگ مغناطیسی) اگر توان راکتیو نباشد این کوپل انجام نشده واساس عملکرد ترانسفورماتورها مختل می‌گردد.

۳ــ در لامپهای گازی، بخار سدیم و... مقدار cosφنیز کم است.

۴ــ در الکتروموتورهای بزرگ سنگ شکن جهت تأمین توان راکتیو خازن مستقیم دو سر ورودی الکتروموتور قرار می‌گیرد.

۵ــ در صنعت فولادسازی وکوره های قوس الکتریکی به توان راکتیو بسیار بالایی نیاز است.

یادآور می‌شود قبلاً در صنعت از موتورهای سنکرون (در حالت فوق تحریک) جهت تزریق توان راکتیو در شبکه بهره می‌گرفتند ولی امروزه با استفاده از تکنولوژی SVC(static var competector)، جبران‌کننده توان راکتیو استاتیک این امر صورت می‌گیرد.

۲ـ۲ـ هنرجویان برای اولین بار با مبحث بردار در این فصل روبرو می‌شوند پس لازم است تعریف بردار برای آنها به خوبی منتقل شود. (مانند مثال جابجایی ص ۵۵ کتاب درسی)

۳ـ۲ـ تعریف بردار

هر پاره‌خط جهت دار بردار نامیده می‌شود (از نظر ریاضی). آوردن چند مثال که مفهوم بردار را به خوبی منتقل کند مانند نیرو و جابجایی، شدت جریان متناوب و . . .

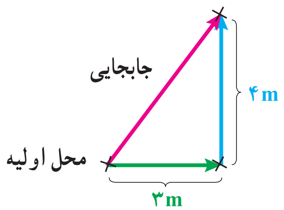
مثال: از هنرجویی بخواهید یک متر جابجا شود،از شما خواهد پرسید به کدام طرف که معنی بردار برایش مشخص می‌شود.

مفهوم اندازه و بزرگی بردار $|\vec{F}|$ و خود بردار $\vec{F}$ برای هنرجویان توضیح داده شود.

از هنرجویان بخواهید بردار رسم شدهٔ شما روی تخته را در دفتر خود رسم کنند سپس مفهوم بردار هم‌سنگ را تشریح کنید (موازی بودن و هم‌اندازه بودن رعایت شود).

از هنرجویان بخواهید ۳ متر به سمت راست و سپس ۴ متر به سمت بالا حرکت کنند. شکل ۱ــ۲ مکان اولیه او و مکان ثانویه را مشخص کنید و بخواهید که جابجایی را مشخص کنند. مسافت طی شده دانش‌آموز ۷ متر است ولی جابجایی او طبق رابطه فیثاغورث حساب می‌شود

$$\text{جابجایی} = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵\text{m}$$



شکل ۱ــ۲

با این مثال پیش‌زمینه لازم برای برآیند بردارها ایجاد می‌شود.

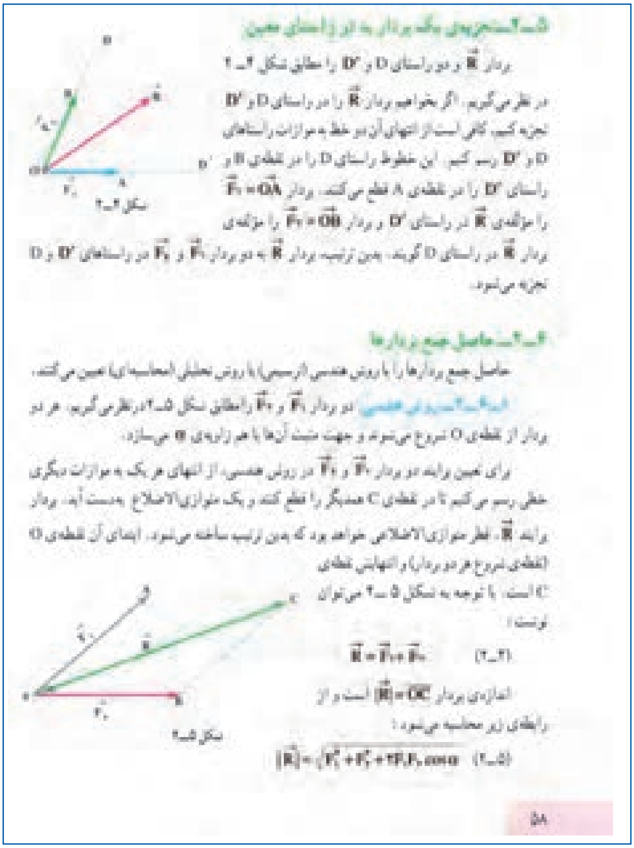
۴ـ۲ـ مفهوم برایند بردارها

برداری که به تنهایی آثار چند بردار را داشته باشد برایند آن بردارها نام دارد.

* از چند هنرجو بخواهید بر یک صندلی نیرو وارد کنند (در جهات مختلف آن را بکشند یا آن را هل دهند). صندلی در جهتی حرکت می‌کند مانند این است که بر صندلی فقط یک نیرو در جهت حرکت آن صندلی وارد شده است.

* از دو هنرجو بخواهید هم‌جهت نیمکتی را هل بدهند سپس از هنرجوی قوی هیکلی بخواهید به تنهایی آن نیمکت را مثل آنها هل بدهد، اگر هنرجوی قوی‌هیکل به اندازه آن دو نفر نیمکت را جابجا کند برآیند نیروی آن دو هنرجو را بر نیمکت وارد کرده‌است.

برای رسم بردار برآیند دو روش چندضلعی و متوازی‌الاضلاع وجود دارد. روش متوازی‌الاضلاع برای دو بردار استفاده می‌شود. (ص ۵۷ و ۵۸)



۵ـ۲ـ به‌دست آوردن برآیند دو بردار

الف) روش هندسی: برای محاسبه برآیند دو بردار رابطه اصلی $\left|\vec{R}\right| = \sqrt{F_1^{\,2} + F_2^{\,2} + 2F_1F_2\cos\alpha}$ مناسب می‌باشد.

ب) روش تحلیلی: برای برآیند بیش از دو بردار این روش بسیار مناسب است.

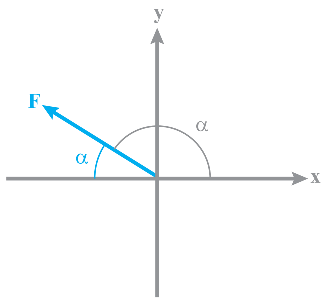
در این روش ابتدا هم‌سنگ بردارها روی محور مختصات رسم شود سپس هر بردار که افقی و عمودی نیست به دو مؤلفه افقی و عمودی تصویر شود. در این تصویرسازی زاویه α ، زاویه بردار با محور xها است.

(α : زاویه بردار با محور xها)

مؤلفه افقی $F_x=F.\cos\alpha$

مؤلفه عمودی $F_y=F.\sin\alpha$

برای راحتی کار زاویه کوچک‌تر را منظور می‌کنیم (شکل ۲ــ۲).



شکل ۲ــ۲

تذکر: مؤلفه افقی تصویر F_x بردار از حاصلضرب بردار در $\cos\alpha$ و مؤلفه عمودی F_y تصویر بردار از حاصل ضرب بردار در $\sin\alpha$ بدست می آید.

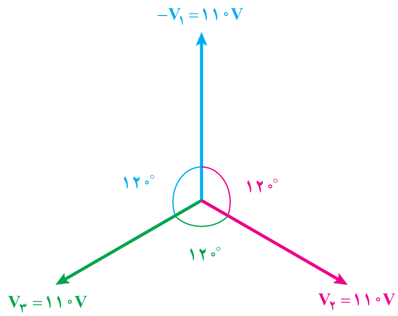
همه بردارهای افقی را با هم جمع و تفریق می‌کنیم (برآیند) که ΣF_x به‌دست می‌آید.

همه بردارهای عمودی را با هم جمع و تفریق می‌کنیم (برآیند) که ΣF_y به‌دست می‌آید.

