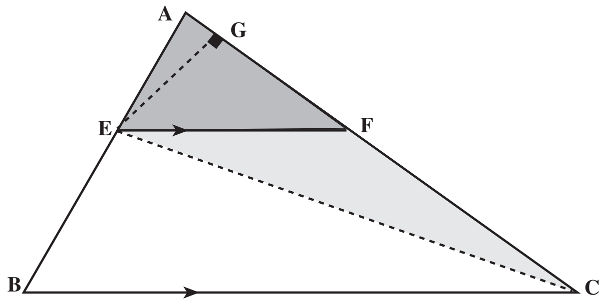
در نتیجه :

$$\frac{\text{AFE مساحت مثلث}}{\text{EFB مساحت مثلث}} = \frac{AE}{EB} \qquad (۱)$$

مرحله‌ی ۲: از E به C وصل کرده، سپس پاره‌خط EG را بر AC عمود می‌کنیم، در این صورت



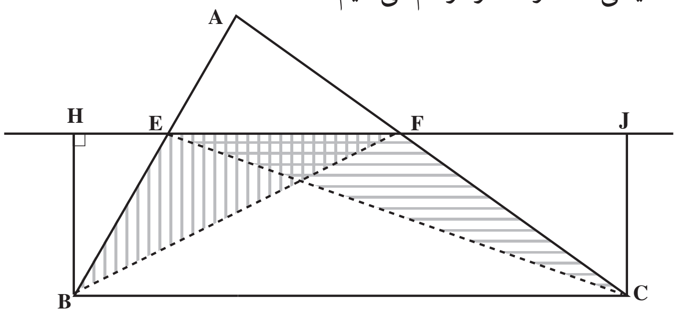
شکل ۵

$$\frac{\text{AFE مساحت مثلث}}{\text{EFC مساحت مثلث}} = \frac{AF}{FC}$$

(۲)

دلیل درستی تساوی (۲) را توضیح دهید.

مرحله‌ی ۳: پاره‌خط EF را از دو طرف امتداد می‌دهیم. سپس ارتفاع‌های نظیر قاعده‌ی EF در دو مثلث EFB و EFC ، یعنی BH و CJ را رسم می‌کنیم.



شکل ۶

چهارضلعی BHJC یک مستطیل است. (چرا؟) بنابراین

$$BH = CJ$$

از طرفی

$$\text{EFB مساحت مثلث} = \frac{۱}{۲} EF \times BH$$

مساحت مثلث EFC $= \frac{1}{2} EF \times CJ$

در نتیجه :

(۳) مساحت مثلث EFC = مساحت مثلث EFB

مرحله‌ی ۴: در رابطه‌ی (۲) می‌توان در مخرج کسر سمت چپ با استفاده از رابطه‌ی (۳) مساحت مثلث EFB را قرار داد. یعنی :

(۴) $$\frac{\text{مساحت مثلث } AFE}{\text{مساحت مثلث } EFB} = \frac{AF}{FC}$$

مقایسه‌ی (۴) و (۱) نشان می‌دهد که سمت چپ تساوی‌ها با هم برابرند. در نتیجه :

(۵) $$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$$

و به این ترتیب قضیه‌ی تالس ثابت می‌شود.

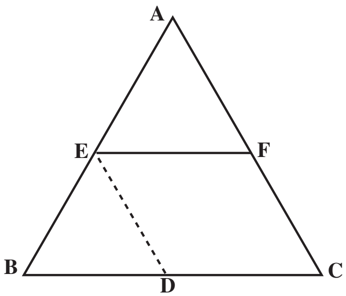
تمرین: در شکل ۲، اگر $DB = ۳۰m$، $DE = ۲۰m$ و $DM = ۱۰۰m$ باشد، با استفاده از قضیه‌ی تالس، طول BA را پیدا کنید.

نتیجه‌ی ۱: چون از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تناسب $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ به‌دست می‌آید، پس از تناسب (۵) نتیجه می‌شود.

$$\frac{AE}{AE+EB} = \frac{AF}{AF+FC}$$

یعنی :

(۶) $$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$$



شکل ۷

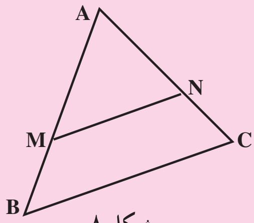
نتیجه‌ی ۲: در مثلث ABC، پاره‌خط EF موازی BC است. اگر از نقطه‌ی E، پاره‌خط ED را موازی AC رسم کنیم، با دو بار استفاده از قضیه‌ی تالس در مثلث ABC، نتیجه‌ی مهم زیر به دست می‌آید.

(۷) $$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

تمرین: رابطه‌ی (۷) را ثابت کنید.

راهنمایی: چهارضلعی EDCF متوازی‌الاضلاع است، در نتیجه $EF = DC$.

نتیجه‌ی ۳: (عکس قضیه تالس) اگر در مثلث ABC (شکل ۸) نقطه‌های M و N طوری روی ضلع‌های AB و AC انتخاب شوند که $\frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MB}$ ، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که پاره‌خط MN موازی ضلع BC است.

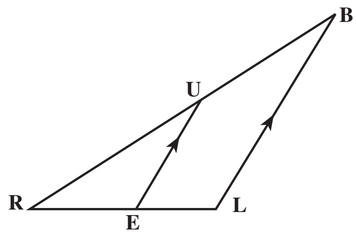


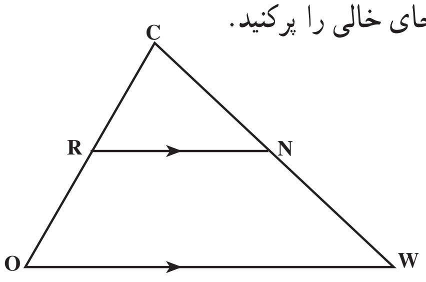
شکل ۸

تمرین: برای اثبات نتیجه‌ی ۳ از نقطه‌ی B خطی به موازات MN رسم کنید تا AC را در D قطع کند. سپس با استفاده از قضیه‌ی تالس نشان دهید D و C بر هم منطبقند.

مسائل

۱. با توجه به شکل‌ها، در هرکدام از موارد زیر جای خالی را پرکنید.





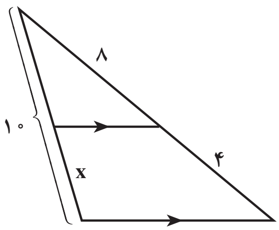
در مثلث COW، پاره‌خط RN با پاره‌خط OW موازی است :

الف) $\frac{OR}{RC} = \square$ ب) $\frac{NW}{CW} = \square$

در مثلث RBL، پاره‌خط EU با پاره‌خط LB موازی است :

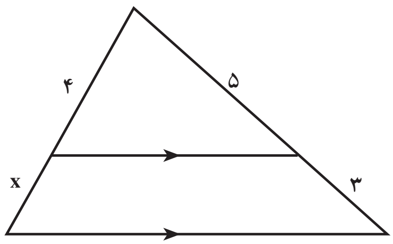
پ) $\frac{EL}{RE} = \square$ ت) $\frac{RU}{RB} = \square$

۲. دو دانش‌آموز تصمیم گرفتند به کمک قضیه‌ی تالس طول x را در شکل روبه‌رو به دست آورند.

