

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل، از هنرجو انتظار می‌رود:

- ۱- مدار R-L-C سری، موازی و مختلط را بررسی و دیاگرام برداری جریان و ولتاژ آنها را رسم کند و زوایای اختلاف فاز را از روی دیاگرام نشان دهد.
- ۲- روابط مربوط به محاسبه مقاومت ظاهری و جریان ولتاژ، ضریب توان و توان‌ها را در مدارهای R-L-C سری، موازی و مختلط بنویسد و با استفاده از فرمول‌های مذکور مقادیر خواسته شده را محاسبه کند.
- ۳- تأثیر فرکانس را بر مقاومت ظاهری، جریان‌ها، توان‌ها و ضریب توان با نوشتن فرمول‌های مربوط در مدارهای سری و موازی بررسی کند.
- ۴- فرکانس رزونانس را برای مدارهای R-L-C سری و موازی محاسبه کرده و موارد کاربرد فرکانس رزونانس را ذکر کند.
- ۵- پهنای باند و ضریب کیفیت رزونانس مدارهای R-L-C سری و موازی را به‌دست آورد.
- ۶- معادلات زمانی ولتاژ و جریان عناصر در مدارهای R-L-C سری و موازی را به‌دست آورد.

## ۱-۶- مقدمه

هنرآموز محترم در این فصل نیز شبیه فصل‌های قبلی جهت ایجاد انگیزه بیشتر برای هنرجویان این درس ابتدا به کاربرد محتوای فصل اشاره نماید تا زمینه مساعدی جهت پیگیری بیشتر درس فراهم شود. مدارهای R-L-C هم در صنعت برق و الکترونیک و هم در مخابرات کاربرد فراوانی دارند الکتروموتورها و ترانسفورماتور معادل یک مدار R-L هستند.

یک خط انتقال برق فشار قوی می‌تواند معادل یک خازن عمل کند. خطوط برق و سطح زمین جوشن‌های آن و هوا نقش دی‌الکتریک را دارد حتی خطوط حامل برق با همدیگر نیز این اثر را دارند. در یک ترانسفورماتور روغنی سیم پیچ اولیه و ثانویه و عایق بین آنها به همراه روغن و مقاومت اهمی سیم پیچ‌ها می‌تواند ترکیبی از المان‌های مقاومت و خازن و سلف را داشته باشد.

تأین می‌کنند. مسی‌دانیم یک الکتروموتور شامل یک یا چند بوبین و سیم پیچ است و با یک مدار R-L، مدل می‌شود. در سیستم‌های مغناطیسی از قبیل رادیو و تلویزیون، فرستنده‌های رادیویی و تلویزیونی مدارهای مکانیکی تقن و مدارهای مکانیکی سیستم دریاژن، ترکیب‌های متنوعی از R-L-C در اتصال سری و موازی وجود دارد. در این فصل، ابتدا به بررسی اتصال سری و موازی R-L-C می‌پردازیم. سپس ترکیب‌های مختلف این مدارها را بررسی خواهیم کرد.

### ۱-۶-۱ مدارهای R-L-C سری

مدار الکتریکی R-L-C سری مطابق شکل P-۱ است. در این مدار سه عنصر R، L و C و بطور متوالی اتصال دارند. اگر جریان سینوسی  $i = I_m \sin(\omega t + \theta_i)$  از این مدار سری عبور کند، در دو سر مقاومت اهمی ولتاژی به معادله  $v_R = I_m R \sin(\omega t + \theta_i)$  ایجاد می‌کند که این ولتاژ با جریان هم‌فاز است. در دو سر سلف، ولتاژی به معادله  $v_L = X_L I_m \sin(\omega t + \theta_i + 90^\circ)$  و در دو سر خازن، ولتاژی به معادله  $v_C = X_C I_m \sin(\omega t + \theta_i - 90^\circ)$  پدید می‌آید. به طوری که در شکل P-۱ مشاهده می‌شود، این ولتاژها هم‌فاز نیستند و راستای بردار آنها، بر روی هم منطبق نیست، به همین علت، ولتاژ کل مدار از جمع برداری رابطه P-۱ بدست می‌آید.

$$\vec{V}_s = \vec{V}_R + \vec{V}_L + \vec{V}_C \quad (P-1)$$


شکل ۱-۶-۱ مدار R-L-C سری

دیگرام برداری ولتاژها و جریان، مطابق شکل P-۲ خواهد شد. از آن جا که جریان در عناصر R، L و C یکسان است، دیگرام برداری R-L-C سری، بر مبنای جریان در شکل P-۲ رسم شده است. در رسم این دیگرام  $X_C \gg X_L$  فرض شده است و در مجموع مدار خاصیت R-L سری دارد. به طور کلی می‌توان نوشت:

## ۲-۶- مدار R-L-C سری

برای ارتباط بهتر و مؤثرتر هنرجویان در تحلیل مدارهای R-L-C می‌توانیم به آنها بگوییم که

مدار R-L-C سری همان مدار L-C سری است که فقط یک مقاومت اهمی به آن اضافه شده است و برای تحلیل آنها ابتدا بهتر است R را ندید فرض کنیم و مقدار راکتانس نهایی L-C را به دست آوریم و حاصل آن (یعنی تفاضل  $X_C$  و  $X_L$ ) را که با X معادل می‌کنیم با مقاومت R به صورت یک R-X سری بررسی کنیم.

خاصیت مدار R-L-C سری، دقیقاً به وضعیت  $X_C$  و  $X_L$  برمی‌گردد یعنی هر کدام که مقدار بزرگتری داشت نوع مدار را مشخص می‌کند. مدار به دست آمده R-X سری یا یک مدار R-L است و یا یک مدار R-C می‌باشد که قبلاً تحلیل آن را در فصل‌های گذشته آموخته‌ایم.

شکل ۲-۱۰ دیگرام برداری مدار R-L-C سری

۱- اگر  $X_C > X_L$  باشد، مدار در مجموع دارای خاصیت اهمی و سلفی است و ولتاژ بر جریان، تقدم فاز دارد.

۲- اگر  $X_C = X_L$  باشد، مدار کاملاً خاصیت اهمی دارد و ولتاژ و جریان هم‌فازند. (حالت تسبیحاً)

۳- اگر  $X_C < X_L$  باشد، مدار خاصیت اهمی خازنی خواهد داشت و ولتاژ از جریان نظیماً خواهد بود.

۴- با تغییر عناصر R، L، و C می‌توان در مدار اختلاف فاز بین  $-90^\circ$  تا  $+90^\circ$  الکتریکی ایجاد کرد، حتی  $-90^\circ < \phi < +90^\circ$

۵-  $\phi = 0^\circ$  به معنای این است که مدار R-L-C سری، در حالت OAH دی‌گرام برداری مدار R-L-C سری می‌توان نوشت:

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$$

$$V_T = V_R + (V_L - V_C) \quad (2-1)$$

اگر در رابطه ۲-۱ معادله زیر را  $V_R = I_R R$ ،  $V_L = I_L X_L$ ،  $V_C = I_C X_C$  را  $V_C = I_C X_C$  و  $V_L = I_L X_L$  جایگزین کنیم، خواهیم داشت:

$$I_T Z_T = I_T R + (I_L X_L - I_C X_C)$$

$$I_T Z_T = I_T R + I_T (X_L - X_C)$$

بنابراین مدارهای R-L-C سری نهایتاً به یک R-L یا R-C سری تبدیل و تحلیل آن بسیار آسان خواهد شد. برای محاسبه ولتاژ کل ابتدا  $V_C$  و  $V_L$  از همدیگر کسر شده و حاصل آن با ولتاژ مقاومت  $V_R$  جمع برداری می‌شود.

به دلیل وجود R، توان اکتیو دیگر صفر نبوده و حتی اختلاف فاز بین ولتاژ کل و جریان کل برابر مقدار  $\varphi$  خواهد بود.

خلاصه این موارد به صورت شماره گذاری شده در صفحه ۱۳۵ کتاب درسی در ۴ شماره آورده شده است.

$Z^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2$   
 $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$  (۶-۳)

در مثلث OAB شکل ۶-۲ می توان نوشت:

$\tan \varphi = \frac{AB}{OA} = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{X_L I - X_C I}{R I} = \frac{X_L - X_C}{R}$

این نسبت،  $\varphi$  زاویه اختلاف فاز به شکل زیر محاسبه می شود:

$\tan \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1} \frac{X_L - X_C}{R}$  (۶-۴)

اگر  $X_L > X_C$  باشد،  $\varphi > 0$  و اگر  $X_L < X_C$  باشد،  $\varphi < 0$  خواهد شد.

$\cos \varphi = \frac{OA}{OB} = \frac{V_R}{V} = \frac{I R}{I Z}$

$\cos \varphi = \frac{R}{Z}$  (۶-۵)

$\sin \varphi = \frac{AB}{OB} = \frac{V_L - V_C}{V} = \frac{I(X_L - X_C)}{I Z}$

$\sin \varphi = \frac{X_L - X_C}{Z}$  (۶-۶)

از نوع راکتیو است.

