فصل سوم

مدارهای R – L جریان متناوب

هدف‌های رفتاری : در پایان این فصل از هنرجو انتظار می رود :

۱ـ مقادیر جریان، ولتاژ، اختلاف فاز، مقاومت ظاهری، ضریب توان، توان‌های مؤثر، غیرمؤثر و ظاهری را در مدارهای R–L (سری و موازی) محاسبه کند.

۲ـ دیاگرام برداری ولتاژها را در مدارهای R–L سری و جریان‌ها را در مدارهای R–L موازی رسم کند.

۳ـ ضریب کیفیت مدارهای R–L سری و موازی را محاسبه کند.

۴ـ اثر تغییرات فرکانس را بر مقاومت ظاهری، جریان و ضریب قدرت در مدارهای R–L سری و موازی تشریح کند.

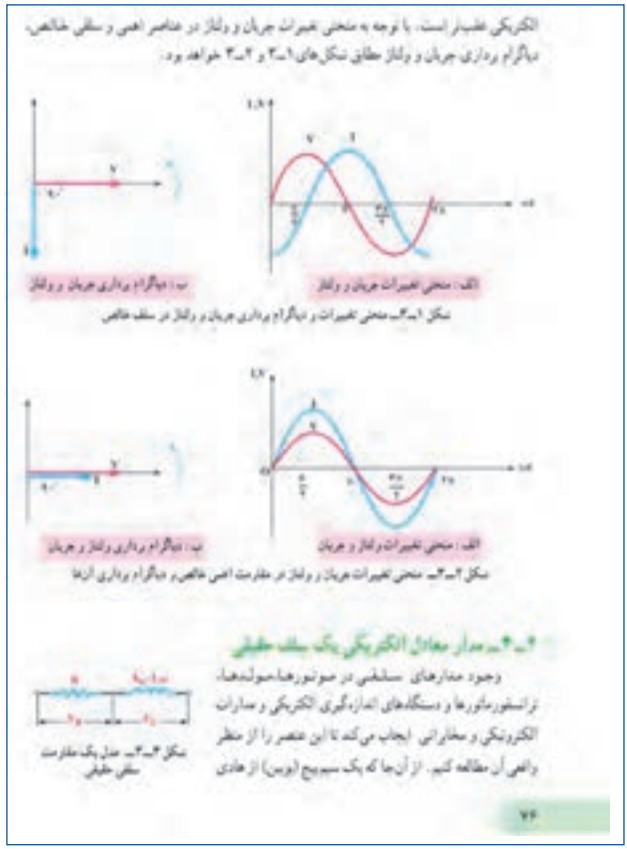
۵ـ منحنی‌های اثر تغییرات فرکانس را بر روی پارامترهای امپدانس و جریان در مدارهای R–L سری و موازی از طریق نقطه‌یابی رسم کند.

۶ـ معادلات زمانی ولتاژ و جریان عناصر در مدارهای R–L سری و موازی را به‌دست آورد.

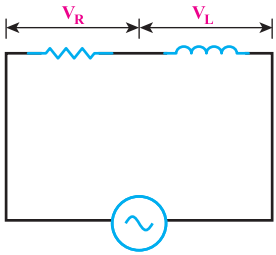
۷ـ مدارهای R–L سری را به موازی و بالعکس تبدیل کند.

۱ـ۳ ـ مقدمه

الف) در این فصل برای ایجاد انگیزه هنرجویان از الکتروموتورها، ترانسفورماتورها، چوک‌ها و مدارهای الکترونیکی و مخابراتی با فرکانس‌های مختلف می‌توان به عنوان کاربرد مدار R–L یاد کرد و اشاره کرد که برای تحلیل این نمونه از وسایل الکتریکی و الکترونیکی می‌توان از مدار معادل R–L استفاده نمود.



یادآوری



سلف از مدارهای جریان مستقیم فقط شامل مقاومت اهمی R خواهد بود که مقاومت اهمی سیم‌پیچ است ولی در مدار متناوب راکتانس سلفی XL خواهد داشت که جمع برداری این دو، مقاومت ظاهری یا Z را برای یک سیم‌پیچ یا سلف حقیقی معادل می‌کند.

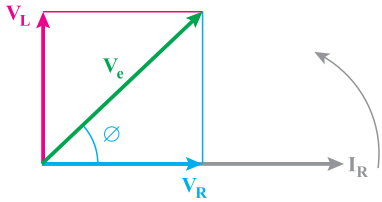
در مدارهای R–L سری ولتاژ سلف و ولتاژ مقاومت هم‌فاز نیست (V_L و V_R).

ب) برای تحلیل مدارهای R–L و R–C و حتی R–L–C سری و موازی و قراردادی را به این صورت تنظیم می‌کنیم، در مدارهای سری مبنا جریان الکتریکی است و در مدارهای موازی مبنا ولتاژ

شاخه‌های موازی است. در حالت سری با ثابت بودن جریان، ولتاژها جمع برداری خواهند شد و در حالت موازی با ثبات ولتاژ، جریان‌های هر شاخه جمع برداری می‌شوند تا جریان کل I_e به‌دست آید.

