

احتمال: اندازه‌گیری شانس

با توجه به آشنایی که با مفاهیم پدیده‌های تصادفی، فضاهاى نمونه‌ای و پیشامدهای تصادفی پیدا کردیم، اکنون می‌توانیم احتمال وقوع یک پیشامد تصادفی را مورد مطالعه قرار دهیم. به عبارت دیگر، می‌خواهیم شانس وقوع یک پیشامد تصادفی را اندازه‌گیری کنیم. برای این منظور احتمال وقوع پیشامدهایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در تمام فضای نمونه‌ای به‌طور یکسان در نظر گرفته می‌شوند مانند پرتاب سکه که در آن احتمال آمدن پشت یا رو یکسان است.

۴-۱- احتمال هم‌شانس در فضاهای گسسته

فضای گسسته را فضایی گرفتیم که تعداد عناصر آن متناهی باشند، و بنابراین هر زیرمجموعه آن دارای تعداد معینی عضو است که قابل شمارش می‌باشد و چون هر زیرمجموعه یک فضای نمونه‌ای، یک پیشامد می‌باشد، بنابراین، با تعیین تعداد اعضای متناظر با هر پیشامد خاص و تقسیم آن بر تعداد کل عناصر فضای نمونه‌ای، می‌توان شانس وقوع آن پیشامد یا احتمال وقوع آن را اندازه گرفت. به زبان ریاضی برای به دست آوردن $P(A)$ ، احتمال وقوع پیشامد A ، رابطه زیر را به کار می‌بریم.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

که $n(A)$ تعداد عضوهای A و $n(S)$ تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای S است. احتمال در فضاهای گسسته هم شانس، احتمال کلاسیک نیز نامیده می‌شود.

مثال ۱: در ریختن یک تاس سالم^۱، احتمال آمدن عدد ۴ چقدر است؟

حل: فضای نمونه آزمایش مورد بحث عبارت است از:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

احتمال ظاهر شدن عدد ۴ یا به عبارت دیگر احتمال وقوع پیشامد $A = \{4\}$ عبارت است از:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

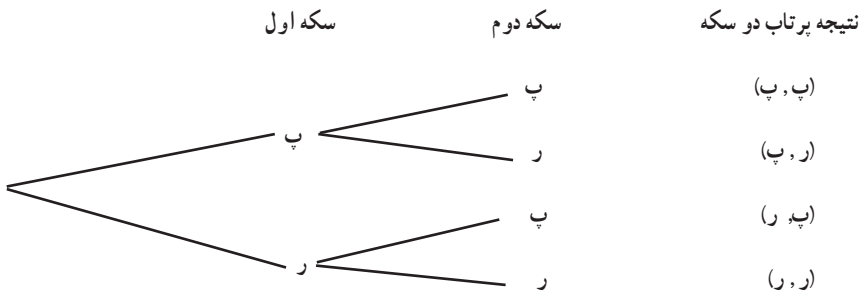
مثال ۲: دو سکه سالم را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال وقوع پدیده‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) هر دو سکه به پشت بیفتند.

ب) یکی از دو سکه به پشت، و دیگری به رو بیفتد.

پ) حداقل یکی از سکه‌ها به پشت بیفتد.

حل: فضای نمونه‌ای آزمایش مورد بحث با استفاده از نمودار درختی به قرار زیر است:



به عبارت دیگر فضای نمونه‌ای عبارت است از $S = \{(پ, پ), (پ, ر), (ر, پ), (ر, ر)\}$ پیشامد وقوع دو

سکه به پشت زیرمجموعه $A_1 = \{(پ, پ)\}$ از S است، پس:

$$P(A_1) = \frac{n(A_1)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

پیشامد اینکه یکی از دو سکه به پشت و دیگری به رو بیفتد زیرمجموعه $A_2 = \{(پ, ر), (ر, پ)\}$

از S می‌باشد، در نتیجه:

$$P(A_2) = \frac{n(A_2)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

۱- تاس سالم نامی است که متقارن بوده و شانس آمدن هر وجه آن یکسان باشد.

و بالاخره پیشامد اینکه حداقل یک سکه به پشت بیفتد زیر مجموعه A_3 از S است که $\{(ر, پ), (پ, ر), (پ, پ), (پ, پ)\}$ ، زیرا کافی است یکی از سکه‌ها به پشت بیفتد یا هر دو سکه به پشت بیفتند، پس:

$$P(A_3) = \frac{n(A_3)}{n(S)} = \frac{3}{4}$$

مثال ۳: در ریختن یک جفت تاس قرمز و سبز، احتمال اینکه مجموع ارقام ظاهر شده برابر ۷ باشد را محاسبه کنید.

حل: در این آزمایش، فضای نمونه‌ای عبارت است از

$$S = \{(a, b) \mid a, b \in K\} = K \times K$$

که $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ پس S دارای ۳۶ عضو می‌باشد. پیشامد مورد نظر عبارت است از:

$$A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

پس:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

مثال ۴: تمام ترکیبات دو رقمی مجموعه اعداد $\{1, 2, 3\}$ را روی کارت‌های مختلف نوشته (هر ترکیب روی یک کارت) و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، یک کارت را به طور تصادفی برمی‌داریم احتمال آنکه روی این کارت عدد ۲ باشد چیست؟

حل: فضای نمونه آزمایش مورد نظر عبارت است از:

$$S = \{12, 13, 21, 23, 31, 32\}$$

و پیشامد مطلوب زیر مجموعه A از فضای نمونه است:

$$A = \{12, 21, 23, 32\}$$

در نتیجه احتمال آن برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

مثال ۵: از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ ، عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه

عدد انتخاب شده بر ۳ بخش پذیر باشد چقدر است؟

حل: فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی شامل هزار عضو است. پس $n(S) = 1000$. فرض

می‌کنیم A مجموعه همه اعدادی باشد که بین ۱ تا ۱۰۰۰ هستند و بر ۳ نیز بخش پذیرند، پس:

$$A = \{3m : 1 \leq m \leq 333\}$$

و $n(A) = 333$. در نتیجه احتمال اینکه عدد انتخابی بر ۳ بخش پذیر باشد برابر $\frac{333}{1000}$ است.

مثال ۶: از مجموعه اعداد طبیعی $\{1, 2, 3, \dots, N\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال

اینکه عدد انتخابی بر عدد k ($1 \leq k \leq N$) بخش پذیر باشد چقدر است؟

حل: فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی شامل N عضو است. فرض کنید A پیشامد بخش پذیر

بودن عدد انتخابی بر عدد k باشد، در این صورت:

$$A = \left\{ km : 1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor \right\}$$

که در آن، $[X]$ بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x است. پس

$$n(A) = \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor$$

$$P(A) = \frac{\left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor}{N}$$

مثال ۷: از یک سبد محتوی ۴ سیب سالم و ۵ سیب فاسد، ۲ سیب به طور تصادفی بیرون

می‌آوریم. مطلوب است احتمال آنکه هر دو سیب سالم باشند.

حل: در بسیاری از موارد اصولاً نوشتن پیشامدهای مطلوب و فضای نمونه‌ای به صورت

فهرست‌وار، کاری وقت‌گیر و دشوار است و باید از راه دیگری تعداد عناصر مورد نیاز را شمارش

کنیم. در این مثال فضای نمونه عبارت است از همه ترکیبات دوتایی از سیب‌ها که می‌توان آنها را از

یک سبد محتوی ۹ سیب خارج کرد. با استفاده از آنالیز ترکیبی از ریاضی (۲) می‌دانیم که تعداد این

ترکیبات چنین به دست می‌آید:

$$n(S) = \binom{9}{2} = \frac{9!}{2!7!} = 36$$

پیشامد مطلوب A ، آن است که هر دو سیبی که خارج کرده‌ایم سالم باشند، ۴ سیب سالم داریم،

با توجه به اینکه سیب‌های خروجی باید حتماً یک جفت از این ۴ سیب باشند، داریم:

$$n(A) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

پس:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

مثال ۸: از بین ۲۲ دانش‌آموز قرار است به‌طور تصادفی ۸ نفر برای تشکیل تیم کوهنوردی دبیرستان انتخاب شوند. اگر ۱۰ نفر از این دانش‌آموزان در سال اول و ۱۲ نفر دیگر در سال دوم مشغول به تحصیل باشند، مطلوب است احتمال آنکه ۴ نفر از سال اول و ۴ نفر از سال دوم انتخاب شوند. حل: در اینجا فضای نمونه‌ای عبارت است از تمام حالات ممکن برای انتخاب ۸ نفر از ۲۲

نفر، یعنی $\binom{22}{8}$. پیشامد مطلوب حالت‌هایی است که ۴ نفر از دانش‌آموزان سال اول (که تعداد آنها ۱۰ نفر است) و ۴ نفر از دانش‌آموزان سال دوم (که تعداد آنها ۱۲ نفر است) انتخاب شوند. تعداد

حالت‌های انتخاب ۴ نفر از ۱۰ نفر عبارت است از $\binom{10}{4}$ و تعداد انتخاب‌های ممکن ۴ نفر از ۱۲ نفر

مساوی است با $\binom{12}{4}$. طبق اصل اساسی شمارش (یا اصل ضرب که در ریاضی (۲) خوانده‌اید)،

تعداد تمام حالت‌های این پیشامد مساوی با حاصلضرب این دو عدد $\binom{12}{4}$ و $\binom{10}{4}$ می‌باشد. پس:

$$n(A) = \binom{10}{4} \binom{12}{4}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{10}{4} \times \binom{12}{4}}{\binom{22}{8}} = \frac{210}{323}$$

مثال ۹: n نفر را در نظر می‌گیریم احتمال اینکه روز تولد هیچ دو نفری از آنها یک روز نباشد را مشخص کنید (برای سادگی کار، از احتمال وقوع تولد افراد در روز آخر سال‌های کبیسه صرف‌نظر می‌کنیم).

