فصل پنجم

مدارهای L – C جریان متناوب

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل از هنرجو انتظار می رود:

۱ـ منحنی‌ها و دیاگرام‌برداری جریان، ولتاژ و مقاومت ظاهری در مدار L–C سری و موازی را رسم کند.

۲ـ مقادیر مقاومت ظاهری، اختلاف فاز، جریان ــ ولتاژ و توان‌ها را درمدارهای L–C سری و موازی محاسبه کند.

۳ـ مفهوم رزنانس را شرح دهد و فرکانس رزنانس را در مدارهای L–C سری و موازی محاسبه کند.

۴ـ منحنی تغییرات امپدانس Z و جریان I، مدارهای L–C سری و موازی را در تغییرات فرکانس رسم کند.

۵ـ معادلات زمانی ولتاژ و جریان عناصر در مدارهای L–C سری و موازی را به‌دست آورد.

۱ـ۵ـ مقدمه

همکار گرامی در این فصل نیز برای ایجاد انگیزه بیشتر برای هنرجویان، در ابتدای شروع فصل از کاربردهای متداول مدارهای L–C برای آنها نمونه‌هایی برشمارید.

مدارات نوسان‌ساز، فرستنده‌های تلویزیونی و رادیویی و تزریق خازن در شبکه‌های با بار سلفی جهت اصلاح ضریب قدرت و استفاده از بانک‌های خازنی در این خصوص مواردی است که می‌توان به آنها اشاره نمود.

نکته بسیار مهمّی که در رابطه با اتصال خازن و سلف باید آن را یادآوری کنیم این است که چه در حالت سری وچه در حالت موازی این دو المان رفتاری خلاف همدیگر دارند.

در اتصال سری بردار ولتاژها در خلاف جهت همدیگر و در حالت موازی بردار جریان‌ها مقابل همدیگر بوده و اختلاف زاویه 180° می‌سازند.

این خاصیت باعث می‌شود تا این دو عنصر الکتریکی اثر همدیگر را خنثی و تضعیف نمایند.

۲ـ۵ـمدار L-C سری

در مدار L–C سری هرکدام از راکتانس سلفی X_L یا خازنی X_C بزرگتر باشد کیفیت سلفی یا خازنی مدار را تعیین می‌کند از همین مقایسه مقدار V_C یا V_L نیز مشخص می‌شود.

دانسته باشند. از آن‌جا که هر دو عنصر در شبکه توان راکتیو مبادله می‌کنند، به دلیل اثر متقابل آن‌ها می‌توان توان راکتیو شبکه را کاهش داد و مقدار آن را به صفر رساند. مدارهای L-C در شبکه‌ها به‌صورت اتصال سری، موازی یا اتصال سری موازی به کار گرفته می‌شوند. در این فصل، اتصال سری و موازی مدارهای L-C را به طور جداگانه بررسی می‌کنیم.

۲ـ۵ـ مدار L-C سری

مدار الکتریکی L-C سری که از یک عنصر خالص خازنی و یک عنصر خالص سلفی تشکیل می‌شود، مطابق شکل ۱ـ۵ است. در این مدار، جریان هر دو عنصر یکسان است. اگر برای رسم دیاگرام برداری، جریان را مبنا قرار دهیم ولتاژ دو سر سلف از جریان ۹۰° جلوتر و ولتاژ دو سر خازن از جریان ۹۰° عقب‌تر خواهد بود. دیاگرام برداری ولتاژ با فرض $V_L > V_C$ مطابق شکل ۲ـ۵ رسم می‌شود.

شکل ۱ـ۵ـ مدار L-C سری

۱ـ۲ـ۵ـ محاسبهٔ امپدانس مدار L-C سری

از شکل ۱ـ۵ می‌توان مقادیر ولتاژهای V_L و V_C را به دست آورد.

شکل ۲ـ۵ـ دیاگرام برداری مدار L-C سری ($V_L > V_C$)

$$V_L = I_e X_L = I_e L\omega \qquad (۵-۱)$$

$$V_C = I_e X_C = I_e \times \frac{1}{C\omega} \qquad (۵-۲)$$

از شکل ۲ـ۵ دیاگرام برداری ولتاژها و شکل ۱ـ۵ مدار L-C سری می‌توان نوشت:

$$\vec{V}_e = \vec{V}_L + \vec{V}_C \quad , \quad V_e = I_e Z$$

$$V_e = V_L - V_C \qquad (۵-۳)$$

۱۱۸

چون مثل همه مدارهای سری مبنا جریان است و در اینجا ولتاژ سلف نسبت به جریان مدار ۹۰° پیش‌فاز و ولتاژ خازن ۹۰° پس‌فاز است و جمعاً ۱۸۰° درجه الکتریکی با همدیگر زاویه می‌سازند که طبق روابط خوانده شده در فصل بردارها برآیند این دو بردار با تفاضل آنها معادل است یعنی :

$V_e = V_L - V_C$ (در صورتی که $X_L > X_C$)

به همین دلیل مقدار امپدانس کل Z برابر است با :

$Z = X_L - X_C$

الف)

مقادیر توان‌ها در مدار L–C سری : چون عنصر اکتیو (مقاومت) در این مدار نداریم پس توان اکتیو نیز مصرف نمی‌شود و خواهیم داشت : $P_e = 0$ W

ولی در عوض به دلیل وجود دو عنصر راکتیو سلف و خازن توان راکتیو این دو المان به صورت زیر خواهد بود :

$P_{d_L} = X_L I_e^2$ ⟶ مصرف کننده توان راکتیو

$P_{d_c} = -X_C I_e^2$ ⟶ تولیدکننده توان راکتیو

چون رفتار این دو المان مخالف یکدیگر است.

P_d کل $= P_{d_L} - P_{d_c} = \pm V_e I_e \sin 90^\circ = \pm V_e I_e$

و در نهایت توان ظاهری مدار از قدر مطلق توان راکتیو به‌دست می‌آید.