یادآوری

ولتاژ دو سر مقاومت و جریان آن با همدیگر هم‌فازند ولی ولتاژ دو سر سلف ۹۰ درجه الکتریکی از جریان سلف جلوتر است.



تذکر: اگر مقاومت در مدار وجود نداشت و سلف خالص باشد اختلاف فاز φ برابر 90° الکتریکی است ولی به دلیل وجود مقاومت اهمی در سیم‌پیچ واقعی این زاویه بین صفر تا 90° خواهد بود.

ج) ضریب توان(قدرت) : مقایسه اثر اهمی مدار نسبت به امپدانس کل مدار است. این ضریب توان، ضریب توان مؤثر است. به عبارت دیگر چقدر از کل امپدانس، جنس مقاومتی دارد.

$$p.f=\cos\varphi=\frac{R}{Z}$$

د) ضریب توان غیرمؤثر یا $\sin\varphi$: به نسبت راکتانس القایی سلف به امپدانس کل مدار گفته می‌شود. به‌عبارت دیگر چه مقدار از کل امپدانس غیراهمی است.

$$\sin\varphi=\frac{X_L}{Z}$$

هـ) توان‌های مؤثر، غیرمؤثر و ظاهری : در مدارهای سری به‌دلیل ثابت بودن جریان در همه المان‌ها بهتر است از رابطه $\begin{cases}P_e=RI_e^2\\P_d=X_LI_e^2\end{cases}$ استفاده کنیم. یادآور می‌شود حتماً در رابطه توان باید از جریان مؤثر I_e استفاده شود.

$$I_e=\frac{I_m}{\sqrt{2}}=0/707\,I_m$$

اگرچه روابط زیر نیز قابل استناد هستند (مخصوصاً با داشتن معادلات زمانی ولتاژ و جریان کل)

$$P_e=V_eI_e\cos\varphi\ (W)$$

$$P_d=V_eI_e\sin\varphi\ (VAR)$$

$$P_S' = V_e I_e = \sqrt{Pe^2 + Pd^2} \quad (V.A)$$

و) **ضریب کیفیت Q** :ضریب کیفیت در واقع مقایسهٔ اثر سلفی و اهمی مدار است که با tanφ نیز نشان داده می‌شود. در مدارهای خازنی شبیه این مقایسه بین خازن و مقاومت وجود دارد و از رابطه $Q=\tan\varphi$ یا $Q=\frac{X_L}{R}$ به‌دست می‌آید. در کتاب درسی از رابطه زیر نیز استفاده شده است :

$$Q = \frac{۲\pi(\text{انرژی ذخیره شده ماکزیمم})}{\text{انرژی مصرفی در هر سیکل}}$$

این انرژی در سیم پیچ از رابطه $W = \frac{۱}{۲}LI_m^2$, در مقاومت اهمی از رابطه $W=P.t$ به‌دست می‌آید. انرژی مصرفی مربوط به مقاومت اهمی است و انرژی ذخیره شده مربوط به سلف می‌باشد.

تذکر: برای محاسبه اختلاف فاز بین ولتاژ کل و جریان کل (φ) از دو رابطه $\varphi = \tan^{-۱}(\frac{X_L}{R})$ $\varphi = \cos^{-۱}\frac{R}{Z}$ می‌توان استفاده کرد. کاربرد این دو رابطه در مثال ۱ صفحه ۸۲ کتاب درسی دیده می‌شود.

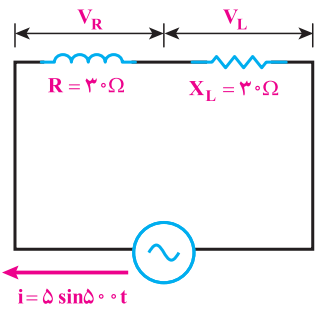
همانطور که در معادلات زمانی مثال صفحه ۸۲ کتاب درسی می‌بینیم معادله زمانی جریان کل با معادله زمانی ولتاژ مقاومت از نظر زمانی کاملاً یکسان است.ولی معادلهٔ زمانی ولتاژ سلف ۹۰ درجه جلوتر از جریان منظور شده‌است (صفحه ۸۳ کتاب درسی).

نکته: هرگاه مقادیر R و X_L برابر باشند حتماً اختلاف زاویه φ برابر ۴۵° خواهد بود. این حالت برای مدارات R–C، (مقاومت و خازن) نیز صدق می‌کند.

۱ـ۱ـ۳ـ حل تمرین شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۹۵ کتاب درسی (شکل ۱ـ۳)

الف)

هدف : محاسبهٔ ولتاژ دو سر X_L و R و معادلات زمانی آنها



شکل ۱ـ۳

همانطور که در شکل مشاهده می‌شود مقدار معادلهٔ زمانی جریان مشخص شده‌است.