$P_{avg} = I_{eff}^2 R = V_{eff} I_{eff} \cos \varphi$  (۶-۷)

$P_{dL} = I_{eff}^2 X_L$  (V.A.R) حثی

$P_{dC} = -I_{eff}^2 X_C$  (V.A.R) خازنی

توان راکتیو کل برابر است با:

$P_{avg} = P_{dL} + P_{dC} = I_{eff}^2 X_L - I_{eff}^2 X_C = I_{eff}^2 (X_L - X_C)$

$P_{avg} = V_{eff} I_{eff} \sin \varphi = I_{eff}^2 (X_L - X_C)$  (V.A.R) (۶-۸)

الف) محاسبه امپدانس و ضریب توان:

$$\text{if } \begin{cases} X_L > X_C \rightarrow X = X_L - X_C \\ X_C > X_L \rightarrow X = X_C - X_L \end{cases}$$



شکل ۶-۱



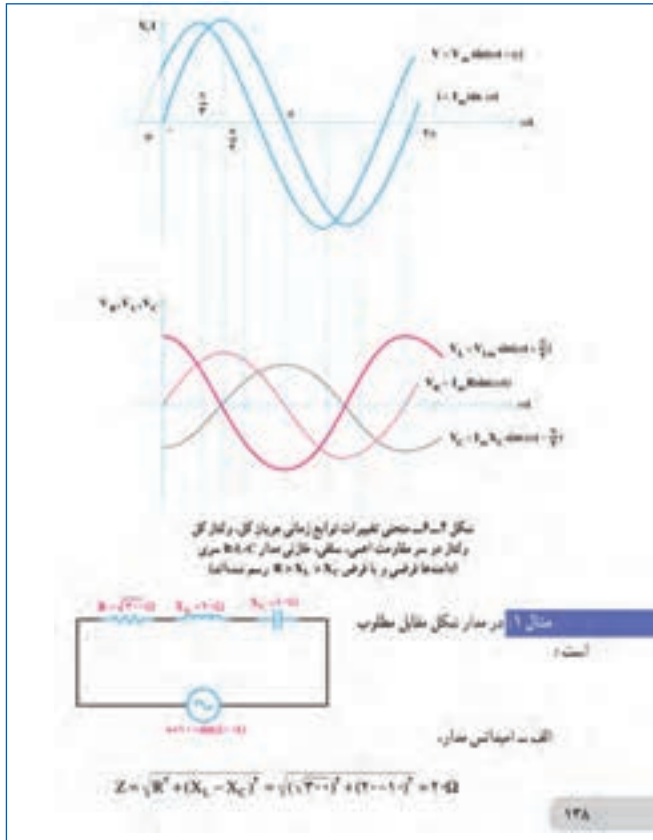
در هر دو صورت بالا برای به دست آوردن مقدار Z خواهیم داشت:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z}, \quad \sin \varphi = \frac{X}{Z}$$

ب) محاسبه توان‌ها در مدارهای R-L-C سری :

$$P_e = V_e I_e \cos \varphi = R \cdot I_e^2$$

$$P_d = V_e I_e \sin \varphi = X \cdot I_e^2$$



در مثال ۱ صفحه ۱۳۸ با در نظر نگرفتن R داریم :

$$X = X_L - X_C = 20 - 10 = 10 \Omega \quad (X_L > X_C)$$

پس مدار، خاصیت سلفی خواهد داشت (البته سلفی - اهمی)

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{30^2 + 10^2} = 31.6 \Omega$$

و برای محاسبه توان‌ها داریم:

$$P_e = R.I_e^2 = \sqrt{300} \times \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = 125\sqrt{3} \text{ W}$$

$$P_d = X.I_e^2 = 10 \times \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = 125 \text{ VAR} \quad (\text{با علامت مثبت چون مدار سلفی است})$$

$$P_S = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = \sqrt{(125\sqrt{3})^2 + (125)^2} = 250 \text{ VA}$$

به نظر می‌رسد با این روش راه‌حل مقداری کوتاه‌تر و موجزتر شده باشد.

۱-۲-۶- تمرین شماره ۱ صفحه ۱۶۰ کتاب درسی (شکل ۲-۶)

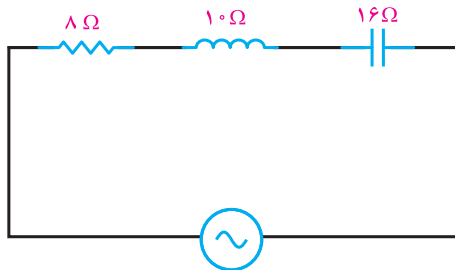
(الف)

هدف: محاسبه امپدانس مدار

در مدارات R-L-C، امپدانس کل مدار از رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$X = X_C - X_L = 6 \Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \Omega$$



$$V = 100 \sin\left(500t - \frac{\pi}{6}\right)$$

شکل ۲-۶

(ب)

هدف: نوشتن معادله زمانی جریان منبع

گام ۱) با داشتن مقادیر ولتاژ ماکزیمم و امپدانس کل مدار، می‌توان جریان ماکزیمم را بیابیم.

$$V_m = I_m \cdot Z \quad , \quad I_m = \frac{V_m}{Z} = \frac{100}{10} = 10 \text{ A}$$

گام ۲) با استفاده از رابطه موجود برای  $\theta_1$  و  $\phi$  به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$X_C > X_L, \quad \varphi < 0$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{X}{R} = \tan^{-1} \frac{16 - 1}{8} = \tan^{-1} \frac{15}{8} = 36 / 8^\circ$$

به دلیل اینکه  $X_C > X_L$  و  $\varphi < 0$  خواهد شد، بنابراین جریان پیش فاز است و  $\theta_1 > 0$  خواهد بود.

$$\varphi = \theta_V - \theta_I \rightarrow -36 / 8^\circ = -3^\circ - \theta_I \rightarrow \theta_I = 6 / 8^\circ$$

(ب)

هدف: نوشتن ولتاژ دو سر هر المان

ولتاژ مقاومت با جریان کل مدار هم فاز است.

$$V_R(t) = I_m R \sin(\omega t + \theta_I) = 8 \sin(500t + 6 / 8^\circ)$$

ولتاژ سلف  $9^\circ$  درجه جلوتر از جریان است.

$$V_L(t) = I_m X_L \sin(\omega t + \theta_I + \frac{\pi}{2}) = 10 \sin(500t + 6 / 8^\circ + 90^\circ)$$

$$V_L(t) = 10 \sin(500t + 96 / 8^\circ)$$

ولتاژ خازن  $9^\circ$  درجه عقب تر از جریان است.

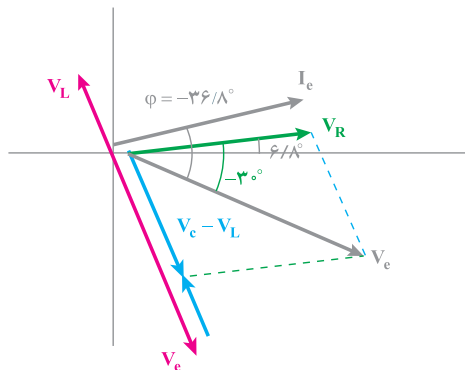
$$V_C(t) = I_m X_C \sin(\omega t + \theta_I - \frac{\pi}{2}) = 16 \sin(500t - 83 / 2^\circ)$$

(ت)

هدف: رسم دیاگرام برداری جریان و ولتاژ

توجه داشته باشید که  $V_C > V_L$  می باشد و مدار خاصیت خازنی دارد. با توجه به مقادیر گفته شده

در مورد زوایای هریک از ولتاژها دیاگرام بردار به صورت زیر خواهد بود.



شکل ۶-۳

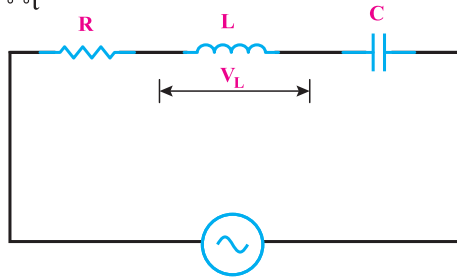
۲-۲-۶- حل تمرین شماره ۳ صفحه ۱۶۰ کتاب درسی (شکل ۴-۶)

هدف : محاسبه مقادیر R و C و L

$$V_L = 18 \cdot \sqrt{2} \sin(2000t + \frac{\pi}{2})$$

$$V = 10 \cdot \sqrt{2} \sin(2000t + 53^\circ)$$

$$i = 2 \cdot \sqrt{2} \sin 2000t$$



شکل ۴-۶

در یک مدار R-L-C سری، جریان منبع برابر است با جریان تک تک المانها  
گام ۱) با توجه به مقدار ولتاژ سلف و جریان عبوری از آن به راحتی می توانیم مقدار مقاومت  
سلفی و پس از آن مقدار L را بیابیم.

$$X_L = \frac{V_{Lm}}{I_m} = \frac{18 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{2}} = 9 \Omega$$

$$X_L = L\omega \rightarrow L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{9}{2000} = 4/5 \text{ mH}$$

گام ۲) با توجه به روابط موجود برای  $\cos\phi$  و  $\sin\phi$  می توان R و C را به صورت زیر یافت.

$$Z = \frac{V_m}{I_m} = \frac{10 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{2}} = 5 \Omega$$

همان طور که مشاهده می شود  $\phi > 0$  می باشد و در نتیجه  $X_C < X_L$  خواهد بود، که دلیلی بر درستی