$P_S = |P_d| = V_e I_e$

ب)

معادله زمانی ولتاژ کل : اگر $X_L > X_C$ مدار سلفی است بنابراین ولتاژ پیش‌فاز (به اندازه ۹۰°) خواهد بود.

$$V=+V_m \sin(\omega t+۹۰^\circ)$$

و در صورتی که $X_L < X_C$ مدار خازنی و ولتاژ مدار پس‌فاز (به اندازه ۹۰°) خواهد بود.

$$V=+V_m \sin(\omega t-۹۰^\circ)$$

فرض بر خالص بودن سلف و خازن می‌باشد.

پس به هنرجویان متذکر شویم که برای حل مسائل مربوط به L_C سری ابتدا نوع مدار را مشخص کنیم که تشخیص آن از مقایسه X_L و X_C به سادگی میسر است.

در مثال ۱ صفحه ۱۲۰ کتاب درسی چون ولتاژ مدار به اندازه ۹۰° نسبت به جریان پس‌فاز است پس مدار در مجموع خاصیت خازنی دارد و $Z= X_C - X_L$

ج)

حالت تشدید یا رزنانس در مدار L–C سری : با تغییر فرکانس، مقدار C و مقدار L مدار در وضعیتی قرار می‌گیرد که مقدار راکتانس سلف و خازن با همدیگر برابر می‌شوند یعنی $X_L=X_C$ و از آنجا خواهیم داشت $Z=|X_L-X_C|=0\Omega$ و جریان به بیشتر مقدار خود خواهد رسید.

این حالت رزنانس نامیده می‌شود و فرکانسی که در این فرکانس این اتصال کوتاه رخ می‌دهد فرکانس تشدید نامیده می‌شود به هنرجویان حتماً یادآوری کنیم که مدار به حالت اتصال کوتاه می‌رود.

$$X_L = X_c \rightarrow L\omega = \frac{1}{C\omega} \rightarrow LC\omega^2 = 1 \rightarrow f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

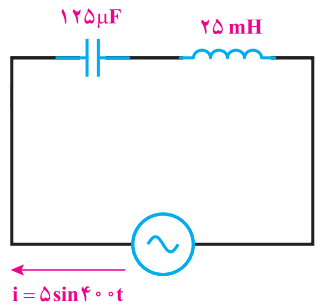
در مثال آورده شده در صفحه ۱۲۳ (مثال ۲)، یکی از مواردی که هنرجویان با آن دچار زحمت می‌شوند محاسبه مقدار فرکانس رزنانس (تشدید) است.

برای حل این فرکانس بهتر است ابتدا با استفاده از ماشین‌حساب و با رعایت نمادهای علمی برای میلی هانری و میکروفاراد (ضریب اندوکتانس و ظرفیت خازن) مقدار زیر رادیکال و جذر آن را به‌دست آورده سپس در مقدار 2π ضرب نمایند و در انتها با معکوس کردن مقدار با استفاده از کلید X^{-1} مقدار f_r به‌دست می‌آید.

(مثال) $2\times\pi\times\sqrt{\ }\ 10\ \boxed{EXP}\ \boxed{+/-}\ 3\times10\ 0\ \boxed{EXP}\ \boxed{+/-}\ 6 = 6/28\times10^{-3}$

$6/28\times10^{-3}\ \boxed{X^{-1}} = 159/23\ HZ$

۱ـ۲ـ۵ـ حل تمرین مشابه تمرین ۱ صفحه ۱۲۹ کتاب درسی (شکل ۱ـ۵)



شکل ۱ــ ۵

هدف : نوشتن معادله ولتاژ دو سر L و C

گام ۱) ابتدا مقادیر اهمی L و C را می‌نویسیم.

$$X_L=L\omega=۱۰\ \Omega$$

$$X_C=\frac{۱}{C\omega}=۲۰\ \Omega$$

گام ۲) در نظر گرفتن I_e مقادیر مؤثر ولتاژ دو سر L و C را می‌یابیم.

$$I_e=\frac{۵}{\sqrt{۲}}$$

$$V_L=I_e.X_L=I_eL\omega=\frac{۵}{\sqrt{۲}}\times۲۵\times۱۰^{-۳}\times۴۰۰=\frac{۵۰}{\sqrt{۲}}\ V$$

$$V_C=I_e.X_C=I_e\times\frac{۱}{C\omega}=\frac{۵}{\sqrt{۲}}\times\frac{۱}{۱۲۵\times۱۰^{-۶}\times۴۰۰}=\frac{۵\times۱۰^{+۴}}{\sqrt{۲}\times۱۲۵\times۴}=۵۰\sqrt{۲}\ V$$

گام ۳) نوشتن معادلات زمانی برای ولتاژ دو سر L و C

ــ اگر بردار جریان I_e را مبنا قرار دهیم ولتاژ دو سر سلف ۹۰° از جریان جلوتر و ولتاژ دو سر خازن ۹۰° از جریان عقب‌تر خواهد بود.

$$V_L(t)=V_{L_m}\sin(\omega t+\frac{\pi}{۲})=۵۰\sin(۴۰۰t+\frac{\pi}{۲})$$

$$V_C(t)=V_{C_m}\sin(\omega t-\frac{\pi}{۲})=۱۰۰\sin(۴۰۰t-\frac{\pi}{۲})$$

ب)

هدف : نوشتن معادله ولتاژ منبع

ــ برای نوشتن معادله ولتاژ منبع کافی است معادلات زمانی دو سر سلف و خازن را با هم جمع کنیم.

گام ۱) جمع معادلات دو سر سلف و خازن

$$V(t)=V_L(t)+V_C(t)$$

$$V(t)=۵۰\sin(۴۰۰t+\frac{\pi}{۲})+۱۰۰\sin(۴۰۰t-\frac{\pi}{۲})$$

گام ۲) با استفاده از روابط زیر، ۲ معادله را به معادلات مشابهی می‌توان تبدیل کرد.

$$\begin{cases}\sin(\alpha-\frac{\pi}{۲})=-\cos\alpha\\ \sin(\alpha+\frac{\pi}{۲})=\cos\alpha\end{cases}$$

به دلیل اینکه $X_L<X_C$ می‌باشد، معادله ولتاژ ۹۰° عقب‌تر از جریان مبنا می‌باشد.

$$V(t)=۵۰\cos\omega t - ۱۰۰\cos\omega t = -۵۰\cos ۴۰۰t$$

پ)

هدف : محاسبهٔ توان‌های مدار

گام ۱) تعیین ضریب توان مؤثر و غیر مؤثر

به دلیل اینکه $X_L<X_C$ می‌باشد $\varphi = -۹۰^\circ$ خواهد بود.

$$X_L<X_C \longrightarrow \varphi = -۹۰^\circ \longrightarrow \cos(-۹۰)=۰$$

گام ۲) محاسبه توان‌ها

$$P_e=V_e.I_e\cos\varphi = ۰$$

توان غیرمؤثر مدار از طریق سلف و خازن ایجاد می‌شود.