یادآوری

۱ــ در مدارات سری، جریان منبع را مبنا در نظر می‌گیریم. (با توجه به KVL)

$$i_R(t) = i_L(t) = i(t)$$

۲. با توجه به هم‌فاز بودن جریان و ولتاژ در مقاومت R

$$\theta_{V_R} = \theta_{i_R}$$

۳ــ پس با توجه به پس‌فاز بودن ولتاژ سلف

$$\theta_{V_L} = \frac{\pi}{۲} + \theta_{i_R}$$

گام ۱) با استفاده از مقدار ماکزیمم جریان (ضریب sinθ) و مقدار مقاومت، ولتاژ دو سر مقاومت را می‌یابیم و معادله زمانی مقاومت را با توجه به زاویه $\theta_I = ۰$ می‌نویسیم.

$$I_m = ۵\ A$$

$$V_{Rm} = R.I_m = ۳۰ \times ۵ = ۱۵۰\ V$$

$$V_R(t) = R.I_m \sin(\omega t + \theta_I) = ۱۵۰ \sin(۵۰۰t)$$

گام ۲) با استفاده از مقدار ماکزیمم جریان (ضریب sinθ) و مقدار سلف، ولتاژ دو سر سلف را می‌یابیم.

$$X_L = L\omega \rightarrow ۳۰ = L \times ۵۰۰ \rightarrow L = ۰/۰۶H$$

$$V_{Lm} = X_L.I_m = ۳۰ \times ۵ = ۱۵۰V$$

$$X_L(t) = X_L.I_m \sin((\omega t + \theta_I) + \frac{\pi}{۲}) = ۱۵۰ \sin(۵۰۰t + ۰ + ۹۰) = ۱۵۰ \sin(۵۰۰t + ۵۰)$$

توجه داشته باشید علاوه بر θ_I باید اختلاف فاز ۹۰° بین جریان سلف و مقاومت را محاسبه کنید.

ب)

هدف : محاسبه ولتاژ منبع و معادلهٔ زمانی آن

ولتاژ V_R با جریان I_e هم فاز است ولی ولتاژ V_L از جریان I_e، ۹۰° جلوتر خواهد بود.

V_R و V_L هم‌فاز نیستند، بنابراین برای محاسبهٔ V_e از جمع برداری $\vec{V}_e = \vec{V}_R + \vec{V}_L$ استفاده می‌شود.

گام ۱) محاسبهٔ ولتاژ منبع با توجه به فرمول زیر

α زاویهٔ دو بردار $\vec{V}_L$ و $\vec{V}_R$ می‌باشد. $\alpha=۹۰^\circ$, $\cos\alpha=۰$

$$\vec{V}_e = \vec{V}_R + \vec{V}_L$$

$$V_e = \sqrt{V_R^۲ + V_L^۲} = \sqrt{۱۵۰^۲ + ۱۵۰^۲} = ۱۵۰\sqrt{۲}\ V$$

گام ۲) با توجه به مقدار ماکزیمم به‌دست آمده برای ولتاژ و اختلاف فاز φ معادله زمانی ولتاژ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

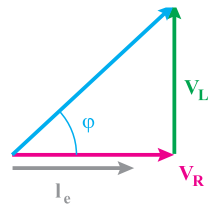
$$V_e(t) = V_{e_m}\sin(\omega t + \varphi) = ۱۵۰\sin(۵۰۰t + ۴۵^\circ)$$

پ)

هدف : رسم دیاگرام برداری جریان ولتاژ

ولتاژ V_R با جریان I_e هم‌فاز است ولی ولتاژ V_L از جریان I_e، ۹۰° جلوتر خواهد بود. V_R و V_L هم‌فاز نیستند، بنابراین برای محاسبهٔ V_e از جمع برداری $\vec{V}_e = \vec{V}_R + \vec{V}_L$ استفاده می‌شود.

گام ۱) ابتدا بردار ولتاژ، مقاومت و جریان را رسم می‌کنیم. ولتاژ سلف ۹۰° جلوتر از V_R می‌باشد و آن را در ادامهٔ ولتاژ مقاومت می‌کشیم، در نهایت ولتاژ دو سر منبع برایند این دو ولتاژ خواهد بود. (شکل ۲ــ۳).



شکل ۲ــ۳

یادآوری

در رسم دیاگرام برداری همیشه طول بردار جریان کوتاه‌تر از بردار ولتاژ کل تصویر گردد.

ت)

هدف : محاسبهٔ اکتیو، راکتیو، ظاهری و مثلث توان

در محاسبهٔ توان‌ها، از مقادیر مؤثر ولتاژ و جریان‌ها استفاده می‌کنیم.

گام ۱) با توجه به محاسبات در زیر توان‌ها قابل محاسبه می‌باشند.

یادآوری: $P_S = \begin{cases} V_e I_e \\ \dfrac{V_e^۲}{Z} \\ Z.I_e^۲ \end{cases}$

$$V_e = \frac{V_m}{\sqrt{۲}} = \frac{۱۵۰\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۱۵۰\,V \;,\; I_e = \frac{I_m}{\sqrt{۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۲}}\,A$$

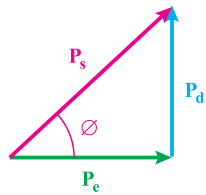
$$P_s = V_e I_e = ۱۵۰ \times \frac{۵}{\sqrt{۲}} = ۳۷۵\sqrt{۲}\;\; V.A$$

$$P_e = V_e I_e \cos\varphi = P_s \cos\varphi = ۱۵۰ \times \frac{۵}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۳۷۵\,w$$

$$P_d = V_e I_e \sin\varphi = ۱۵۰ \times \frac{۵}{\sqrt{۲}} \sin ۴۵ = ۳۷۵\,V.A.R$$

گام ۲) مثلث توان با توجه به مثبت بودن P_d (پس‌فاز) به صورت زیر خواهد بود.

