

شکل ۱-۲۶- بردار شتاب متوسط با $\Delta \vec{v}$ هم جهت است.

شتاب لحظه‌ای در لحظه t_1 را نیز می‌توان به صورت حدّ شتاب متوسط، هنگامی که Δt به سمت

صفر میل می‌کند، تعریف کرد؛ یعنی:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (30-1)$$

با توجه به مفهوم مشتق، رابطه ۱-۳۰ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (31-1)$$

$$\vec{a} = \frac{d^2(\vec{r})}{dt^2} \quad (32-1)$$

به کمک رابطه ۱-۲۹ می‌توانیم بنویسیم:

$$\vec{a} = \left(\frac{dv_x}{dt}\right) \vec{i} + \left(\frac{dv_y}{dt}\right) \vec{j} \quad (33-1)$$

که در آن، $\frac{dv_x}{dt} = a_x$ و $\frac{dv_y}{dt} = a_y$ مؤلفه‌های شتاب لحظه‌ای اند.

در نتیجه، می‌توان نوشت:

$$\vec{a} = (a_x) \vec{i} + (a_y) \vec{j} \quad (34-1)$$

رابطه ۱-۲۸ نشان می‌دهد که \vec{a} و $\Delta \vec{v}$ هم جهت اند ولی همان طور که در شکل ۱-۲۶-ب نشان داده شده است، در حرکت روی مسیر خمیده، معمولاً بردار شتاب متوسط \vec{a} ، با بردارهای سرعت، (\vec{v}_1 یا \vec{v}_2) هم جهت نیست. در حالتی هم که Δt به سمت صفر میل می‌کند و بردار \vec{v}_2 به بردار \vec{v}_1 بسیار نزدیک می‌شود، شتاب لحظه‌ای با سرعت لحظه‌ای نیز معمولاً هم جهت نخواهد بود. ولی به کمک رابطه ۱-۳۳ و با داشتن معادله سرعت، جهت بردار شتاب لحظه‌ای را، که از این پس آن را به اختصار شتاب خواهیم نامید، می‌توان به دست آورد.

مثال ۱-۱۸

معادله حرکت دو بعدی جسمی در SI به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x = 2 \cdot t^2 \\ y = -5t^3 \end{cases}$$

بردار سرعت و بردار شتاب این جسم را در لحظه $t=1s$ به دست آورید. آیا این دو بردار هم جهت‌اند؟

پاسخ

برای تعیین بردار سرعت، ابتدا مؤلفه‌های v_x و v_y را در $t=1s$ به دست می‌آوریم:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 4 \cdot t \xrightarrow{t=1s} v_x = 4 \text{ m/s}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -15t^2 \xrightarrow{t=1s} v_y = -15 \text{ m/s}$$

بنابراین، بردار سرعت لحظه‌ای در $t=1s$ چنین خواهد بود:

$$\vec{v} = 4 \cdot \vec{i} - 15 \cdot \vec{j}$$

برای تعیین بردار شتاب نیز ابتدا مؤلفه‌های شتاب، یعنی a_x و a_y ، را به دست می‌آوریم. مؤلفه افقی شتاب، ثابت است:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 4 \text{ m/s}^2$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -30t$$

a_y تابع زمان است و در $t=1s$ برابر است با :

$$a_y = -30 \text{ m/s}^2$$

با توجه به مقادیرهای a_x و a_y در لحظه $t=1s$ بردار شتاب در این لحظه برابر

است با :

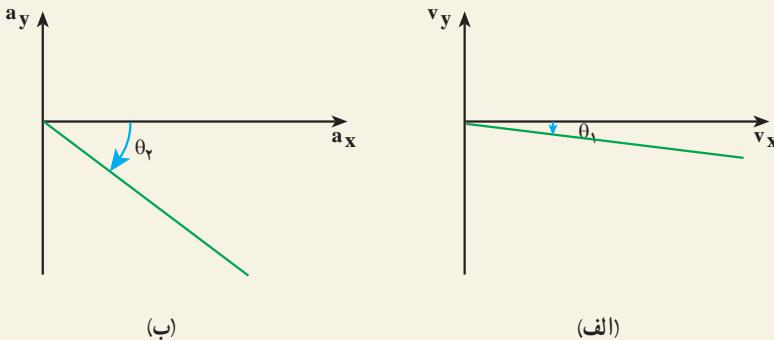
$$\vec{a} = 40 \vec{i} - 30 \vec{j}$$

زاویه‌ای که بردارهای سرعت و شتاب در لحظه $t=1s$ با محور افقی می‌سازند،

به ترتیب برابرند با :

$$\tan \theta_1 = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-15}{40} \Rightarrow \theta_1 = \tan^{-1} \frac{-3}{8} \approx -7^\circ$$

$$\tan \theta_2 = \frac{a_y}{a_x} = -\frac{30}{40} \Rightarrow \theta_2 = \tan^{-1} \frac{-3}{4} \approx -37^\circ$$