برآیند را به صورت $\left|\vec{R}\right| = \sqrt{(\Sigma F_x)^۲ + \left(\Sigma F_y\right)^۲}$ حساب می‌کنیم.

اگر جهت بردار برآیند خواسته شد، θ را از رابطه $\tan\theta = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}$ بدست می‌آوریم.

مثال ۱: برآیند بردارهای ولتاژ زیر را از روش تحلیلی به‌دست آورید (شکل ۳ــ۲).



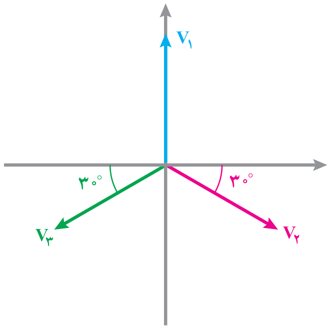
شکل ۳ــ۲

حل: ابتدا سه بردار روی دستگاه مختصات قائم آورده شود (شکل ۴ــ۲).

$V_۱$ عمودی است ولی $V_۲$ و $V_۳$ باید به صورت افقی و عمودی تصویر شوند.

$$V_۲ : \begin{cases} V_{۲X} = V_۲ \cos ۳۰ = ۵۵\sqrt{۳}v \\ V_{۲Y} = V_۲ \sin ۳۰ = ۵۵v \end{cases}$$

$$V_۳ : \begin{cases} V_{۳X} = V_۳ \cos ۳۰ = ۵۵\sqrt{۳}v \\ V_{۳Y} = V_۳ \sin ۳۰ = ۵۵v \end{cases}$$



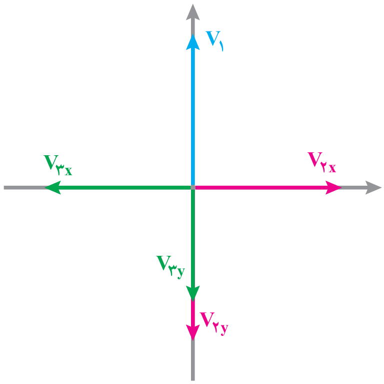
شکل ۴ــ۲

تصاویر به‌دست آمده همگی روی بردار X یا Y تصویر شده‌اند(شکل ۵ــ۲).

$$\Sigma F_x = +V_{۲X} - V_{۳X} = ۵۵\sqrt{۳} - ۵۵\sqrt{۳} = ۰$$

$$\Sigma F_Y = +V_۱ - V_{۲Y} - V_{۳Y} = ۱۱۰ - ۵۵ - ۵۵ = ۰$$

$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{(\Sigma F_x)^۲ + (\Sigma F_y)^۲} = \sqrt{۰+۰} = ۰$$



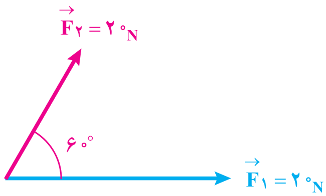
شکل ۵ــ۲

یادآوری

همکار محترم بهتر است در این قسمت از بحث بردار در مورد جهت‌های مثلثاتی، چهار ناحیه و مقادیر مثبت و منفی بردارها نیز برای هنرجویان مباحثی گفته شود همچنین برابر بودن کمان‌های کسینوسی در ناحیه اول و چهارم مفید خواهد بود ($\cos\alpha = \cos(-\alpha)$).

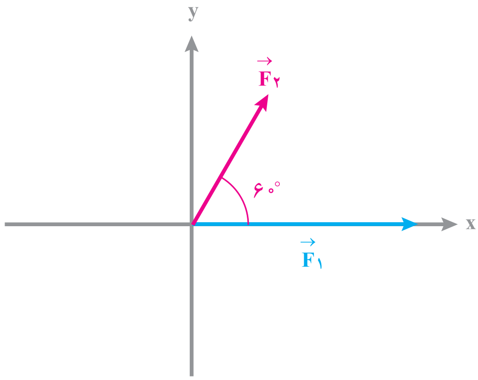
۱ـ۵ـ۲ـ حل تمرین شماره ۱ صفحه ۷۳ کتاب درسی (شکل ۶ـ۲)

هدف : محاسبه برآیند بردارهای $F_۱$ و $F_۲$ به روش تحلیلی



شکل ۶ـ۲

گام ۱) بردارها را بر روی محور مختصات منتقل می‌کنیم (شکل ۷ـ۲).



شکل ۷ـ۲

هریک از برآیندها به صورت ضریبی از $\cos\alpha$ به روی محور xها و به صورت ضریبی از $\sin\alpha$ بر روی محور yها ظاهر می‌شود.

زاویهٔ $F_۱$ با محور xها $\alpha_1=۰$ می‌باشد و زاویهٔ $F_۲$ با محور xها $\alpha_۲=۶۰$ می‌باشد.

گام ۲) حاصل جمع بردارها را بر روی محور xها در نظر می‌گیریم.

$$\Sigma F_X=|F_۱|\cos\alpha_۱+|F_۲|\cos\alpha_۲=۲۰(۱)+۲۰(۰/۵)=۳۰$$

گام ۳) حاصل جمع بردارها را بر روی محور yها در نظر می‌گیریم.

$$\Sigma F_Y=|F_۱|\sin\alpha_۱+|F_۲|\sin\alpha_۲=۲۰(۰)+۲۰\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)=۱۰\sqrt{۳}$$

گام ۴) برآیند بردارها با استفاده از فرمول زیر قابل محاسبه است.

$$\left|\vec{R}\right|=\sqrt{(\Sigma F_x)^۲+\left(\Sigma F_y\right)^۲}=\sqrt{(۳۰)^۲+(۱۰\sqrt{۳})^۲}=۲۰\sqrt{۳}$$

۲ـ۵ـ۲ـ حل تمرین شماره ۱ صفحه ۷۳ کتاب درسی(شکل ۸ـ۲)

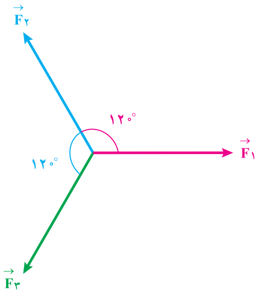
هدف : محاسبهٔ برایند سه بردار $\vec{F_۱}$ و $\vec{F_۲}$ و $\vec{F_۳}$ یک بار به روش هندسی و بار دیگر به روش تحلیلی

الف) روش هندسی

$\vec{F_۱} = ۳۰N$

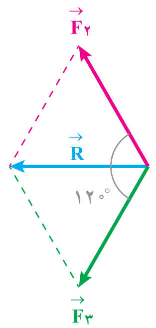
$\vec{F_۲} = ۲۰N$

$\vec{F_۳} = ۲۰N$



شکل ۸ــ۲

گام ۱) ابتدا برآیند دو بردار $\vec{F_۲}$ و $\vec{F_۳}$ را با استفاده از روش متوازی‌الاضلاع محاسبه کرده، نتیجه مانند روبرو خواهد بود.

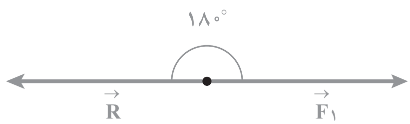


شکل ۹ــ۲

گام ۲) اندازهٔ بردار برآیند دو بردار $\vec{F_۲}$ و $\vec{F_۳}$ را با استفاده از فرمول زیر می‌یابیم.

$$\left|\vec{R_۱}\right| = \sqrt{F_۱{}^۲ + F_۲{}^۲ + ۲F_۱F_۲\cos\alpha} = \sqrt{۲۰^۲ + ۲۰^۲ + ۲(۲۰)(۲۰)\cos۱۲۰} = ۲۰N$$

گام ۳) برآیند $\vec{R}$ و $\vec{F_۱}$ (هر دو بردارهایی بر روی محور x می‌باشند)، به صورت زیر می‌باشد (شکل ۱۰ــ۲).