چون مدار سلفی است مثلث توان به صورت زیر خواهد بود (شکل ۳ــ۳).



$P_e = ۳۷۵\,W$

شکل ۳ــ۳

۲ـ۱ـ۳ـ حل تمرین شمارهٔ ۲ صفحهٔ ۹۵ کتاب درسی

$$V_{(t)} = ۲۰۰\sin(۳۱۴t + ۲۰)$$

$$I_{(t)} = ۱۰\sin(۳۱۴t - ۱۰)$$

هدف : با توجه به معادلات زمانی جریان و ولتاژ مقدار R و L محاسبه شود.

گام ۱) محاسبهٔ امپدانس کل مدار

$$V_e = \frac{۲۰۰}{\sqrt{۲}} \;,\; I_e = \frac{۱۰}{\sqrt{۲}}$$

$$Z = \frac{V_e}{I_e} = \frac{\frac{۲۰۰}{\sqrt{۲}}}{\frac{۱۰}{\sqrt{۲}}} = ۲۰$$

تذکر: به هنرجویان بگویید که هرگاه در مسائل معادلات ولتاژ و جریان کل را داشته باشیم مقدار Z و φ قطعاً قابل دسترسی است.

گام ۲) محاسبهٔ فاز بین ولتاژ و جریان

$$\varphi=\theta_V-\theta_I=۲۰^\circ-(-۱۰^\circ)=۳۰^\circ$$

گام ۳) محاسبهٔ مقاومت اهمی و مقاومت سلفی

$$R=Z\cos\varphi=۲۰\cos ۳۰^\circ=۲۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱۰\sqrt{۳}\ \Omega$$

$$X_L=Z\sin\varphi=۲۰\times\frac{۱}{۲}=۱۰\ \Omega$$

گام ۴) مقدار اندازهٔ L را می‌توان با استفاده از مقاومت سلفی به‌دست آورد.

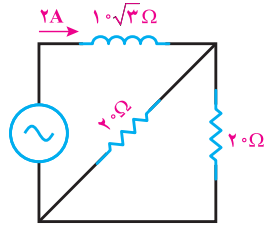
$$X_L=L\omega\rightarrow L=\frac{X_L}{\omega}=\frac{۱۰}{۳۱۴}=۰/۰۳۲\,H$$

۳ـ۱ـ۳ـ حل تمرین شمارهٔ ۴ صفحهٔ ۹۵ کتاب درسی (شکل ۴ـ۳)

هدف : محاسبه ولتاژ منبع

گام ۱) مدار را به ساده‌ترین شکل تبدیل کنیم.

$$(۲۰\,||\,۲۰)=\frac{۲۰\times۲۰}{۲۰+۲۰}=۱۰\ \Omega$$



شکل ۴ـ۳

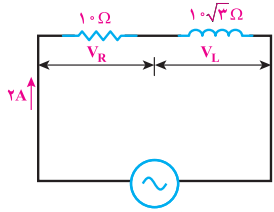
در شکل ۵ـ۳ کافی است امپدانس مدار را محاسبه کنیم.

با توجه به مقادیر مقاومت اهمی و مقاومت سلفی می‌توان اندازهٔ ولتاژ هریک را به‌دست آورد.

گام ۲) محاسبهٔ مقادیر ولتاژ مقاومت اهمی و مقاومت سلفی

$$V_R=R.I_e=۲\times۱۰=۲۰V$$

$$V_L=X_L.I_m=۲\times۱۰\sqrt{۳}=۲۰\sqrt{۳}$$



شکل ۵ـ۳

گام ۳) ولتاژ منبع، جمع برداری دو ولتاژ محاسبه شده در گام دوم می‌باشد.

ولتاژ V_R با جریان I_e هم‌فاز است ولی V_L از جریان I_e، ۹۰° جلوتر خواهد بود. V_R و V_L هم‌فاز نیستند، بنابراین برای محاسبه V_e از جمع برداری $\vec{V}_e = \vec{V}_R + \vec{V}_L$ استفاده می‌شود.

$$\alpha = ۹۰^\circ \quad , \quad \cos ۹۰^\circ = ۰$$

$$V_e = \sqrt{V_R{}^۲ + V_L{}^۲} = \sqrt{۲۰^۲ + ۲۰^۲} = ۴۰\,V$$

یادآوری

به‌طور کلی هرگاه بین دو کمیت یکسان اختلاف فاز وجود داشته باشد باید از جمع برداری استفاده نمود.