شکل ۱-۲۷

با مقایسه زاویه‌های θ_1 و θ_2 در شکل ۱-۲۷ می‌توان نتیجه گرفت که بردارهای سرعت و شتاب در این لحظه هم جهت نیستند.

حرکت با شتاب ثابت در صفحه — حرکت پرتابی

وقتی حرکت در یک صفحه با شتاب ثابت باشد، بزرگی و جهت بردار شتاب ثابت می‌ماند؛ از این رو، مؤلفه‌های \vec{a} در طول حرکت تغییری نمی‌کنند و مقدار ثابتی دارند. از سوی دیگر، طبق قانون



شکل ۱-۲۸

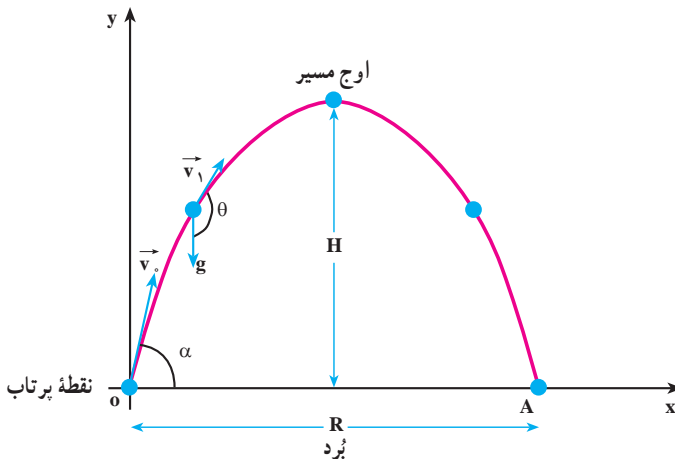
دوم نیوتون، شتاب هنگامی ثابت است که نیروی وارد بر جسم ثابت باشد. در این نوع حرکت برای سادگی، محورهای x و y را طوری انتخاب می‌کنیم که راستای شتاب حرکت بر راستای یکی از محورهای مختصات منطبق باشد؛ بنابراین، مؤلفه شتاب در یک راستا صفر و در راستای دیگر، ثابت است؛ مثلاً اگر محور y با شتاب هم‌راستا باشد، داریم:

$$a_x = 0 \text{ و } a_y = \text{ثابت}$$

ساده‌ترین نوع حرکت با شتاب ثابت در صفحه، حرکت پرتابی است. اگر جسم کوچکی را چنان پرتاب کنیم که زاویه سرعت اولیه‌اش با امتداد قائم، مخالف صفر باشد این حرکت را پرتابی و جسم پرتاب شده را پرتابه می‌نامیم. اگر از مقاومت

هوا صرف نظر کنیم، تنها نیروی وارد بر پرتابه، وزن آن mg و شتاب حاصل از این نیرو \vec{g} است که در نزدیکی سطح زمین، بزرگی آن ثابت و جهت آن به طرف مرکز زمین است.

نتیجه فعالیت ۱-۷ نشان می‌دهد که حرکت پرتابی در یک صفحه قائم انجام می‌شود. برای بررسی این حرکت، محور ox را در راستای افق و محور oy را در راستای g در نظر می‌گیریم. در نتیجه، حرکت پرتابی را می‌توان به صورت ترکیب دو حرکت، یکی در راستای افق و دیگری در راستای قائم دانست. در این حرکت، نقطه پرتاب جسم را مبدأ مختصات ($x_0 = 0$ و $y_0 = 0$) جهت مثبت محور y را، به طرف بالا فرض می‌کنیم.