برای محاسبهٔ توان غیرمؤثر مدار می‌توان، توان غیرمؤثر سلف و خازن را به تنهایی محاسبه کرد و در نهایت جمع کرد.

$$P_{d_L}= I_e^{۲}.X_L= (\frac{۵}{\sqrt{۲}})^{۲} (۱۰) =۱۲۵ \ V.A$$

$$P_{d_c}= -I_e^{۲}.X_C= -(\frac{۵}{\sqrt{۲}})^{۲} (۲۰) = -۲۵۰ \ V.A$$

$$P_d= P_{d_L}+P_{d_c}=۱۲۵-۲۵۰=-۱۲۵ \ V.A$$

$$P_d= V_e I_e \sin\varphi = -۱۲۵ \ (VAR)$$

$$P_S=|P_d|=V_e.I_e=۱۲۵ \ (V.A)$$

ت)

هدف : محاسبه فرکانس رزنانس

در فرکانس رزنانس مقادیر مقاومت خازنی و مقاومت سلفی با هم برابر می‌باشند.

فرکانس رزنانس از رابطه $f_r = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC}}$ محاسبه می‌شود.

$$f_r = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC}} = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{۲۵\times۱۰^{-۳}\times۱۲۵\times۱۰^{-۶}}} = ۹۰ \ HZ$$

ث)

هدف : رسم دیاگرام برداری ولتاژها

$V_{L_m}=۵۰V$

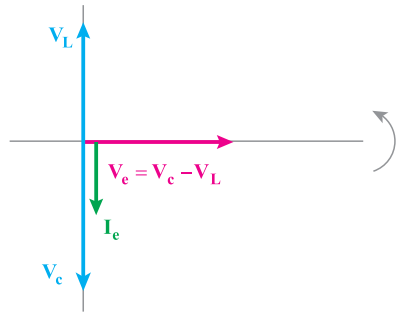
$V_{c_m}=۱۰۰V$

گام ۱) I_e را مبنا قرار می‌دهیم.

ولتاژ دو سر سلف از جریان $^{\circ}۹۰$ جلوتر و ولتاژ دو سر خازن از جریان $^{\circ}۹۰$ عقب تر خواهد بود.

گام ۲) رسم دیاگرام برداری ولتاژها

V_e (ولتاژ کل) به طرف پایین می‌باشد به دلیل اینکه $V_C>V_L$ است. (شکل ۲ــ ۵)

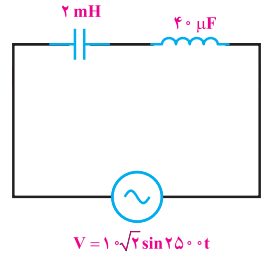


شکل ۲ــ۵

۲ـ۲ـ۵ـ حل تمرین شماره ۲ صفحه ۱۲۹ کتاب درسی (شکل ۳ـ۵)

الف)

هدف : محاسبهٔ معادله زمانی جریان کل



شکل ۳ــ۵

گام ۱) ابتدا مقادیر اهمی L و C را می‌نویسیم.

$$X_c = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{40\times10^{-6}\times2500} = 10\ \Omega$$

$$X_L = L\omega = 2\times10^{-3}\times2500 = 5\ \Omega$$

گام ۲) با توجه به گام ۱ می‌توان اختلاف فاز را به صورت زیر مشخص کرد.

$$X_L < X_C \longrightarrow \varphi = -90^\circ$$

گام ۳) محاسبه امپدانس کل مدار

$$Z = |X_L - X_C| = |5 - 10| = 5\ \Omega$$

گام ۴) تعیین معادله جریان با توجه به مقادیر جریان و θ_I

$$I_m = \frac{V_m}{Z} = \frac{10\sqrt{2}}{5} = 2\sqrt{2}\ A$$

$$\varphi = \theta_V - \theta_I \longrightarrow -90^\circ = 0 - \theta_I \longrightarrow \theta_I = 90^\circ$$

$$i(t) = 2\sqrt{2}\sin(2500t + 90^\circ)$$

ب)

هدف : نوشتن معادله ولتاژ دو سر L و C

گام ۱) با توجه به جریان عبوری از مدار می‌توانیم ولتاژ عبوری از مدار را بیابیم.

$$V_{L_m} = I_m . X_L = 2\sqrt{2}\times5 = 10\sqrt{2}\ \ V$$

$$V_{C_m} = I_m . X_C = 2\sqrt{2}\times10 = 20\sqrt{2}\ \ V$$

گام ۲) نوشتن معادله ولتاژ دو سر L و C

اگر جریان مبنا قرار بگیرد، معادله ولتاژ دو سر سلف 90° جلوتر و معادله ولتاژ دو سر خازن 90° عقب‌تر است.

$$V_L(t) = V_{L_m}\sin(\omega t + 90 + \frac{\pi}{2}) = 10\sqrt{2}\sin(2500t + 180)$$

$$V_C(t) = V_{C_m}\sin(\omega t + 90 - \frac{\pi}{2}) = 20\sqrt{2}\sin(2500t)$$

پ)

هدف : محاسبهٔ توان‌های مدار

گام ۱) یافتن مقادیر ضریب توان مؤثر و غیر مؤثر

$$X_C > X_L \longrightarrow \varphi = -90^\circ \longrightarrow \cos(-90) = 0\ ,\ \sin(-90) = -1$$

گام ۲) محاسبهٔ تک‌تک توان‌های مدار با استفاده از روابط مربوطه

$$P_e = V_e . I_e \cos\varphi = ۰$$

$$P_d = V_e . I_e \sin\varphi = \frac{۱۰\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} \times \frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} \sin(-۹۰) = -۲۰ \ V.A.R$$

$$P_S = |P_d| = V_e I_e = ۲۰ \ V.A$$

ت)

هدف : فرکانس رزنانس

در فرکانس رزنانس مقادیر مقاومت خازنی و مقاومت سلفی با هم برابر می‌باشند.