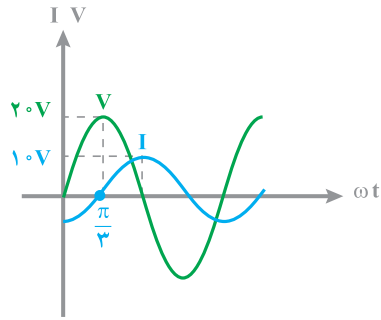
راه حل دوم :

$$Z = \sqrt{R^۲ + X_L^۲} = \sqrt{(۱۰)^۲ + (۱۰\sqrt{۳})^۲} = ۲۰\,v$$

$$V_e = Z.I_e = ۲۰ \times ۲ = ۴۰\,v$$

۴ـ۱ـ۳ـ حل تمرین شمارهٔ ۹ صفحهٔ ۹۶ کتاب درسی (شکل ۶ـ۳)

هدف : با توجه به تابع تغییرات ولتاژ و جریان در شکل **۶ــ۳** باید مقدار R و X_L را بیابیم.



شکل ۶ــ۳

یادآوری

در این تمرین هم مانند تمرین شمارهٔ ۲ مقادیر ولتاژ کل و جریان کل آورده شده است. همچنین اختلاف فاز از طریق منحنی نشان داده شده است. پس مقدار Z و φ به سادگی قابل دسترسی است.

گام ۱) از شکل می‌توان مقدار ماکزیمم ولتاژ و جریان و اختلاف فاز بین ولتاژ و جریان را استخراج کرد.

$$V_m = ۲۰\,V \quad , \quad I_m = ۱۰\,V \quad , \quad \varphi = \frac{\pi}{۳}$$

گام ۲) با استفاده از ولتاژ ماکزیمم و جریان ماکزیمم می‌توان مقدار امپدانس کل مدار را بیابیم.

$$Z = \frac{V_m}{I_m} = \frac{۲۰}{۱۰} = ۲\Omega$$

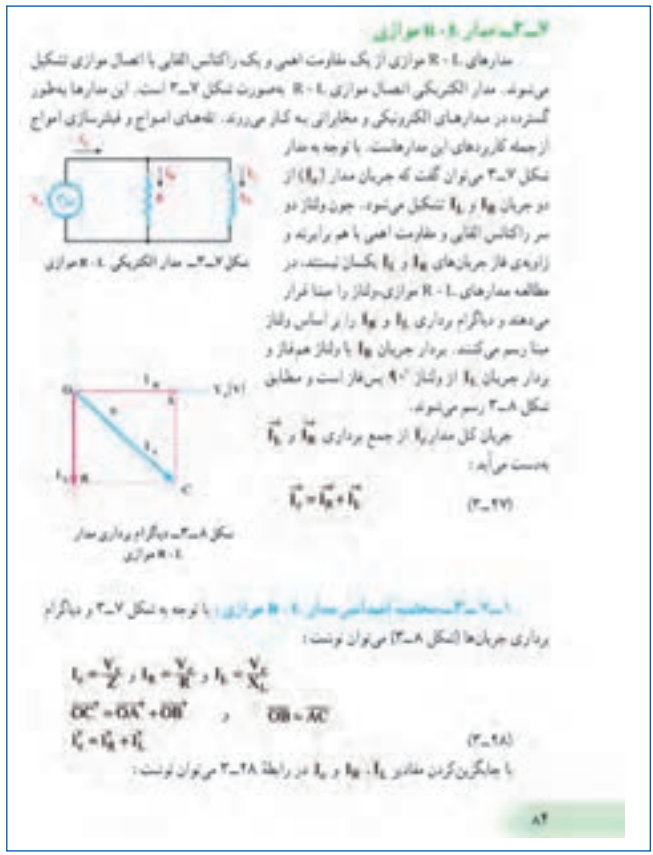
گام ۳) مقادیر R و X_L به‌صورت زیر قابل محاسبه‌اند.

$$R = Z\cos\varphi = ۲\cos\frac{\pi}{۳} = ۲\times\frac{۱}{۲} = ۱\ \Omega$$

$$X_L = Z\sin\varphi = ۲\sin\frac{\pi}{۳} = ۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳}\ \Omega$$

۲ـ۳ـ مدار R-L موازی

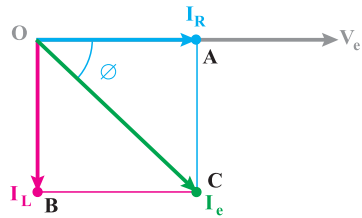
در این مدارات مبنای تحلیل و محاسبات ولتاژ شاخه موازی است و جریان‌ها جمع برداری می‌شوند.



همان‌طور که در کتاب درسی نیز اشاره شده است این مدارها در مخابرات و الکترونیک کاربرد دارند به‌عنوان مثال فیلترها و تله‌های امواج از جمله کاربرد این نوع مدار می‌باشد. در این مدارها جریان‌های شاخه‌ها جمع برداری می‌شود در صورتی که ولتاژ آنها با هم برابر است.

طبق رابطه فیثاغورث در مثلث قائم‌الزاویه داده شده شکل ۷ــ۳ داریم :

$OC^2=OA^2+AC^2 \quad (OB=AC)$



شکل ۷ــ۳

و از آنجا مقادیر جریان جایگذاری شده و رابطه روبرو به‌دست می‌آید.