حل : چون تعداد افراد مورد بررسی n است و هریک از آنها ممکن است در ۳۶۵ روز مختلف سال به دنیا آمده باشد، بنابراین در این مسأله با یک فضای نمونه‌ای ۳۶۵^n عضوی روبه‌رو هستیم، (با استدلالی مشابه وقتی که دو تاس را با هم می‌اندازیم و فضای نمونه‌ای ما $۶^۲$ عضو دارد) پس داریم $n(S) = ۳۶۵^n$ ، از میان n نفر مورد نظر، نفر اول احتمال دارد که در یکی از ۳۶۵ روز سال به دنیا آمده باشد. چون فرض بر یکسان نبودن روز تولد افراد است پس نفر دوم ممکن است در یکی از ۳۶۴ روز باقیمانده سال متولد شده باشد و به همین ترتیب نفر سوم در یکی از ۳۶۳ روز باقیمانده و بالاخره نفر n ام در یکی از $۳۶۵ - n + ۱$ روز ممکن است متولد شده باشد. بدین ترتیب، با توجه به اصل اساسی شمارش، n نفر ممکن است $(۳۶۵ - n + ۱) \times ۳۶۴ \times ۳۶۵$ روز تولد متفاوت داشته باشند. بنابراین اگر A پیشامد مورد نظر باشد داریم :

$$n(A) = ۳۶۵ \times ۳۶۴ \times \dots \times (۳۶۵ - n + ۱)$$

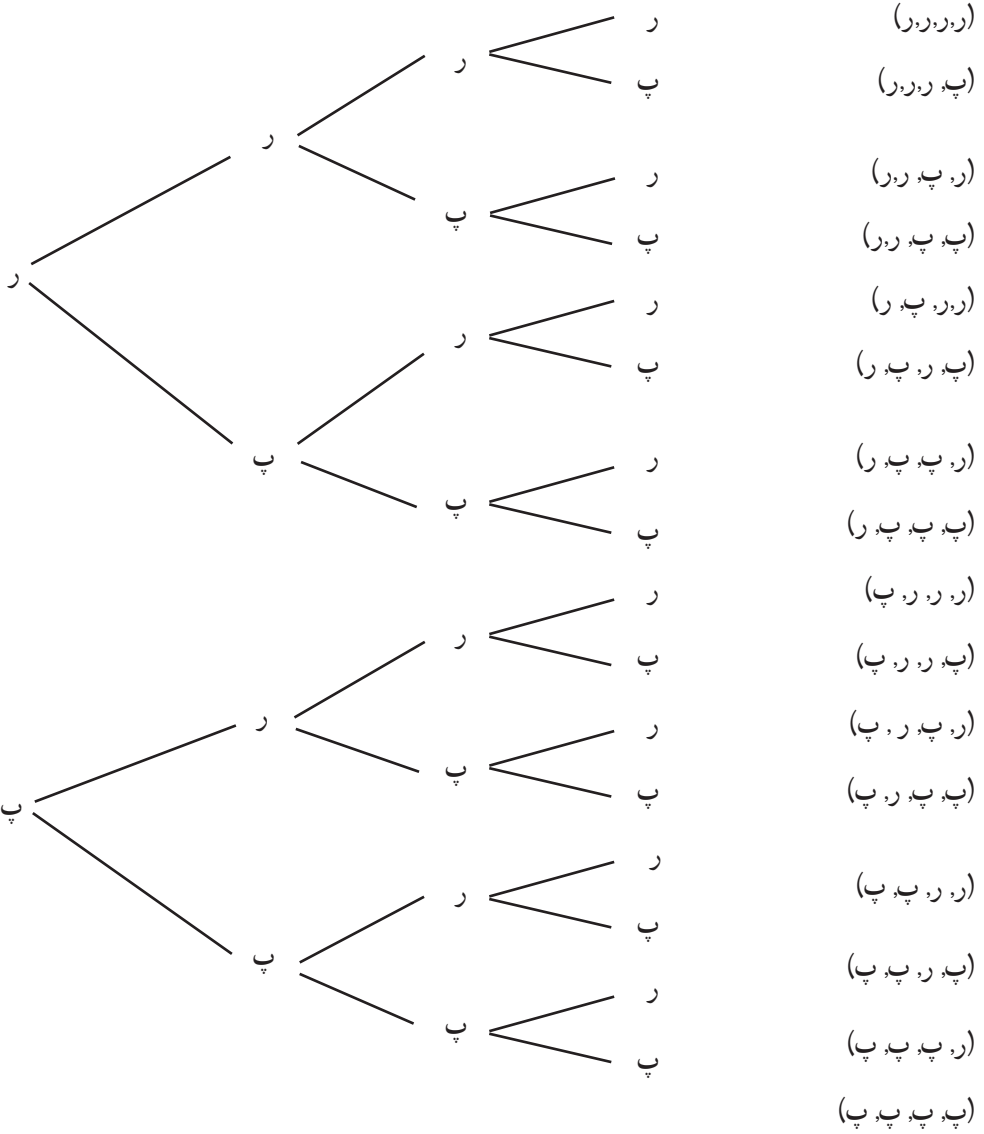
پس :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳۶۵ \times ۳۶۴ \times \dots \times (۳۶۵ - n + ۱)}{۳۶۵^n}$$

دقت کنید که اگر $n > ۳۶۵$ آنگاه طبق اصل لانه کبوتری حتماً دو نفر در یک روز متولد شده‌اند، که در این حالت $P(A) = ۰$.

۲-۴- احتمال دو جمله‌ای

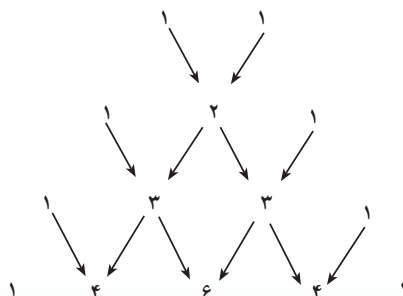
اگر یک سکه سالم یک بار پرتاب شود هرکدام از برآمدها دارای احتمال $\frac{۱}{۲}$ است. اگر سکه را دو، سه یا چهار بار پرتاب کنیم، به ترتیب چهار، هشت یا شانزده حالت هم شانس وجود دارد که در نمودار درختی صفحه بعد نشان داده شده است :



بدین ترتیب جدول زیر را برای پرتاب ۱، ۲، ۳ و ۴ سکه به دست می آوریم.