محاسبات ما می باشد.

$$\phi = \theta_v - \theta_i = 53^\circ - 0^\circ = 53^\circ$$

$$\cos \phi = \frac{R}{Z} \rightarrow R = Z \cos \phi = 5 \cos 53^\circ = 3 \Omega$$

$$\sin \phi = \frac{|X_L - X_C|}{Z} \rightarrow |X_L - X_C| = Z \sin \phi = 5 \sin 53^\circ = 4 \Omega$$



$$X_L - X_C = 4 \rightarrow 9 - X_C = 4 \rightarrow X_C = 5 \Omega$$

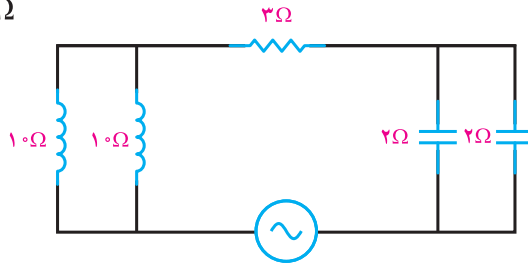
$$X_C = \frac{1}{C\omega} \rightarrow C = \frac{1}{X_C \cdot \omega} = \frac{1}{5 \times 2000} = 100 \mu\text{F}$$

### ۳-۲-۶- حل تمرین شماره ۶ صفحه ۱۶۱ کتاب درسی (شکل ۵-۶)

هدف: مطلوب است تعیین معادله زمانی جریان منبع گام ۱) مدار را به ساده‌ترین شکل درمی‌آوریم.

$$(10 \parallel 10) = 5 \Omega$$

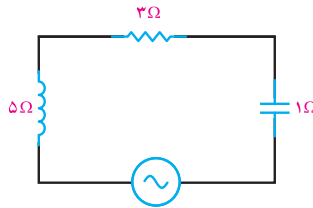
$$(2 \parallel 2) = 1 \Omega$$



$$V = 50\sqrt{2}\sin 400t$$

شکل ۵-۶

در نهایت ساده‌سازی مدار، مدار به صورت R-L-C سری خواهد شد (شکل ۶-۶).



$$V = 50\sqrt{2}\sin 400t$$

شکل ۶-۶

**تذکره:** همکاران گرامی، بعضی از هنرجویان ضعیف هنگام ساده‌سازی دو سلف موازی یا دو خازن موازی، به مقدار واحد گزارش شده توجه ندارند و تفکیکی بین واحد F و  $\Omega$  قائل نمی‌شوند شما می‌توانید با مثال‌های بیشتر آنها را در این خصوص کمک نمایید. این موارد در فصل L-C و R-L-C بیشتر دیده می‌شود.

گام ۲) محاسبه Z و پس از آن  $I_m$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{3^2 + (5-1)^2} = 5 \Omega$$

$$V_m = I_m \cdot Z \quad , \quad I_m = \frac{V_m}{Z} = \frac{50\sqrt{2}}{5} = 10\sqrt{2} \text{ A}$$

### گام ۳) محاسبه $\theta_1$

$$X_L > X_C, \quad \varphi > 0$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{|X_L - X_C|}{R} = \tan^{-1} \frac{4}{3} = 53^\circ$$

$$\varphi = \theta_V - \theta_I \rightarrow 53^\circ = 0^\circ - \theta_I \rightarrow \theta_I = -53^\circ$$


گام ۴) نوشتن معادله زمانی جریان

$$i(t) = 1 \cdot \sqrt{2} \sin(400t - 53^\circ)$$

### ۳-۶- مدار R-L-C موازی


در مدارهای R-L-C موازی نیز، شبیه سری رفتار می‌کنیم بهتر است اینجا هم ابتدا، R را ندید فرض کنیم و یک مدار L-C موازی تشکیل دهیم محاسبه راکتانس نهایی مدار L-C موازی را X می‌نامیم و حاصل آن با مقاومت R یک مدار R-X موازی تشکیل خواهد داد (شکل ۷-۶).

معادله‌ی زمانی رمانس  $i_R = \frac{V_m}{R} \sin(\omega t)$  ،  $i_L = \frac{V_m}{X_L} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$  و  $i_C = \frac{V_m}{X_C} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$  را خواهد دانست. جریان کل مدار از جمع برداری جریان‌های  $\vec{I}_R$  و  $\vec{I}_C$  و  $\vec{I}_L$  به دست می‌آید.

$$\vec{I}_C = \vec{I}_R + \vec{I}_L + \vec{I}_C \quad (9-6)$$


شکل ۶- مدار R-L-C موازی

با توجه به مفروضات موازی بودن اجزا، سلف، خازن از طریق رسم دیاگرام برداری مطابق شکل ۸-۶، جریان کل مدار تعیین می‌شود. در رسم دیاگرام  $X_C < X_L$  فرض شده است.



شکل ۸-۶- دیاگرام برداری مدار R-L-C موازی

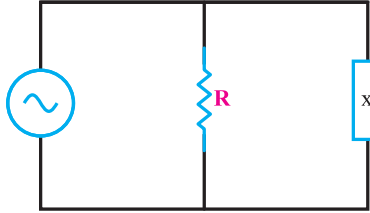
اندازه‌گیری هندسی از این دیاگرام  $\vec{I}_C = \vec{I}_R + \vec{I}_C$  موازی از شکل ۸-۶، دیاگرام برداری مدار R-L-C در مثلث قائم الزامه‌ی OBA می‌توان نوشت:

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} \quad (9-10)$$

$$\vec{OB} = I_C, \quad \vec{OA} = I_R \quad \vec{AB} = I_C - I_L \quad (9-11)$$

الف) محاسبهٔ امپدانس مدار R-L-C سری :  
 برای محاسبهٔ امپدانس مدار R-X داریم :

$$Z = \frac{R \cdot X}{\sqrt{R^2 + X^2}} \quad (X = \frac{X_L \cdot X_C}{|X_L - X_C|})$$



شکل ۶-۷

البته کیفیت مدار همین جا نیز قابل تشخیص است یعنی هر کدام از  $X_L$  یا  $X_C$  کوچکتر باشد مقدار جریان نظیر آن شاخه را بیشتر و خاصیت سلفی یا خازنی را تعیین می کند.

مقدار ضریب توان در مدار R-L-C موازی نیز از رابطه  $\cos \varphi = \frac{Z}{R}$  قابل تحلیل است :  
 برای محاسبهٔ جریان کل می توانیم ابتدا جریان سلف و خازن را از همدیگر کسر نماییم و حاصل را با جریان مقاومت به صورت برداری جمع کنیم.

$$I_x = I_L - I_c \quad , \quad I_{\text{کل}} = \sqrt{I_R^2 + I_x^2}$$

الف) محاسبهٔ توان های اکتیو، راکتیو و ظاهری :

برای محاسبهٔ توان ها بهتر است از روابط زیر استفاده کنیم :

$$P_e = \frac{V_e^2}{R} = V_e I_e \cos \varphi$$

$$P_d = V_e^2 \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right) = \pm V_e I_e \sin \varphi$$

$$P_s = V_e I_e = \sqrt{P_e^2 + P_d^2}$$

$$\sin \varphi = \frac{\Delta B}{OB} = \frac{I_C - I_L}{I} \quad (9-28)$$

$$\sin \varphi = \frac{\frac{V_C}{X_C} - \frac{V_L}{X_L}}{\frac{V}{Z}} = \frac{V \left( \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)}{X_C \frac{1}{Z}} \quad (9-29)$$

$$\sin \varphi = Z \left( \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right) \quad (9-30)$$

توان مؤثر را می‌توان به وسیله‌ی روابط زیر محاسبه کرد:

$$P_o = I_o^2 R = \left( \frac{V_o}{R} \right)^2 \times R = \frac{V_o^2}{R} \quad (9-31)$$

اگر از رابطه‌ی 9-12،  $I_o = \frac{V}{Z}$  را جایگزین کنیم، خواهیم داشت:

$$P_o = \frac{V^2}{R} = \frac{I_o^2 \times Z^2}{R} = I_o \times Z \times I_o \times \frac{Z}{R}$$

بنابراین، توان مؤثر را در شکل عام رابطه‌ی 9-21 خواهیم داشت:

$$P_o = V_o I_o \cos \varphi \quad (9-32)$$

برای محاسبه‌ی توان راکتیو، ابتدا توان‌های سلف و خازن را حساب می‌کنیم و توان راکتیو را از آنها نتیجه می‌گیریم:

$$P_{RL} = I_L^2 X_L = \frac{V^2}{X_L^2} \times X_L = \frac{V^2}{X_L}$$

$$P_{XC} = -I_C^2 X_C = -\frac{V^2}{X_C^2} \times X_C = -\frac{V^2}{X_C}$$

توان راکتیو از جمع جبری توان‌های  $P_{RL}$  و  $P_{XC}$  می‌آید:

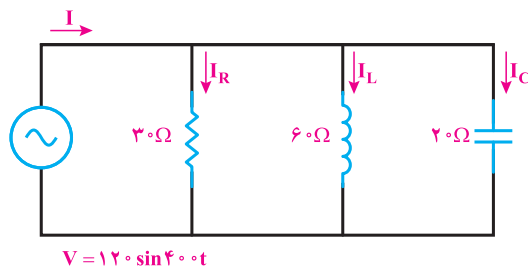
$$P_d = P_{RL} + P_{XC}$$

$$P_d = \frac{V^2}{X_L} - \frac{V^2}{X_C} = V^2 \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right) = V_o \times V_o \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right)$$