$I_R^2+I_L^2=I_e^2$

در این مدارات مقدار cosφ و tanφ از روابط زیر به‌دست می‌آیند.

$$\cos\varphi=\frac{Z}{R} \quad , \quad \tan\varphi=\frac{R}{X_L}=\frac{R}{L\omega}$$

در این مدارها نیز ماکزیمم انرژی ذخیره شده در سلف‌ها خواهد بود و انرژی مصرفی مربوط به مقاومت اهمی می‌باشد و داریم :

$$Q=\frac{۲\pi(\text{انرژی ذخیره شده ماکزیمم})}{\text{انرژی مصرفی در هر سیکل}}=\frac{R}{X_L}=\frac{R}{L\omega}$$

در ضمن برای محاسبه توان‌ها چون ولتاژ سلف و مقاومت یکی است بهتر است توان‌ها را از روابط زیر به‌دست آوریم :

$$\begin{cases} P_e=\dfrac{V_e^2}{R}\,(w) \\ P_d=\dfrac{V_e^2}{X_L}\,(V.A.R) \end{cases}$$

تذکر: با داشتن معادلهٔ زمانی جریان کل و ولتاژ کل در مدارهای مختلف سری و موازی به سادگی مقادیر Z و φ به‌دست می‌آید.

$$Z=\frac{V_m}{I_m}\ ,\ \varphi=\theta_V-\theta_I$$

معلمین و همکاران عزیز بهتر است از هنرجویان خواسته نشود که تک‌تک روابط آورده شده در مدارهای متناوب برای حالت‌های سری و موازی را از بر کنند بلکه با آموختن راه به‌دست آوردن روابط و خصوصیات مدارهای راکتیو سلفی و خازنی در اتصال با مقاومت اهمی آنها را در تشخیص و تعیین رابطه صحیح هدایت کنیم.

در مثال شمارهٔ ۲ صفحهٔ ۸۶ کتاب که مربوط به R–L موازی است نیز مشاهده می‌شود که معادله زمانی ولتاژ منبع و جریان مقاومت هم‌فاز هستند ولی معادله زمانی جریان سلف ۹۰° از ولتاژ منبع عقب‌تر و پس‌فاز است. این پس‌فاز بودن به دلیل ماهیت سلفی کل مدار است.

در این مثال برای محاسبه توان‌های اکتیو، راکتیو و ظاهری، در کتاب درسی از رابطه $P_e=RI_e^2$ و $P_d=X_LI_e^2$ استفاده شده‌است ولی با استفاده از رابطه‌های زیر نیز همان جواب‌ها به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} P_e=\dfrac{V_e^2}{R}=\dfrac{۱۲۰^2}{۳۰}=۴۸۰\ W \\ P_d=\dfrac{V_e^2}{X_L}=\dfrac{۱۲۰^2}{۴۰}=۳۶۰\ V.A.R \end{cases}$$

یادآوری

در مدارهای R–L سری، مقدار مقاومت، بیشتر تعیین کننده نوع خاصیت مدار است (اهمی یا سلفی بودن) ولی در مدارهای R–L موازی عکس مقاومت یعنی هدایت[۱] بیشتر تعیین کننده کیفیت اهمی و یا سلفی بودن مدار است.

۱ـ۲ـ۳ـ حل تمرین شمارهٔ ۱۰ صفحهٔ ۹۶ کتاب درسی (شکل ۸ـ۳)

الف)

هدف : محاسبه امپدانس

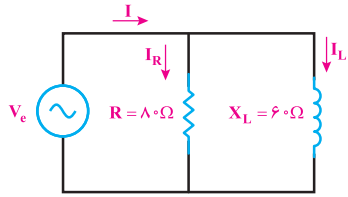
گام ۱) با استفاده از فرمول زیر می‌توان امپدانس مدار را محاسبه کرد.

۱ــ عکس مقاومت را اصطلاحاً موهو (Ʊ) می‌گویند.

$$Z=\frac{R.X_L}{\sqrt{R^2+X_L^2}}=\frac{80\times60}{\sqrt{80^2+60^2}}=48\ \Omega$$

ب)

هدف : محاسبه ولتاژ منبع و نوشتن معادله زمانی آن



شکل ۸ــ۳

یادآوری

۱ــ در مدارات موازی، ولتاژ منبع را مبنا در نظر می‌گیریم.

$$V_R(t)=V_L(t)=V(t)$$

۲ــ با توجه به هم‌فاز بودن جریان و ولتاژ در مقاومت R

$$\theta_{V_R}=\theta_{i_R}$$

۳ــ با توجه به پس‌فاز بودن ولتاژ سلف

$$\theta_{i_L}=\frac{\pi}{2}+\theta_{V_R}$$

گام ۱) محاسبه مقدار مؤثر ولتاژ کل با استفاده از جریان کل مدار

$$I_m=5\sqrt{2}A\ ,\quad I_e=\frac{I_m}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=5\ A$$