پرتاب ... سکه	تعداد رو آمدن ها	احتمال
یک سکه	۰	$\frac{1}{2}$
	۱	$\frac{1}{2}$
دو سکه	۰	$\frac{1}{4}$
	۱	$\frac{2}{4}$
	۲	$\frac{1}{4}$
سه سکه	۰	$\frac{1}{8}$
	۱	$\frac{3}{8}$
	۲	$\frac{3}{8}$
	۳	$\frac{1}{8}$
چهار سکه	۰	$\frac{1}{16}$
	۱	$\frac{4}{16}$
	۲	$\frac{6}{16}$
	۳	$\frac{4}{16}$
	۴	$\frac{1}{16}$

حال صورت کسرهای احتمال در جدول فوق را به صورت نمودار زیر در می آوریم :



این اعداد یک مثلث تشکیل می دهند که به مثلث خیام – پاسکال موسوم است. هر عدد در یک سطر مثلث از جمع کردن جفت اعداد چپ و راست آن در سطر بالایی به دست می آید. این مثلث را تا بی نهایت می توان ادامه داد. اگر به ضرایب حاصل از بسط توان های طبیعی دوجمله ای $a+b$ نگاه کنیم، همین اعداد موجود در مثلث فوق را می یابیم:

$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

و در حالت کلی از آنالیز ترکیبی در ریاضی (۲) می دانیم که:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

بنابراین:

$$P(\text{آمدن } k \text{ رو}) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

مثال ۱۰: تاس سالمی را ۱۵ بار می ریزیم. احتمال اینکه ۶ بار برآمد تاس یک عدد فرد باشد،

چيست؟ احتمال اینکه ۱۰ بار برآمد تاس یک عدد زوج باشد، چقدر است؟

حل: چون در ریختن یک تاس سالم، برآمد مشاهده شده یا زوج است و یا فرد، بنابراین می توان

گفت {فرد و زوج} = S و $\frac{1}{2} = P(\text{فرد آمدن تاس}) = P(\text{زوج آمدن تاس}) = P$ و مانند مثال پرتاب سکه سالم،

خواهیم داشت

$$P(\text{۶ بار مشاهده عدد فرد}) = \frac{\binom{15}{6}}{2^{15}} = 0/15$$

$$P(\text{۱۰ بار مشاهده عدد زوج}) = \frac{\binom{15}{10}}{2^{15}} = 0/09$$

۱- در یک خانواده با دو فرزند احتمال اینکه بچه‌ها از دو جنس مخالف و یا هر دو دختر باشند را پیدا کنید.

۲- رمز یک قفل، عددی سه رقمی است که تنها با تنظیم سه رقم آن به طور صحیح می‌توان قفل را باز کرد. با علم به تکراری نبودن ارقام رمز، احتمال کشف کردن تصادفی رمز قفل فقط با یک بار تنظیم ارقام را پیدا کنید.

۳- مسأله فوق را با فرض وجود یک رمز پنج رقمی حل کنید.

۴- اگر یک عدد ۴ رقمی کمتر از ۵۰۰۰ به طور تصادفی با ترکیب ارقام ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ به وجود آید، احتمال اینکه عدد ساخته شده بر ۵ بخش پذیر باشد را پیدا کنید.

۵- یک کلمه چهار حرفی به طور تصادفی با استفاده از حروف کلمه «خوارزمی» ساخته شده است. احتمال اینکه این کلمه دارای حرف نقطه‌دار نباشد را پیدا کنید. مسأله را با فرض تکراری بودن حروف و نیز بدون این فرض حل کنید.

۶- یک جفت تاس مخصوص داریم که در هر کدام از آنها به جای ارقام ۱ تا ۶ دو عدد ۱، دو عدد ۲ و دو عدد ۳ نمایش داده شده است. این دو تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال وقوع مجموع‌های زیر را پیدا کنید:

الف) ۵ (ب) عددی فرد

۷- ۵ نفر زن و ۶ نفر مرد برای شغلی تقاضا کرده‌اند. با این حال، امکان استخدام تنها برای ۵ نفر از آنها وجود دارد احتمال انتخاب ۵ نفر را در حالت‌های زیر پیدا کنید:

الف) ۳ زن و ۲ مرد انتخاب شوند.

ب) ۵ زن انتخاب شوند.

پ) حداقل ۴ مرد انتخاب شوند.

۸- یک تاس و یک سکه با هم انداخته می‌شوند، مطلوب است:

الف) احتمال آنکه تاس عدد زوج و سکه رو بیاید.

ب) احتمال آنکه تاس عدد زوج یا سکه رو بیاید.

۹- یک کیسه محتوی ۲۰ مهره قرمز، ۱۰ مهره سفید و ۱۵ مهره سبز است. یک مهره را به طور تصادفی از کیسه بیرون می‌آوریم. مطلوب است:

الف) احتمال آنکه این مهره سفید باشد.

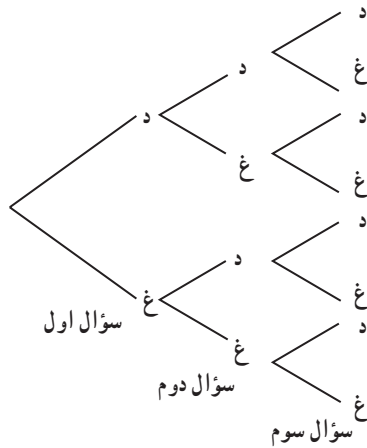
این مهره را به کیسه برگردانده ۲ مهره را به طور تصادفی بیرون می آوریم.

ب) احتمال آنکه یک مهره قرمز و یک مهره سفید باشد.

۱۰- نمودار درختی زیر راه های پاسخ دادن به سه سؤال در یک آزمون دوگزینه ای (درست -

غلط) را نشان می دهد. حرف «د» یعنی درست و حرف «غ» یعنی غلط. اگر سؤال ها به تصادف انتخاب

شوند، مطلوب است احتمال :



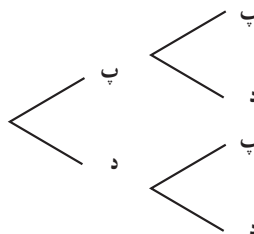
الف) اینکه هر سه سؤال صحیح جواب داده شده باشند؛

ب) هیچ یک از سؤالات صحیح جواب داده نشده باشند؛

پ) تعداد سؤالات صحیح پاسخ داده شده بیشتر باشند.

۱۱- نمودار درختی زیر حالات ممکن تولد پسر و دختر را در یک خانواده دو فرزند نشان

می دهد. فرض می کنیم احتمال پسر بودن فرزند $\frac{1}{4}$ باشد.



الف) با توجه به نمودار درختی جدول زیر را کامل کنید :

۰	۱	۲	تعداد پسرها
۱	۲	۱	تعداد حالات
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$		احتمال
۰/۲۵			درصد احتمال

ب) احتمال اینکه دو فرزند هم جنس باشند چیست؟

پ) احتمال اینکه دست کم یک فرزند پسر باشد چیست؟

۱۲- نمودار درختی زیر احتمال های باریدن برف را طی چهار روز متوالی در یک محوطه اسکی

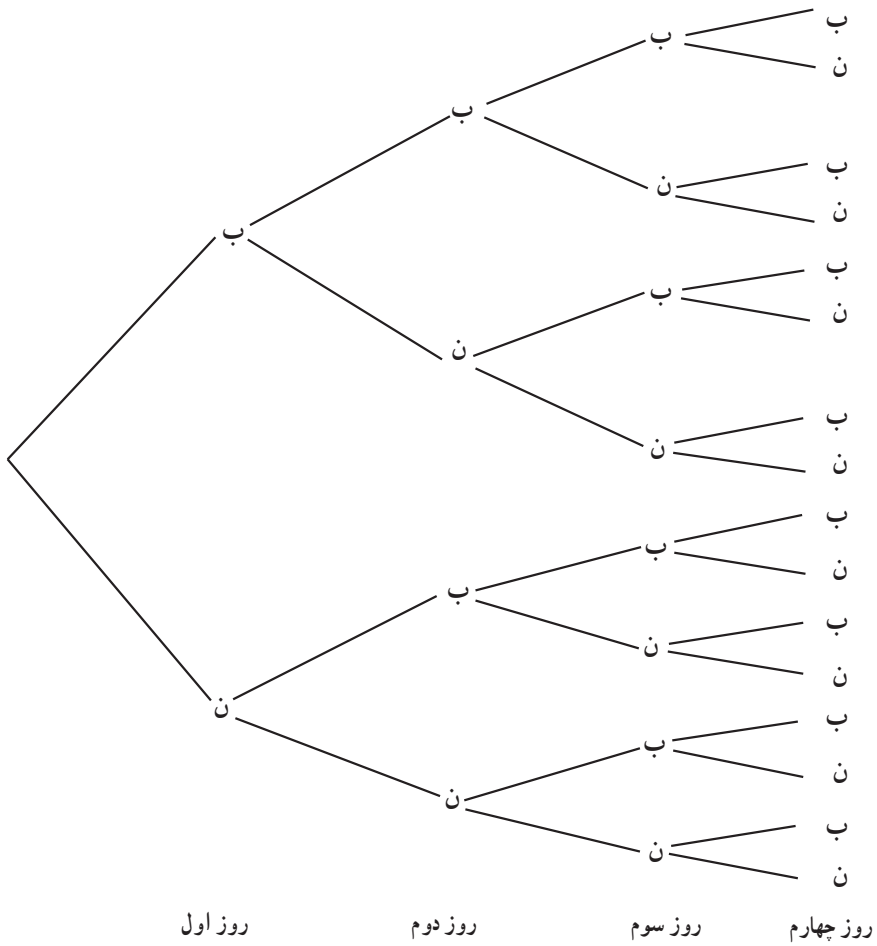
نشان می دهد. («ن» یعنی نباریدن برف و «ب» یعنی باریدن برف) فرض می کنیم احتمال آمدن برف در یک روز مفروض $\frac{1}{4}$ باشد.