فرکانس رزنانس از رابطه $f_r = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC}}$ محاسبه می‌شود.

$$f_r = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC}} = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{۲\times۱۰^{-۳}\times۴۰\times۱۰^{-۶}}} = ۵۶۲/۶۹ \ HZ$$

ث)

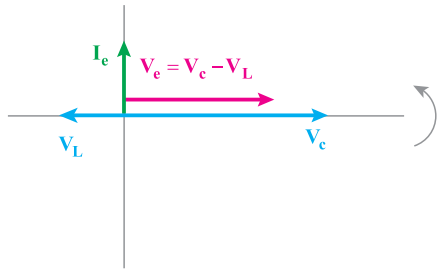
هدف : رسم دیاگرام برداری ولتاژها

گام ۱) I_e را مبنا قرار می‌دهیم.

ولتاژ دو سر سلف از جریان ۹۰° جلوتر و ولتاژ دو سر خازن از جریان ۹۰° عقب‌تر خواهد بود.

گام ۲) رسم دیاگرام برداری ولتاژها

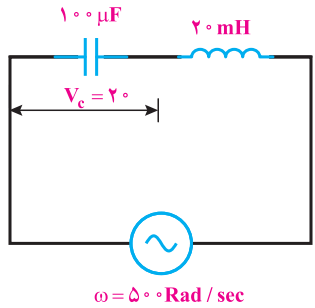
V_e (ولتاژ کل) برآیند دو ولتاژ V_C و V_L می‌باشد و در این تمرین $V_L < V_C$ می‌باشد و V_e (ولتاژ برآیند) در جهت V_C خواهد بود. (شکل ۴ــ۵)



شکل ۴ــ۵

۳ـ۲ـ۵ـ حل تمرین ۳ صفحه ۱۲۹ کتاب درسی (شکل ۵ـ۵)

هدف : نوشتن معادله ولتاژ و جریان



شکل ۵ــ۵

گام ۱) ابتدا مقادیر اهمی L و C را می‌نویسیم.

$$X_c = \frac{۱}{C\omega} = \frac{۱}{۱۰۰\times۱۰^{-۶}\times۵۰۰} = ۲۰\ \Omega$$

$$X_L = L\omega = ۲۰\times۱۰^{-۳}\times۵۰۰ = ۱۰\ \Omega$$

گام ۲) با توجه به گام ۱ می‌توان اختلاف فاز را به صورت زیر مشخص کرد.

خاصیت خازنی

$$X_L < X_C \longrightarrow \varphi = -۹۰^\circ$$

$$\varphi = \theta_V - \theta_I \longrightarrow -۹۰^\circ = \theta_V - ۰ \longrightarrow \theta_V = -۹۰^\circ$$

گام ۳) محاسبهٔ امپدانس کل مدار

$$Z = |X_C - X_L| = |۲۰ - ۱۰| = ۱۰\ \Omega$$

گام ۴) محاسبهٔ مقدار جریان و ولتاژ کل

$$I_C = \frac{V_C}{X_C} = \frac{۲۰}{۲۰} = ۱\ A$$

در مدار سری تمامی جریان‌ها با هم برابر و هم‌فاز می‌باشند.

$$I_e = I_C = I_L = ۱\ A$$

$$I(t) = \sqrt{۲}\ \sin(۵۰۰t + ۹۰)$$

جریان منبع را مبنا قرار می‌دهیم $\theta_I = ۰$

$$i(t) = \sqrt{۲}\ \sin(۲۵۰۰t)$$

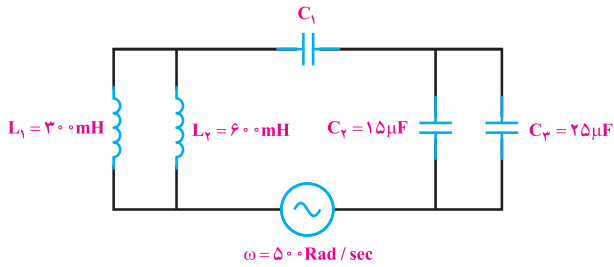
گام ۵) نوشتن معادلهٔ ولتاژ جریان

$$V_e = Z.I_e = ۱۰\times۱ = ۱۰\ V$$

$$V(t) = ۱۰\sqrt{۲}\ \sin(۵۰۰t + ۹۰^\circ)$$

۴-۲-۵ ـ حل تمرین ۶ صفحه ۱۳۰ کتاب درسی (شکل ۶ـ۵)

هدف : تعیین میزان c_1 در حالت تشدید



شکل ۶ـ۵

در حالت تشدید $X_L=X_C$ می‌باشد، پس کافی‌است X_C کل و یا X_L کل را بیابیم و با هم برابر قرار دهیم.

گام ۱) تعیین مقاومت معادل سلفی کل

$$X_{L_1}=L\omega=۳۰۰\times۱۰^{-۳}\times۵۰۰=۱۵۰\Omega$$

$$X_{L_2}=L\omega=۶۰۰\times۱۰^{-۳}\times۵۰۰=۳۰۰\ \Omega$$

$$X_L=(X_{L_1}\| X_{L_2})=\frac{۱۵۰\times۳۰۰}{۴۵۰}=۱۰۰\ \Omega$$

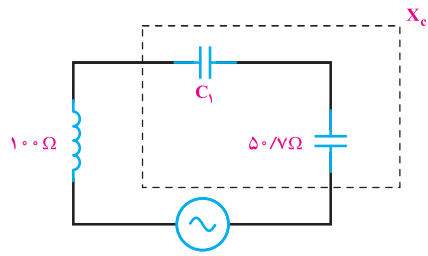
گام ۲) تعیین مقاومت معادل خازنی کل

$$X_{C_1}=\frac{۱}{۱۵\times۱۰^{-۶}\times۵۰۰}=\frac{۱۰^{۴}}{۷۵}=۱۳۳\ \Omega$$

$$X_{C_2}=\frac{۱}{۲۵\times۱۰^{-۶}\times۵۰۰}=\frac{۱۰^{۴}}{۲۵\times۵}=۸۰\ \Omega$$

$$X_C=(X_{C_1}\| X_{C_2})=\frac{۱۳۳\times۸۰}{۲۱۰}=۴۹.۵\ \Omega$$

گام ۳) با در نظر گرفتن $X_L=X_C$ می‌توان X_{C_1} را محاسبه کرد و در نهایت C_1 قابل محاسبه است (شکل ۷ـ۵).