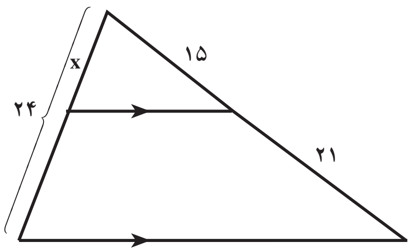


دانش‌آموز اول تناسب $\frac{۴}{۸}=\frac{x}{۱۰}$ و دانش‌آموز دوم تناسب $\frac{۴}{۸}=\frac{x}{۱۰-x}$ را نوشت. کدامیک از این دو تناسب صحیح است؟ به نظر شما تناسب درستی که x را به دست می‌دهد کدام است؟

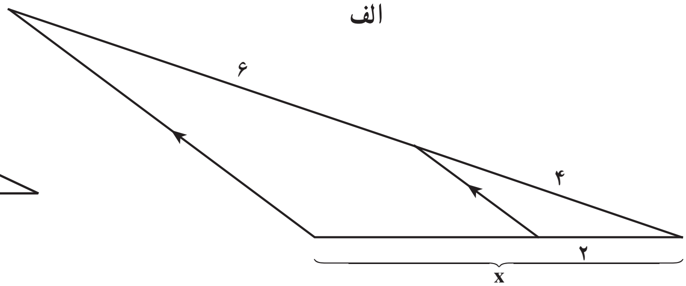
۳. در هر یک از شکل‌های زیر طول مجهول x را محاسبه کنید :



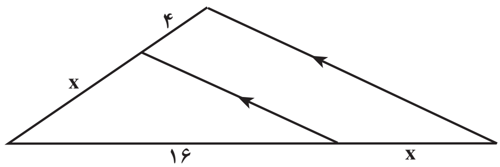
الف



ب

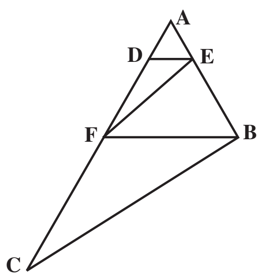


پ

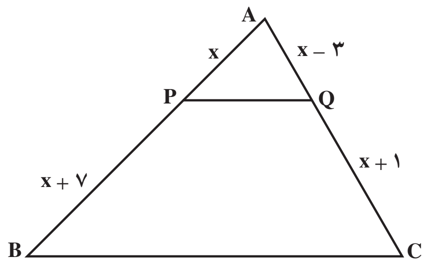


ت

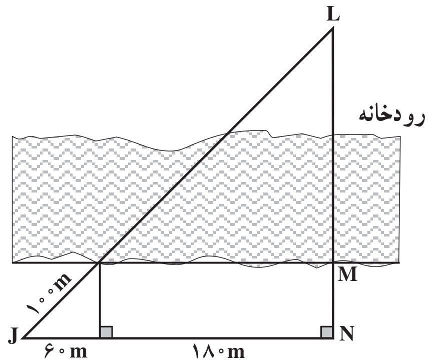
۴. در مثلث ABC، در شکل روبه‌رو، DE با FB موازی است و EF با BC. با دو بار استفاده از قضیه‌ی تالس ثابت کنید $\frac{AF}{FC}=\frac{AD}{DF}$.



۵. در شکل روبه‌رو PQ با BC موازی است. به کمک قضیه‌ی تالس طول x را حساب کنید.



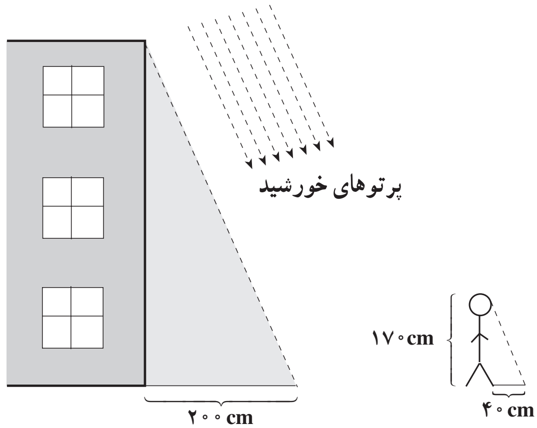
۶. دهکده‌ای در یک سوی رودخـانـه و دکل‌های سراسری انتقال نیرو در سوی دیگر رودخانه واقع است. با توجّه به فاصله‌های داده شده در شکل، طول سیم لازم برای برق‌رسانی به دهکده یعنی JL را محاسبه کنید.



۳ــ۳ــ مثلث‌های متشابه

معلم درس هندسه‌ی آرش تصمیم گرفت به دانش‌آموزی که بتواند فقط به کمک یک خط‌کش ارتفاع ساختمان مدرسه را اندازه‌گیری کند، جایزه بدهد. آرش اندیشید که چگونه باید این کار را انجام دهد؟ ارتفاع ساختمان مدرسه خیلی بلندتر از خط‌کش او بود. او از خود پرسید آیا می‌توان راه راحت‌تری برای محاسبه‌ی ارتفاع ساختمان بدون اندازه‌گیری مستقیم آن پیدا کرد؟ ظهر در راه منزل،

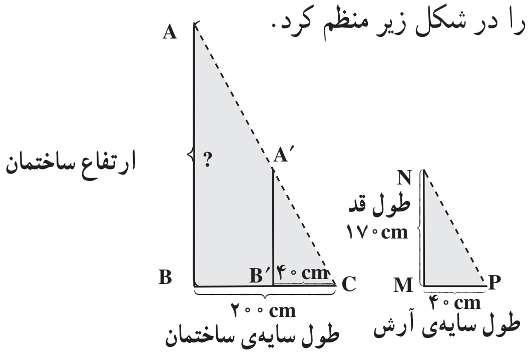
در حالی که به زمین خیره شده بود ناگهان متوجه این نکته جالب شد که طول سایه در ظهر خیلی کوتاه است و اندازه‌گیری آن با خط‌کش امکان‌پذیر می‌باشد!؟ آرش فوراً به مدرسه بازگشت و طول سایه‌ی ساختمان مدرسه که بر زمین عمود بود و طول سایه‌ی خود را در حالت ایستاده به وسیله‌ی خط‌کش اندازه گرفت. او سپس قامت و سایه‌ی خود همچنین ساختمان و سایه‌ی آن را ضلع‌های دو مثلث قائم‌الزاویه در نظر گرفت.



شکل ۹

آیا این اطلاعات برای تعیین اندازه‌ی ارتفاع ساختمان مدرسه کافی بود[1]؟

آرش اطلاعات خود را در شکل زیر منظم کرد.



شکل ۱۰

آنگاه $B'C$ را روی ضلع BC به اندازه‌ی MP جدا کرد و $A'B'$ را نیز بر BC عمود نمود. چون دو خط $A'B'$ و AB بر BC عمودند، پس با هم موازی هستند. بنابراین، با استفاده از نتیجه‌ی ۲

۱ــ شعاع‌های تابش با هم موازیند.

قضیه‌ی تالس

(۱) $$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C}=\frac{AC}{A'C}$$

آرش همچنین از همنهشتی دو مثلث $A'B'C$ و NMP (به حالت زض‌ز) تساوی $A'B'=NM$ را به دست آورد و در (۱) جایگزین کرد :

(۲) $$\frac{AB}{NM}=\frac{BC}{MP}$$

یا $$\frac{AB}{۱۷۰}=\frac{۲۰۰}{۴۰}$$

در نتیجه :

$$AB=\frac{۱۷۰\times۲۰۰}{۴۰}$$

$$\text{ارتفاع ساختمان}=AB=۸۵۰cm$$

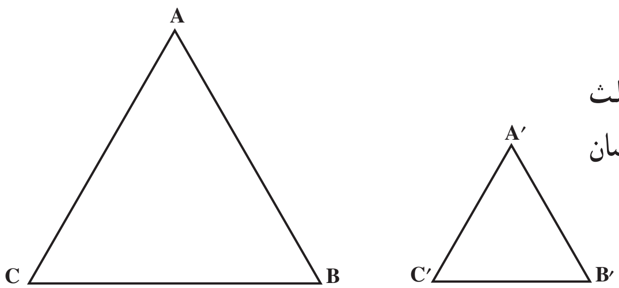
در شکل ۱۰، زاویه‌ی C در دو مثلث ABC و $A'B'C$ مشترک است و زاویه‌های B و B' هر دو قائمه و برابرند. پس زاویه‌های A و A' نیز مساوی‌اند. همچنین دو مثلث $A'B'C$ و NMP همنهشت هستند، در نتیجه زاویه‌های نظیر دو مثلث ABC و NMP نیز با هم مساوی‌اند. از طرف دیگر، چون $MN=A'B'$، $MP=B'C$ و $NP=A'C$، رابطه‌ی (۱) را می‌توان به صورت

$$\frac{AB}{MN}=\frac{BC}{MP}=\frac{AC}{NP}$$

نوشت، یعنی ضلع‌های نظیر در دو مثلث متناسبند. در این حالت، دو مثلث را متشابه می‌نامند.