### ۱-۳-۶- حل تمرین شماره ۱۰ صفحه ۱۶۲ کتاب درسی (شکل ۸-۶)

(الف)

هدف: محاسبه‌ی جریان شاخه‌ها و معادلات آنها



شکل ۸-۶

گام ۱) با توجه به ولتاژ منبع (در مدارات موازی، ولتاژ برای همه‌ی المان‌ها یکی است.) می‌توان جریان هر شاخه را یافت.

$$I_R = \frac{V_m}{R} = \frac{12^\circ}{3^\circ} = 4 \text{ A}$$

$$I_C = \frac{V_m}{X_C} = \frac{12^\circ}{2^\circ} = 6 \text{ A}$$

$$I_L = \frac{V_m}{X_L} = \frac{12^\circ}{6^\circ} = 2 \text{ A}$$

**تذکره:** همان‌طور که در مدار R-L-C سری ولتاژهای  $V_C$  و  $V_L$  از هم کسر می‌شدند در مدارات R-L-C موازی نیز  $I_C$  و  $I_L$  برداری خلاف جهت همدیگر داشته و از هم کم می‌شوند. جریان مقاومت هم‌فاز با ولتاژ منبع است.

$$i_R = 4 \sin 40^\circ \cdot t$$

جریان خازن،  $90^\circ$  جلوتر از ولتاژ می‌باشد.

$$i_C = 6 \sin(40^\circ \cdot t + \frac{\pi}{2})$$

جریان سلف،  $90^\circ$  عقب‌تر از ولتاژ می‌باشد.

$$i_L = 2 \sin(40^\circ \cdot t - \frac{\pi}{2})$$

(ب)

هدف: محاسبه‌ی جریان منبع و نوشتن معادله‌ی آن

با توجه به روابط موجود برای جریان منبع که حاصل از جمع برداری جریان شاخه‌هاست و اختلاف‌فاز بین ولتاژ و جریان می‌توان معادله‌ی جریان را نوشت.

$$I_c = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} = \sqrt{4^2 + (6 - 2)^2} = 4\sqrt{2} \text{ A}$$

$$\varphi = \tan^{-1} R \left( \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right) = \tan^{-1} 3^\circ \left( \frac{1}{2^\circ} - \frac{1}{6^\circ} \right) = 45^\circ, \quad X_L > X_C \rightarrow \varphi > 0$$

$$\varphi = \theta_V - \theta_I \rightarrow 45^\circ = 0^\circ - \theta_I \rightarrow \theta_I = -45^\circ$$

$$i(t) = 4\sqrt{2} \sin(40^\circ \cdot t - 45^\circ)$$

(پ)

هدف: محاسبه‌ی امپدانس کل مدار

با توجه به رابطه موجود برای امپدانس خواهیم داشت.

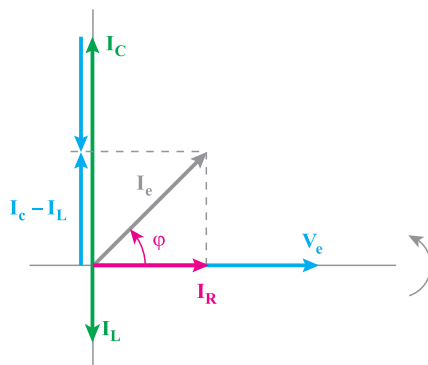
$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{30^2} + \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{60}\right)^2} = 0.047 \Omega$$

$$Z = 21.27 \Omega$$

(ت)

هدف: رسم دیاگرام برداری جریان و ولتاژ

ابتدا جریان خازن و سلف و مقاومت را نسبت به  $V_e$  (مینا) با توجه به زوایای موجود برای هریک رسم کرده و در نهایت برآیند جریان‌ها را محاسبه می‌کنیم (شکل ۹-۶).  
زاویه بین جریان و ولتاژ منبع برابر با  $\varphi$  می‌باشد.

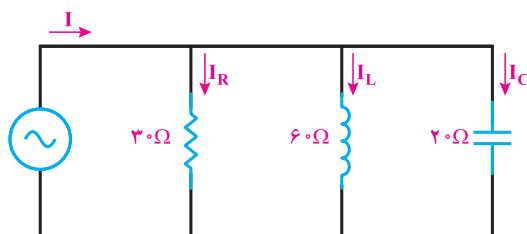


شکل ۹-۶

۲-۳-۶- حل تمرین شماره ۱۱ صفحه ۱۶۳ کتاب درسی (شکل ۱۰-۶)

(الف)

هدف: با توجه به جریان موجود برای مقاومت می‌خواهیم ولتاژ منبع و معادله آن را محاسبه کنیم.



شکل ۱۰-۶

در مدارات موازی ولتاژ تمام شاخه‌ها با هم برابر بوده و برابر مقاومت هر شاخه در جریان عبوری از همان شاخه می‌باشد.

$$V_{R_m} = V_e = V_{L_m} = V_{C_m} = RI_{R_m} = 30 \times 60 = 180 \text{ V}$$

ولتاژ منبع با ولتاژ و جریان مقاومت هم‌فاز است.

$$V_R(t) = 180 \sin 100t$$

(ب)

هدف: محاسبه جریان منبع و معادله آن

گام ۱) محاسبه جریان تک‌تک شاخه‌ها

$$I_{L_m} = \frac{V_m}{X_L} = \frac{180}{60} = 3 \text{ A}$$

$$I_{C_m} = \frac{V_m}{X_C} = \frac{180}{20} = 9 \text{ A}$$

گام ۲) با استفاده از جمع برداری جریان تک‌تک شاخه‌ها و جریان منبع را می‌یابیم.

$$I_e = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} = \sqrt{6^2 + (9 - 3)^2} = 6\sqrt{2} \text{ A}$$

گام ۳) با توجه به رابطه مدارات موازی، اختلاف فاز موجود بین ولتاژ و جریان را می‌یابیم.

$$\varphi = \tan^{-1} R \left( \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right) = \tan^{-1} 30 \left( \frac{1}{20} - \frac{1}{60} \right) = 45^\circ, \quad X_L > X_C \rightarrow \varphi > 0$$

$$\varphi = \theta_V - \theta_I \rightarrow 45^\circ = 0 - \theta_I \rightarrow \theta_I = -45^\circ$$

گام ۴) نوشتن معادله جریان منبع

$$i(t) = 6\sqrt{2} \sin(100t - 45^\circ)$$

(پ)

هدف: محاسبه توان‌های مدار و رسم توان

گام ۱) محاسبه توان‌ها با توجه به روابط موجود

$$I_e = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 6 \text{ A}, \quad V_e = \frac{180}{\sqrt{2}} \text{ V}$$

$$P_e = I_e^2 \cdot R = V_e I_e \cos \varphi = \frac{180}{\sqrt{2}} \times 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 540 \text{ W}$$

$$P_{d_L} = I_L^2 \cdot X_L = (6)^2 \times 60 = 270 \text{ V.A.R}$$

$$P_{dC} = -I_C^2 X_C = -(6)^2 \times 20 = -810 \text{ V.A.R}$$

$$\vec{P}_d = \vec{P}_{dL} + \vec{P}_{dC} = 270 - 810 = -540 \text{ V.A.R}$$

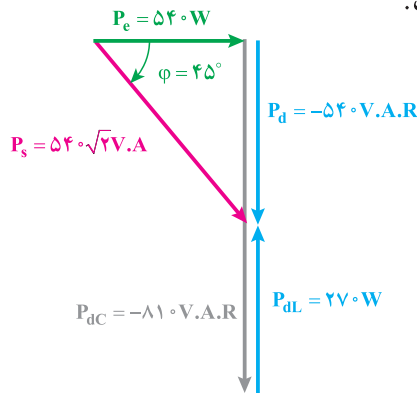
$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = V_e I_e = \sqrt{2} \text{ V.A}$$

همان طور که مشاهده می شود  $|P_d| = |P_e|$  می باشد و این مسئله مقدار  $\varphi = 45^\circ$  را تصدیق می کند.

گام ۲) رسم مثلث توان

مطابق شکل ۱۱-۶ توان راکتیو خازنی نسبت به راکتیو سلفی بیشتر است بنابراین مثلث توانها

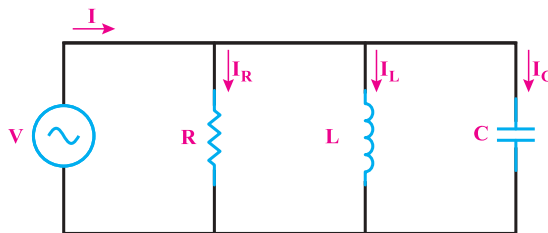
در کل به بار خازنی شبیه است.