شکل ۷ـ۵

$$X_L = X_C$$

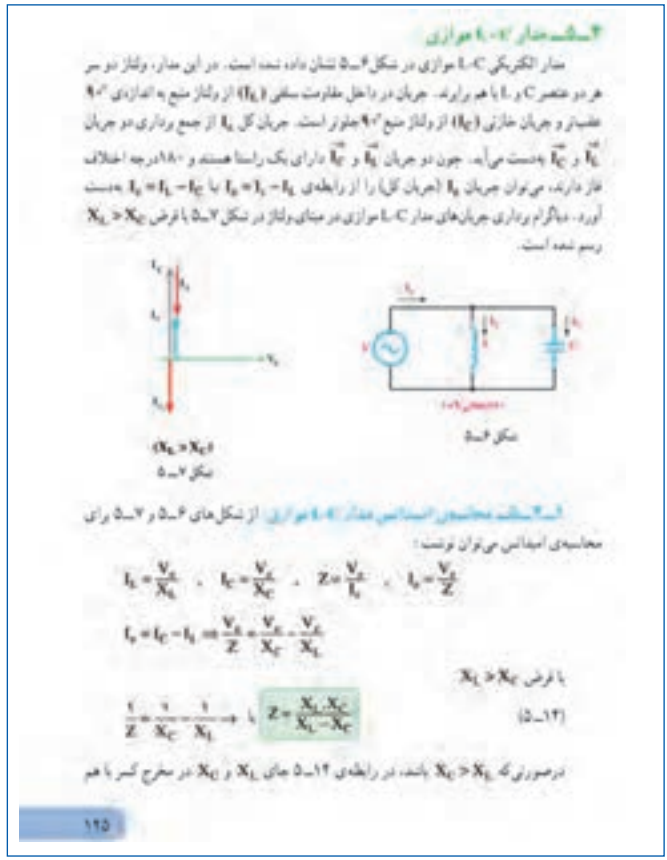
$$۱۰۰ = X_{C_۱} + ۵۰/۷$$

$$X_{C_۱} = ۱۰۰ - ۵۰ \times ۷ = ۴۹/۳ \ \Omega$$

$$X_{C_۱} = \frac{۱}{C_۱ \omega} \rightarrow C_۱ = \frac{۱}{X_{C_۱} \omega} = \frac{۱}{۵۰۰ \times ۴۹/۳}$$

۳ـ۵ـ مدار L-C موازی

برای تحلیل مدارهای L–C موازی ولتاژ را مبنا در نظر می‌گیریم و روی جریان‌ها مطالعه می‌کنیم در این‌جا نیز جریان‌های سلف و خازن ۱۸۰° اختلاف فاز دارند.



جریان کل مدار از تفاضل جریان سلف و خازن تحصیل می‌شود. مانند مدارهای L–C سری ابتدا بهتر است نوع مدار از نظر خاصیت سلفی یا خازنی مشخص شود.

برای این کار هرکدام از مقادیر راکتانس سلفی X_L یا X_C کوچک‌تر بود کیفیت مدار را از نظر سلفی یا خازنی مشخص می‌کند به‌دلیل کوچک‌تر بودن راکتانس، جریان آن راکتانس بیشتر خواهد بود و در اتصال L–C موازی جریان‌ها تعیین کننده کیفیت مدار هستند (بر خلاف L–C سری که ولتاژ بیشتر تعیین کننده بود).

$$\text{اگر} \begin{cases} X_L < X_C \rightarrow \text{خاصیت مدار سلفی است} & (I_L > I_C) \\ X_C < X_L \rightarrow \text{خاصیت مدار خازنی است} & (I_C > I_L) \end{cases}$$

الف)

فرکانس رزنانس در این مدار کاملاً شبیه حالت سری است فقط در حالت سری وقتی حالت تشدید داشته‌باشیم مدار به حالت اتصال باز (مدار باز) و در حالت موازی در فرکانس رزنانس مدار به حالت اتصال کوتاه تبدیل می‌شود.

ب)

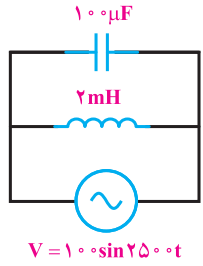
توان اکتیو در مدار L–C موازی نیز صفر است ولی دو توان راکتیو P_{d_c} و P_{d_L} برای خازن و سلف وجود دارد.

تذکر: در مثال‌هایی که گفته می‌شود جریان یک شاخه چند برابر جریان شاخه دیگر است صریحاً به خازنی یا سلفی بودن مدار اشاره دارد (شبیه مثال ۳ صفحه ۱۲۷ کتاب درسی)

۱ـ۳ـ۵ـ حل تمرین شماره ۷ صفحه ۱۳۰ کتاب درسی (شکل ۸ ـ۵)

الف)

هدف : محاسبه معادله جریان دو شاخه



شکل ۸ ــ ۵

گام ۱) تعیین جریان ماکزیمم هر شاخه

$$X_C = \frac{۱}{C\omega} = \frac{۱}{۱۰۰\times۱۰^{-۳}\times۲۵۰۰} = \frac{۱۰۰}{۲۵} = ۴ \ \Omega$$

$$X_L = L\omega = ۲\times ۱۰^{-۳}\times ۲۵۰۰ = ۵\ \ \Omega$$

$X_C < X_L \longrightarrow$ مدار خازنی است

$$I_{C_m} = \frac{V_m}{X_C} = \frac{۱۰۰}{۴} = ۲۵\,A$$

$$I_{L_m} = \frac{V_m}{X_L} = \frac{۱۰۰}{۵} = ۲۰\,A$$

گام ۲) نوشتن معادله جریان هر شاخه

جریان در داخل مقاومت سلفی (I_L) از ولتاژ شبکه به اندازه ۹۰° عقب‌تر و جریان خازنی(I_C) از ولتاژ ۹۰° جلوتر است.

$$I_C(t)=I_{Cm}\sin(\omega t+\frac{\pi}{۲})=۲۵\sin(۲۵۰۰t+۹۰^\circ)$$

$$I_L(t)=I_{Lm}\sin(\omega t-\frac{\pi}{۲})=۲۰\sin(۲۵۰۰t-۹۰^\circ)$$

ب)

هدف : نوشتن معادلهٔ جریان منبع

I_e در جهت I_C می‌باشد چون $I_L > I_C$.