دو مثلث را متشابه گویند، اگر زاویه‌های نظیر در آن‌ها برابر و ضلع‌های نظیر متناسب باشد.

مثال ۵: در شکل ۱۱ دو مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و $A'B'C'$ نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۱

چون هر زاویه مثلث متساوی‌الاضلاع 60° است، بنابراین زاویه‌های این دو مثلث با هم برابرند. از طرف دیگر، چون طول ضلع‌های هر مثلث متساوی‌الاضلاع نیز مساوی هستند، هر سه نسبت $\frac{AB}{A'B'}$ ، $\frac{AC}{A'C'}$ و $\frac{BC}{B'C'}$ با هم برابر خواهند بود زیرا دارای صورت‌های مساوی و مخرج‌های مساوی هستند. پس دو مثلث متساوی‌الاضلاع به دلیل تناسب ضلع‌های نظیر و تساوی سه زاویه، طبق تعریف با هم متشابه هستند.

هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع، متشابه هستند.

۳ــ۴ــ حالت‌های تشابه دو مثلث

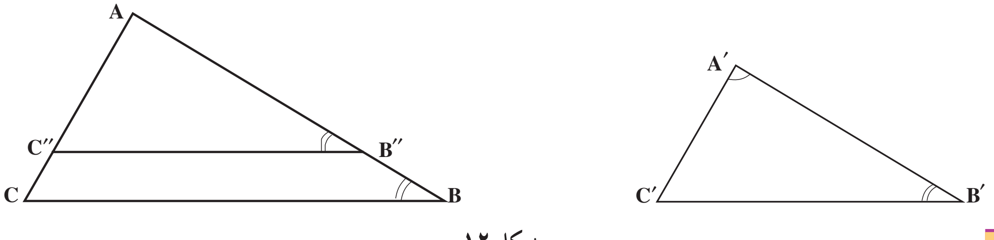
دو مثلث در سه حالت با هم متشابه‌اند.

۳ــ۴ــ ۱ــ تشابه دو مثلث در حالت تساوی دو زاویه

آرش فقط با استفاده از تساوی دو زاویه‌ی $\hat{P}$ و $\hat{C}$ ، تشابه دو مثلث قائم‌الزاویه ABC و NMP را نتیجه گرفت، پس اگر **یک زاویه‌ی حاده از یک مثلث قائم‌الزاویه با یک زاویه حاده از مثلث قائم‌الزاویه دیگر برابر باشد، آن دو مثلث با هم متشابه‌اند**. چون زاویه‌های قائمه در این دو مثلث نیز با هم برابرند، پس دو زاویه از یک مثلث قائم‌الزاویه با دو زاویه از مثلث قائم‌الزاویه دیگر برابرند. این مطلب نه فقط برای دو مثلث قائم‌الزاویه بلکه برای هر دو مثلثی درست است، یعنی :

اگر دو زاویه از یک مثلث، با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.

برای نشان‌دادن درستی این حالت، شکل ۱۲ را در نظر می‌گیریم. در این شکل، زاویه‌های A و A' با هم و زاویه‌های B و B' نیز با هم برابرند.



شکل ۱۲

نقطه‌ی B' [1] را روی ضلع AB طوری انتخاب می‌کنیم که $AB' = A'B'$ و از آن پاره‌خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در C' قطع کند. دو مثلث $A'B'C'$ و $AB'C'$ به حالت (زض‌ز) همنهشت هستند (چرا؟) بنابراین $AC' = A'C'$ و $B'C' = B'C'$.

چون پاره‌خط $B'C'$ موازی ضلع BC است، در مثلث ABC بنابر قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

همچنین، $AB' = A'B'$ ، $AC' = A'C'$ و $B'C' = B'C'$ پس

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

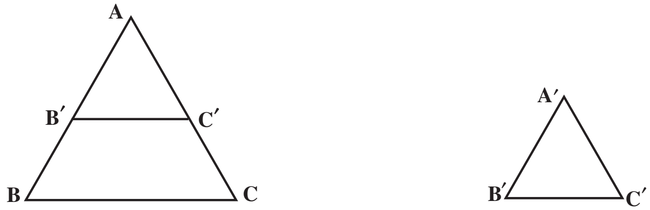
یعنی ضلع‌های دو مثلث متناسب هستند. از طرف دیگر، زاویه‌های سوم دو مثلث ABC و $A'B'C'$ با هم برابرند، زیرا $\hat{A} = \hat{A'}$ ، $\hat{B} = \hat{B'}$ و چون $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = ۱۸۰°$ و $\hat{A'}+\hat{B'}+\hat{C'} = ۱۸۰°$ پس $\hat{C} = \hat{C'}$. در نتیجه طبق تعریف تشابه، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند.

۳ــ۴ــ۲ــ تشابه دو مثلث در حالت متناسب بودن دو ضلع و تساوی زاویه‌ی بین آنها:

آنها: در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ (شکل ۱۳)

$$\hat{A} = \hat{A'}$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \qquad (۱)$$



شکل ۱۳

برای نشان دادن تشابه دو مثلث در این حالت، باید تساوی دو زاویه‌ی دیگر و متناسب بودن ضلع سوم آن‌ها را نتیجه بگیریم. برای این کار،نقطه‌ی C' را روی ضلع AC طوری انتخاب می‌کنیم که $AC' = A'C'$. از C' خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا AB را در نقطه‌ی B' قطع کند (شکل ۱۳). بنابر قضیه‌ی تالس در مثلث ABC

۱ــ B' را «ب زِگُوند» بخوانید.

$$\frac{AC}{AC''} = \frac{AB}{AB''} = \frac{BC}{B''C''} \qquad (۲)$$

مقدار مساوی AC'' یعنی $A'C'$ را در (۲) جایگزین می‌کنیم :

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{AB''} \qquad (۳)$$

از (۱) و (۳) نتیجه می‌گیریم که

$$AB'' = A'B' \qquad (۴)$$

بنابراین، دو مثلث $A'B'C'$ و $AB''C''$ به حالت (ض ز ض) همنهشت هستند، پس سایر اجزای نظیر آنها نیز با هم برابرند، یعنی :

$$B''C'' = B'C' \;,\; \hat{B}' = \hat{B}'' \;,\; \hat{C}' = \hat{C}'' \qquad (۵)$$

از طرفی چون پاره‌خط $B''C''$ با BC موازی است، پس :

$$\hat{C} = \hat{C}'' \;,\; \hat{B} = \hat{B}'' \qquad (۶)$$

از (۵) و (۶) نتیجه می‌شود که $\hat{B} = \hat{B}'$ و $\hat{C} = \hat{C}'$، یعنی سه زاویه‌ی دو مثلث ABC و $A'B'C'$ نظیر به نظیر با هم مساویند.

با درنظر گرفتن $AC'' = A'C'$، $AB'' = A'B'$ و $B''C'' = B'C'$، رابطه‌ی (۲) را دوباره می‌نویسیم :

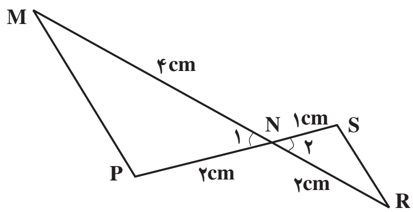
$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \qquad (۷)$$

رابطه‌ی (۷) متناسب بودن ضلع‌های نظیر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را نشان می‌دهد، پس این دو مثلث متشابه‌اند.

اگر یک زاویه از یک مثلث با یک زاویه از مثلث دیگر برابر و ضلع‌های نظیر این زاویه‌ها متناسب باشند، آنگاه آن دو مثلث متشابه‌اند.