الف) با توجه به نمودار درختی جدول زیر را کامل کنید :

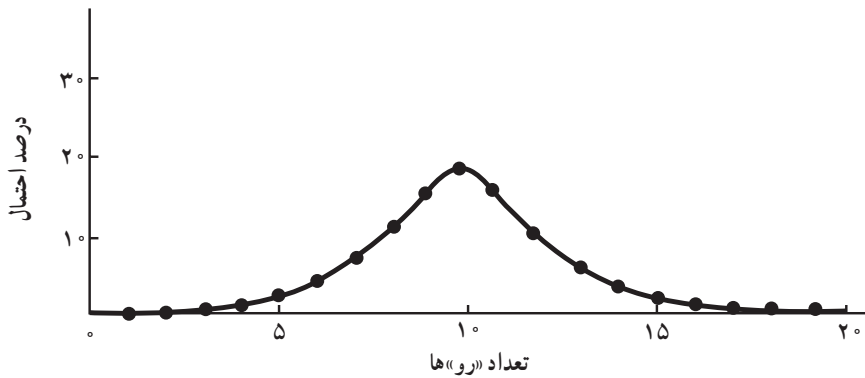
۰	۱	۲	۳	۴	تعداد روزهای باریدن برف
۱	۴	۶	۴	۱	تعداد امکان های مختلف
$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	احتمال
	%۲۵		%۲۵	%۶/۲۵	درصد احتمال

ب) درصد احتمال اینکه طی چهار روز متوالی دست کم دو روز برف بیارد چیست؟

پ) کدام محتمل تر است؟ دقیقاً یک روز برف بیارد یا دقیقاً سه روز؟



۱۳- نمودار زیر احتمال‌های رخ دادن پیشامد «رو» در پرتاب 2° سکه را نشان می‌دهد.



به نمودار صفحه قبل رجوع کنید و به این سوالات پاسخ دهید :

الف) اگر هر بیست سکه پرتاب شوند آمدن چند «رو» محتمل تر است؟

ب) با توجه به فرض الف احتمال آن که آن تعداد «رو» بیاید چقدر است؟ (به کمک نمودار تقریب بزنید)

پ) کدام یک عجیب تر است؟ اینکه در پرتاب 10° سکه تعداد «رو»ها و «پشت»ها مساوی باشد یا در پرتاب 20° سکه؟

ت) اگر تعداد سکه‌هایی که پرتاب می‌شود را افزایش دهیم، احتمال مساوی بودن تعداد «ر» و «پ»ها چه تغییری می‌کند؟

۳-۴- احتمال غیر هم‌شانس در فضاهای گسسته

در بخش قبل فرض کرده بودیم احتمال وقوع پیشامدهای مورد بررسی در تمام نقاط فضای نمونه‌ای یکسان باشد. مثلاً در پرتاب سکه، احتمال آمدن «پشت» یا «رو» هر دو $\frac{1}{2}$ بود. اما این فرض همیشه یک فرض واقع‌بینانه نیست و برای سادگی مطلب در بندهای قبل گذاشته شده بود. یکی از راه‌های محاسبه احتمال، استفاده کردن از محاسبه فراوانی است.

مثال ۱ : در مورد مثال بالا اگر یک سکه را 100 بار پرتاب کنیم و در این 100 بار، 45 بار «رو» بیاید، فرض کنید که کسر $\frac{45}{100}$ و یا 45% و یا $0/45$ را احتمال آمدن «رو» در نظر بگیریم. در این صورت احتمال آمدن پشت 55% می‌باشد. بنابراین در فضای $S = \{ر, پ\}$ داریم :

$$P(\{ر\}) = 0/45 \quad \text{و} \quad P(\{پ\}) = 0/55$$

مجموعه‌های تک عضوی $\{ر\}$ و $\{پ\}$ را مجموعه‌های ساده می‌گوییم. و احتمال هر مجموعه تک‌عنصری $\{x\}$ را با $P(x)$ یا $P(\{x\})$ نشان می‌دهیم.

هر زیرمجموعه تک‌عضوی از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد ساده می‌گوییم.

می‌بینیم که :

$$P(ر) + P(پ) = 0/45 + 0/55 = 1$$

یعنی احتمال پیشامدهای ساده بزرگ‌تر یا مساوی صفر و کوچک‌تر یا مساوی یک می‌باشد و مجموع احتمال‌های پیشامدهای ساده 1 می‌باشد.

مثال ۲ : در مسأله پرتاب سه سکه بخش قبل، اگر فضای نمونه‌ای را $\{0, 1, 2, 3\}$ بگیریم که

در آن هر عضو این فضا تعداد «رو» آمدن های سه سکه باشد، آن گاه با استفاده از احتمال دو جمله ای می دانیم که :

$$P(0) = P(\{\text{هیچ رو نیاید}\}) = \frac{1}{8}$$

$$P(1) = P(\{\text{یک بار رو آمده باشد}\}) = \frac{3}{8}$$

$$P(2) = P(\{\text{دو بار رو آمده باشد}\}) = \frac{3}{8}$$

$$P(3) = P(\{\text{سه بار رو آمده باشد}\}) = \frac{1}{8}$$

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1 \quad \text{ملاحظه می کنیم که :}$$

در حالت کلی فرض کنیم فضای نمونه ای ما $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ شامل n عضو باشد. به هر پیشامد ساده $\{e_k\}$ یک عدد حقیقی $P(\{e_k\})$ که احتمال پیشامد $\{e_k\}$ است را نسبت می دهیم. این عدد باید تحت شرایط زیر انتخاب گردد :

(۱) احتمال یک پیشامد ساده عددی بین ۰ و ۱ است؛ یعنی

$$0 \leq P(e_k) \leq 1$$

(۲) مجموع احتمالات تمام پیشامدهای ساده در فضای نمونه ای برابر ۱ است؛ یعنی :

$$P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_n) = 1$$

اعداد $P(e_1), P(e_2), \dots, P(e_n)$ را که در شرط بالا صدق می کنند «تخصیص احتمال مقبول» می نامیم.

فرض کنیم یک تخصیص احتمال مقبول به پیشامدهای ساده در فضای نمونه ای S داده شده

باشد. چگونه می توان یک احتمال برای پیشامد دلخواه A در S تعریف نمود؟

۴-۴- احتمال یک پیشامد اختیاری

اگر یک تخصیص احتمال مقبول به پیشامدهای ساده در فضای نمونه ای S داده شده باشد،

به پیشامد A احتمالی را که با $P(A)$ نشان می دهیم به صورت زیر نسبت می دهیم :

الف) اگر A پیشامد غیرممکن (یعنی مجموعه \emptyset) باشد آنگاه

$$P(A) = 0$$

- (ب) اگر A یک پیشامد ساده باشد $P(A)$ خودبه خود تعریف شده است.
- (ج) اگر A پیشامد مرکب باشد، یعنی A اجتماعی از پیشامدهای ساده باشد، آنگاه $P(A)$ مجموع احتمالات تمام پیشامدهای ساده در A می باشد.
- (د) اگر A خود فضای نمونه ای S باشد، آنگاه:

$$P(A) = P(S) = 1$$

در واقع این قسمت حالت خاصی از (ج) است.

حال اگر حالت هم شانسی بخش قبل را در نظر بگیریم، یعنی:

$$P(e_1) = P(e_2) = \dots = P(e_n)$$

آنگاه چون $1 = P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_n)$ داریم:

$$P(e_1) = P(e_2) = \dots = P(e_n) = \frac{1}{n}$$

حال اگر مجموعه A دارای m عضو $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ باشد طبق تعریف فوق داریم:

$$P(\{f_1, f_2, \dots, f_m\}) = P\{f_1\} + \dots + P\{f_m\} = \underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{m \text{ بار}} = \frac{m}{n}$$

یعنی:

$$P(A) = \frac{\text{تعداد اعضای } A}{\text{تعداد اعضای } S}$$

که همان فرمول بخش قبل است. یعنی ملاحظه می کنیم که مطالب این بخش در واقع تعمیم بخش قبل است.

مثال ۳: فرض کنیم فضای نمونه ای ما $S = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد. در هر دو حالت زیر به پیشامدهای

ساده S اعدادی را نسبت داده ایم. بررسی کنید که آیا این نسبت ها که آنها را تخصیص دادن احتمال می نامیم مجاز هستند و یا نه، دلیل پاسخ خود را بیان کنید.