شکل ۱۱-۶

۳-۳-۶- حل تمرین شماره ۱۳ صفحه ۱۶۳ کتاب درسی (شکل ۱۲-۶)

هدف: با توجه به جریانهای بیان شده محاسبه مقدار C و L و R



$$i_C = 1 \sin(250 \cdot t + \frac{\pi}{4})$$

$$i = 5 \sin(250 \cdot t + \frac{\pi}{4})$$

$$V = 10 \sin 250 \cdot t$$

شکل ۱۲-۶



**گام ۱)** C را می‌توان با توجه به جریان عبوری از خازن و ولتاژ دو سر آن یافت.  
**تذکره:** همان‌طور که قبلاً گفته شده یادآوری می‌کنیم که با داشتن معادله ولتاژ کل و جریان کل مقدار Z و  $\varphi$  قابل دسترسی است.

$$Z = \frac{V_m}{I_m} = \frac{100}{5} = 20 \Omega$$

$$X_C = \frac{V_m}{I_{C_m}} = \frac{100}{10} = 10 \Omega \rightarrow C = \frac{1}{X_C \cdot \omega} = \frac{1}{10 \times 2500} = 40 \mu\text{F}$$

**گام ۲)** ابتدا می‌توان اختلاف فاز را با توجه به معادله ولتاژ و جریان یافت و سپس با توجه به ضرب توان مؤثر مدار مقدار مقاومت را یافت.

$$X_L > X_C, \quad \varphi < 0$$

$$\varphi = \theta_V - \theta_I = 0 - 45^\circ = -45^\circ$$

$$\cos \varphi = \frac{Z}{R} \rightarrow R = \frac{Z}{\cos \varphi} = \frac{20}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 20\sqrt{2} \Omega$$

**گام ۳)** با توجه به ضرب توان غیر مؤثر مقدار L را به صورت زیر می‌یابیم.

$$\sin \varphi = Z \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right) \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} = 20 \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{10} \right) \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{40} = \frac{1}{X_L} - \frac{1}{10}$$

$$\rightarrow \frac{1}{X_L} = \frac{1}{10} - \frac{\sqrt{2}}{40} = \frac{4 - \sqrt{2}}{40} = 0.06 \rightarrow X_L = 15.5 \Omega$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{15.5}{2500} = 6 \text{ mH}$$

(ب)

**گام ۱)** با توجه به اینکه جریان مقاومت با ولتاژ دو سر منبع هم‌فاز است معادله جریان مقاومت به صورت زیر خواهد بود.

$$I_{R_m} = \frac{V_m}{R} = \frac{100}{20\sqrt{2}} = 3.5 \text{ A}$$

$$i_R(t) = 3.5 \sin 2500 t$$

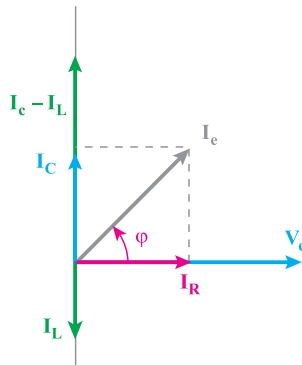
**گام ۲)** با توجه به اینکه جریان سلف از ولتاژ دو سر منبع  $90^\circ$  عقب‌تر است معادله جریان مقاومت سلفی به صورت زیر خواهد بود.

$$I_{L_m} = \frac{V_m}{X_L} = \frac{100}{15/5} = 6/45 \text{ A}$$

$$i_L(t) = 6/45 \sin(250 \cdot t - \frac{\pi}{2})$$

ج)

رسم دیاگرام ولتاژ و جریان‌ها مطابق شکل ۶-۱۳ رسم می‌گردد.



شکل ۶-۱۳

#### ۶-۴- مدارهای R-L-C مختلط (سری- موازی)

همکار ارجمند برای معرفی این گونه مدارها به هنرجویان بگوییم همان‌طور که در مبانی برق مدارهای مختلط یا سری- موازی داشتیم در مدارهای R-L-C نیز گاهی به مدارهایی برخورد می‌کنیم که از ترکیب سری یا موازی چند مقاومت، سلف یا خازن تشکیل شده‌اند.

اساس ساده‌سازی و تحلیل این مدارها، مبنا قرار دادن ولتاژ شاخه‌های موازی است. به عبارت دیگر شبیه مبنا بودن جریان در مدار سری و ولتاژ در مدار موازی، در اینجا نیز مبنا ولتاژ شاخه‌های موازی خواهد بود.

$V_{AB} = 120 \text{ V}$   
 $I = 3 \text{ A}$   
 $R = 40 \Omega$   
 $X_L = 19/2 \Omega$   
 $X_C = 24 \Omega$

**۳-۱-۴-۶- مثال حل شده صفحه ۱۴۶ کتاب درسی (مثال ۳)**  
 مدارهای R-L-C مختلف از چند مدار ساده R-L، R-C، R-L-C یا ساده‌های موازی با سری تشکیل می‌شوند. این مدارها پس از ساده کردن شبکه در نهایت به یک مدار R-L، R-C یا R-L-C ساده تبدیل می‌شوند. از آنجا که خواص این مدارها را قبلاً مطالعه کردیم، مدارهای R-L-C مختلف را با چند مثال دنبال می‌کنیم. در تحلیل مدارهای R-L-C مختلف برای سهولت تحلیل ولتاژ ناشی موازی را به عنوان ولتاژ مرجع ابتدا در نظر می‌گیریم و سایر گسست‌های الکتریکی مدار را بر اساس ولتاژهای ناشی موازی محاسبه می‌کنیم.

**مثال ۳-۱-۴-۶** از مدار الکتریکی شکل ۳-۱۲

$V_{AB} = 120 \text{ V}$  ولتاژ است.  
 مقاومت است.  
 ولتاژ به جریان هر شاخه و جریان کل.

بر او عمل با فرض اینکه  $V_{AB} = 120 \text{ V}$  می‌باشد معادلات را دنبال می‌کنیم.

$$I_0 = \frac{V_{AB}}{R} = \frac{120}{40} = 3 \text{ [A]}$$

$$I_C = \frac{V_{AB}}{X_C} = \frac{120}{24} = 5 \text{ [A]}$$

برای محاسبه‌ی جریان کل، با اگر از برداری جریان‌ها را در معادله  $V_{AB}$  رسم می‌کنیم و

### ۳-۱-۴-۶- مثال حل شده صفحه ۱۴۶ کتاب درسی (مثال ۳)

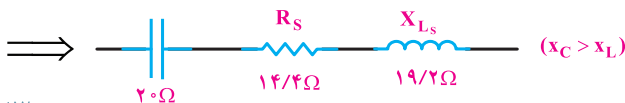
جریان‌های خازن و ولتاژ به سادگی قابل محاسبه هستند در این مثال مینا ولتاژ دو سر سلف و مقاومت یا  $V_{AB}$  است.

یکی از راه‌حل‌هایی که می‌توانیم در نظر بگیریم تبدیل کردن R-L موازی به اتصال R-L سری است سپس مدار تبدیل به یک R-L-C سری می‌شود و در نهایت قابل بررسی خواهد بود. در ادامه همین مثال را از روش تبدیل شاخه موازی به سری حل می‌کنیم.

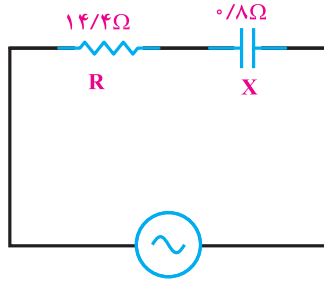
$$R_S = \frac{Z_P^2}{R_P} = \frac{24^2}{40} = 14/4 \Omega$$

$$X_{L_S} = \frac{Z_P^2}{X_{L_P}} = \frac{24^2}{30} = 19/2 \Omega$$

$$Z_P = \frac{30 \times 40}{\sqrt{30^2 + 40^2}} = \frac{1200}{50} = 24 \Omega$$



از ساده‌سازی این مدار به یک مدار R-C سری می‌رسیم (شکل ۶-۱۴).



شکل ۶-۱۴

$$X = 20 - 19/2 = 0/8 \Omega$$

$$X_C \quad X_{L_S}$$

مقدار جریان کل مدار را قبلاً به دست آوردیم که برابر است با:

$$I_e = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ A}$$

و برای مقدار امپدانس داریم:

$$Z = \sqrt{14/4^2 + 0/8^2} = 14/42 \Omega$$

$$V_e = Z \cdot I_e = 72/1 \text{ V}$$

شاید این راه کوتاه‌تر به نظر برسد ولی از راه حل کتاب درسی نکات بیشتری دستگیر هنرجویان می‌شود زیرا مرتب قوانین یادگرفته گذشته و روابط آنها را مرور می‌کنند. در هر حال می‌توانیم این راه حل را نیز به آنها نشان دهیم تا بتوانند در بعضی از مسائل از آن استفاده کنند.

در مثال حل شده صفحه ۱۴۹ (مثال ۴) مجدداً مینا ولتاژ شاخه موازی بوده و پس از محاسبه  $Z_1$  و  $Z_4$  و برای هر شاخه جریان آن شاخه‌ها و جریان کل را با رعایت اختلاف فاز شاخه به دست آورده است.

## ۶-۵- رزونانس یا تشدید در مدارهای R-L-C سری

در مدارهای سری در حالت تشدید مقدار امپدانس به دلیل اتصال کوتاه شدن C و L به مقداری

معادل R می‌رسد ( $Z=R$ ) مقدار فرکانس رزونانس از همان رابطه  $f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$  به دست می‌آید.