مثال ۶: در دو مثلث NSR و NPM

$$\frac{MN}{NR} = \frac{NP}{NS} = ۲$$



شکل ۱۴

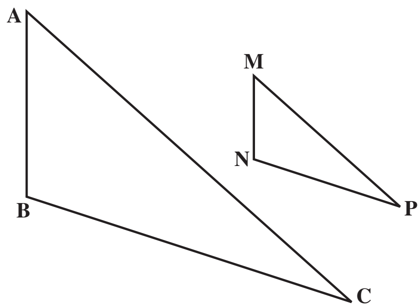
و چون زاویه‌های $N_۱$ و $N_۲$ متقابل‌به‌رأس هستند، درنتیجه $\hat{N}_۱ = \hat{N}_۲$. بنابراین، دو مثلث NSR و NPM در حالت متناسب بودن دو ضلع و تساوی زاویه‌ی بین آن‌ها، متشابه‌اند.

۳ــ۴ــ۳ــ تشابه دو مثلث در حالت متناسب بودن سه ضلع:

متناسب بودن سه ضلع: تشابه دو مثلث را از متناسب بودن سه ضلع آن‌ها نیز می‌توان نتیجه گرفت. یعنی اگر در دو مثلث ABC و MNP

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{AC}{MP}$$

آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که این دو مثلث متشابه‌اند.



شکل ۱۵

هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند آن دو مثلث متشابه‌اند.

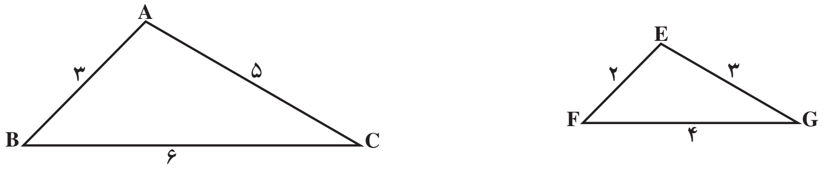
تمرین ۱: با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، هرگاه سه ضلع از مثلثی، با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، آنگاه آن دو مثلث متشابه‌اند (شکل ۱۵).

راهنمایی: به اندازه‌ی MN روی AB جدا کرده آن را B' بنامید و به اندازه‌ی MP روی AC جدا کنید و آن را C' بنامید. سپس $B'C'$ را رسم کرده، با استفاده از عکس قضیه‌ی تالس نتیجه را به‌دست آورید.

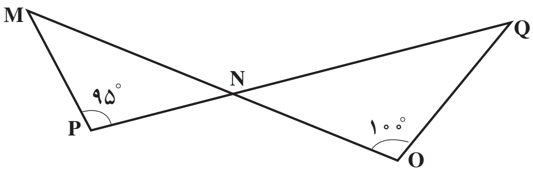
تمرین۲: نشان دهید در هر مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، میانگین هندسی بین دو قطعه‌ی ایجاد شده روی وتر است.

مسائل

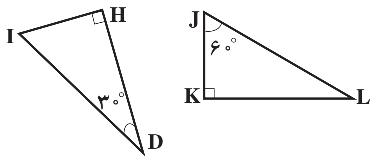
۱. در کدامیک از موارد زیر دو مثلث متشابه‌اند؟



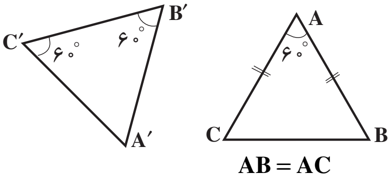
(الف)



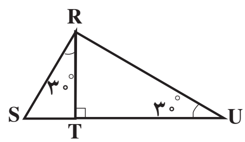
(پ)



(ب)

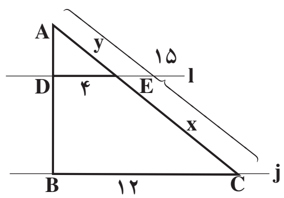


(ث)

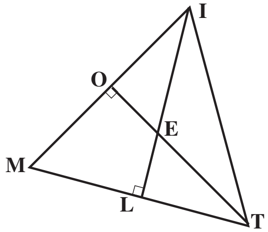


(ت)

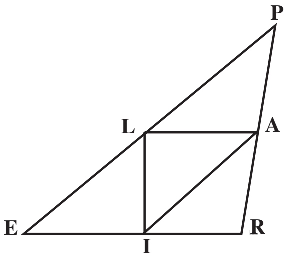
۲. در شکل زیر، خط l با خط j موازی است. طول‌های x و y را بیابید.



۳. در شکل روبه‌رو، IL و TO، ارتفاع های مثلث MIT هستند. چرا دو مثلث IOE و ELT متشابه هستند؟



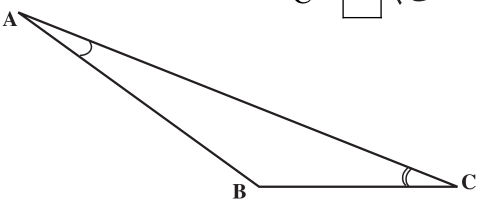
۴. در شکل روبه‌رو، نقاط L ،A و I به ترتیب نقاط وسط ضلع‌های PR ،PE و ER هستند. چرا دو مثلث ALI و PRE متشابه‌اند؟ دلیل خود را توضیح دهید.

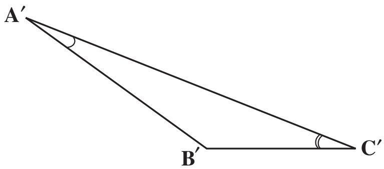


۵. اگر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه باشند، در هریک از عبارت های زیر، جای خالی را پر کنید :

الف) $\frac{CB}{C'B'}=\frac{AC}{\square}$ ؛ ب) $\hat{B}=\square$ ؛

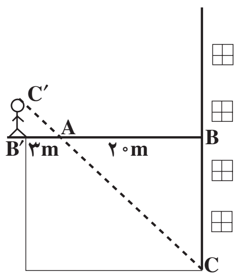
پ) $\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'A'}{\square}$ ؛ ت) $\hat{C}=\square$.





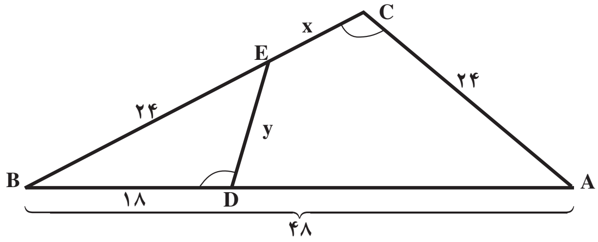
۶. دو قسمت مختلف یک بیمارستان به وسیله‌ی یک پل هوایی به هم مرتبط شده‌اند. محسن برای پیدا کردن ارتفاع این پل مانند شکل در یک انتهای آن ایستاد و شعاع دید خود را بر رأس زاویه بین سطح زمین و ساختمان قرار داد.

الف) چرا دو مثلث ABC و $AB'C'$ متشابه‌اند؟

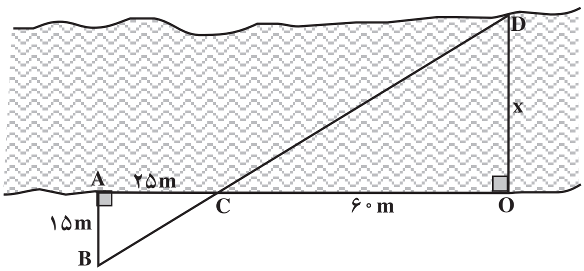


ب) با توجّه به اندازه‌های مشخّص شده در شکل و طول قد محسن که ۱/۸ متر می‌باشد، ارتفاع پل یعنی اندازه‌ی BC را به‌دست آورید[1].

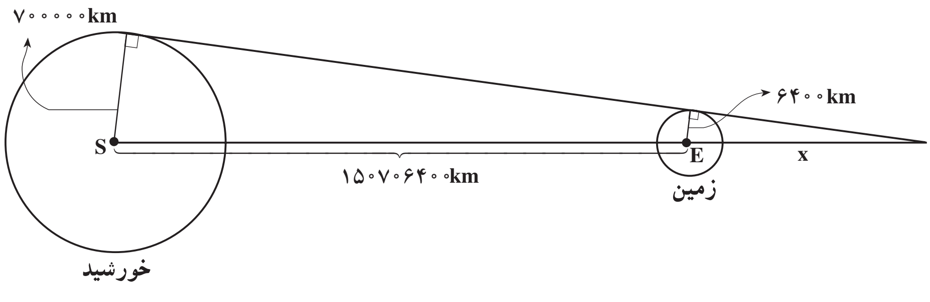
۷. در شکل زیر، $\hat{C} = B\hat{D}E$. طول x و y را پیدا کنید.