(الف) $P(1) = 0/12$, $P(2) = 0/63$, $P(3) = 0/45$, $P(4) = -0/20$

(ب) $P(1) = \frac{9}{120}$, $P(2) = \frac{45}{120}$, $P(3) = \frac{27}{120}$, $P(4) = \frac{46}{120}$

حل: در مورد (الف) چون $P(4) = -0/20$ ناقص فرض (۱) در مورد پیشامدهای ساده است،

یعنی احتمال باید نامنفی باشد، بنابراین تخصیص احتمال مجاز نیست. اما در مورد (ب) داریم

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = \frac{9}{120} + \frac{45}{120} + \frac{27}{120} + \frac{46}{120} = \frac{127}{120} > 1$$

و این خاصیت (۲) در مورد پیشامدهای ساده را نقض می‌کند بنابراین، این تخصیص احتمال هم مجاز نیست.

مثال ۴: تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد فرد دو برابر احتمال وقوع هر عدد زوج است. اگر در یک پرتاب این تاس، A پیشامد وقوع عددی بزرگ‌تر از ۳ باشد، $P(A)$ را بیابید.

حل: فضای نمونه‌ای عبارت است از $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. حال اگر به هر عدد زوج احتمال w نسبت دهیم، آنگاه احتمال عدد فرد برابر $2w$ است؛ یعنی:

$$P(1) = P(3) = P(5) = 2w \quad \text{و} \quad P(2) = P(4) = P(6) = w$$

و چون مجموع این پیشامدهای ساده باید ۱ باشد، بنابراین:

$$2w + w + 2w + w + 2w + w = 9w = 1$$

و از آنجا $w = \frac{1}{9}$ ، حال قرار می‌دهیم $A = \{4, 5, 6\}$ طبق خاصیت (ج) داریم:

$$P(A) = P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

مثال ۵: سه اسب a ، b و c با هم مسابقه می‌دهند. فرض کنیم احتمال برد a دو برابر احتمال

برد b و احتمال برد b دو برابر احتمال c است.

(الف) مطلوب است احتمال برد هر کدام از اسب‌ها.

(ب) مطلوب است احتمال اینکه a یا b ببرند.

حل: گیریم $P(c) = p$ ، چون شانس برد b دو برابر شانس برد c است. پس: $P(b) = 2p$ و چون

شانس برد a دو برابر شانس برد b است پس: $P(a) = 2(2p) = 4p$. حال چون مجموع احتمال‌های

فوق باید برابر ۱ باشد پس:

$$p + 2p + 4p = 1$$

یا $7p = 1$. در نتیجه $p = \frac{1}{7}$ و از آنجا داریم:

$$P(a) = 4p = \frac{4}{7}$$

$$P(b) = 2p = \frac{2}{7}$$

$$P(c) = p = \frac{1}{7}$$

پیشامد اینکه یا a برسد یا b، مجموعه {a, b} است. طبق تعریف :

$$P(\{a, b\}) = P(a) + P(b) = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

مثال ۶: گیریم $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ، مطلوب است محاسبه

الف) $P(a_1)$ ، اگر $P(a_4) = \frac{1}{9}$ ، $P(a_3) = \frac{1}{6}$ ، $P(a_2) = \frac{1}{3}$

ب) $P(a_1)$ و $P(a_2)$ اگر $P(a_3) = 2P(a_2)$ و $P(a_4) = \frac{1}{4}$

ج) $P(a_1)$ اگر $P(a_2) = \frac{1}{3}$ و $P(\{a_2, a_4\}) = \frac{1}{4}$ و $P(\{a_2, a_3\}) = \frac{2}{3}$

حل : الف) فرض کنیم $p = P(a_1)$. آنگاه چون P تخصیص احتمال مقبول به فضای S است

بنابراین :

$$P(a_1) + P(a_2) + P(a_3) + P(a_4) = 1$$

و از آنجا :

$$p + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = 1 \Rightarrow p = \frac{7}{18}$$

ب) گیریم $p = P(a_2)$. آنگاه $p = 2P(a_3)$ و از آنجا :

$$2p + p + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

و یا $p = \frac{1}{6}$. بنابراین $P(a_2) = \frac{1}{6}$ و $P(a_3) = \frac{1}{3}$.

ج) گیریم $P(a_1) = p$. آنگاه چون

$$P(a_3) = P(\{a_2, a_3\}) - P(a_2) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

و

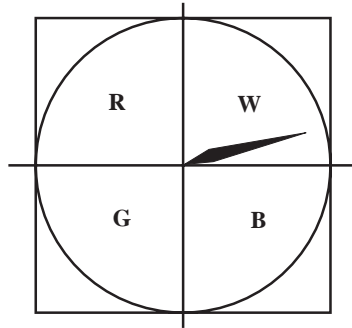
$$P(a_4) = P(\{a_2, a_4\}) - P(a_2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

در نتیجه :

$$p + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

و یا $p = \frac{1}{6}$. یعنی $P(a_1) = \frac{1}{6}$.

۱- در دستگاه زیر دایره را به چهار رنگ سبز (G)، قرمز (R)، آبی (B)، سفید (W) رنگ آمیزی کرده ایم. عقربه را به چرخش درمی آوریم. اگر احتمال های ایستادن عقربه روی رنگ های مختلف، متفاوت باشند، کدام یک از تخصیص احتمال های زیر غیر مجازند؟



(الف) $P(B) = \frac{1}{30}$ و $P(W) = \frac{1}{24}$ و $P(G) = \frac{1}{28}$ و $P(R) = \frac{1}{22}$

(ب) $P(B) = \frac{1}{30}$ و $P(W) = \frac{1}{30}$ و $P(G) = \frac{1}{14}$ و $P(R) = \frac{1}{26}$

۲- یک سکه ناسالم را پرتاب می کنیم. فرض کنیم شانس آمدن «رو» دو برابر شانس آمدن «پشت» باشد. مطلوب است محاسبه $P(r)$ و $P(p)$.

۳- سه شناگر a, b و c با هم مسابقه می دهند. a و b دارای احتمال بردن مساوی هستند و شانس بردن هر کدام از آنها دو برابر c است. مطلوب است احتمال اینکه b یا c ببرد.

۴-۵ - احتمال در فضاهای پیوسته

در این بخش به محاسبه احتمال در فضاهای پیوسته می پردازیم. فضاهای پیوسته، برخلاف فضاهای گسسته که از تعدادی منتهای نقطه تشکیل شده اند، مجموعه هایی نامتناهی می باشند نظیر بازه ها در محور اعداد حقیقی یا سطوح در صفحه و غیره. واضح است که در این حالت دیگر شمارش تعداد عناصر فضای نمونه ای یا پیشامد میسر نیست ولی آنچه که می تواند مورد استفاده قرار گیرد «اندازه» طول بازه ها، مساحت سطوح، و حجم شکل های فضایی است. در این حالت نسبت «اندازه» فضای پیشامد به «اندازه» فضای نمونه ای، احتمال وقوع پیشامد را مشخص می کند. به عبارت دیگر اگر پیشامد مطلوب

را با A نمایش دهیم، داریم^۱:

$$P(A) = \frac{A \text{ طول}}{S \text{ طول}} = \frac{l_A}{l_S}$$

اگر $S \subset \mathbb{R}$ و A داریم:

$$P(A) = \frac{A \text{ مساحت}}{S \text{ مساحت}} = \frac{a_A}{a_S}$$

اگر $S \subset \mathbb{R}^2$ و A داریم:

$$P(A) = \frac{A \text{ حجم}}{S \text{ حجم}} = \frac{v_A}{v_S}$$

اگر $S \subset \mathbb{R}^3$ و A داریم:

حال به ذکر چند مثال می پردازیم.

مثال ۱: در مثال تیراندازی به هدف دایره ای شکل، فرض می کنیم شعاع صفحه هدف 20°

سانتیمتر و شعاع دایره کوچک تر 10° سانتیمتر است. فرض می کنیم تیر حتماً به صفحه هدف برخورد می کند، احتمال برخورد تیر به دایره کوچک تر را محاسبه کنید.

حل: فضای نمونه، مساحت دایره بزرگ تر و پیشامد A مساحت دایره کوچک تر است، بنابراین:

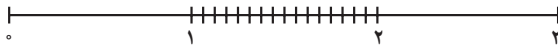
$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{\pi \times 10^2}{\pi \times 20^2} = \frac{1}{4}$$

مثال ۲: از بین اعداد حقیقی بین 0° و 3° یک عدد به تصادف انتخاب می شود، مطلوب است

محاسبه احتمال آنکه این عدد بین 1° و 2° انتخاب شده باشد.