تغییرات امپدانس و جریان مدار R-L-C سری مطابق منحنی و جدول صفحه ۱۵۳ کتاب درسی

آورده شده است.

توان ظاهری هر شاخه با توجه به مثلث توان هر شاخه در شکل P-18 محاسبه می‌شود:

$$P_A = \sqrt{P_A^2 + P_A^2} = \sqrt{10^2 + 30^2} = 50 \text{ [V.A]}$$

$$P_B = \sqrt{P_B^2 + P_B^2} = \sqrt{12^2 + (-12)^2} = 17 \text{ [V.A]}$$

برای محاسبه توان ظاهری کل باید به مثلث ABC توجه کرد و نوشت:

$$P_C = P_A + P_B = 40 + 17 = 57 \text{ [W]}$$

$$P_D = P_A - P_B = 30 - 12 = 18 \text{ [V.A.R]}$$

$$P_E = P_C + P_D$$

$$P_E = \sqrt{P_C^2 + P_D^2} = \sqrt{57^2 + 18^2} = 60 \text{ [V.A]}$$

ج - ضریب قدرت کل شبکه  $\cos \phi$ :

$$\cos \phi = \frac{P_C}{P_E} = \frac{57}{60} = 0.95$$

**توجه: رزونانس در مدارهای R-L-C سری**

فرض می‌کنیم متادار C, R و L در مدار R-L-C سری در طول تغییرات فرکانس همواره ثابت بماند. در فرکانس‌های کم،  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  و راکتانس خازنی زیاد از خود نشان می‌دهد. زیرا در جریان مستقیم،  $\omega = 0$  است. در حالت پدیدار راکتانس مدار آن قدر زیاد می‌شود که جریان مدار عملاً به صفر می‌رسد. زمانی که فرکانس منبع تغذیه افزایش می‌یابد، راکتانس خازنی کاهش می‌یابد. در مقابل، راکتانس سلفی با توجه به  $X_L = \omega L$  افزایش می‌یابد. با توجه به رابطه  $\omega = 2\pi f$  - چنان و سلف در امپدانس مدار R-L-C سری رفتار متقابل دارند. در روزه افزایش فرکانس از صفر به مقدار زیاد، زمانی فرا می‌رسد که راکتانس خازنی و سلفی یکدیگر را خنثی می‌کنند. به عبارت دیگر، عبارت  $X_C = X_L$  در رابطه  $\omega = 2\pi f$  بر او صفر و ضریب توان مدار وارو یک است. چون  $X_C = X_L$  می‌شود. در این حالت، در مدار R-L-C هیچ گونه توان واکنشی یا منبع میانه نمی‌شود. این حالت از مدار R-L-C را حالت **تشدید یا رزونانس** گویند. فرکانس رزونانس با توجه به مطالب گفته شده به قرار زیر محاسبه می‌شود:

$$X_C = X_L = \omega$$

(4-14)

### 5-6- الف - ضریب کیفیت در مدارهای R-L-C

مطابق منحنی آورده شده در صفحه ۱۳۸ کتاب درسی هرگاه در مدار R-L-C سری ولتاژ خازن ماکزیمم است جریان مدار یا  $I_{L_m}$  صفر است و هرگاه جریان مدار یا  $I_{L_m}$  ماکزیمم است مقدار  $V_C$  برابر صفر است بنابراین برای محاسبه ماکزیمم انرژی ذخیره شده که مربوط به سلف و خازن می‌شود یکی از این دو عنصر می‌توانند در حالت ماکزیمم وجود داشته باشند (یا سلف یا خازن) پس مقدار ضریب کیفیت برابر است با

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{R}{X_L} = \frac{R}{L\omega} & \text{مدار موازی} \\ Q = \frac{X_C}{R} \quad \text{یا} \quad \frac{X_C}{R} & \text{مدار سری} \end{cases}$$

اگر این ضریب کیفیت در فرکانس رزنانس بررسی شود مقدار  $Q$  برابر  $Q$  به دست می آید و در

$$Q_0 = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} \quad \text{نتیجه}$$

(مقدار ضریب کیفیت در حالت تشدید با  $Q$  نشان داده می شود).

فستهای  $\frac{1}{2}CV_{Cm}^2$  و  $\frac{1}{2}I_{Lm}^2L$  در حالت ماکزیم وجود دارد.

$$Q_C = \frac{TR \left( \frac{1}{T} I_{Lm} L \right)}{I_C^2 R T} = \frac{TR \left( \frac{1}{T} CV_{Cm}^2 \right)}{I_C^2 R T}$$

$$Q_C = \frac{TR \left( \frac{1}{T} \times \frac{TR}{L} L \right)}{I_C^2 R T} = \frac{L\omega_0}{R} \quad (4-28)$$

$$Q = \frac{TR \left( \frac{1}{T} \times CV_{Cm}^2 \right)}{I_C^2 R T} = \frac{TR \times \frac{1}{T} C \times \frac{I_C^2}{C^2 R}}{I_C^2 R T} = \frac{1}{RC\omega_0} - \frac{X_C}{R}$$

$$Q = \frac{1}{RC\omega_0} - \frac{X_C}{R} \quad (4-29)$$

اگر  $Q$  را برای فرکانس تشدید به  $Q_0$  نشان دهیم، ضریب کیفیت مدار در فرکانس تشدید از رابطه  $Q = Q_0 - \frac{X_C}{R}$  محاسبه می شود.

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} - \frac{1}{C\omega_0 R} \quad (4-30)$$

**نشان دهنده پهنای باند Band Width** - پهنای باند به محدوده ای از فرکانس مدارهای R-L-C گفته می شود که در آن، انرژی جریان از  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  برابری مقدار ماکزیم بیشتر باشد.

برای تعیین پهنای باند، منحنی تغییرات جریان را  $I = I_m \sin(\omega t)$  یا خط  $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$  به قطع می دهیم. این خط منحنی  $I = I(\omega)$  را در دو نقطه  $f_L$  و  $f_H$  قطع می کند. محدوده ی فرکانس  $f_H - f_L$  را **پهنای باند** می گویند.

$$B.W = f_H - f_L \quad (4-31)$$

$f_H$  را **فرکانس قطع بالا** و  $f_L$  را **فرکانس قطع پایین** می گویند. از خصوصیات مهم  $f_H$  و  $f_L$  آن است که فرکانس تشدید  $f_0$  در میان  $f_H$  و  $f_L$  قرار دارد؛ به طوری که:

$$f_0 = \frac{f_H + f_L}{2} \quad (4-32)$$

### ۵-۶-ب. پهنای باند (Band Width)

محدوده فرکانسی که مقدار جریان در محدوده بیشتر از مقدار جریان مؤثر باشد پهنای باند نامیده می شود. این محدوده دارای حد بالا  $f_H$  و حد پایین  $f_L$  است و فرکانس رزنانس دقیقاً مابین این دو مقدار قرار دارد.

مقدار پهنای باند برابر است با:

$$B.W = \frac{f_H - f_L}{Q_0} = \frac{R}{2\pi L}$$

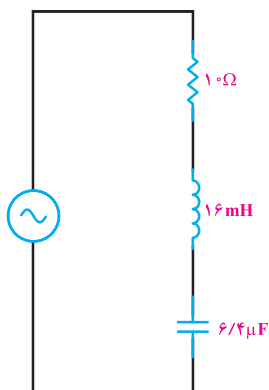
به مقادیر  $f_H$  و  $f_L$  فرکانس‌های نیم‌توان گفته می‌شود زیرا در این فرکانس‌ها مقدار توان مصرفی نصف حالت فرکانس رزونانس است.

$$P_{L,H} = RI^2 = R\left(\frac{I_m}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{RI_m^2}{2} = \frac{P_m}{2}$$

### ۱-۵-۶- حل تمرین شماره ۹ صفحه ۱۶۲ کتاب درسی (شکل ۱۵-۶)

هدف: محاسبه فرکانس رزونانس و نیم‌توان مدار  
گام ۱)  $f_r$  در مدارهای سری به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{L.C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{16 \times 10^{-3} \times 6 / 4 \times 10^{-6}}} = 497 \text{ Hz}$$



شکل ۱۵-۶

گام ۲) برای محاسبه فرکانس نیم‌توان به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$BW = \frac{f_r}{Q_o}$$

$$Q_o = \frac{L\omega_o}{R} = \frac{2\pi f_r L}{R} = \frac{2\pi \times 497 \times 16 \times 10^{-3}}{10} = 5$$

$$BW = \frac{f_r}{Q_o} = \frac{497}{5} = 99.4 \text{ Hz}$$

$$f_H = f_r + \frac{B.W}{2} = 497 + \frac{99.4}{2} = 546.7 \text{ Hz}$$

$$f_L = f_r - \frac{B.W}{2} = 497 - \frac{99.4}{2} = 447.3 \text{ Hz}$$

## ۶-۶-۶- رزونانس در مدارهای R-L-C موازی

در مدارهای R-L-C موازی در حالت رزونانس مدار L-C به حالت مدار باز تبدیل شده و فقط R به عنوان امپدانس در مدار باقی می ماند (Z=R).