گام ۲) محاسبه ولتاژ ماکزیمم منبع مدار

$$V_e=Z.I_e=5\times48=240V$$

گام ۳) محاسبهٔ زاویه مربوط به ولتاژ (مدار سلفی، مقاومتی است و بین جریان و ولتاژ اختلاف فاز وجود دارد).

$$V_m=\sqrt{2}V_e=240\sqrt{2}\ V$$

گام ۴) نوشتن معادلهٔ زمانی ولتاژ

$$\varphi=\tan^{-1}(\frac{R}{X_L})=\tan^{-1}(\frac{80}{60})=53^\circ$$

$$\varphi=\theta_V-\theta_I\rightarrow\ 53^\circ=\theta_V-0\rightarrow\ \theta_V=53^\circ$$

$$V(t) = ۲۴\sqrt{۲}\sin(۲۵۰t + ۵۳^\circ)$$

پ)

هدف : محاسبهٔ جریان I_e و I_L و نوشتن معادلهٔ آنها

گام ۱) محاسبه مقدار مقاومت و جریان مقاومت سلفی

$$I_R = \frac{V_m}{R} = \frac{۲۴۰\sqrt{۲}}{۸۰} = ۳\sqrt{۲}\ A$$

$$I_L = \frac{V_m}{X_L} = \frac{۲۴۰\sqrt{۲}}{۶۰} = ۴\sqrt{۲}\ A$$

گام ۲) نوشتن معادلات زمانی جریان مقاومت اهمی و سلفی

بردار جریان I_R با ولتاژ هم‌فاز می‌باشند.

$$I_R(t) = ۳\sqrt{۲}\sin(۲۵۰t + ۵۳^\circ)$$

بردار جریان I_L (به دلیل خاصیت سلفی) از ولتاژ ۹۰° پس‌فاز می‌باشد.

$$I_L(t) = ۴\sqrt{۲}\sin(۲۵۰t + ۵۳^\circ - ۹۰^\circ) = ۴\sqrt{۲}\sin(۲۵۰t - ۳۷^\circ)$$

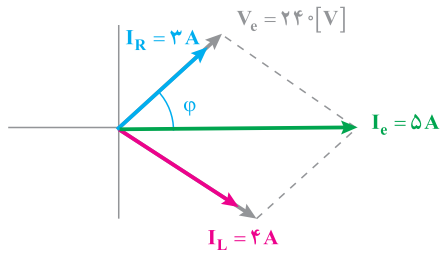
ت)

هدف : رسم دیاگرام برداری ولتاژ جریان‌های مدار

گام ۱) محاسبهٔ مقادیر مؤثر جریان‌ها و ولتاژ

$$I_R = \frac{۳\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۳A \quad , \quad I_L = \frac{۴\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۴A$$

گام ۲) دیاگرام برداری I_L و I_R را بر اساس ولتاژ مبنا رسم می‌کنیم مطابق شکل **۹ــ۳**. بردار جریان I_R با ولتاژ هم‌فاز و بردار جریان I_L از ولتاژ ۹۰° پس‌فاز است.



شکل ۹ــ۳

هدف : محاسبهٔ توان‌های اکتیو، راکتیو و ظاهری و مثلث توان

گام ۱) محاسبهٔ توان‌های اکتیو، راکتیو و ظاهری و مثلث توان

$\cos\varphi = \cos ۵۳^\circ = ۰/۶ \ , \ \sin\varphi = ۰/۸$

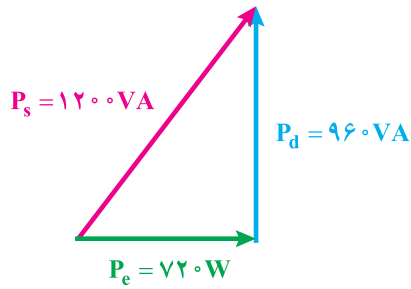
$P_e = I_e.V_e \cos\varphi = ۵ \times ۲۴۰ \times ۰/۶ = ۷۲۰ \ w$

$P_d = I_e.V_e \sin\varphi = ۲۴۰ \times ۵ \times ۰/۸ = ۹۶۰ \ V.A.R$

$P_s = I_e.V_e = ۲۴۰ \times ۵ = ۱۲۰۰ \ V.A$

گام ۲) رسم مثلث توان بر اساس مقادیر توان‌ها

چون ماهیت مدار سلفی است مثلث توان‌ها شبیه شکل ۱۰ـ۳ خواهد بود.



شکل ۱۰ـ۳

۳ـ۳ـ اثر فرکانس شبکه بر مدارهای R-L سری و موازی

در ولتاژ مستقیم، f=۰ و مدار R–L سری تبدیل به یک مقاومت ساده می‌شود (Z=R). ولی در مدار R–L موازی مدار به حالت اتصال کوتاه می‌رود (Z=۰) پس در حالت سری $I_e = \frac{V_e}{R}$ و در حالت موازی $I_e = \infty$ خواهد بود.

هرچه فرکانس مدار افزایش یابد مدار R–L سری بیشتر خاصیت القایی پیدا می‌کند زیرا $X_L = L\omega$ زیاد می‌شود ولی در مدار R–L موازی عکس این حالت نتیجه می‌شود (خاصیت سلفی کم می‌شود).