۸. شکل زیر توسط یک نقشه بردار برای محاسبه‌ی عرض رودخانه رسم شده است. به کمک اندازه‌های مشخص شده در شکل، عرض رودخانه را حساب کنید.



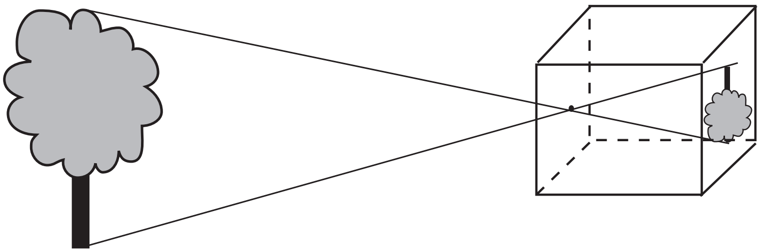
۹. در شکل زیر، شعاع‌های تقریبی زمین و خورشید و فاصله‌ی تقریبی مرکز زمین از مرکز خورشید داده شده است. به کمک یک ماشین حساب، طول تقریبی سایه‌ی زمین (x) را حساب کنید.



۱ــ اندازه‌های AB' و AB تقریبی هستند.

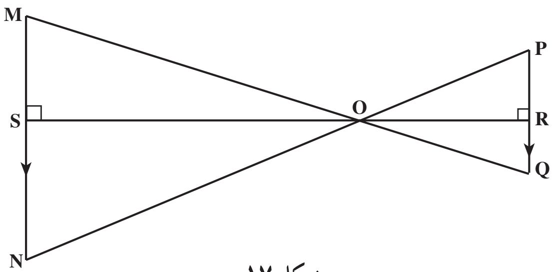
۳ــ۵ــ پاره‌خط‌های متناسب در دو مثلث متشابه

با ایجاد سوراخی در مرکز دیواره‌ی یک جعبه‌ی مکعب شکل و قراردادن یک کاغذ مات در درون جعبه درست روبه‌روی سوراخ، می‌توان آن‌را به یک دوربین عکاسی ساده به نام **جعبه‌ی تاریک** تبدیل نمود[۱].



شکل ۱۶

همان‌طور که در شکل ۱۶ می‌بینید، تصویری که از یک شیء در جعبه‌ی تاریک بر روی صفحه‌ی مات ایجاد می‌شود وارونه است. پرتوهای نور که از شیء می‌تابند و از سوراخ جعبه عبور می‌نمایند، دو مثلث ایجاد می‌کنند که در شکل ۱۷ نشان داده شده است. طول تصویری که در جعبه‌ی تاریک ایجاد می‌گردد با فاصله‌ی شیء از سوراخ متناسب است. این فاصله، ارتفاع OS از مثلث OMN است.



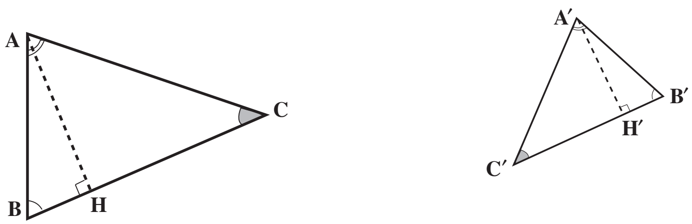
شکل ۱۷

فاصله‌ی سوراخ تا صفحه‌ی مات نیز ارتفاع OR از مثلث OPQ است. اگر دو ارتفاع OS و OR و نیز طول تصویر را بدانیم، آیا می‌توانیم طول شیء را به‌دست آوریم؟

۱ــ برای آشنایی بیشتر با طرز کار جعبه‌ی تاریک به کتاب آزمایشگاه فیزیک ۱ مراجعه نمایید.

فعالیت ۳ــ۲

در دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ ، $\hat{A}=\hat{A'}$ ، $\hat{B}=\hat{B'}$ و $\hat{C}=\hat{C'}$. پاره‌خط‌های AH و $A'H'$ به ترتیب ارتفاع‌های نظیر ضلع‌های BC و $B'C'$ هستند.



شکل ۱۸

۱. نسبت تشابه ضلع‌های متناظر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را بنویسید.
۲. چرا دو مثلث AHC و $A'H'C'$ متشابه هستند؟
۳. نسبت تشابه ضلع‌های متناظر دو مثلث AHC و $A'H'C'$ را بنویسید.
۴. از مقایسه‌ی ۱ و ۳ نتیجه می‌گیریم :

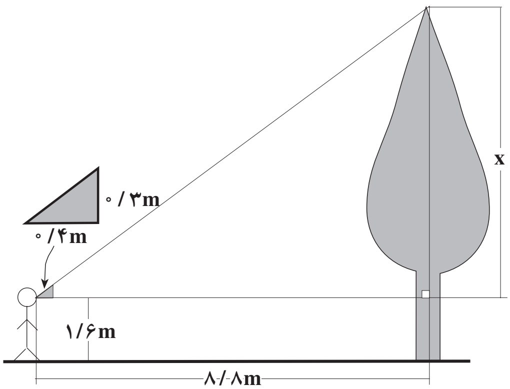
در دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ ، نسبت ارتفاع‌های نظیر برابر با نسبت تشابه است، یعنی :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AH}{A'H'}$$

۵. چرا دو مثلث MNO و QPO در شکل ۱۷ متشابه‌اند؟ دلیل آن‌را توضیح دهید.
۶. نتیجه‌ی به‌دست آمده در قسمت ۴ را برای دو مثلث متشابه MNO و QPO بنویسید (شکل ۱۷).
۷. اگر OS یعنی فاصله‌ی درخت تا سوراخ جعبه ۲۲ متر، OR فاصله‌ی تصویر درخت تا سوراخ ۰/۲ متر و PQ طول تصویر درخت ۰/۱ متر باشد، طول درخت را پیدا کنید.

مثال۷: مریم برای پیدا کردن ارتفاع درخت مقابل خانه‌ی خودشان، یک تکه مقوا به شکل

مثلث قائم‌الزاویه با اندازه‌ی اضلاع زاویه‌ی قائمه‌ی ۰/۳ متر و ۰/۴ متر ساخت. اگر او در فاصله‌ی ۸/۸ متر از درخت بایستد می‌تواند، با نگاه کردن در امتداد وتر مثلث، نوک درخت را ببیند. فاصله‌ی چشم او از زمین ۱/۶ متر است. مریم برای به‌دست آوردن ارتفاع تقریبی درخت به این صورت عمل کرد :



حل: دو مثلث قائم‌الزاویه در یک زاویه‌ی حادّه با هم مشترک هستند، پس با هم متشابه‌اند. درنتیجه ضلع‌های نظیر آن‌ها با هم متناسب‌اند. درنتیجه :

$$\frac{۸/۸}{۰/۴} = \frac{x}{۰/۳}$$

و

$$x = \frac{۰/۳ \times ۸/۸}{۰/۴}$$

$$\boxed{x = ۶/۶m}$$

امّا چون فاصله‌ی چشم مریم از زمین ۱/۶ متر است، پس

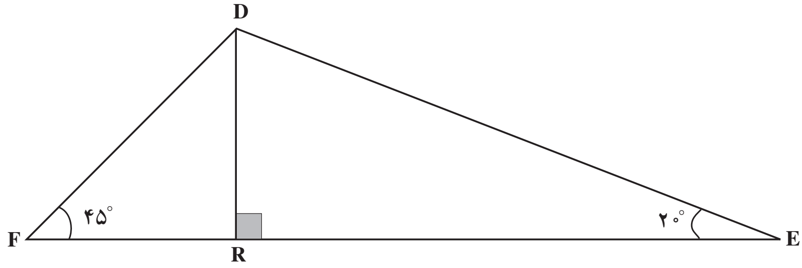
ارتفاع درخت $= ۶/۶ + ۱/۶$

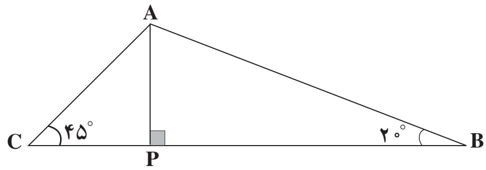
ارتفاع درخت $= ۸/۲m$

با استفاده از روش بالا می‌توان ارتفاع بلندی‌های مختلف از جمله برج میدان آزادی تهران را اندازه گرفت.