**۶-۶-۶-۱- رزونانس در مدارهای موازی**

اگر عناصر R، C و L در مدار R-L-C موازی ثابت باشند، با تغییر فرکانس مدار، امپدانس و جریان مدار تغییر می کند. اگر فرکانس مدار صفر باشد، جریان I جریان اتصال کوتاه خواهد بود؛ زیرا  $X_L = \omega L$  و  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  برابر صفر می شود. در مدار موازی R-L-C اگر هر کدام از عناصر R،  $X_L$  و  $X_C$  صفر نباشد، از مدار جریان اتصال کوتاه (Im) عبور خواهد کرد. وقتی فرکانس زیاد می شود،  $X_L = \omega L$  افزایش و  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  کاهش می یابد. در فرکانس  $f_0$  اثرکنش متضاد  $X_L = X_C$  می شود. در این حالت، با توجه به رابطه  $\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right)$  مدار  $Z = R$  می شود. مدار  $V = \frac{V_m}{R}$  می شود. این مقدار جریان، حداقل جریان است که در مدار برقرار می شود. در حالت تشدید مدار R-L-C موازی (L و C)، دو شاخه‌ی باز شده محسوب می شوند. در فرکانس‌های زیاد یا این که  $X_L = \omega L$  زیاد می شود و ولتاژ  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  به اتصال کوتاه می رود. به گونه‌ای که در فرکانس  $\omega = \omega_0$ ،  $X_C = \infty$ ، مدار مجدداً اتصال کوتاه می شود و جریان اتصال (Im) از مدار عبور خواهد کرد. چون امپدانس مدار در تغییر فرکانس تغییر می کند، کمیت‌های وابسته به آن - یعنی  $I$ ،  $P$ ،  $P_{av}$ ،  $Q$  و  $\phi$  نیز تغییر می کنند.

در فرکانس تشدید می توان نوشت:

$$X_L = X_C = \frac{1}{\omega_0 L} = \frac{1}{\omega_0 C} \quad (6-20)$$

با تعامدی رابطه‌ی  $P_{av} = I^2 R$  نتیجه می گیریم که فرکانس تشدید در حالت R-L-C سری و موازی یکسان هستند.

تابع تحولات  $Z = f(\omega)$  و  $I = f(\omega)$  در شکل‌های ۶-۲۲ رسم شده‌اند.

## ۶-۶-۶- الف) محاسبه پهنای باند و ضریب کیفیت در R-L-C موازی

در مدارهای R-L-C موازی مطابق منحنی  $Z = F(f)$  و تلاقی آن با خط  $y = \frac{Z}{\sqrt{2}}$  (صفحه ۱۵۹ کتاب درسی) می بینیم که امپدانس ورودی بالاتری در محدوده بین فرکانس‌های نیم توان (پهنای باند) نسبت به مدارهای سری دیده می شود.

به همین دلیل به مدارهای R-L-C سری به دلیل امپدانس کم در محدوده پهنای باند فیلتر میان گذر و به مدارهای R-L-C موازی در این محدوده فرکانس فیلتر میان گذر گفته می شود.

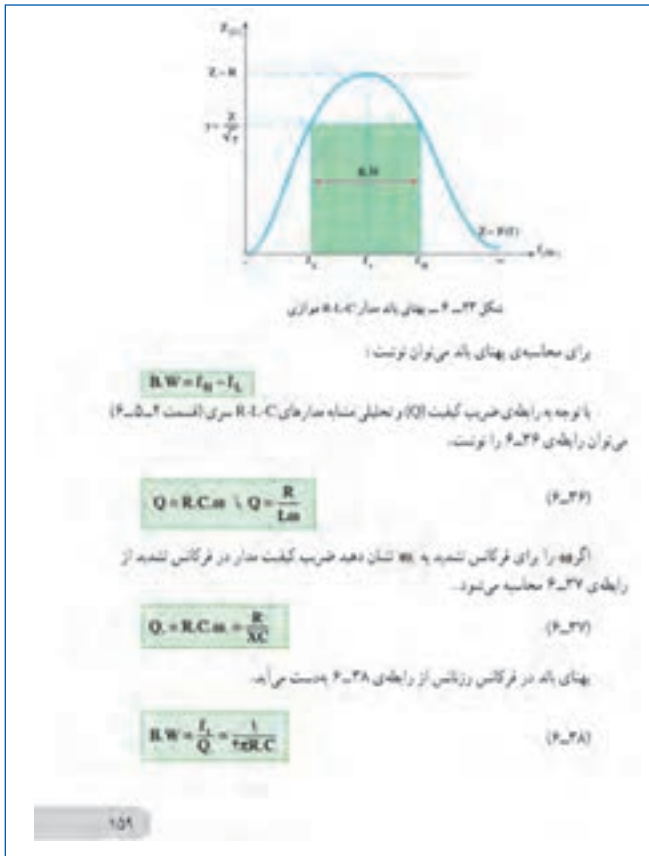


۶-۶-ب) در تحلیلی مشابه مدارهای R-L-C سری، ضریب کیفیت در مدار موازی برابر است با

$$Q = RC\omega \quad \text{یا} \quad Q = \frac{R}{X_L} = \frac{R}{L\omega}$$

که در حالت رزونانس  $\omega$  جایگزین  $\omega$  می‌شود و داریم:

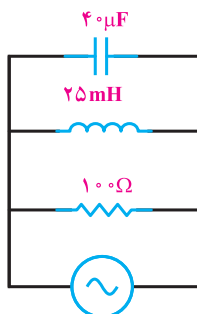
$$B.W = \frac{f_r}{Q} = \frac{1}{\sqrt{\pi R.C}}$$



۶-۶-۱- حل تمرین شماره ۱۴ کتاب صفحه ۱۶۴ (شکل ۶-۱۶-۱) الف)

هدف: محاسبه فرکانس رزونانس با توجه به رابطه موجود

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{L.C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{25 \times 10^{-3} \times 40 \times 10^{-6}}} = 159 \text{ HZ}$$



شکل ۱۶-۶

(ب)

هدف : محاسبه ضریب کیفیت با توجه به رابطه موجود برای مدارهای موازی

$$Q_o = RC\omega_o = 100 \times 40 \times 10^{-6} \times 2\pi \times 159 = 4$$

(پ)

هدف : محاسبه پهنای باند با توجه به رابطه موجود برای مدارهای موازی

$$B.W = \frac{f_r}{Q_o} = \frac{1}{2\pi R.C} = \frac{1}{2\pi \times 100 \times 40 \times 10^{-6}} = 39/8 \text{ HZ}$$

(ت)

هدف : محاسبه فرکانس های نیم توان با توجه به رابطه موجود برای مدارهای موازی

$$f_H = f_r + \frac{B.W}{2} = 159 + \frac{39/8}{2} = 178/89 \text{ HZ}$$

$$f_L = f_r - \frac{B.W}{2} = 159 - \frac{39/8}{2} = 139 \text{ HZ}$$

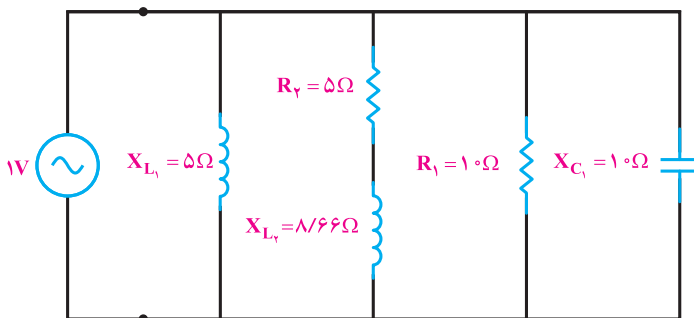
## ۲-۶-۶- حل تمرین شماره ۱۶ صفحه ۱۶۴ کتاب درسی (شکل ۱۷-۶)

هدف : محاسبه امپدانس و ضریب توان مدار :

برای محاسبه مقادیر خواسته شده در این مدار منبع ۱ ولتی را به عنوان ورودی در نظر می گیریم.

ابتدا باید سعی شود جریان کل عبوری از منبع که برابر حاصل جمع برداری تمام جریان شاخه هاست

را به دست آوریم.



شکل ۱۷-۶

همان طور که مشاهده می‌شود مدار از دو قسمت R-L-C موازی و R-L سری تشکیل شده، که با توجه به روابط موجود برای هر یک، جریان قابل محاسبه است.

$$\begin{cases} I_{L_1} = \frac{V}{X_{L_1}} = \frac{1}{5} \text{ A} \\ I_{R_1} = \frac{V}{R_1} = \frac{1}{10} \text{ A} \rightarrow I_1 = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right)^2} = \sqrt{0.01 + 0.01} \\ I_{C_1} = \frac{V}{X_{C_1}} = \frac{1}{10} \text{ A} \end{cases}$$

$$I_1 = \sqrt{0.02} = 0.14 \text{ A}$$

$$Z_\gamma = \sqrt{R_\gamma^2 + X_{L_\gamma}^2} = \sqrt{5^2 + 8/66^2} = 10 \Omega$$

$$I_\gamma = \frac{V}{Z_\gamma} = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ A}$$

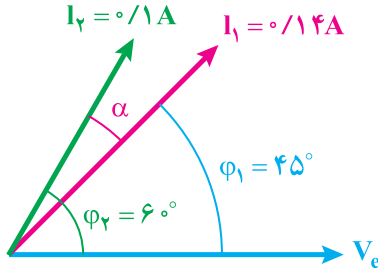
برای محاسبه جریان کل نیاز به زاویه بین دو بردار جریان داریم، که با توجه به اختلاف فاز موجود برای دو قسمت موازی و سری قابل محاسبه است.

$$\varphi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{I_{L_1} - I_{C_1}}{I_{R_1}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.2 - 0.1}{0.1}\right) = 45^\circ, \quad X_{L_1} < X_{C_1} \rightarrow \varphi > 0$$

$$\varphi_\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{X_{L_\gamma}}{R_\gamma}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{8/66}{5}\right) = 6^\circ$$

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_\gamma$$

با توجه به محاسبات زوایا بین ولتاژ و جریان‌ها مطابق شکل ۱۸-۶ خواهد بود.