حل: فضای نمونه بازه $S = [0, 3]$ و پیشامد مطلوب بازه $A = [1, 2]$ است، پس:

$$P(A) = \frac{l_A}{l_S} = \frac{1}{3}$$



مثال ۳: فرض می کنیم دو عدد حقیقی بین 0° و 1° به تصادف انتخاب شوند، مطلوب است احتمال

آنکه مجموع این دو عدد بین $0/5^\circ$ و $1/5^\circ$ باشد.

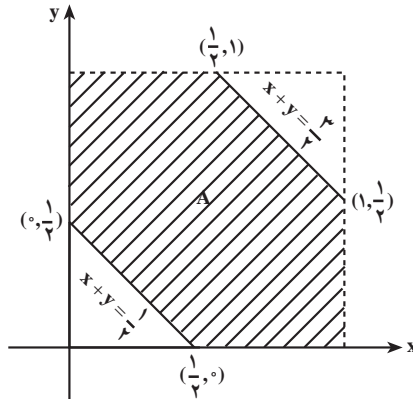
حل: فضای نمونه ای مناسب عبارت است از:

$$S = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

۱- در این قسمت فرض بر این است که احتمال روی طول، سطح و حجم یکسان توزیع شده است.

و پیشامد مطلوب مجموعه زیر است :

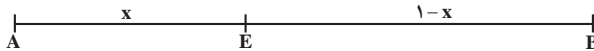
$$A = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4} < x + y < \frac{3}{4} \right\}$$



بنابراین :

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{\frac{3}{4}}{1} = \frac{3}{4}$$

مثال ۴: فرض می‌کنیم دو قطعه چوب داریم که طول‌های آنها به ترتیب ۱ و ۰/۵ متر می‌باشد. قطعه بزرگ‌تر را با آرّه دو قسمت می‌کنیم که در نتیجه سه قطعه چوب حاصل می‌شود، احتمال اینکه سه قطعه چوب تشکیل یک مثلث را بدهند، چقدر است؟
حل: فرض می‌کنیم قطعه چوب یک متری، در نقطه E بریده شود که به فاصله x از یک سر چوب قرار دارد.



بنابراین فضای نمونه‌ای را می‌توان خط AB به طول ۱ متر در نظر گرفت، در اینجا پیشامد مطلوب آن است که پاره‌خط‌های AE و EB و پاره‌خط دیگر که آن را CD می‌نامیم (همان چوب به طول ۰/۵ متر) مثلی تشکیل دهند. ولی اگر سه پاره خط بخواهند تشکیل مثلث بدهند باید طول هر پاره خط از مجموع طول‌های دو پاره خط دیگر کمتر باشد یعنی :

$$AE + EB > CD$$

$$AE + CD > EB$$

$$EB + CD > AE$$

چون $CD = \frac{1}{4}$ و $AE = x$ و $EB = 1-x$ ، پس داریم :

$$x + (1-x) > \frac{1}{4}$$

$$x + \frac{1}{4} > 1-x$$

$$(1-x) + \frac{1}{4} > x$$

با ساده کردن سه نامساوی بالا :

(به طور بدیهی درست است)

$$1 > \frac{1}{4}$$

$$x > \frac{1}{4}$$

$$x < \frac{3}{4}$$

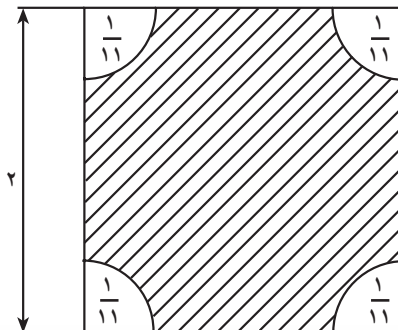
در نتیجه پیشامد مطلوب به صورت زیر قابل بیان خواهد بود :

$$A = \left\{ x \mid \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \right\}$$

$$P(A) = \frac{l_A}{l_S} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

مثال ۵ : یک چتر باز از داخل هواپیما بر روی زمین مربع شکلی به طول ضلع ۲ کیلومتر می‌پرد.

در چهار گوشهٔ زمین، مناطقی پوشیده از درخت وجود دارند که می‌توان آنها را به صورت ربع دایره‌هایی به شعاع $\frac{1}{11}$ کیلومتر و به مرکز رأس‌های مربع تصور کرد (به شکل زیر نگاه کنید). اگر چتر باز در یکی از مناطق مزبور فرود بیاید چتر او به درختان گیر خواهد کرد. اگر فرض کنیم که چتر باز حتماً در نقطه‌ای از قطعه زمین مورد بحث فرود آید و با فرض اینکه مختصات مکان فرود نیز تصادفی باشد، مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه فرود او بدون گیر کردن به درخت‌ها انجام بگیرد.



حل: فضای نمونه‌ای مربعی به ضلع ۲ کیلومتر می‌شود و پیشامد مورد نظر مجموعه هاشور زده

شده است. بنابراین احتمال برابر است با:

$$\frac{4 - \frac{\pi}{4}}{4} \approx 0.99$$

(≈ علامت تقریب است.)

یادداشت: در این مسأله احتمال اینکه چتر باز در یک نقطه فرود آید صفر است حتی احتمال

اینکه چتر باز روی یک خط فرود آید صفر است، زیرا سطح این نوع مجموعه‌ها صفر می‌باشد.

پیشامدهایی که احتمال وقوع آنها صفر است را پیشامدهای تقریباً غیر ممکن

می‌نامیم.

مثال ۶: در مثال (۱۴) فصل قبل احتمال برنده شدن چقدر است؟

حل: در مثال (۱۴) فصل قبل فضای نمونه‌ای و پیشامد مطلوب را مشخص کردیم. فضای

نمونه‌ای مربعی به طول ۲۵ و پیشامد مطلوب مربع کوچکی در داخل آن به طول ۵ بود. اگر A پیشامد

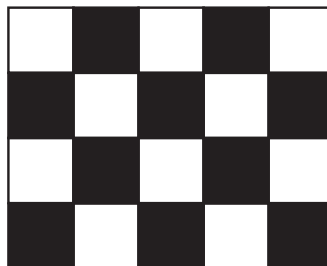
مورد نظر باشد، احتمال برابر است با:

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{(5)^2}{(25)^2} = \frac{1}{25}$$

یادداشت: اگر سکه را به جای مربع مطرح شده در مسئله بر روی صفحه‌ای شطرنجی شکل

متشکل از مربع‌های بسیار نیز پرتاب کنیم، باز احتمال آنکه سکه بر روی مرز مشترک بین هیچ دو مربعی

نیفتد، برابر با مقداری خواهد بود که به دست آوردیم.



توجه این مطلب با توجه به شکل فوق بدیهی به نظر می‌رسد.

مرکز سکه پرتاب شده ممکن است در داخل هر کدام از مربع‌های هم اندازه با مربع Q واقع شود

و در آن صورت همان طور که در مسئله مشاهده کردید، پیشامد ما مربع Q' خواهد بود (شکل صفحه ۷۹). بنابراین در داخل هر یک از مربع‌های بزرگ‌تر مجموعه‌ای به اندازه مربع هاشور خورده داخل آن وجود دارد که اگر سکه داخل آن بیفتد، بازی را خواهیم برد. در نتیجه اگر پیشامد آنکه سکه بر روی محیط هیچ کدام از مربع‌ها نیفتد را A بنامیم، داریم:

$$P(A) = \frac{\text{مساحت مربع‌های هاشورخورده}}{\text{مساحت کل صفحه}} = \frac{1}{25}$$

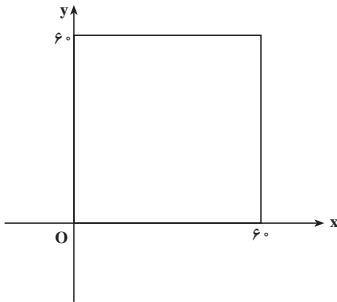
مثال ۷: اتوبوس‌های شرکت واحد از ساعت ۷ صبح شروع به کار می‌کنند و هر ۱۵ دقیقه یک بار به ایستگاه می‌رسند. اگر شخصی در لحظه‌ای بین ساعت ۷ تا ۷:۳۰ به یک ایستگاه وارد شود، احتمال اینکه کمتر از ۵ دقیقه معطل بماند چقدر است؟ احتمال اینکه بیشتر از ۱۰ دقیقه معطل بماند تا اتوبوس برسد چقدر است؟