شکل ۱-۲۹

در شکل ۲۹-۱ مسیر حرکت یک پرتابه، روی صفحه مختصات XOY، همراه با بردار شتاب \vec{g} و نیز بردار سرعت اولیه جسم \vec{v}_0 که با افق زاویه α می‌سازد، نشان داده شده است. در این شکل، مؤلفه‌های بردار شتاب \vec{g} با رابطه‌های زیر داده می‌شوند:

$$a_x = 0 \text{ و } a_y = -g \quad (35-1)$$

مؤلفه‌های سرعت اولیه \vec{v}_0 نیز برابرند با:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha \text{ و } v_{0y} = v_0 \sin \alpha \quad (36-1)$$

چون $a_x = 0$ است، حرکت در راستای محور x با سرعت ثابت $(v_0 \cos \alpha)$ انجام می‌شود. بنابراین، با استفاده از رابطه ۷-۱، معادله‌های حرکت و سرعت پرتابه در راستای محور x، به صورت زیر است:

$$x = (v_0 \cos \alpha) t \quad (37-1)$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha = \text{ثابت} \quad (38-1)$$

حرکت در راستای قائم y، یک حرکت با شتاب ثابت $(-g)$ است؛ بنابراین، با استفاده از رابطه‌های ۱۴-۱ و ۱۵-۱ معادله‌های حرکت پرتابه در راستای محور y را نیز به صورت زیر خواهیم داشت:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t \quad (39-1)$$

$$v_y = -gt + v_0 \sin \alpha \quad (40-1)$$

معادله‌های ۱-۳۵ تا ۱-۴۰ مؤلفه‌های بردار شتاب و سرعت و مکان پرتابه را در هر لحظه روی محورهای x و y مشخص می‌کنند. می‌دانیم که اگر در معادله‌های حرکت، برای x و y در حرکت دو بعدی، زمان حذف شود، معادله مسیر حرکت به دست خواهد آمد؛ بدین ترتیب، معادله مسیر حرکت پرتابی روی صفحه XOY نیز چنین است:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha}\right)^2 + v_0 \sin \alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha}\right)$$

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha \quad (41-1)$$

رابطه ۱-۴۱ نشان می‌دهد که مسیر حرکت پرتابی در شرایط خلأ، سهمی است (چرا؟). در حرکت پرتابی، فاصله افقی ای را که پرتابه طی می‌کند تا دوباره به ارتفاع اولیه پرتاب برگردد، بُرد پرتابه

می‌نامند. بُرد پرتابه را با R نمایش می‌دهیم (شکل ۱-۲۹). مختصات نقطهٔ بازگشت به ارتفاع اولیه با توجه به شکل ۱-۲۰ به صورت $y = 0$ و $x = R$ است. با استفاده از رابطهٔ ۱-۴۱ داریم:

$$0 = -\frac{g(R)^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + (R) \tan \alpha$$

$$R = \frac{2v_0^2 \times \sin \alpha \times \cos \alpha}{g}$$

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (۱-۴۲)$$

تمرین ۱-۵

زاویهٔ پرتاب چقدر باشد تا بُرد پرتابه به مقدار بیشینهٔ خود برسد؟

در حرکت پرتابی، بالاترین نقطه‌ای که پرتابه به آن می‌رسد، نقطهٔ اوج نام دارد. در شکل ۱-۲۹ ارتفاع نقطهٔ اوج با H نشان داده شده است. سرعت در راستای محور y در نقطهٔ اوج صفر است (چرا؟)؛ در نتیجه، با استفاده از رابطهٔ ۱-۴۰ داریم:

$$0 = -gt + v_0 \sin \alpha$$

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

t زمان رسیدن به نقطهٔ اوج است. با جای‌گذاری این زمان در معادلهٔ ۱-۳۹، ارتفاع نقطهٔ اوج

به دست می‌آید:

$$H = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g}\right)^2 + (v_0 \sin \alpha)\left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g}\right)$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (۱-۴۳)$$

فعالیت ۱-۶

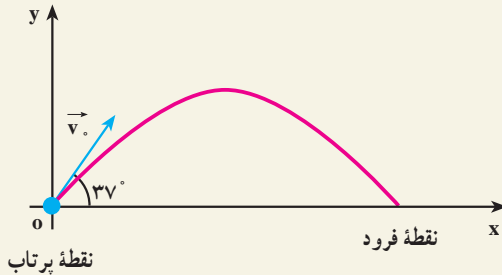
آزمایشی پیشنهاد کنید که به کمک آن بتوان سرعت آب را در لحظه خارج شدن از شیلنگ اندازه گرفت.