شکل ۱۰ــ۲

گام ۴) اندازه بردار برآیند با توجه به اینکه زاویهٔ بین $R_۱$ و $F_۱$، ۱۸۰° می‌باشد به صورت زیر است :

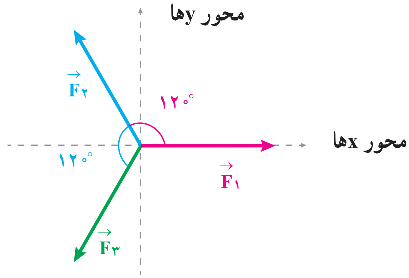
$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{F_۱{}^۲ + R_۱{}^۲ + ۲F_۱R_۱\cos\alpha} = \sqrt{۳۰^۲ + ۲۰^۲ + ۲(۳۰)(۲۰)\cos۱۸۰} = ۱۰N$$

ب) روش تحلیلی

اینک برآیند بردارهای $F_۱$ و $F_۲$ و $F_۳$ را به روش تحلیلی به دست می‌آوریم.

گام ۱) بردارها را بر روی محور مختصات منتقل می‌کنیم (شکل ۱۱ــ۲).

$$\overrightarrow{F_۱}=۳۰N$$
$$\overrightarrow{F_۲}=۲۰N$$
$$\overrightarrow{F_۳}=۲۰N$$



شکل ۱۱ــ۲

هریک از برآیندها به‌صورت ضریبی از $\cos\alpha$ به روی محور xها و به‌صورت ضریبی از $\sin\alpha$ بر روی محور yها ظاهر می‌شود.

زاویهٔ $F_۱$ با محور xها $\alpha_1=۰$، زاویهٔ $F_۲$ با محور xها $\alpha_2=۱۲۰^\circ$ و زاویهٔ $F_۳$ با محور xها $\alpha_3=۲۴۰^\circ$ می‌باشد.

گام ۲) حاصل جمع بردارها را بر روی محور xها در نظر می‌گیریم.

$$\sum F_X=|F_۱|\cos\alpha_۱+|F_۲|\cos\alpha_۲+|F_۳|\cos\alpha_۳=۳۰(۱)+۲۰(-\frac{۱}{۲})+۲۰(-\frac{۱}{۲})=۱۰N$$

گام ۳) حاصل جمع بردارها را بر روی محور yها در نظر می‌گیریم.

$$\sum F_Y=|F_۱|\sin\alpha_۱+|F_۲|\sin\alpha_۲+|F_۳|\sin\alpha_۳=۳۰(۰)+۲۰(\frac{\sqrt{۳}}{۲})+۲۰(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})=۰$$

گام ۴) برآیند بردارها با استفاده از فرمول زیر قابل محاسبه است.

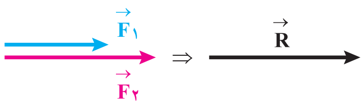
$$|\vec{R}|=\sqrt{(\sum F_x)^۲+(\sum F_y)^۲}=\sqrt{۱۰^۲+۰}=۱۰N$$

همان‌طور که انتظار می‌رفت جواب‌ها از دو روش هندسی و تحلیلی برابر هستند.

نکاتی در مورد برآیند بردار از روش هندسی :

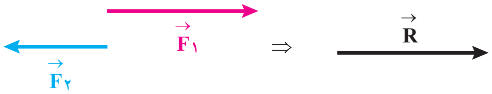
۱) اگر دو بردار $F_۱$ و $F_۲$ هم‌جهت بودند $(\alpha=۰)$ نیازی به استفاده از فرمول نیست و کافی است که اندازه دو بردار با هم جمع شوند.

$$\vec{R}=\vec{F_۱}+\vec{F_۲}$$



۲) اگر دو بردار F_1 و F_2 خلاف جهت هم بودند ($\alpha=180^\circ$) نیازی به استفاده از فرمول نیست و کافی است که از هم کم شوند و برآیند در جهت نیروی بزرگ‌تر رسم شود.

$$\vec{R}=\vec{F_1}-\vec{F_2}$$



۳) اگر دو بردار F_1 و F_2 بر هم عمود بودند ($\alpha=90^\circ$) از رابطه فیثاغورث استفاده می‌کنیم.

$$|\vec{R}|=\sqrt{F_1^2+F_2^2}$$

۴) اگر دو بردار F_1 و F_2 با هم برابر بودند و زاویه بین آنها α بود می‌توان به جای استفاده از فرمول اصلی از رابطه $|\vec{R}|=2F_1\cos(\frac{\alpha}{2})$ استفاده کرد.

الف) اگر دو بردار مساوی و $\alpha=60^\circ$ باشد $|\vec{R}|=F_1\sqrt{3}$

ب) اگر دو بردار مساوی و $\alpha=90^\circ$ باشد $|\vec{R}|=F_1\sqrt{2}$

ج) اگر دو بردار مساوی و $\alpha=120^\circ$ باشد $|\vec{R}|=F_1$

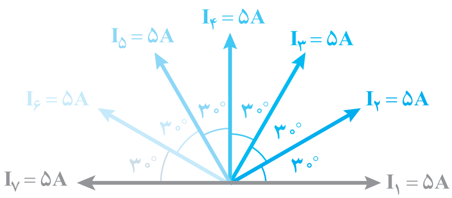
به هنرجویان یادآور شوید که برای رسم برآیند دو بردار از روش متوازی‌الاضلاع استفاده می‌کنیم و حالت‌های زیر ایجاد می‌شود:

F_1 و F_2 عمود بر هم باشند، در این صورت متوازی‌الاضلاع به مستطیل تبدیل می‌شود.

F_1 و F_2 با هم برابر باشند که در این صورت متوازی‌الاضلاع به لوزی تبدیل می‌شود.

F_1 و F_2 با هم برابر و عمود باشند در این صورت متوازی‌الاضلاع به مربع تبدیل می‌شود.

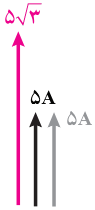
۳ـ۵ـ۲ـ مثال ۲: برآیند بردارهای جریان زیر را به روش هندسی بیابید (شکل ۱۲ـ۲).



شکل ۱۲ـ۲

حل: I_1 و I_7 مساوی و خلاف جهت هستند برآیندشان صفر می‌شود.

I_2 و I_6 مساوی و $\alpha=120^\circ$ می‌باشد برآیندشان با خودشان برابر است.



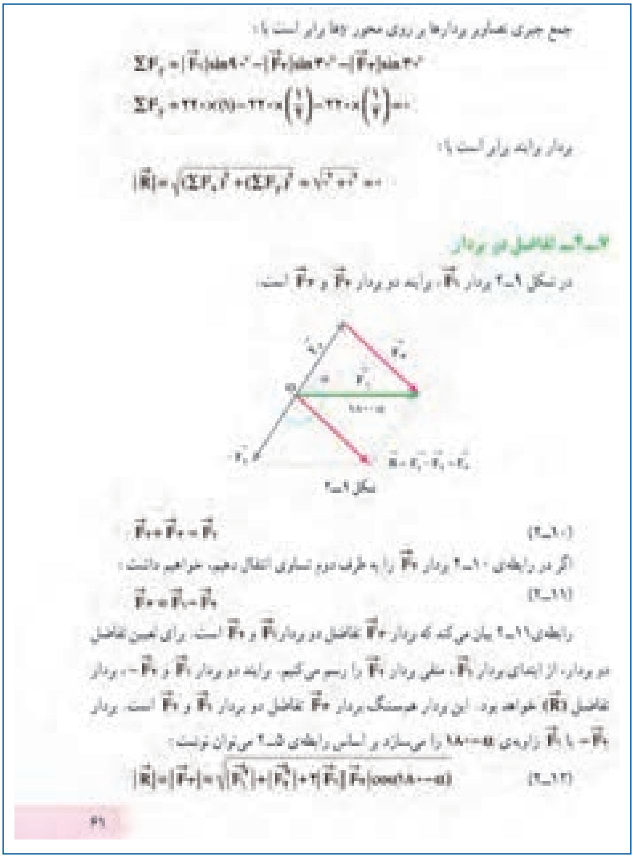
$I_۳$ و $I_۵$ مساوی و $\alpha=۶۰$ می‌باشد برآیندشان $۵\sqrt{۳}$ می‌باشد.