۴ـ۳ـ تبدیل R-L سری به موازی و برعکس

برای تبدیل این دو حالت به همدیگر باید برای ثابت بودن اثر مدار مقدار Z و φ در هر حالت یکی باشد، برای تبدیل موازی به سری داریم :

$\cos\varphi_s \longrightarrow$ حالت سری

$\cos\varphi_p \longrightarrow$ حالت موازی

$Z_p \longrightarrow$ امپدانس موازی

$Z_s \longrightarrow$ امپدانس سری

$$\cos\varphi_S = \cos\varphi_P$$

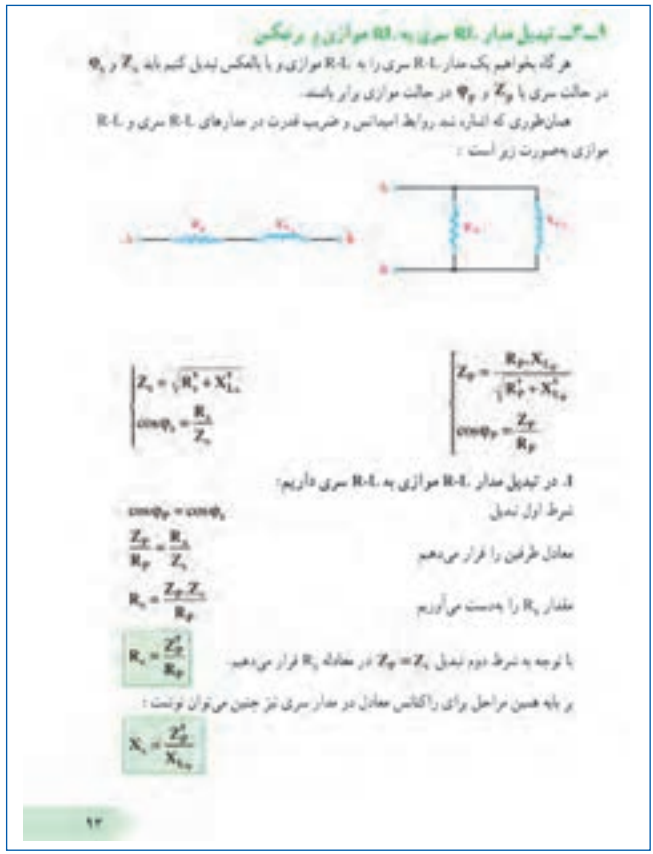
$$\frac{R_S}{Z_S} = \frac{Z_P}{R_P} \Rightarrow R_S = \frac{{Z_P}^2}{R_P}$$

بر همین اساس داریم :

$$X_S = \frac{Z_P^2}{X_{L_P}}$$

برای تبدیل سری به موازی نیز داریم :

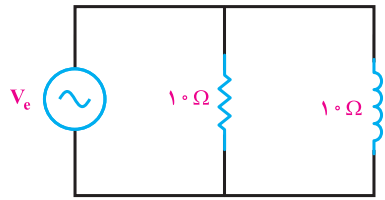
$$\begin{cases} R_P = \dfrac{Z_S^2}{R_S} \\ X_P = \dfrac{Z_S^2}{X_{L_S}} \end{cases}$$



تذکر: برای به‌دست آوردن معادل سری به موازی و بالعکس بهتر است ابتدا مقدار Zرا به‌دست آوریم. سپس در ادامه مقدار cosφ و از آنجا مقدار sinφ را حساب کنیم تا به کمک آنها R و X_L جدید به‌دست آید.

۱ـ۴ـ۳ـ حل تمرین شمارهٔ ۱۳ صفحهٔ ۹۷ کتاب درسی (شکل ۱۱ـ۳)

هدف : تبدیل مدار R–L موازی به یک مدار R–L سری.



شکل ۱۱ـ۳

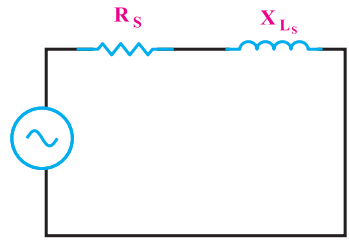
گام ۱) امپدانس معادله مدار را محاسبه می‌کنیم.

$$Z=\frac{R.X_L}{\sqrt{R^2+X_L^2}}=\frac{10\times10}{\sqrt{10^2+10^2}}=5\sqrt{2}\ \Omega$$

گام ۲) $\cos\varphi$ و $\sin\varphi$ را بیابید.

$$\cos\varphi=\frac{Z}{R}=\frac{5\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow\varphi=45^\circ\ ,\ \sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

گام ۳) می‌توان مقاومت اهمی معادل سری مدار مقاومت سلفی معادل سری مدار را با استفاده از روابط زیر محاسبه کرد (شکل ۱۲ـ۳).



شکل ۱۲ـ۳

$$R_s=Z\cos\varphi=5\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=5\ \Omega$$

$$X_{L_s}=Z\sin\varphi=5\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=5\ \Omega$$