مثال ۱-۱۹

یک بازیکن فوتبال، تویی را تحت زاویه 37° نسبت به افق، با سرعت اولیه 10 m/s شوت می‌کند. با فرض اینکه توپ در صفحه xOy حرکت کند و مقاومت هوا ناچیز باشد:

(الف) زمان رسیدن توپ به نقطه اوج را به دست آورید.

(ب) پس از چه زمانی توپ به زمین برمی‌گردد؟ ($\sin 37^\circ = 0.6$)



شکل ۱-۳۰

پاسخ

(الف) در نقطه اوج مسیر داریم:

$$v_y = -gt + v_0 \sin \alpha$$

$$0 = -9.8t + 10 \times 0.6 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{6}{9.8} \approx 0.6 \text{ s}$$

(ب) در بازگشت به زمین $y = 0$ است.

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t$$

$$0 = -4/9t^2 + (10 \times 0/6)t$$

$$t(-4/9t + 6) = 0 \Rightarrow t = 0, t = 1/2s$$

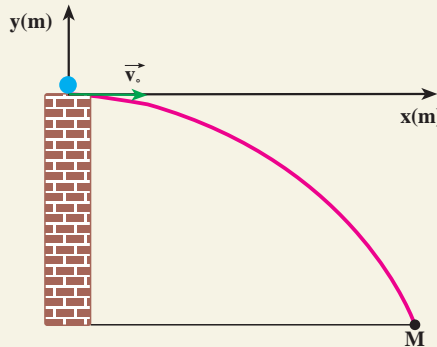
که در آن $t=0$ لحظه پرتاب توپ و $t=1/2s$ لحظه برخورد توپ به زمین (زمان کل حرکت) است.

تمرین ۱-۶

ارتفاع نقطه اوج و نیز بُرد توپ را در مثال ۱-۱۹ محاسبه کنید.

مثال ۱-۲۰

از بالای برجی به ارتفاع ۴۹ متر، تویی با سرعت افقی 22m/s پرتاب می شود. الف) چه مدت طول می کشد تا توپ به زمین برسد؟ ب) فاصله نقطه برخورد توپ با زمین تا پای برج چند متر است؟ پ) سرعت توپ هنگام برخورد به زمین چه قدر است؟



شکل ۱-۳۱

پاسخ

الف) نقطه پرتاب را مبدأ مختصات می گیریم. نقطه M محل فرود توپ بر روی زمین است که برای آن $y_m = -49\text{m}$. با استفاده از رابطه ۱-۳۹ داریم:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t$$

$$-49 = -4/9t^2 + 0$$

$$t = \sqrt{10} \approx 3/2 \text{ s}$$

ب) برای محاسبه فاصله نقطه فرود تا پای برج از معادله ۱-۳۷ استفاده می کنیم:

$$x = (v_0 \cos \alpha)t$$

$$x = (22 \times 1) \times 3/2 = 33 \text{ m}$$

پ) مؤلفه های سرعت را در لحظه برخورد با زمین از رابطه های ۱-۳۸ و ۱-۴۰

به دست می آوریم:

$$v_x = v_0 \cos \alpha = 22 \times 1 = 22 \text{ m/s}$$

و

$$v_y = -gt + v_0 \sin \alpha = -9.8 \times 3/2 + 0 = -14.7 \text{ m/s}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{22^2 + (14.7)^2} = \sqrt{484 + 216.09} = \sqrt{700.09} \approx 26.46 \text{ m/s}$$

$$v = 26.5 \text{ m/s}$$

تمرین های فصل اول

۱- معادله حرکت جسمی در SI به صورت $x = t^2 - 3t^3$ است. مطلوب است:

الف) بزرگی سرعت متوسط جسم در بازه زمانی ۱ تا ۲ ثانیه.

ب) بزرگی سرعت متحرک در لحظه $t = 4 \text{ s}$.

پ) بزرگی شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی ۲ تا ۳ ثانیه.

ت) بزرگی شتاب متحرک در لحظه $t = 4 \text{ s}$.