چون بردارها هم‌جهت هستند می‌توان با هم جمع کرد.

$$\left|\vec{R}\right| = ۵+۵+۵\sqrt{۳} = ۱۰+۵\sqrt{۳}A \quad \text{یا} \quad ۱۸/۵A$$

۶ـ۲ـ تفاضل بردارها

به‌جای اینکه گفته شود $\vec{F_۱} - \vec{F_۲}$ می‌توانیم در نظر بگیریم $\vec{F_۱} + (-\vec{F_۲})$ یعنی برآیند بردار $\vec{F_۱}$ با قرینه $\vec{F_۲}$ (مطابق شکل ۹ــ۲ صفحه ۶۱ کتاب درسی).

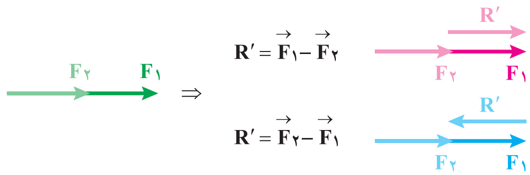


تفاضل همیشه برای دو بردار خواسته می‌شود و استفاده از فرمول (۱۳ــ۲) کتاب بهترین گزینه است. $\left|\vec{R'}\right| = \sqrt{F_۱{}^۲ + F_۲{}^۲ + ۲F_۱F_۲\cos\alpha}$

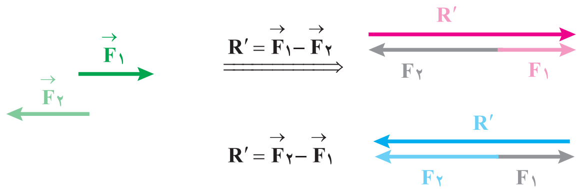
برای رسم R' از انتهای بردار دوم به انتهای بردار اول وصل می‌شود (شکل ۱۱ــ۲ ص ۶۳).

۱ـ۶ـ۲ـ نکاتی در مورد تفاضل :

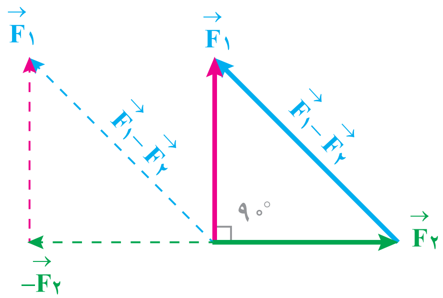
الف) اگر دو بردار با هم هم‌جهت بود اندازهٔ تفاضل از تفریق آنها به‌دست می‌آید.



ب) اگر دو بردار خلاف جهت باشند برای محاسبه تفاضل با هم جمع می‌شوند.



ج) اگر دو بردار بر همدیگر عمود باشند مانند برآیند از رابطه فیثاغورث می‌توان استفاده کرد (شکل ۱۳ـ۲).



شکل ۱۳ـ۲

د) اگر دو بردار هم‌اندازه باشند می‌توان علاوه بر استفاده از فرمول از رابطه زیر استفاده کرد.

$$|\vec{R'}| = ۲F_۱ \sin(\frac{\alpha}{۲})$$

حالت د ــ ۱ : اگر $\alpha = ۶۰^\circ$ باشد $|\vec{R'}| = F_۱$

حالت د ــ ۲ : اگر $\alpha = ۹۰^\circ$ باشد $|\vec{R}| = F_۱\sqrt{۲}$

حالت د ــ ۳ : اگر $\alpha = ۱۲۰^\circ$ باشد $|\vec{R'}| = F_۱\sqrt{۳}$

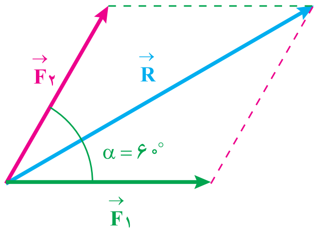
۲ـ۶ـ۲ـ حل تمرین شماره ۲ صفحه ۷۳ کتاب درسی

$\alpha = ۶۰^{\circ}, \overrightarrow{F_۲} = ۲۰, \overrightarrow{F_۱} = ۱۰$

الف)

هدف : تعیین $\overrightarrow{F_۱} + \overrightarrow{F_۲}$

گام ۱) با استفاده از فرمول مجموع دو برآیند را محاسبه می‌کنیم (شکل ۱۴ــ۲).



شکل ۱۴ــ۲

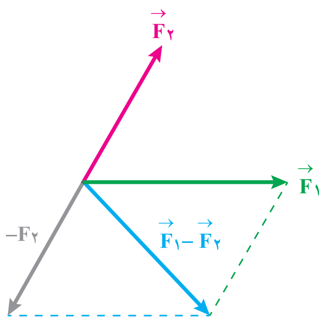
$$\left|\overrightarrow{R}\right| = \sqrt{F_۱^۲ + F_۲^۲ + ۲F_۱F_۲\cos\alpha} = \sqrt{۱۰^۲ + ۲۰^۲ + ۲(۱۰)(۲۰)\cos ۶۰} = ۱۰\sqrt{۵}$$

ب)

هدف : تعیین $\overrightarrow{F_۱} - \overrightarrow{F_۲}$

گام ۱) با استفاده از فرمول تفاضل دو بردار را محاسبه می‌کنیم (شکل ۱۵ــ۲).

گام ۲) برای تعیین برآیند به روش رسم بردارها $\overrightarrow{F_۱}$ را کشیده و سپس قرینهٔ $\overrightarrow{F_۲}$ را می‌کشیم و با استفاده از روش متوازی‌الاضلاع برآیند را تعیین می‌کنیم.



شکل ۱۵ــ۲

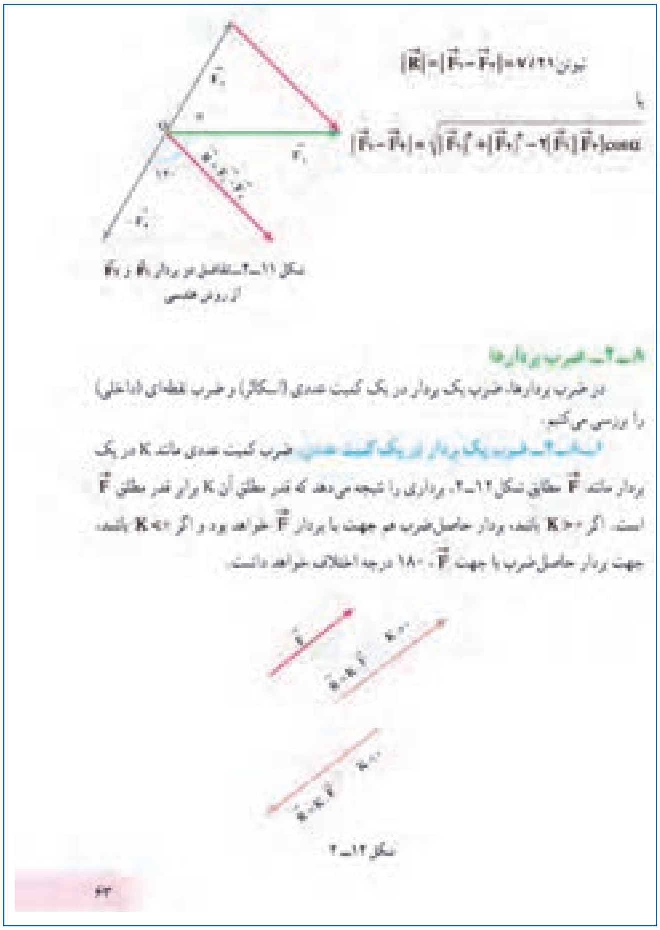
$$\left|\overrightarrow{R}\right| = \sqrt{F_۱^۲ + F_۲^۲ - ۲F_۱F_۲\cos\alpha} = \sqrt{۱۰^۲ + ۲۰^۲ - ۲(۱۰)(۲۰)\cos ۶۰} = ۱۰$$

۲ـ۷ـ ضریب بردارها

ضرب بردارها به دو صورت انجام می‌شود :

الف) ضرب داخلی (نقطه‌ای ــ عددی ــ اسکالر)

ب) ضرب خارجی (برداری)



نیوتن $|\vec{R}|=|\vec{F}_۱-\vec{F}_۲|=۷/۲۹$

یا

$|\vec{F}_۱-\vec{F}_۲|=\sqrt{|\vec{F}_۱|^۲+|\vec{F}_۲|^۲-۲|\vec{F}_۱||\vec{F}_۲|\cos\alpha}$

شکل ۱۱ــ۲ــ تفاضل دو بردار $\vec{F}_۱$ و $\vec{F}_۲$ از روش هندسی

۸ــ۲ــ ضرب بردارها

در ضرب بردارها، ضرب یک بردار در یک کمیت عددی (اسکالر) و ضرب نقطه‌ای (داخلی) را بررسی می‌کنیم.