گام ۱) چون در جریان $\overrightarrow{I_L}$ و $\overrightarrow{I_C}$ دارای یک راستا هستند ۱۸۰° اختلاف فاز دارند، می‌توان جریان I (جریان کل) را از تفاضل $I = I_C - I_L$ به‌دست آورد.

$$I_{e_m} = I_{C_m} - I_{L_m} = ۲۵ - ۲۰ = ۵A$$

گام ۲) نوشتن معادله جریان کل

$$I(t)=۵\sin(۲۵۰۰t+۹۰^\circ)$$

پ)

هدف : محاسبهٔ توان‌های مدار

گام ۱) یافتن مقادیر ضریب توان مؤثر و غیرمؤثر

$$X_L > X_C \longrightarrow \varphi = ۹۰^\circ \longrightarrow \cos(۹۰) = ۰\ ,\ \sin(۹۰) = ۱$$

گام ۲) محاسبهٔ تک‌تک توان‌های مدار با استفاده از روابط مربوطه

$$P_d = V_e . I_e \sin\varphi = \frac{۱۰۰}{\sqrt{۲}} \times \frac{۵}{\sqrt{۲}} \sin(۹۰) = ۲۵۰\ V.A.R$$

$P_e = V_e . I_e \cos\varphi = ۰$

$P_S = |P_d| = V_e I_e = ۲۵۰ \ V.A$

ت)

هدف : محاسبه فرکانس رزنانس

در فرکانس رزنانس مقادیر مقاومت خازنی و مقاومت سلفی با هم برابر می‌باشند.

فرکانس رزنانس از رابطهٔ $f_r = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC}}$ محاسبه می‌شود.

$$f_r = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC}} = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{۲\times۱۰^{-۳}\times۱۰۰\times۱۰^{-۶}}} = ۳۵۵/۸۸ \ \ HZ$$

ث)

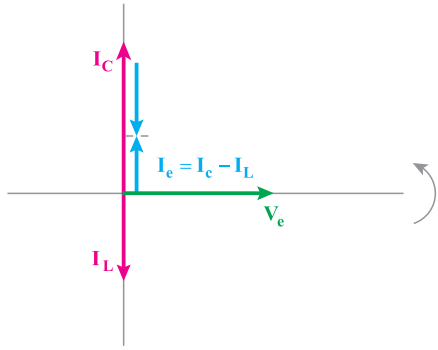
هدف : رسم دیاگرام برداری ولتاژها

گام ۱) V_e را مبنا قرار می‌دهیم(در مدارات موازی)

جریان در داخل مقاومت سلفی (I_L) از ولتاژ شبکه به اندازه ۹۰° عقب‌تر و جریان خازنی(I_C) از ولتاژ ۹۰° جلوتر است.

گام ۲) رسم دیاگرام برداری ولتاژها

جریان کل به طرف بالا می‌باشد، به دلیل اینکه $I_C > I_L$ است (شکل ۹ــ۵).

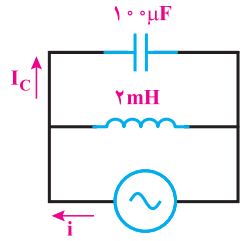


شکل ۹ــ۵

۲ـ۳ـ۵ـ حل تمرین ۹ صفحه ۱۳۱ کتاب درسی (شکل ۱۰ـ۵)

الف)

هدف : تعیین معادلهٔ ولتاژ منبع



شکل ۱۰ــ۵

در مدارات موازی ولتاژ تمام شاخه‌ها برابر هستند.

با محاسبه ولتاژ ماکزیمم هر شاخه و با استفاده از θ_V می‌توان معادلهٔ ولتاژ منبع را بنویسیم.

گام ۱) محاسبه مقدار مقاومت سلفی و مقاومت خازنی معادل مدار

$$X_c = \frac{۱}{C\omega} = \frac{۱}{۱۰۰\times۱۰^{-۶}\times۲۵۰۰} = \frac{۱۰۰}{۲۵} = ۴\ \Omega$$

$$X_L = L\omega = ۲\times۱۰^{-۳}\times۲۵۰۰ = ۵\ \Omega$$

گام ۲) با توجه به مقدار I_C می‌توان V_{C_m} را به صورت زیر بیابیم.

$$V_{C_m} = I_{C_m}\times X_C = ۴\times۲\sqrt{۲} = ۸\sqrt{۲}\ V$$

گام ۳) φ را با در نظر گرفتن $X_C<X_L$ می‌یابیم.

$$X_C<X_L \longrightarrow I_C>I_L \longrightarrow \varphi = ۹۰^\circ$$

θ_V و θ_I برای معادلات ولتاژ و جریان منبع به کار می‌روند.

در مدارات موازی ولتاژ مبنا می‌باشد.

$$\varphi = \theta_V - \theta_I \longrightarrow ۹۰^\circ = ۰ - \theta_I \longrightarrow \theta_I = -۹۰^\circ$$

گام ۴) نوشتن معادلهٔ ولتاژ منبع

$$V_{C_m} = V_{L_m} = V_{e_m}$$

$$V(t) = V_m\sin(\omega t + \theta_V) \longrightarrow V(t) = ۸\sqrt{۲}\sin(۲۵۰۰t)$$

ب)

هدف : تعیین معادلهٔ جریان منبع

گام ۱) جریان ماکزیمم تک‌تک شاخه‌ها را می‌یابیم.

$$I_{C_m} = ۲\sqrt{۲}\ A$$

$$I_{L_m} = \frac{V_{L_m}}{X_L} = \frac{۸\sqrt{۲}}{۵} = ۱/۶\sqrt{۲}\ A$$

گام ۲) جریان ماکزیمم منبع، حاصل جمع برداری دو جریان به‌دست آمده در گام اول می‌باشد.

$$I_{L_m} = \sqrt{I_{C_m}^{۲} + I_{L_m}^{۲}} = \sqrt{(۲\sqrt{۲})^{۲} + (۱/۶\sqrt{۲})^{۲}} = ۳/۶ \quad A$$

گام ۳) با توجه به θ_I معادله جریان منبع را می‌نویسیم.