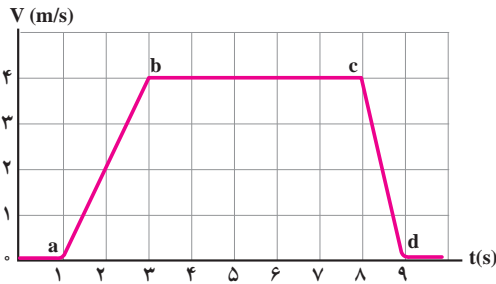
۲- خودرویی در پشت چراغ قرمز ایستاده است. با سبز شدن چراغ، خودرو با شتاب

2 m/s^2 شروع به حرکت می کند. در همین لحظه، کامیونی با سرعت ثابت 36 km/h از کنار

آن می گذرد.

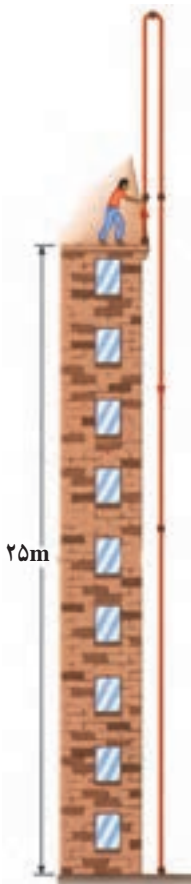
الف) نمودارهای مکان-زمان و سرعت-زمان را برای اتومبیل و کامیون رسم کنید.

ب) پس از چه مدتی، اتومبیل به کامیون می رسد؟



شکل ۱-۳۲

۳- نمودار سرعت- زمان آسانسوری مطابق شکل ۱-۳۲ است. نمودار شتاب- زمان آن چگونه می شود و در مورد کندشونده یا تندشونده بودن حرکت اظهار نظر کنید.



شکل ۱-۳۳

۴- در شکل ۱-۳۳ تویی در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می شود و پس از ۴ ثانیه به نقطه پرتاب برمی گردد. توپ:

الف) با چه سرعتی پرتاب شده است؟ (ب) تا چه ارتفاعی بالا می رود؟
 پ) با چه سرعتی به زمین می رسد؟ (ت) بعد از چند ثانیه به زمین می رسد؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

۵- بردارهای مکان ذره متحرکی در لحظه های $t_1 = 5 \text{ s}$ و $t_2 = 25 \text{ s}$ به ترتیب $\vec{r}_1 = 2\vec{i} + 14\vec{j}$ و $\vec{r}_2 = 8\vec{i} + 6\vec{j}$ است. بزرگی سرعت متوسط این ذره را بین دو لحظه t_1 و t_2 به دست آورید. با رسم یک نمودار جهت \vec{v} را نشان دهید.

۶- معادله حرکت جسمی با دو رابطه زیر، در SI داده شده است:

$$y = 2t^2 + 1, \quad x = 6t$$

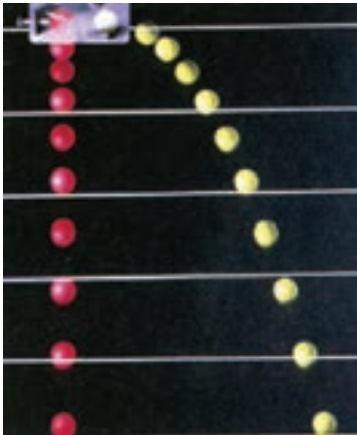
الف) معادله سرعت جسم را بنویسید و بزرگی سرعت را در $t = 2 \text{ s}$ محاسبه کنید.

ب) معادله مسیر حرکت را به دست آورید.

پ) بردار سرعت متوسط جسم را بین لحظه های $t = 1$ و $t = 2$ ثانیه برحسب بردارهای یکه \vec{i} و \vec{j} بنویسید.

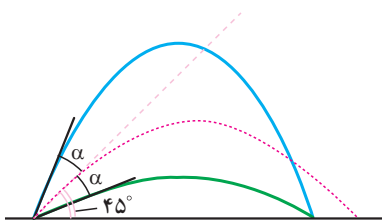
۷- الف) سرعت یک پرتابه را در نقطه اوج آن، برحسب v و α به دست آورید.

ب) اگر نقطه فرود و نقطه پرتاب در یک صفحه افقی باشند، بردار سرعت پرتابه را هنگام فرود برحسب α و v به دست آورید.



شکل ۱-۳۴

۸- در شکل ۱-۳۴، گلولهٔ زرد رنگ در امتداد افق پرتاب شده است. اگر گلولهٔ قرمز رنگ نیز هم‌زمان با گلولهٔ زرد رنگ رها شده باشد، نشان دهید که ارتفاع این دو، در حین سقوط در تمام لحظه‌ها، یکسان خواهد بود.