۱ــ۸ــ۲ــ ضرب یک بردار در یک کمیت عددی: ضرب کمیت عددی مانند K در یک بردار مانند $\vec{F}$ مطابق شکل ۱۲ــ۲، برداری را نتیجه می‌دهد که قدر مطلق آن K برابر قدر مطلق $\vec{F}$ است. اگر $K>0$ باشد، بردار حاصل‌ضرب هم جهت با بردار $\vec{F}$ خواهد بود و اگر $K<0$ باشد، جهت بردار حاصل‌ضرب با جهت $\vec{F}$، ۱۸۰ درجه اختلاف خواهد داشت.

شکل ۱۲ــ۲

۶۳

الف ــ۱) ضرب داخلی : از رابطه $\overrightarrow{F_۱}.\overrightarrow{F_۲}=|F_۱|\times|F_۲|\cos\alpha$ محاسبه می‌شود که α زاویهٔ بین دو بردار است و حاصل دو بردار یک عدد خواهد بود.

ب ــ۱) ضرب خارجی : اگر برای دو بردار ضرب خارجی صورت بگیرد نتیجه حاصل‌ضرب یک بردار است که بر صفحه حامل دو بردار ضرب شده عمود است.

مثال : نیروی لورنس در درس ماشین‌های الکتریکی رشته الکتروتکنیک :

اندازهٔ نیرو را از رابطهٔ $F=iLB\sin\alpha$ می‌توان به دست آورد. با استفاده از قانون دست چپ موتوری $\vec{F}=i(\vec{L}\times\vec{B})$ می‌توان جهت نیروی F را پیدا کرد. در این رابطه امتداد طول سیم حامل جریان بر میدان مغناطیسی عمود است.

۱-۷-۲- حل تمرین شماره ۲ صفحه ۷۳ کتاب درسی

هدف : محاسبه حاصل‌ضرب دو بردار

گام ۱) برای تعیین حاصل‌ضرب دو بردار مانند زیر، ضرب اندازهٔ دو بردار را در مقدار $\cos\alpha$ (α زاویهٔ بین دو بردار می‌باشد) می‌یابیم.

$$\overrightarrow{F_1}.\overrightarrow{F_2}=\left|\overrightarrow{F_1}\right|\times\left|\overrightarrow{F_2}\right|\cos\alpha=10\times20\times\cos60=200(0/5)=100$$

اینک حاصل $\vec{F}_1.2\vec{F}_2$ را به‌دست آورید.

گام ۱) ابتدا $2\vec{F}_2$ را می‌یابیم.

برای ضرب اسکالر در بردار، کافی است مقدار اسکالر در اندازهٔ بردار ضرب شود.

$$\vec{F}_2=20,\vec{F}_3=2\vec{F}_2=40 \qquad K\rangle 0$$

گام ۲) برای تعیین حاصل‌ضرب دو بردار مانند زیر، ضرب اندازهٔ دو بردار را در مقدار $\cos\alpha$ (α، زاویه بین دو بردار می‌باشد. $\alpha=60^\circ$) می یابیم.

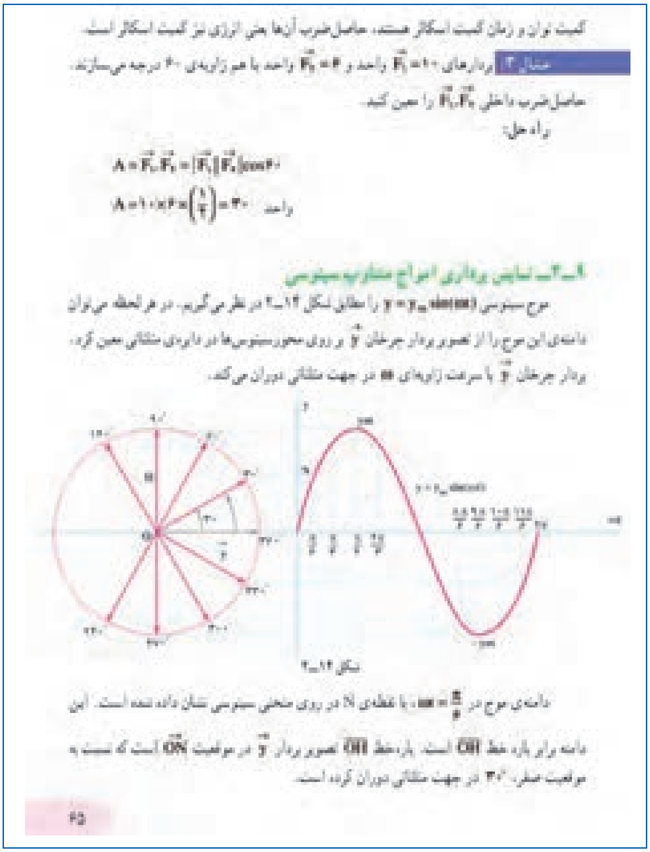
$$\overrightarrow{F_1}.\overrightarrow{F_3}=\left|\overrightarrow{F_1}\right|\times\left|\overrightarrow{F_3}\right|\cos\alpha=10\times40\times\cos60=400(0/5)=200$$

۸-۲- نمایش برداری امواج متناوب

می‌توان به جای استفاده از موج سینوسی برای ولتاژ و جریان از یک بردار که اندازهٔ آن مقدار مؤثر ولتاژ و جریان است، استفاده کرد.

$$V_{(t)}=V_m\sin(\omega t+\theta_V)$$

$$I_t=I_m\sin(\omega t+\theta_I)$$



کمیت توان و زمان کمیت اسکالر هستند، حاصل‌ضرب آن‌ها یعنی انرژی نیز کمیت اسکالر است.

مثال ۴: بردارهای $\vec{F_1}=10$ واحد و $\vec{F_2}=4$ واحد با هم زاویه‌ی ۶۰ درجه می‌سازند. حاصل‌ضرب داخلی $\vec{F_1}.\vec{F_2}$ را معین کنید.

راه حل:

$$A=\vec{F_1}.\vec{F_2}=|\vec{F_1}||\vec{F_2}|\cos 60$$

$$A=10\times 4\times\left(\frac{1}{2}\right)=20$$ واحد

۹ــ۲ــ نمایش برداری امواج متناوب سینوسی

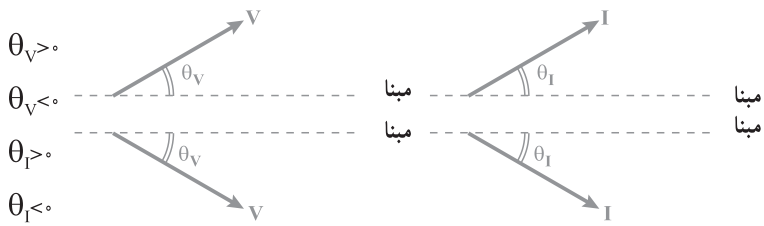
موج سینوسی $y=y_m\sin(\omega t)$ را مطابق شکل ۱۴ــ۲ در نظر می‌گیریم. در هر لحظه می‌توان دامنه‌ی این موج را از تصویر بردار چرخان $\vec{y}$ بر روی محور سینوس‌ها در دایره‌ی مثلثاتی معین کرد. بردار چرخان $\vec{y}$ با سرعت زاویه‌ای ω در جهت مثلثاتی دوران می‌کند.