حل: چون شخص در لحظه‌ای بین ۷ تا ۷:۳۰ به ایستگاه می‌رسد، فضای نمونه‌ای مربوط به آزمایش تصادفی رسیدن به ایستگاه اتوبوس فاصله (۷:۳۰ و ۷) است. برای اینکه شخص کمتر از ۵ دقیقه منتظر اتوبوس شود باید در یکی از لحظات بین ۷:۱۰ تا ۷:۱۵ یا ۷:۲۵ تا ۷:۳۰ به ایستگاه برسد. بنابراین پیشامد مورد نظر از دو فاصله زمانی (۷:۱۵ و ۷:۱۰) و (۷:۳۰ و ۷:۲۵) تشکیل یافته است. لذا احتمال این پیشامد برابر است با $\frac{1}{3} = \frac{10}{30} = \frac{5+5}{30}$. برای اینکه شخص بیشتر از ۱۰ دقیقه منتظر اتوبوس بماند، باید در یکی از لحظات بین ۷ تا ۷:۵ یا ۷:۱۵ تا ۷:۲۰ به ایستگاه برسد، لذا در این حالت پیشامد مطلوب عبارت است از اجتماع دو فاصله (۷:۵ و ۷) و (۷:۲۰ و ۷:۱۵)، در نتیجه، احتمال آن برابر است با $\frac{1}{3} = \frac{10}{30} = \frac{5+5}{30}$. ملاحظه می‌کنید که احتمال‌های هر دو پیشامد مساوی هستند. این مطلب عجیب نیست؟

مثال ۸: مسئله روبرو شدن دو دوست: حسن و احمد قرار گذاشتند که هنگام بازدید از نمایشگاه کتاب یکدیگر را بین ساعت ۴ تا ۵ بعد از ظهر در بخش کتاب‌های مرجع ببینند. قرار آنها به این صورت بود که هر کدام زودتر سر قرار حاضر شد ۱۵ دقیقه منتظر دیگری بماند و بعد از آن، به بازدید از نمایشگاه ادامه دهد. با فرض اینکه زمان سر قرار رسیدن هریک به طور تصادفی بین ۴ تا ۵ بعد از ظهر است، احتمال اینکه این دو یکدیگر را ملاقات کنند، چقدر است؟

حل: فرض کنیم حسن x دقیقه بعد از ساعت ۴ بعد از ظهر و احمد y دقیقه بعد از ساعت ۴ بعد از ظهر سر قرار حاضر شوند، می‌توانیم زمان‌های رسیدن هریک را به صورت زوج‌های مرتب (x, y)

در نظر بگیریم به طوری که $0 < x < 60$ و $0 < y < 60$. عضوهای فضای نمونه‌ای، نقاط داخل مربعی به ضلع 60 دقیقه خواهند بود (شکل زیر).



برای اینکه حسن و احمد بتوانند یکدیگر را ملاقات کنند، باید موقع سر قرار رسیدنشان در فاصله زمانی 15 دقیقه از یکدیگر رخ دهد. زیرا قرار گذاشته بودند که فقط 15 دقیقه برای یکدیگر صبر کنند. این شرط را می‌توان با نامساوی قدرمطلق

$$|x - y| < 15$$

بیان کرد. برای مثال، اگر احمد 14 دقیقه بعد از حسن برسد همدیگر را ملاقات می‌کنند. یعنی

$$y - x = 14$$

یا

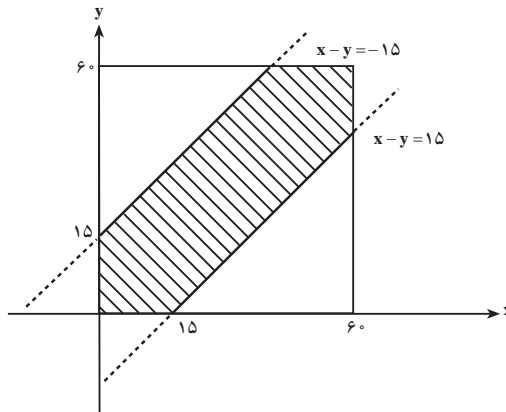
$$x - y = -14$$

$$|x - y| = 14$$

در نتیجه

بنابراین، نامساوی برقرار است.

نمودار $|x - y| < 15$ که در داخل فضای نمونه‌ای محصور است، ناحیهٔ موفقیت را نشان می‌دهد.



اگر ناحیهٔ موفقیت (ناحیهٔ هاشور خورده) را با r و فضای نمونه‌ای را با R نشان دهیم، آنگاه احتمال مطلوب یعنی $P(r)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P(r) = \frac{\text{مساحت ناحیه } r}{\text{مساحت مربع}}$$

$$= \frac{(\text{دو مثلث قائم الزاویهٔ متساوی الساقین به ضلع قائمه } 45) - (\text{مساحت مربع به ضلع } 60)}{60^2}$$

$$= \frac{60^2 - \left[\frac{1}{2}(45)^2 + \frac{1}{2}(45)^2 \right]}{60^2} \cong 0.44$$

تمرین

۱- نقطه‌ای مانند x را به طور تصادفی در بازه $(0, 3)$ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه داشته باشیم $1 < x < 2/5$ را تعیین کنید.

۲- بر روی مربع $Q = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ با مشخصات Q یک نقطه را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه داشته باشیم $x \leq y \leq 1-x$ را تعیین کنید.

۳- دو نقطه را به طور تصادفی در بازه $(0, 1)$ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه $|x - y| < \frac{1}{2}$ را پیدا کنید.

۴- در بازه $[0, 1]$ دو نقطه به طور تصادفی طوری انتخاب می‌شوند که بازه را به سه پاره خط تقسیم کنند. احتمال این را پیدا کنید که سه پاره خط تشکیل یک مثلث بدهند.

۵- یک نقطه (x, y) را به طور تصادفی بر روی مثلثی به رأس‌های $(0, 0)$ ، $(4, 0)$ و $(3, 2)$ انتخاب می‌کنیم. احتمال پیشامدهای زیر چیست؟

(الف) $x < 2$ (ب) $x < 2y$

(پ) (x, y) درون یک مستطیل به رأس‌های $(0, 0)$ ، $(1, 2)$ ، $(2, 2)$ و $(2, 0)$ قرار داشته باشد.

۶- یک نقطه به طور تصادفی درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ انتخاب می‌شود، مطلوب است احتمال آنکه فاصله آن نقطه از هر رأس بیشتر از ۱ باشد.

۷- روی محور اعداد حقیقی، \mathbb{R} ، نقاط a و b به طور تصادفی انتخاب شده‌اند به طوری که: $-2 \leq b \leq 0$

و $0 \leq a \leq 3$ ، مطلوب است محاسبه احتمال آنکه فاصله بین a و b بزرگتر از ۳ باشد.

۸- دو عدد حقیقی به طور تصادفی بین 0 و 2 انتخاب می شوند. مطلوب است احتمال آنکه:

الف) مجموع دو عدد کمتر از 2 باشد.

ب) مجموع دو عدد بیشتر از 1 باشد.

پ) مجموع دو عدد بین 1 و 2 باشد.

۹- دو عدد به طور تصادفی بین 0 و 2 انتخاب می شوند.

الف) مطلوب است احتمال آنکه نسبت دو عدد مساوی 1 باشد.

ب) مطلوب است احتمال آنکه نسبت دو عدد کمتر از 1 باشد.

پ) مطلوب است احتمال آنکه نسبت دو عدد بین $4/0$ و $5/0$ باشد.

۱۰- در مثال ۴ این بخش فرض می کنیم پاره خط بزرگتر AB برابر $2I$ و پاره خط کوچکتر

CD مساوی I باشد. نقطه E را به طور تصادفی روی AB انتخاب می کنیم. مطلوب است احتمال آنکه

AE, EB و CD تشکیل یک مثلث بدهند.

۱۱- مسئله ۱۰ را در حالات زیر حل کنید.

الف) اگر $AB=4I$ و $CD=I$.

ب) اگر $AB=nl$ و $CD=I$ ، که در آن n یک عدد طبیعی است.

۱۲- در عبارت $p - q$ مقدار ضریب p را به طور تصادفی بین 1 و 2 و مقدار ضریب q را به طور

تصادفی بین -1 و 3 انتخاب می کنیم. مطلوب است احتمال اینکه حاصل عبارت بالا کمتر از $1/4$ باشد.

۱۳- در مثال (۵) مسئله چتر باز، به جای شعاع $1/11$ ، عدد $1/9$ قرار دهید و مسئله را حل کنید. در

حالت کلی مسئله را برای مربعی به ضلع l و شعاع R حل کنید.

۱۴- اتوبوس های شرکت واحد از ساعت ۷ صبح شروع به کار می کنند و هر ۱۵ دقیقه یکبار به

ایستگاه خاصی می رسند. اگر شخصی در لحظه ای بین ساعت ۸ تا ۳:۰۸ به این ایستگاه وارد شود،

احتمال اینکه کمتر از ۵ دقیقه معطل بماند چقدر است؟ احتمال اینکه بیشتر از ۱۰ دقیقه صبر کند تا

اتوبوس برسد چقدر است؟

۱۵- تجربه قبلی نشان می دهد که هر کتاب جدید از ناشر خاصی می تواند بین ۴ تا ۱۲ درصد بازار

کتاب را به خود اختصاص دهد. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه کتاب بعدی این ناشر حداکثر ۶/۳۵

درصد بازار کتاب را به خود اختصاص دهد.