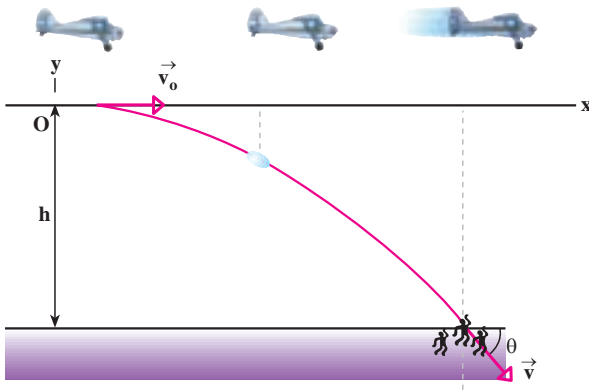


شکل ۱-۳۵

۹- گالیله در یکی از کتاب‌های خود نوشته است: «برای زاویه‌های پرتابی که به یک اندازه از زاویهٔ 45° بیشتر یا کمترند، بُردها مساوی‌اند...» (شکل ۱-۳۵). درستی این گفته را اثبات کنید.

۱۰- از روی پلی به ارتفاع 20 متر، بالای سطح آب یک رودخانه، جسمی را در راستای افقی با سرعت 3 m/s پرتاب می‌کنیم.

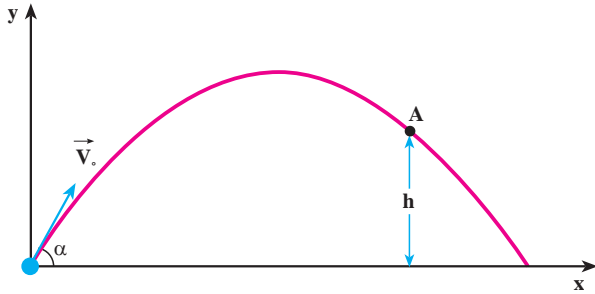
- الف) چه زمانی طول می‌کشد تا جسم به آب برخورد کند؟
 ب) فاصلهٔ افقی نقطهٔ برخورد به آب تا نقطهٔ پرتاب چه مقدار است؟
 پ) بزرگی سرعت جسم هنگام برخورد با آب، چه مقدار است؟



شکل ۱-۳۶

۱۱- هواپیمایی که با سرعت 360 km/h در ارتفاع 245 m موازی با سطح زمین پرواز می‌کند، می‌خواهد بسته‌ای را برای سیل‌زدگان به پایین بیندازد (شکل ۱-۳۶). خلبان در چه فاصلهٔ افقی، بسته را رها کند تا به سیل‌زدگان برسد؟

۱۲- مطابق شکل ۱-۳۷ را با سرعت اولیه \vec{v}_0 و با زاویه α نسبت به افق، پرتاب می‌کنیم. فرض کنید نیروی مقاومت هوا در برابر حرکت جسم قابل چشم‌پوشی است. الف) با استفاده از قانون پایستگی انرژی مکانیکی، بزرگی سرعت جسم را در نقطه A در ارتفاع h ، از نقطه پرتاب به دست آورید.

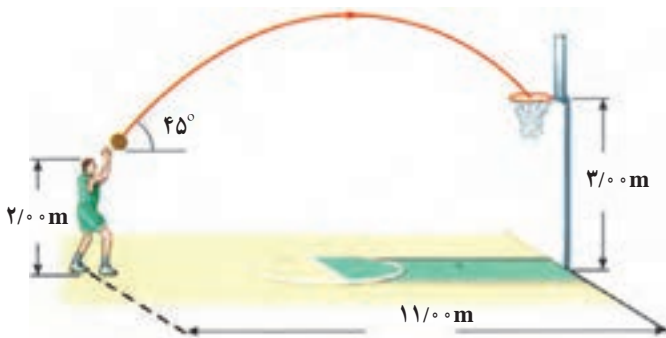


شکل ۱-۳۷

ب) بزرگی سرعت جسم را در نقطه A با استفاده از معادله‌های حرکت پرتابی به دست آورید و آن را با نتیجه قسمت «الف» مقایسه کنید.

۱۳- در شکل ۱-۳۸ سرعت اولیه توپ را طوری حساب کنید که توپ داخل سبد بیفتد.

$g = 10 \text{ m/s}^2$



شکل ۱-۳۸