مسائل

۱. در شکل زیر :



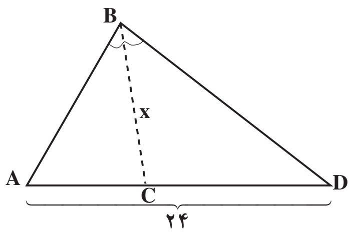


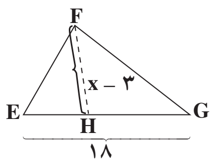
الف) اگر $DF = ۶\sqrt{۲}$ ، $DR = ۶$ و $AP = ۲$ ، طول AC را بیابید.

ب) اگر $BC = ۱۵$ ، $EF = ۲۱$ و $AP = ۴$ ، طول DR چقدر است؟

۲. اگر دو مثلث متشابه باشند، ثابت کنید نسبت نیمسازهای نظیر در آن‌ها برابر است با نسبت تشابه دو مثلث.

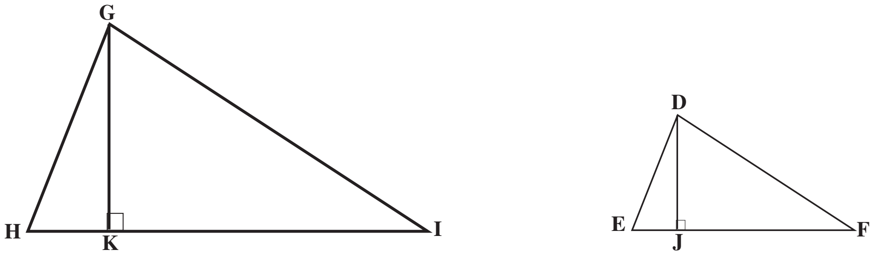
۳. در شکل زیر دو مثلث متشابه‌اند و BC نیمساز زاویه‌ی B و FH نیمساز زاویه‌ی نظیر B یعنیF است. با استفاده از مقادیر داده شده، x را حساب کنید.





۴. اگر دو مثلث متشابه باشند، ثابت کنید نسبت میانه‌های نظیر در آن‌ها برابر است با نسبت تشابه دو مثلث.

۵. در شکل زیر دو مثلث DEF و GHI متشابه‌اند و $GK = \frac{۳}{۲}DJ$. اگر $HI = ۲۰$ طول EF را حساب کنید.

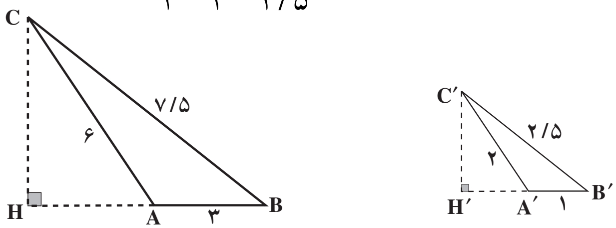


۳ــ ۶ ــ محیط و مساحت شکل‌های متشابه

نقشه‌ها تصویرهای مشابهی از وضعیت واقعی را نشان می‌دهند. در کنار هر نقشه معمولاً مقیاس آن نوشته می‌شود. برای مثال، اگر مقیاس نقشه‌ای $\frac{۱}{۵۰,۰۰۰}$ باشد، یعنی طول فاصله‌ها روی نقشه، ۵۰,۰۰۰ بار کوچک‌تر از فاصله‌ی واقعی است. به کمک مقیاس داده شده می‌توان اطلاعاتی از قبیل مساحت یک استان کشور، محیط یا طول خط مرزی یک استان، یا فاصله‌ی بین دو شهر را اندازه‌گیری کرد. چون نقشه با شکل واقعی کشور متشابه و مقیاس داده شده برای نقشه همان نسبت تشابه است، دانستن نسبت محیط‌ها و مساحت‌های شکل‌های متشابه برحسب نسبت تشابه اهمیت پیدا می‌کند.

مثال۸ : در شکل ۱۹ دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه هستند، زیرا ضلع‌های نظیر آن‌ها متناسبند. نسبت تشابه برابر است با

$$\frac{۳}{۱} = \frac{۶}{۲} = \frac{۷/۵}{۲/۵} = ۳$$



شکل ۱۹

محیط مثلث ABC ، یعنی مجموع طول‌های ضلع‌های آن

$$۳+۶+۷/۵=۱۶/۵$$

و محیط مثلث $A'B'C'$

$$۱+۲+۲/۵=۵/۵$$

است. چون $\frac{۱۶/۵}{۵/۵}=۳$ ، بنابراین

$$\text{نسبت تشابه}=۳=\frac{۱۶/۵}{۵/۵}=\frac{\text{محیط مثلث } ABC}{\text{محیط مثلث } A'B'C'}$$

پس در این دو مثلث، نسبت محیط مثلث بزرگ‌تر به محیط مثلث کوچک‌تر برابر با نسبت تشابه است.

مثال۹ : در شکل ۱۹، ارتفاع‌های CH از مثلث ABC و $C'H'$ از مثلث $A'B'C'$ را رسم می‌کنیم. طبق نتیجه‌ی فعالیّت ۳ ــ ۲،

$$\frac{CH}{C'H'}=\text{نسبت تشابه}=۳ \qquad (۱)$$

از طرفی

$$\text{مساحت مثلث } ABC=\frac{۱}{۲}CH\times AB$$

$$=\frac{۱}{۲}CH\times ۳$$

$$=\frac{۳}{۲}CH$$

همچنین :

$$\text{مساحت مثلث } A'B'C'=\frac{۱}{۲}C'H'\times A'B'$$

$$=\frac{۱}{۲}C'H'\times ۱=\frac{۱}{۲}C'H'$$

از تساوی (۱) نتیجه می‌گیریم که $CH=۳C'H'$. بنابراین

$$\text{مساحت مثلث } ABC=\frac{۳}{۲}CH=\frac{۹}{۲}C'H'$$

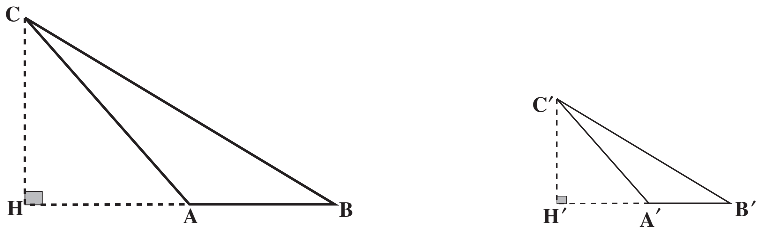
در نتیجه :

$$\frac{\text{مساحت مثلث } ABC}{\text{مساحت مثلث } A'B'C'} = \frac{\frac{۹}{۲}C'H'}{\frac{۱}{۲}C'H'}$$

$$= \frac{\frac{۹}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = ۹ = ۳^{۲}$$

پس در این دو مثلث، نسبت مساحت مثلث بزرگ‌تر به مساحت مثلث کوچک‌تر، توان دوم نسبت تشابه است. آیا دو نتیجه‌ی به‌دست آمده از این دو مثال، برای هر دو مثلث متشابه درست است؟ یعنی آیا اگر دو مثلث متشابه باشند، نسبت محیط‌های آن‌ها برابر نسبت تشابه و نسبت مساحت‌ها برابر توان دوم نسبت تشابه است؟

در شکل ۲۰ ، دو مثلث ABC و A′B′C′ متشابه‌اند. پس طبق تعریف تشابه



شکل ۲۰

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

محیط‌های این دو مثلث از جمع کردن طول‌های ضلع‌های آن‌ها به‌دست می‌آید. پس

$$\text{محیط مثلث } ABC = AB + AC + BC$$

و

$$\text{محیط مثلث } A'B'C' = A'B' + A'C' + B'C'$$

بنابر ویژگی ۴ تناسب‌ها،

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AB + AC + BC}{A'B' + A'C' + B'C'} = \frac{\text{محیط مثلث } ABC}{\text{محیط مثلث } A'B'C'}$$

یعنی :

در دو مثلث متشابه، نسبت محیط‌ها با نسبت تشابه برابر است.