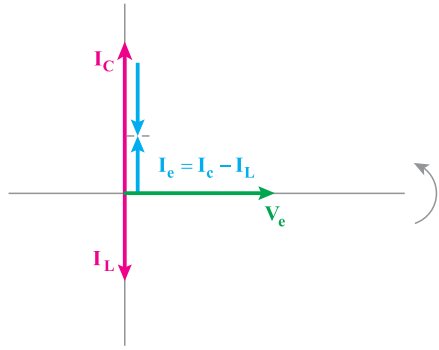
$$i(t)=I_{e_m}\sin(\omega t+\theta_I)=۳/۶\sin(۲۵۰۰t-۹۰)$$

پ)

هدف : رسم دیاگرام برداری مدار

با توجه به اینکه $X_L>X_C$ می‌باشد در نتیجه $I_C > I_L$ می‌باشد و جهت جریان منبع (I_e) به سمت (I_C) می‌باشد.

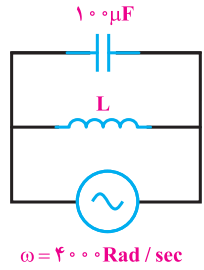
در مدارات موازی ولتاژ را مبنا قرار می‌دهیم. (شکل ۱۱ــ۵)



شکل ۱۱ــ۵

۳ـ۳ـ۵ـ حل تمرین شماره ۱۰ صفحه ۱۳۲ کتاب درسی (شکل ۱۲ـ۵)

هدف : یافتن L در حالت تشدید



شکل ۱۲ــ۵

گام ۱) $X_L=X_C$ (برای ایجاد حالت تشدید)

$$X_L=X_C$$
$$\omega=\frac{۱}{C\omega}\rightarrow L=\frac{۱}{C\omega^{۲}}$$

گام ۲) فرکانس تشدید را جایگزین کرده و L را می‌یابیم.

$$L=\frac{۱}{۱۰۰\times۱۰^{-۶}\times۴۰۰۰^{۲}}=\frac{۱}{۱۶۰۰}=۰/۶۲\ mH$$

۴-۳-۵- حل تمرین شماره ۱۱ صفحه ۱۳۲ کتاب درسی

هدف : محاسبه C و L با توجه به معلومات مسئله

$$I_C=۵I_L \quad , \quad V=۱۰۰\sin ۲۵۰۰t \quad , \quad i=۸\sin(۲۵۰۰t+\frac{\pi}{۲})$$

گام ۱) با توجه به رابطه جریان سلف و خازن، رابطهٔ بین مقاومت‌های سلفی و مقاومت خازنی را می‌یابیم.

$$I_e=\frac{۸}{\sqrt{۲}}A \quad , \quad V_e=\frac{۱۰۰}{\sqrt{۲}}V$$

$$\begin{cases} I_L=\dfrac{V_e}{X_L}=\dfrac{\frac{۱۰۰}{\sqrt{۲}}}{X_L} \\ I_C=\dfrac{V_e}{X_C}=\dfrac{\frac{۱۰۰}{\sqrt{۲}}}{X_C} \end{cases} \rightarrow I_L=۵I_C \rightarrow \frac{\frac{۱۰۰}{\sqrt{۲}}}{X_L}=\frac{\frac{۱۰۰}{\sqrt{۲}}}{X_C}$$

$$X_L=۵X_C$$

گام ۲) Z را می‌توان از دو رابطه، یکی با توجه به معادلات جریان و ولتاژ و دیگری با استفاده از X_C و X_L یافت، در نهایت می‌توان X_C و X_L را محاسبه کرد.

$$Z=\frac{V_m}{I_m}=\frac{۱۰۰}{۸}$$

$$Z=\frac{X_L.X_C}{|X_L-X_C|}=\frac{X_L.۵X_C}{|۵X_C.X_L|}=\frac{۵X_C^{۲}}{۴X_C}=\frac{۵}{۴}X_C \rightarrow \frac{۱۰۰}{۸}=\frac{۵}{۴}X_C$$

$$X_C=۱۰\Omega \quad , \quad X_L=۵X_C=۵۰\Omega$$

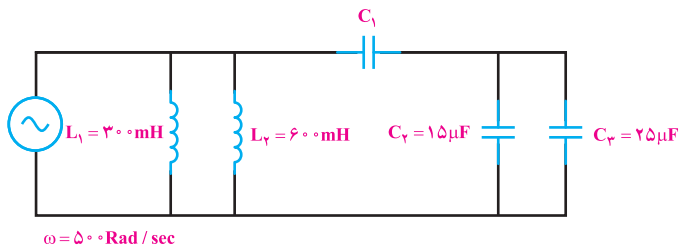
گام ۳) C و L با استفاده از مقاومت سلفی و خازنی قابل محاسبه می‌باشند.

$$X_C=\frac{۱}{C\omega}\rightarrow C=\frac{۱}{\omega X_C}=\frac{۱}{۲۵۰۰\times۱۰}=۴۰\ \mu F$$

$$X_L = L\omega \rightarrow L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{۵۰}{۲۵۰۰} = \frac{۱}{۵۰} = ۲۰ \text{ mH}$$

۵ـ۳ـ۵ـ حل تمرین شماره ۱۲ کتاب صفحه ۱۳۲ (شکل ۱۳ـ۵)

هدف : تعیین میزان $c_۱$ در حالت تشدید



شکل ۱۳ـ۵

در حالت تشدید $X_L=X_C$ می‌باشد، پس کافی‌است X_C کل و X_L کل را بیابیم و با هم برابر قرار دهیم.