شکل ۱۴ــ۲

دامنه‌ی موج در $\omega t=\frac{\pi}{6}$ با نقطه‌ی N در روی منحنی سینوسی نشان داده شده است. این دامنه برابر پاره‌خط OH است. پاره‌خط OH تصویر بردار $\vec{y}$ در موقعیت $\vec{ON}$ است که نسبت به موقعیت صفر، ۳۰° در جهت مثلثاتی دوران کرده است.

۶۵

اگر بخواهیم بردار هر موج را با توجه به زاویه آن رسم کنیم مطابق شکل‌های زیر عمل می‌کنیم (شکل ۱۶ــ۲).



شکل ۱۶ــ۲

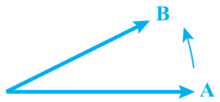
اگر بخواهیم دو بردار را برای دو موج سینوسی ولتاژ و جریان نسبت به هم رسم کنیم می‌توانیم $\varphi=\theta_V-\theta_I$ را حساب کنیم که مقدار زاویه φ اختلاف فاز نام دارد و در محاسبه φ ولتاژ را به عنوان مبنا در نظر می‌گیریم.

$$V=V_m\sin(\omega t+\theta_V)$$

$I=I_m \sin(\omega t+\theta_I)$

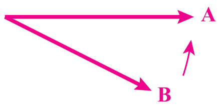
$\Rightarrow \varphi=\theta_V-\theta_I$

در شکل ۱۷ــ۲ بردار B نسبت به بردار A پیش‌فاز است (A را مبنا می‌گیریم مانند ولتاژ).



شکل ۱۷ــ۲

در شکل ۱۸ــ۲ بردار B نسبت به A پس‌فاز است (A را مبنا می‌گیریم مانند ولتاژ)



شکل ۱۸ــ۲

یک عدد منفی به دست می‌آید. $\theta_I>\theta_V \Rightarrow \varphi=\theta_V-\theta_I$

در این حالت اصطلاحاً می‌گوییم حالت مدار پیش فاز است.

یک عدد مثبت حساب می‌شود. $\theta_I<\theta_V \Rightarrow \varphi=\theta_V-\theta_I$

در این وضعیت می‌گوییم حالت مدار پس‌فاز است.

۱ـ ۸ ـ۲ـ حل تمرین شماره ۵ صفحه ۷۳ کتاب درسی

با توجه به مقادیر ولتاژ و جریان

$V=50\sqrt{2}\sin 2500t$

$I=10\sqrt{2}\sin(2500t+30)$

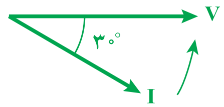
هدف : رسم دیاگرام برداری برای مقادیر جریان و ولتاژ

گام ۱) تعیین زاویه بین بردار جریان و ولتاژ که به صورت زیر قابل محاسبه است :

$$\begin{cases}\theta_i=+30\\ \theta_v=0\end{cases} \quad , \varphi=\theta_v-\theta_i=-30$$

گام۲) رسم دیاگرام برداری با توجه به اندازهٔ بردار جریان و ولتاژ با اختلاف فاز (از گام ۲ قابل محاسبه است) مشخص و قابل رسم است.

این مدار از نوع پس‌فاز است چون بردار جریان از ولتاژ عقب‌تر است.



۲ـ ۸ ـ۲ـ حل تمرین شماره ۵ صفحه ۷۳ کتاب درسی

هدف : محاسبهٔ توان‌های حقیقی، غیرحقیقی و ظاهری با توجه به معادلات ولتاژ و جریان

گام ۱) با توجه به فرمول زیر توان حقیقی قابل محاسبه است.

$$V = ۵۰\sqrt{۲}\sin ۲۵۰۰t$$

$$I = ۱۰\sqrt{۲}\sin(۲۵۰۰t + ۳۰)$$

$$I_m = \frac{۱۰\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۱۰A \ , \qquad V_e = \frac{V_m}{\sqrt{۲}} = \frac{۵۰\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۵۰v$$

مقادیر جریان و ولتاژ همگی به صورت مؤثر می‌باشند.

مقدار زاویه، اختلاف فاز بین بردار جریان و ولتاژ می‌باشد.

$$P_e = V_e I_e \cos\varphi = ۱۰ \times ۵۰ \cos(-۳۰) = ۲۵۰\sqrt{۳}w$$

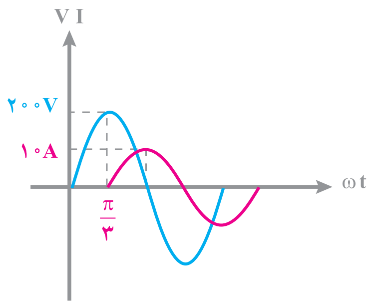
گام ۲) با توجه به فرمول زیر توان غیرمؤثر قابل محاسبه است.

$$P_d = V_e I_e \sin\varphi = ۱۰ \times ۵۰ \sin(-۳۰) = -۲۵۰ \ V.A.R$$

گام ۳) با توجه به فرمول زیر توان ظاهری قابل محاسبه است.

$$P_s = V_e I_e = ۱۰ \times ۵۰ = ۵۰۰ \ V.A$$

مثال۳: موج سینوسی جریان و ولتاژ مداری به‌صورت شکل زیر است (شکل ۱۹ـ۲).



شکل ۱۹ـ۲

شکل برداری را رسم کنید و اختلاف فاز مدار را بیابید. معادلهٔ زمانی هرکدام را مشخص کنید.

$$\theta_V = ۰$$

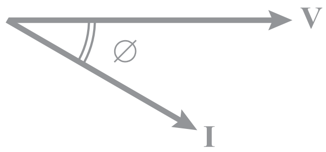
$$\theta_I = \frac{-\pi}{۳}$$

$$\varphi = \theta_V - \theta_I$$

$$\varphi = ۰ - (\frac{-\pi}{۳}) = + \frac{\pi}{۳}$$

$$V_{(t)} = ۲۰۰ \sin(\omega t + ۰)$$

$$I_{(t)} = ۱۰ \sin(\omega t - \frac{\pi}{۳})$$



این مدار نیز در حالت پس‌فاز است.

۹ـ۲ـ توان‌های مدار

۱ـ توان مؤثر (اکتیو، مفید، واته) P_e، P_a، P_w، P و واحد آن وات (w)

در جریان متناوب (AC) توان الکتریکی در چندین مفهوم بررسی می‌شود. این مفاهیم عبارت‌اند از:

توان ظاهری[1]، توان مؤثر[2]، توان غیر مؤثر[3]

الف ـ توان مؤثر: مقدار P_e را توان مؤثر یا توان مفید می‌گویند. در مدارهای الکتریکی این توان، کار مؤثر را انجام می‌دهد. به عبارت دیگر، تبدیل انرژی الکتریکی به انرژی‌های دیگر توسط توان الکتریکی قابل توجیه است. ضمناً در مقاومت‌های اهمی این توان به صورت انرژی حرارتی ظاهر می‌شود و از رابطهٔ ۱۶ـ۲ به دست می‌آید. در این رابطه $\cos\varphi$ را ضریب توان می‌گویند. هر چه ضریب توان به یک نزدیکتر شود، اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ (φ) به صفر نزدیک می‌شود و توان مؤثر افزایش می‌یابد. در سیستم SI واحد توان مؤثر وات [W] است.

$$P_e = V_e I_e \cos\varphi \quad [W] \qquad (۱۶ـ۲)$$

ب ـ توان غیر مؤثر: در عناصر غیر فعال نظیر مقاومت‌های سلفی و خازنی، توان غیر مؤثری ظاهر می‌شود که نمی‌توان آن را به کار مفید تبدیل کرد. این توان به شکل موج سینوسی بین مصرف‌کننده و شبکه رفت و برگشت می‌کند و کاری انجام نمی‌دهد. در شبکه‌های الکتریکی به هنگام بهره‌گیری از خواص سلفی و خازنی در ایجاد میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی، توان غیر مؤثر به طور ناخواسته در شبکه ظاهر می‌شود. این امر موجب می‌شود که مولدها نتوانند در جریان نامی توان مفید کامل به شبکه تحویل دهند. در سیستم SI واحد توان غیر مؤثر دوار [VAR] است. توان غیر مؤثر با رابطهٔ ۱۷ـ۲ بیان می‌شود:

$$P_q = V_e I_e \sin\varphi \quad [VAR] \qquad (۱۷ـ۲)$$

چون در خازن‌ها جریان پیش‌فاز است، $\varphi = \theta_v - \theta_i$ منفی می‌شود و توان P_q را با علامت منفی خواهیم داشت. از آنجا که در مقاومت‌های سلفی $\varphi = \theta_v - \theta_i > ۰$ است، توان غیر مؤثر با علامت مثبت خواهد شد.