در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ ،

$$\text{ABC مساحت مثلث} = \frac{۱}{۲} CH \times AB$$

$$\text{A'B'C' مساحت مثلث} = \frac{۱}{۲} C'H' \times A'B'$$

از طرفی

$$\text{نسبت تشابه} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{CH}{C'H'}$$

درنتیجه :

$$\frac{\text{ABC مساحت مثلث}}{\text{A'B'C' مساحت مثلث}} = \frac{\frac{۱}{۲} CH \times AB}{\frac{۱}{۲} C'H' \times A'B'}$$

$$= \frac{CH \times AB}{C'H' \times A'B'}$$

$$= \left(\frac{CH}{C'H'}\right)\left(\frac{AB}{A'B'}\right)$$

$$= \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^{۲}$$

چون $\frac{AB}{A'B'}$ همان نسبت تشابه دو مثلث است. به این ترتیب،

در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر توان دوم نسبت تشابه است.

مثال ۱۰: نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه، ۱۶ است. نسبت محیط‌های آن‌ها را به‌دست آورید.

حل: اگر نسبت تشابه دو مثلث k باشد،

$$\text{نسبت مساحت‌ها} = k^{۲}$$

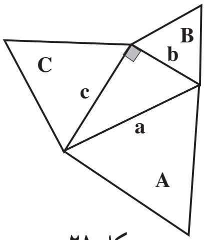
پس $k^2 = ۱۶$ و درنتیجه $k = ۴$. چون

نسبت تشابه = نسبت محیط‌ها

پس

۴ = نسبت محیط‌ها

مثال۱۱: مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول ضلع‌های a، b و c را در نظر بگیرید. آنگاه سه مثلث متساوی الاضلاع بر روی این سه ضلع بسازید (شکل ۲۱).



شکل ۲۱

چه رابطه‌ای بین مساحت‌های سه مثلث متساوی‌الاضلاع A ، B و C وجود دارد؟

حل: چون مساحت هر مثلث متساوی‌الاضلاع برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ مجذور طول ضلع است، پس :

$$\text{مساحت A} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

$$\text{مساحت B} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}b^۲$$

$$\text{مساحت C} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}c^۲$$

از طرف دیگر، در هر مثلث قائم الزاویه، رابطه‌ی فیثاغورس برقرار است،پس :

$a^۲ = b^۲ + c^۲$

دو طرف رابطه‌ی بالا را در $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ضرب می‌کنیم :

$$\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}b^۲ + \frac{\sqrt{۳}}{۴}c^۲$$

چون

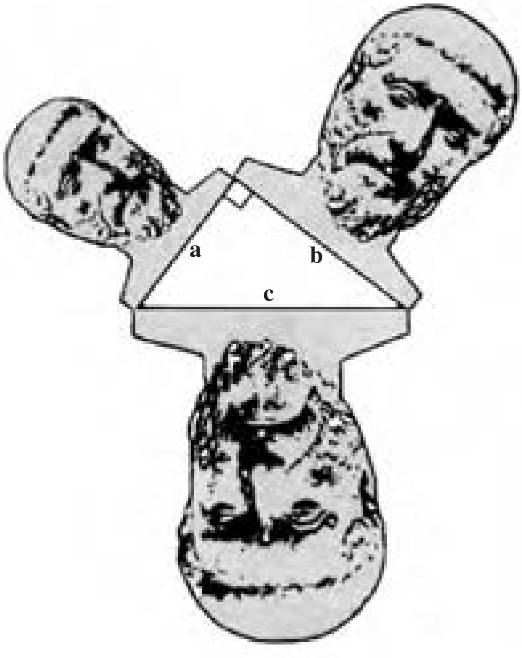
$$\text{مساحت A} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ \quad \text{و} \quad \text{مساحت B} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}b^۲ \quad \text{و} \quad \text{مساحت C} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}c^۲$$

پس

مساحت C + مساحت B = مساحت A

بنابراین اگر به جای مربع‌هایی که روی سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه ساختیم، سه مثلث متساوی‌الاضلاع بر روی سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه بسازیم، باز هم همان رابطه بین مساحت‌ها برقرار است، یعنی مجموع مساحت‌های مثلث‌های ساخته شده روی ضلع‌های زاویه‌ی قائمه برابر با مساحت مثلث ساخته شده روی وتر است.

آیا در مورد مساحت‌های هر سه شکل متشابهی که روی سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه ساخته می‌شود، باز هم رابطه‌ی فوق برقرار است؟ به آن فکر کنید![1]



شکل ۲۲

۱ــ مجسمه‌ی فیثاغورس در موزه‌ی کاپیتولینو در رُم (مأخذ : ژاکوب، ۱۹۷۳، صفحه ۴۱۲).

مجله‌ی ریاضی

در دو مثلث متشابه، نسبت اجزای[1] متناظر مانند ارتفاع‌ها، نیمسازها و میانه‌ها با نسبت تشابه برابر است و نسبت مساحت‌ها برابر توان دوم نسبت تشابه است. این مطلب در مورد هر دو شکل متشابه درست است. به طور کلی دو شکل را متشابه گویند هرگاه بین نقاط دو شکل، یک تناظر برقرار باشد و مثلثی که با هر سه نقطه از یک شکل ساخته می‌شود، با مثلثی که با سه نقطه‌ی متناظر از شکل دیگر ساخته می‌شود، متشابه باشد[2]. برای مثال، می‌توان دو چند ضلعی متشابه را به مثلث‌های متشابه تقسیم کرد و نتایج مربوط به مثلث‌های متشابه را برای آن‌ها به کار برد. بنابراین، در دو شکل متشابه، نسبت تمام اجزای آن مقدار ثابتی است که برابر با نسبت تشابه است. در نتیجه، نسبت مساحت‌های دو شکل متشابه برابر با توان دوم نسبت تشابه است.

برای مثال، چون هر دو دایره با هم متشابه‌اند، می‌توان مساحت دایره O به شعاع r را به وسیله‌ی دایره‌ی O' به شعاع واحد محاسبه کرد :

$$\frac{\text{مساحت دایره‌ی } O}{\text{مساحت دایره‌ی } O'} = (\text{نسبت تشابه})^{2} = \left(\frac{r}{1}\right)^{2} = r^{2}$$

و چون مساحت دایره‌ی واحد برابر π است،

$$\text{مساحت دایره به شعاع } r = \pi r^{2}$$

با همین استدلال، در شکل ۲۲ (تصویر فیثاغورس) چون هر سه شکل متشابه‌اند (دلیل آن را توضیح دهید) پس :

$$\frac{\text{مساحت شکل روی ضلع } b}{\text{مساحت شکل روی ضلع } c} = \left(\frac{b}{c}\right)^{2} \qquad (1)$$

$$\frac{\text{مساحت شکل روی ضلع } a}{\text{مساحت شکل روی ضلع } c} = \left(\frac{a}{c}\right)^{2} \qquad (2)$$

۱ــ اجزای مورد نظر شامل زاویه‌ها نمی‌باشد.

۲ــ در این تعریف، منظور از شکل، مجموعه نقاطی از صفحه است که بر یک خط قرار ندارند.