شکل ۱۸-۶

$$\alpha = \varphi_2 - \varphi_1 = 6^\circ - 45^\circ = 15^\circ$$

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2 \cos \alpha} = \sqrt{0.14^2 + 0.1^2 + 2(0.14)(0.1) \cos 15^\circ} = 0.23 \text{ A}$$

$$Z = \frac{1}{0.23} = 4.35 \ \Omega$$

برای محاسبه ضریب توان کل مدار با توجه به رابطه ضریب توان مؤثر و توان‌های حقیقی و ظاهری قابل محاسبه است.

$$P_{e_1} = VI_1 \cos \varphi_1 = 1 \times 0.14 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.1 \text{ W}$$

$$P_{d_1} = VI_1 \sin \varphi_1 = 1 \times 0.14 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.1 \text{ V.A.R}$$

$$P_{e_2} = VI_2 \cos \varphi_2 = 1 \times 0.1 \times \frac{1}{2} = 0.05 \text{ W}$$

$$P_{d_2} = VI_2 \sin \varphi_2 = 1 \times 0.1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.09 \text{ V.A.R}$$

$$P_e = P_{e_1} + P_{e_2} = 0.1 + 0.05 = 0.15 \text{ W}$$

$$P_d = P_{d_1} + P_{d_2} = 0.1 + 0.09 = 0.19 \text{ V.A.R}$$

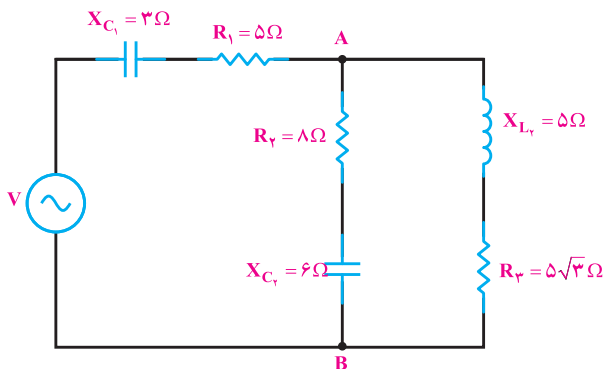
$$P_S = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = \sqrt{0.15^2 + 0.19^2} = 0.24 \text{ V.A}$$

$$\cos \varphi = \frac{P_e}{P_S} = \frac{0.15}{0.24} = 0.6$$

۳-۶-۶- تمرین: در مدار مختلط زیر با فرض  $V_{AB} = 50 \text{ V}$  ولتاژ کل مدار را به دست آورید.

(الف)

هدف: محاسبه ولتاژ کل مدار



شکل ۱۹-۶

مدار بالا از ۳ شبکه RC و RL موازی تشکیل شده است. با محاسبه جریان دو شاخه موازی و جریان کل منبع می توان ولتاژ کل را محاسبه کرد.

$$Z_r = \sqrt{R_r^2 + X_{C_r}^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \Omega$$

$$\cos \varphi_r = \frac{R_r}{Z_r} = \frac{8}{10} = 0.8$$

$$\varphi_r = \tan^{-1}\left(\frac{X_{C_r}}{R_r}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{6}{8}\right) = 36.87^\circ$$

$$I_r = \frac{V_{AB}}{Z_r} = \frac{50}{10} = 5 \text{ A}$$

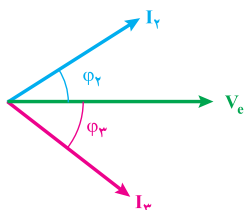
$$Z_r = \sqrt{R_r^2 + X_{L_r}^2} = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + 5^2} = 10 \Omega$$

$$\varphi_r = \tan^{-1}\left(\frac{X_{L_r}}{R_r}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5}{5\sqrt{3}}\right) = -30^\circ$$

$$I_r = \frac{V_{AB}}{Z_r} = \frac{50}{10} = 5 \text{ A}$$

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_r$$

با توجه به زوایای به دست آمده اختلاف فاز جریان ها و ولتاژ A و B ( $V_{AB}$ ) به صورت شکل ۲-۶ خواهد بود.



شکل ۲۰-۶

$$\alpha = \varphi_r + \varphi_r = 36/8^\circ + 3^\circ = 66/8^\circ$$

$$I_1 = \sqrt{I_r^2 + I_r^2 + 2I_r I_r \cos \alpha} = \sqrt{5^2 + 5^2 + 2(5)(5) \cos(66/8)} = 8/3 \text{ A}$$

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_{C_1}^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = 5/8 \Omega$$

$$V_1 = Z_1 I = 5/8 \times 8/3 = 48/42 \text{ V}$$

$$\varphi_1 = -\tan^{-1}\left(\frac{X_{C_1}}{R_1}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = -30/96^\circ$$

باید زاویه ولتاژ و جریان کل دو شاخه موازی را بیابیم که با استفاده از رابطه ضرب توان مؤثر و توان‌های مدار قابل محاسبه است.

$$P_{e_1} = V_1 I \cos \varphi_1 = 48/42 \times 8/3 \times \cos(-30/96) = 344 \text{ w}$$

$$P_{d_1} = V_1 I_1 \sin \varphi_1 = -206 \text{ V.A.R}$$

$$P_{e_r} = V_{AB} I_r \cos \varphi_r = 50 \times 5 \times \cos(-36/8) = 200 \text{ w}$$

$$P_{d_r} = V_{AB} I_r \sin \varphi_r = 50 \times 5 \times \sin(-36/8) = -149/76 \text{ V.A.R}$$

$$P_{e_r} = V_{AB} I_r \cos \varphi_r = 50 \times 5 \times \cos(3^\circ) = 216 \text{ w}$$

$$P_{d_r} = V_{AB} I_r \sin \varphi_r = 50 \times 5 \times \sin(3^\circ) = 125 \text{ V.A.R}$$

$$P_{e_{AB}} = P_{e_r} + P_{e_r} = 200 + 216 = 416 \text{ w}$$

$$P_{d_{AB}} = P_{d_r} + P_{d_r} = -149/76 + 125 = -24/76 \text{ V.A.R}$$

$$P_{S_{AB}} = \sqrt{P_{e_{AB}}^2 + P_{d_{AB}}^2} = \sqrt{416^2 + (-24/76)^2} = 416/73 \text{ V.A}$$

$$\cos \varphi = \frac{P_{e_{AB}}}{P_{S_{AB}}} = \frac{416}{416} = 1 \rightarrow \varphi = 3/4^\circ$$

$$\theta_V = 0^\circ \rightarrow \varphi = \theta_V - \theta_i \rightarrow \theta_{i_{AB}} = 3/4^\circ$$

می‌دانیم در این مدار پس از ساده کردن، به یک مدار سری مبدل می‌شود و جریان در تمام مدار ثابت می‌باشد و دارای یک زاویه یکسان است.

$$\theta_{i_{AB}} = \theta_{i_1} = \theta_{i_2}$$

$$\theta_V = \varphi + \theta_{i_1} = -30/96^\circ + 3/4^\circ = -27/56^\circ$$

$$\alpha = \theta_{V_{AB}} + \theta_{V_1} = 0 - 27/56^\circ = -27/56^\circ$$

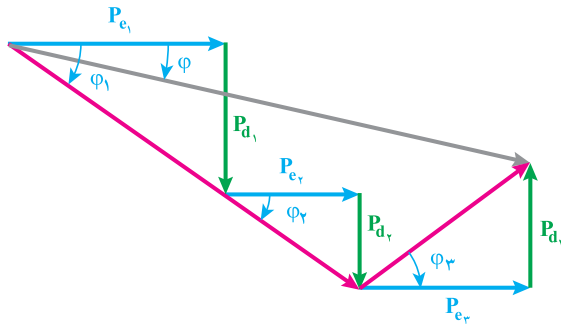
$$V_e = \sqrt{V_1^2 + V_{AB}^2 + 2V_1 V_{AB} \cos \alpha} = \sqrt{48/42^2 + 50^2 + 2 \times 48/42 \times 50 \cos(-27/56)}$$

$$V_e = 95/59 \text{ V}$$

(ب)

هدف: رسم مثلث توان

دقت شود در این مدار ۳ مصرف کننده توان داریم در نهایت ۳ توان حقیقی خواهیم داشت و ۳ المان ذخیره کننده انرژی داریم، که به واسطه آن ۳ توان غیرمؤثر داریم، که به دلیل خاصیت خازنی و سلفی بودن مدار دارای جهت مثبت و یا منفی می باشد. در کل شکل به صورت زیر خواهد بود (شکل ۶-۲۱).



شکل ۶-۲۱