واحد توان غیر مؤثر در سیستم SI، ولت آمپر راکتیو است و با نماد VAR نشان داده می‌شود. هزار ولت آمپر راکتیو را کیلو ولت آمپر راکتیو می‌گویند و با علامت اختصاری KVAR

۱ـ توان ظاهری را با علامت اختصاری [illegible] نشان می‌دهند.
۲ـ [illegible]
۳ـ [illegible]

۴۸

۲ـ توان غیرمؤثر (راکتیو، غیرمفید، دواته) P_a، P_r و Q واحد آن وار (VAR)

۳ـ توان ظاهری P_s یا S واحد آن ولت‌آمپر (V.A)

توان مؤثر که واحد اندازه‌گیری آن وات می‌باشد در مقاومت به صورت گرما ظاهر می‌شود ولی توان غیرمؤثر که واحد اندازه‌گیری آن ولت‌آمپر راکتیو است مخصوص سلف و خازن است و به دلیل میدان مغناطیسی سلف و میدان الکتریکی خازن به‌طور ناخواسته در مدار ایجاد شده و موجب می‌شود که نیروگاه نتواند در جریان نامی توان مفید کامل به شبکه تحویل بدهد البته رفتار سلف و خازن در این حالت عکس یکدیگر است به طوری که سلف توان راکتیو نیاز دارد ولی خازن توان راکتیو تولید می‌کند.

همکاران گرامی برای تفهیم بیشتر توان اکتیو و راکتیو مثال‌های زیادی وجود دارد ولی می‌توان از مثال زیر برای تفاوت این دو توان سود جست، توان اکتیو شبیه مسافری است که از مبدأ سوار بر قطار شده و در مقصد پیاده می‌گردد ولی در شبیه سازی توان راکتیو این مسافر در انتهای مسیر پیاده نمی‌شود و دوباره با قطار به مبدأ برمی‌گردد و این حالت در شبکه الکتریکی باعث اشغال کردن ظرفیت خط انتقال و توزیع انرژی الکتریکی شده و بهتر است حذف گردد.

توان ظاهری که واحد اندازه‌گیری آن ولت‌آمپر است جمع برداری P_e و P_d می‌باشد.

$$P_e = V_e I_e \cos\varphi$$

$$P_d = V_e I_e \sin\varphi$$

$$P_s = V_e I_e$$

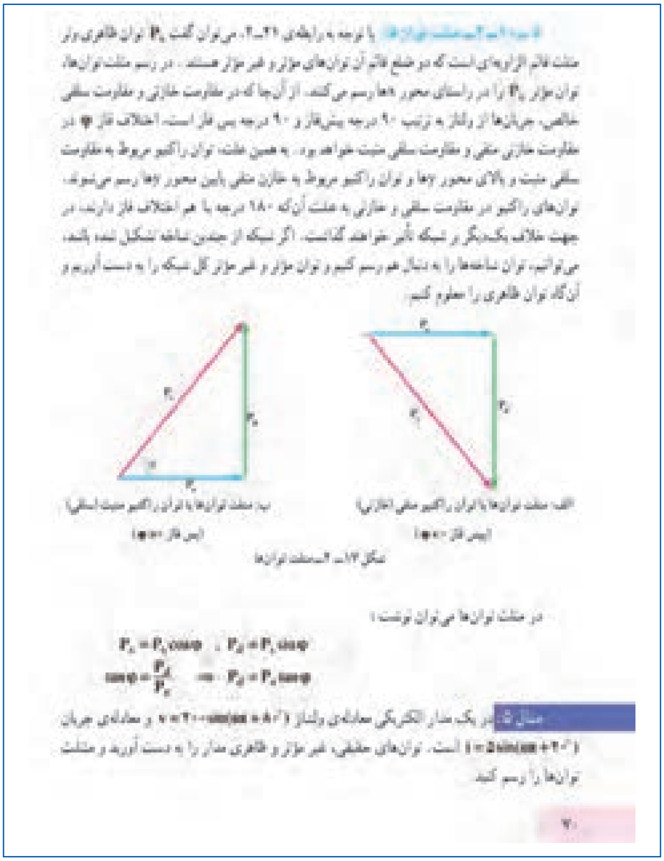
تبدیل مقادیر ماکزیمم و مؤثر به همدیگر :

$$V_e = \frac{V_m}{\sqrt{۲}}, I_e = \frac{I_m}{\sqrt{۲}}$$

$$V_e \simeq ۰/۹ V_m \quad \text{یا} \quad V_m = ۱/۱۱ V_e$$

۱۰ـ۲ـ مثلث توان

P_e یا توان مصرفی همیشه مثبت است ولی P_d یا توان غیر مؤثر در سلف‌ها مثبت ولی در خازن‌ها منفی است (می‌توان علت آن را به علامت φ مربوط دانست یا اینکه سلف به این توان نیاز دارد ولی خازن تولید کنندهٔ آن است.) می‌توان توان‌ها را به‌صورت مثلث قائم‌الزاویه در نظر گرفت که P_s وتر آن است.



الف) P_e برای چند مصرف‌کننده از جمع P_e ها به‌دست می‌آید.

$$\sum P_e = P_{e_1} + P_{e_2} + \cdots$$

ب) P_d برای چند مصرف کننده از جمع و تفریق P_d ها محاسبه می‌شود(برای سلف مثبت و برای خازن منفی)

$$\sum P_d = \overset{\text{سلفی (پس‌فاز)}}{\underset{\text{خازنی (پیش‌فاز)}}{\pm}} P_{d_1} \pm P_{d_2} + \cdots$$

ج) P_sکل حتماً از رابطه فیثاغورث حساب می‌شود.

$$\text{کل } P_s = \sqrt{(\Sigma P_e)^2 + (\Sigma P_d)^2}$$

د) ضریب قدرت کل شبکه نسبت توان اکتیو به توان ظاهری هر مدار ضریب قدرت آن می‌باشد که با $\cos\varphi$ نشان می‌دهیم.

$$\text{کل شبکه } \cos\varphi = \frac{\sum P_e}{\text{کل } P_s}$$

۱ـ۱۰ـ۲ـ حل تمرین شمارهٔ ۷ صفحهٔ ۷۴ کتاب درسی

در یک شبکه الکتریکی دو مصرف‌کننده با مشخصات زیر وجود دارند.

بار شماره ۱ :

$P_{e۱}=۵kw\ ,\ \cos\varphi=۰/۸$ پس فاز

بار شماره ۲ :

$P_{d۲}=۲k.V.A.R\ ,\ P_{e۲}=۲\sqrt{۳}\ kw$ پیش‌فاز

الف)

هدف : رسم مثلث توان برای هریک از بارها

بار شماره ۱ :

برای رسم توان مثلث نیاز به توان حقیقی و توان غیرمؤثر و توان ظاهری داریم.