از طرفی، طبق قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی شکل ۲۲،

$$c^۲ = a^۲ + b^۲$$

دو طرف رابطه‌ی فوق را بر $c^۲$ تقسیم می‌کنیم ؛

$$۱ = \frac{a^۲}{c^۲} + \frac{b^۲}{c^۲}$$

یا

$$۱ = (\frac{a}{c})^۲ + (\frac{b}{c})^۲ \qquad (۳)$$

رابطه‌ی (۱) و (۲) را در (۳) جایگزین می‌کنیم :

$$۱ = \frac{\text{مساحت شکل روی ضلع } a}{\text{مساحت شکل روی ضلع } c} + \frac{\text{مساحت شکل روی ضلع } b}{\text{مساحت شکل روی ضلع } c}$$

از رابطه‌ی فوق مخرج مشترک می‌گیریم :

$$۱ = \frac{\text{مساحت شکل روی ضلع } b + \text{مساحت شکل روی ضلع } a}{\text{مساحت شکل روی ضلع } c}$$

طبق خاصیّت تناسب، حاصل ضرب جمله‌های کناری برابر با حاصل ضرب جمله‌های میانی است. در نتیجه ؛

مساحت شکل روی ضلع b + مساحت شکل روی ضلع a = مساحت شکل روی ضلع c

مسائل

۱. اگر ضلع‌های کوچک‌تر دو مثلث متشابه ۵ و ۶ سانتی‌متر باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها را به‌دست آورید.

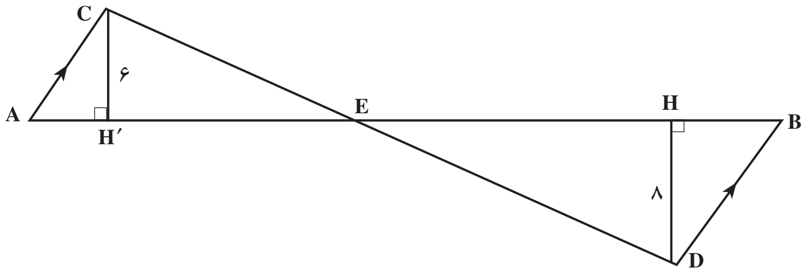
۲. مساحت‌های دو مثلث متشابه ۱۶ و ۲۵ سانتی‌متر مربع است. نسبت اضلاع متناظر را به دست آورید.

۳. در دو مثلث متشابه مساحت یکی ۱۱ برابر دیگری است. اگر طول یک ضلع از مثلث کوچک‌تر ۷ سانتی‌متر باشد، طول ضلع متناظر در مثلث بزرگتر را بیابید.

۴. نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه $\frac{۸۱}{۱۲۱}$ است. نسبت محیط‌ها را پیدا کنید.

۵. محیط‌های دو مثلث متشابه ۲۵ و ۴۵ سانتی‌متر است. اگر مساحت مثلث کوچک‌تر، ۵۰ سانتی‌متر مربع باشد، مساحت مثلث بزرگ‌تر را بیابید.

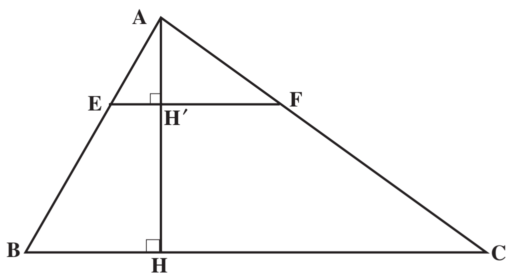
۶. با توجه به اندازه‌های روی شکل و $AB = ۳۵$ ، به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) نسبت مساحت‌های مثلث‌های ACE و BDE را بیابید.

ب) مساحت مثلث BDE را به‌دست آورید.

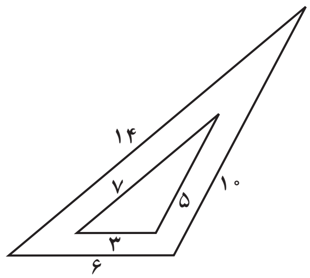
۷. در شکل زیر، $EF \parallel BC$. اگر نسبت مساحت‌های مثلث‌های AEF و ABC برابر $\frac{۱}{۶}$ باشد، نسبت ارتفاع‌های متناظر را به‌دست آورید.



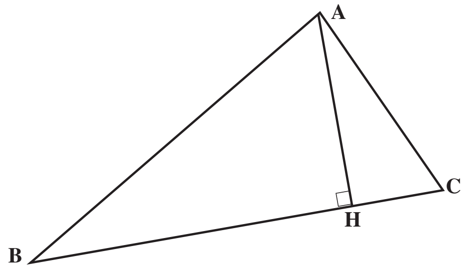
۸. مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند. اگر طول ضلع‌های مثلث ABC، ۵، ۸ و ۱۱ سانتی‌متر و محیط مثلث $A'B'C'$ برابر ۶۰ سانتی‌متر باشد، طول ضلع‌های مثلث $A'B'C'$ را به‌دست آورید.

۹. طول ضلع‌های مثلث ABC، ۷، ۹ و ۱۴ سانتی‌متر است. مثلث PQR با مثلث ABC متشابه است و طول بزرگ‌ترین ضلع آن ۲۱ سانتی‌متر است. محیط مثلث PQR را به دست آورید.

۱۰. در شکل زیر نسبت مساحت‌ها را بیابید.



۱۱. در شکل زیر زاویه‌ی BAC قائمه است و AH ارتفاع نظیر وتر می‌باشد مراحل زیر را در نظر بگیرید.



۱. مساحت مثلث ACH+ مساحت مثلث ABH = مساحت مثلث ABC

۲. $\dfrac{\text{مساحت مثلث ACH}}{\text{مساحت مثلث ABC}} + \dfrac{\text{مساحت مثلث ABH}}{\text{مساحت مثلث ABC}} = ۱$

۳. مثلث‌های ABC و ABH و ACH متشابه‌اند.

۴. $(\dfrac{AC}{BC})^{۲} + (\dfrac{AB}{BC})^{۲} = ۱$

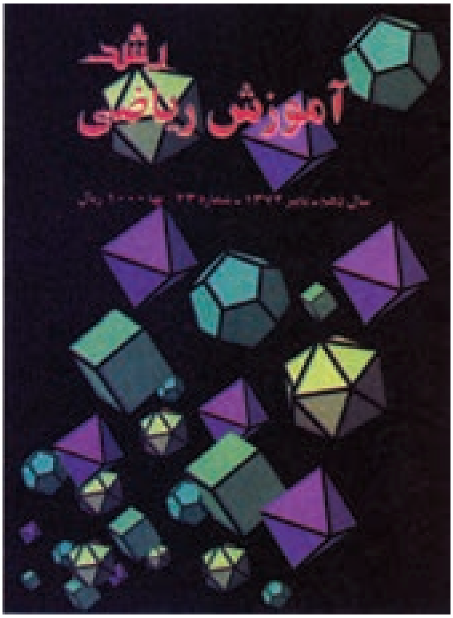
۵. $BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲}$

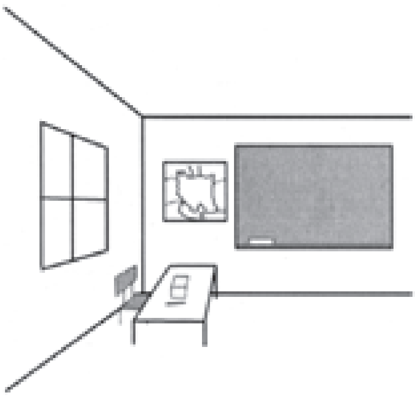
الف) دلیل درستی هر مرحله را توضیح دهید.

ب) آیا پنج مرحله بالا اثبات دیگری برای قضیه فیثاغورس است؟ (چرا؟).

فصل ۴

شکل‌های فضایی





ما در فضای **سه بُعدی** زندگی می‌کنیم و اشیای اطراف ما، سه‌بعدی هستند. کلاس درس یا اتاق منزلی که در آن زندگی می‌کنیم نمودهایی از فضای سه‌بُعدی هستند. میز و صندلی درون کلاس هم اشیای سه‌بُعدی می‌باشند.

در این فصل می‌خواهیم درباره‌ی بعضی از شکل‌های فضایی صحبت کنیم و ویژگی‌های مقدماتی آن‌ها را بشناسیم.