گام ۱) تعیین مقاومت معادل سلفی کل

$$X_{L_۱}=L\omega=۳۰۰\times۱۰^{-۳}\times۵۰۰=۱۵۰\Omega$$

$$X_{L_۲}=L\omega=۶۰۰\times۱۰^{-۳}\times۵۰۰=۳۰۰\Omega$$

$$X_L=(X_{L_۱}\| X_{L_۲})=\frac{۱۵۰\times۳۰۰}{۴۵۰}=۱۰۰\Omega$$

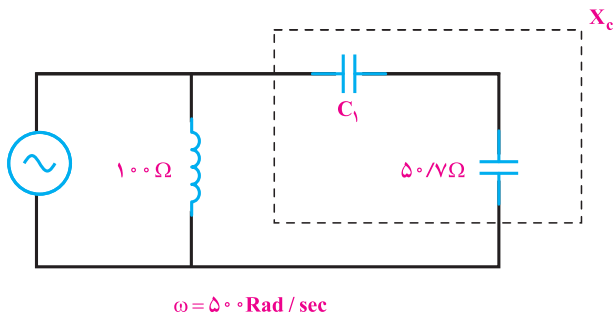
گام ۲) تعیین مقاومت معادل خازنی کل

$$X_{C_۱}=\frac{۱}{۱۵\times۱۰^{-۶}\times۵۰۰}=\frac{۱۰^۴}{۷۵}=۱۳۳\ \Omega$$

$$X_{C_۲}=\frac{۱}{۲۵\times۱۰^{-۶}\times۵۰۰}=\frac{۱۰^۴}{۲۵\times۵}=۸۰\ \Omega$$

$$X_C=(X_{C_۱}\| X_{C_۲})=\frac{۱۳۳\times۸۰}{۲۱۰}=۴۹.۵\Omega$$

گام ۳) با در نظر گرفتن $X_L=X_C$ می‌توان $X_{C_۱}$ را محاسبه کرد و در نهایت $C_۱$ قابل محاسبه است (شکل ۱۴ـ۵).



شکل ۱۴ـ۵

راه دیگر نیز استفاده از معادل قرار دادن ظرفیت معادل خازن‌ها برای محاسبه X_{C_t} و معادل کردن آن با X_{L_t} می‌باشد.

$$X_L = X_C$$

$$۱۰۰ = X_{C_۱} + ۵۰/۷$$

$$X_{C_۱} = ۱۰۰ - ۵۰/۷ = ۴۹/۳ \ \Omega$$

$$X_{C_۱} = \frac{۱}{C_۱ \omega} \rightarrow C_۱ = \frac{۱}{X_{C_۱} \omega} = \frac{۱}{۵۰۰ \times ۴۹/۳}$$

$$C_۱ = ۴۰ \ \mu F$$

۶ـ۳ـ۵ـ حل تمرین ۱۴ صفحه ۱۳۲ کتاب درسی

هدف : رسم منحنی تابع تغییرات امپدانس و جریان مدار C–L در حالت سری و موازی با مشخصات زیر

$L = ۱۰ mH$, $C = ۱۰۰ \mu F$, ۵KHZ و ۵۰HZ در محدوده فرکانس

گام ۱) یافتن (f_r) فرکانس تشدید

فرکانس تشدید در مدار C–L موازی و C–L سری یکسان است.

$$X_L = X_C$$

$$L\omega = \frac{۱}{C\omega} \rightarrow \omega = \frac{۱}{\sqrt{LC}}$$

$$f_r = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{LC}} = \frac{۱}{۲\pi\sqrt{۱۰ \times ۱۰^{-۳} \times ۱۰۰ \times ۱۰^{-۶}}} = ۱۵۹ \ HZ$$

در مدارات C–L سری با توجه به اینکه $Z = ۲\pi fL - \frac{۱}{۲\pi fC}$ اگر f=۰ شود، امپدانس Z بی‌نهایت

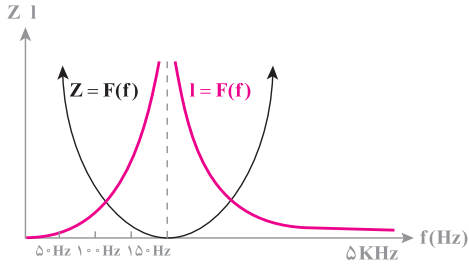
می‌شود، یعنی مدار از جریان DC تغذیه می‌کند و خازن، نقش مدار باز است.

اگر $Z=\infty$، شود هیچ نوع جریانی از مدار عبور نمی‌کند و $I=0$ خواهد بود.

وقتی فرکانس برابر f_r فرکانس تشدید و $Z=0$ شده و جریان I به مقدار ∞ می‌رسد.

اگر $Z=\infty$، تغییرات بار الکتریکی در صفحات خازن خیلی شدید می‌شود و خازن ($\frac{1}{2\pi fC}=0$) عملاً اتصال کوتاه شده و $2\pi fL$ به مقدار خیلی زیاد (∞) میل کرده و مدار C–L سری را عملاً باز می‌کند، در کل $Z=\infty$ و $I=0$ می‌شود.

گام ۲) منحنی تغییرات $Z=F(f)$ و $I=F(f)$ در مدار سری به صورت زیر خواهد بود (شکل ۱۵ـ۵).



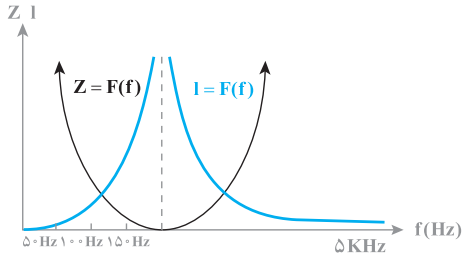
شکل ۱۵ـ۵

در مدارات C–L سری با توجه به اینکه $Z=2\pi f L-\frac{1}{2\pi f C}$ و اگر $f=0$ شود، امپدانس Z صفر می‌شود و در این حالت از مدار جریان I_{SC} عبور خواهد کرد.

$X_L=X_C$ شده، در این حالت $Z=\infty$ و مدار باز می‌شود و $I=0$ می‌باشد.

خازن به علت تغییرات شدید بار اتصال کوتاه شده و مدار را اتصال کوتاه می‌کند و $Z=0$ می‌شود و مجدداً جریان مدار به جریان I_{SC} می‌رسد.

منحنی تغییرات $Z=F(f)$ و $I=F(f)$ در مدار موازی به صورت زیر خواهد بود (شکل ۱۶ـ۵).



شکل ۱۶ـ۵