گام ۱) محاسبه توان ظاهری مدار

$$P_e=P_s\cos\varphi \quad , \quad P_{s۱}=\frac{P_e}{\cos\varphi}=\frac{۵}{۰/۸}=۶۲۵۰V.A$$

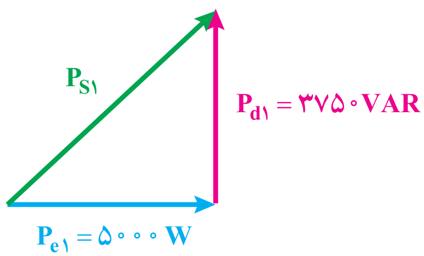
گام ۲) محاسبهٔ توان غیرمؤثر

ـ $\sin\varphi$ لازم برای محاسبهٔ توان غیرمؤثر به‌صورت زیر قابل محاسبه است.

$P_{e۱}=۵kw \qquad , \qquad \cos\varphi=۰/۸$

$(\sin\varphi)^۲=۱-(\cos\varphi)^۲\ ,\ \sin\varphi=\sqrt{۱-(\cos\varphi)^۲}=\sqrt{۱-۰/۸^۲}=+۰/۶$ ، پس‌فاز $\varphi>0$

$P_{d۱}=P_s\sin\varphi=۶۲۵۰\times۰/۶=۳۷۵۰\ VAR$



یادآوری

$$\begin{cases}\sin\varphi=۰/۶\rightarrow\cos\varphi=۰/۸\\ \cos\varphi=۰/۸\rightarrow\sin\varphi=۰/۶\end{cases}$$

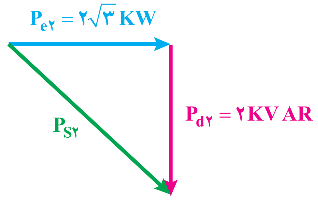
بار شمارهٔ ۲ :

برای رسم مثلث توان نیاز به توان حقیقی و توان غیرمؤثر و توان ظاهری داریم.

گام ۱) با توجه به داده‌های مسئله فقط نیاز به محاسبه توان ظاهری مدار داریم.

$$P_{s۱} = \sqrt{P_{e۲}^{۲} + P_{d۲}^{۲}} = \sqrt{(۲\sqrt{۳})^{۲} + ۲^{۲}} = \sqrt{۱۶} = ۴KV.A \quad \varphi_{\text{پیش‌فاز}} < ۰$$

گام۲) با توجه به اینکه بار پیش‌فاز است، توان غیرمؤثر در جهت پایین است (قسمت منفی محور xها) و مثلث توان به‌صورت زیر است.



ب)

هدف : محاسبهٔ ضریب قدرت کل شبکه

گام۱) محاسبه کل توان حقیقی مدار، که لازم است برآیند دو توان حقیقی ایجادی از دو بار که در یک جهت محور xها هستند را به‌دست آورد.

$$P_{e} = P_{e۱} + P_{e۲} = ۵ + ۲\sqrt{۳} = ۸/۴۶۱KW$$

گام۲) محاسبهٔ کل توان غیرمؤثر مدار که لازم است تفاضل دو توان غیرمؤثر ایجادی از دو بار که در جهت مختلف محور xها می‌باشند را به‌دست آورد.

$$P_{d}=P_{d۱}+P_{d۲}=۳/۷۵-۲=۱/۷۵ \ V.A.R$$

گام۳) محاسبهٔ کل توان ظاهری مدار

$$P_{s} = \sqrt{P_{e}^{۲} + P_{d}^{۲}} = \sqrt{۸/۴۶۱^{۲} + ۱/۷۵^{۲}} = ۸/۶۴ \ V.A$$

گام۴) محاسبهٔ اختلاف فاز بین ولتاژ و جریان

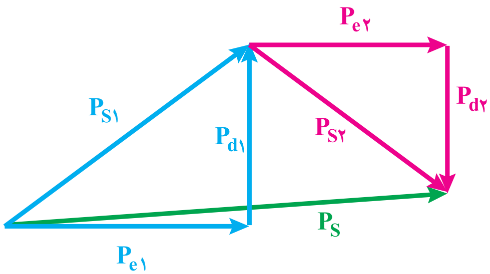
ـ برای این کار باید از توان حقیقی کل و توان ظاهری کل استفاده شود.

$$\tan\varphi = \frac{P_{d}}{P_{e}} = \frac{۱/۷۵}{۸/۴۶۱} = ۰/۲ \qquad \varphi=\tan^{-۱}(۰/۲)=۱۱/۴۵$$

گام۵) محاسبهٔ ضریب توان کل به‌صورت زیر می‌باشد.

ضریب قدرت به معنی این است که چقدر از کل توان شبکه توان اکتیو است

به عبارت دیگر توان اکتیو شبکه چه سهمی از کل توان شبکه را به خود اختصاص می‌دهد. هرچه مقدار آن به یک نزدیک‌تر باشد نشان‌دهنده اُهمی بودن رفتار بار است.



۲ـ۱۰ـ۲ـ حل تمرین شمارهٔ ۸ صفحهٔ ۷۴ کتاب درسی

هدف : محاسبه ضریب توان کل

بار شمارهٔ ۱ : $P_{e۱} = ۱۰۰w, P_{s۱} = ۱۰۰\sqrt{۲}V.A$ پس‌فاز

بار شمارهٔ ۲ : $P_{d۲} = ۴۰V.A.R, P_{s۲} = ۴۰\sqrt{۲}V.A$ پیش‌فاز

ــ باید توان حقیقی کل، توان ظاهری کل و توان غیرمؤثر کل را بیابیم.

گام ۱) محاسبهٔ توان حقیقی کل

ــ ابتدا برای هریک از بارها توان حقیقی را می‌یابیم و سپس برآیند آنها را محاسبه می‌کنیم.

$$P_{e۱} = ۱۰۰w$$

$$\sin\varphi_۲ = \frac{P_{d۲}}{P_{s۲}} = \frac{۴۰}{۴۰\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \ , \ \varphi = ۴۵^\circ$$

$$P_{e۲} = P_{S۲}\cos\varphi_۲ = ۴۰\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۴۰ \ w$$

$$P_e = P_{e۱} + P_{e۲} = ۱۰۰ + ۴۰ = ۱۴۰ \ W$$

گام ۲) محاسبهٔ توان غیرمؤثر کل

برای هریک از بارها توان غیرمؤثر را محاسبه کرده و سپس برآیند توان‌های غیرمؤثر هریک از بارها را برای یافتن توان غیرمؤثر کل می‌یابیم.

$$\cos\varphi_۱ = \frac{P_{e۱}}{P_{s۱}} = \frac{۱۰۰}{۱۰۰\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \ , \ \varphi_۱ = ۴۵^\circ$$

$$P_{d۱} = P_{s۱} \sin\varphi_۱ = ۱۰۰\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۱۰۰ \text{ V.A.R}$$

به دلیل اینکه بار اول پس‌فاز و بار دوم پیش‌فاز می‌باشد جهت توان‌های غیرمؤثر هریک از بارها در خلاف دیگری است و برای محاسبهٔ توان غیرمؤثر کل باید تفاضل توان‌ها را بیابیم.

$$P_d = P_{d۱} + P_{d۲} = ۱۰۰ - ۴۰ = ۶۰ \text{V.A.R}$$

گام۳) با توجه به توان‌های غیرمؤثر کل و توان حقیقی کل در قسمت‌های قبل توان ظاهری کل را می‌یابیم.

$$P_s = \sqrt{P_e^۲ + P_d^۲} = \sqrt{۱۴۰^۲ + ۶۰^۲} = ۱۵۲ \text{ V.A}$$

گام۴) با توجه به توان حقیقی کل و توان ظاهری کل $\cos\varphi$ قابل محاسبه است.

$$\cos\varphi = \frac{P_e}{P_s} = \frac{۱۴۰}{۱۵۲} = ۰/۹۱$$

$$\varphi = \cos^{-۱} ۰/۹۱ = ۲۳^\circ$$