۱۶- زمان تصادفی برحسب دقیقه که حیوان خاصی نسبت به داروی خاصی عکس العمل نشان دهد بین ۲ و $\frac{4}{3}$ دقیقه می باشد. مطلوب است احتمال اینکه عکس العمل این حیوان نسبت به آن دارو کمتر از $\frac{3}{25}$ دقیقه طول بکشد.

۱۷- دو عدد مانند x و y به تصادف از بازه $[0, 4]$ انتخاب می کنیم. مطلوب است احتمال آنکه

$$|x - y| < 3$$

۱۸- در معادله $ax + b = 0$ ضریب a به طور تصادفی عددی در بازه $[1, 2]$ و ضریب b نیز به طور

تصادفی عددی از بازه $[-1, 1]$ انتخاب شده است. احتمال اینکه جواب معادله بزرگ تر از $\frac{1}{25}$ باشد چقدر است؟

۱۹- یک تاجر منتظر دو تماس تلفنی از علی و رضا است. احتمال اینکه علی در فاصله زمانی

بین ۲ تا ۴ بعد از ظهر با او تماس بگیرد به اندازه احتمال تماس تلفنی رضا در همان فاصله زمانی است. احتمال در حالت های زیر را محاسبه نمایید :

(الف) علی قبل از رضا تلفن بزند؛

(ب) فاصله دو تماس تلفنی کمتر از 10° دقیقه باشد؛

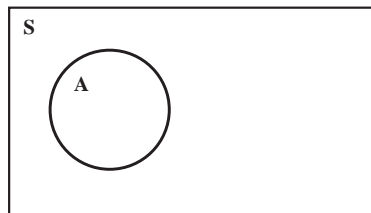
(پ) علی اول تماس بگیرد، فاصله تلفن ها کمتر از 10° دقیقه باشد و هر دو تلفن قبل از ساعت ۳

بعد از ظهر باشد.

۴-۶- قوانین احتمال

می دانیم که از تقسیم کردن اندازه پیشامد؛ یعنی طول، سطح و حجم پیشامد بر اندازه فضای نمونه ای در حالت پیوسته، احتمال به دست می آید. با توجه به اینکه فضای پیشامد A همواره زیر مجموعه فضای نمونه ای S است، پس اگر $P(A)$ احتمال وقوع پیشامد A باشد، همیشه داریم :

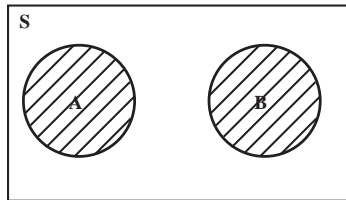
$0 \leq P(A) \leq 1$	اصل ۱
----------------------	-------



در اینجا در واقع چون A زیرمجموعه S است پس نسبت «اندازه» A به «اندازه» S ، کوچک تر یا مساوی ۱ می باشد و واضح است که وقتی مساوی ۱ است که $A=S$ ، پس :

$P(S) = 1$	اصل ۲
------------	-------

حال اگر A و B را پیشامدهایی در فضای نمونه ای S بگیریم که هر دو با هم اتفاق نمی افتند یعنی در واقع $A \cap B = \emptyset$ ، که در این صورت دو پیشامد را ناسازگار می نامیم، می خواهیم احتمال وقوع هر دو پیشامد A و B یعنی $A \cup B$ را بررسی کنیم.



در واقع برای پیدا کردن $P(A \cup B)$ می توانیم مجموع «اندازه های» A و B را بر «اندازه» S تقسیم کنیم که در نتیجه در این حالت احتمال $A \cup B$ برابر حاصل جمع احتمال A و احتمال B خواهد بود.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B), A \cap B = \emptyset$	اصل ۳
---	-------

برای حالت گسسته با احتمال کلی نیز می توان سه اصل بالا را ثابت کرد. (این مطلب به عنوان تمرین آورده شده است.) سه اصل فوق در واقع اصول علم احتمالات هستند که نخستین بار ریاضی دان برجسته آندره کولموگروف^۱ در سال ۱۹۳۳ آنها را بیان کرد و علم احتمالات را مبتنی بر یک دستگاه اصولی مدون ساخت. حال می توان به کمک این سه اصل بقیه قوانین احتمال را استخراج نمود.

قضیه ۱: اگر A, B, C سه پیشامد دو بدو مجزا باشند، یعنی اشتراک هر جفت از آنها تهی باشد، آن گاه

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

برهان : با استفاده از خاصیت شرکت پذیری مجموعه ها داریم :

$$P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) \quad (۱)$$


در رابطه فوق $A \cup B$ و C مجموعه های از هم جدا هستند زیرا :

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

^۱ - A. Kolmogorov

بنابراین رابطه (۱) را به این صورت می توان نوشت :

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P[(A \cup B) \cup C] \\ &= P(A \cup B) + P(C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) \end{aligned}$$

رابطهٔ اخیر به واسطهٔ $A \cap B = \emptyset$ برقرار است. 

قضیه ۲: اگر داشته باشیم $A \subseteq B$ ، آنگاه


$$P(A) \leq P(B) \text{ (الف)}$$

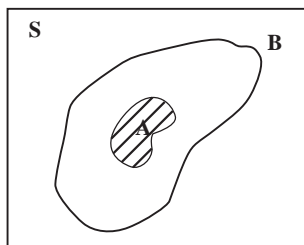
$$P(B - A) = P(B) - P(A) \text{ (ب)}$$

برهان: می دانیم که $B = (B - A) \cup A$. (به شکل زیر رجوع کنید.) همچنین A و $B - A$ از هم جدا هستند، زیرا $A \cap (B - A) = \emptyset$. بنابراین طبق اصل ۳ احتمال $P(B) = P(B - A) + P(A)$. حال

اثبات (الف) چون $P(B - A) \geq 0$ بنابراین $P(A) \leq P(B)$ ؛

اثبات (ب) $-P(A)$ را به دو طرف تساوی فوق اضافه می کنیم و به دست می آوریم.

$$\text{ } P(B - A) = P(B) - P(A)$$



توجه: در قضیهٔ ۲، شرط $A \subseteq B$ لازم است و بدون آن نتایج (الف) و (ب) در حالت کلی برقرار

نیستند. مثلاً تاس سالمی را می ریزیم. پیشامدهای

$A = \{\text{«عدد تاس بیشتر از ۵ نباشد»}\}$

$B = \{\text{«عدد تاس زوج باشد»}\}$

را در نظر می گیریم. در این صورت $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{2, 4, 6\}$ می باشد. روشن است که

$A \not\subseteq B$ ، $A - B = \{1, 3, 5\}$ و داریم:

$$P(A) = \frac{5}{6}, \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(A - B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) - P(B) = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2} = P(A - B)$$

بنابراین

و (ب) برقرار نیست. همچنین نامساوی (الف) نیز در این حالت برقرار نیست. به طور کلی دلیلی ندارد که برای دو پیشامد داده شده A و B ، همواره $P(A)$ کوچک تر یا مساوی $P(B)$ باشد.

حال اگر A و B دو پیشامدی باشند که $A \cap B \neq \emptyset$ یعنی مجزا از یکدیگر نباشند، احتمال وقوع $A \cup B$ یعنی $P(A \cup B)$ چه مقداری خواهد بود؟ با توجه به رابطه زیر

$$A \cup B = (A - A \cap B) \cup (B - A \cap B) \cup (A \cap B)$$

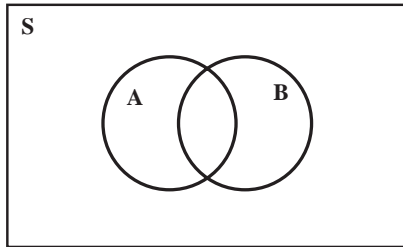
که به کمک نمودار و قابل بررسی است. و از طرف دیگر چون $(A - A \cap B)$ ، $(B - A \cap B)$ و $(A \cap B)$ مجزا از یکدیگرند در نتیجه:

$$P(A \cup B) = P(A - A \cap B) + P(B - A \cap B) + P(A \cap B)$$

ولی چون $A \cap B \subset A$ و $A \cap B \subset B$ ، پس:

$$P(A - (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(B - (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B)$$



حال با جایگذاری دو رابطه اخیر در رابطه قبلی نتیجه می شود:

قضیه ۳: اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه ای S باشند، آنگاه

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

حال به دو مثال توجه می کنیم:

مثال ۱: اگر احتمال وجود تلویزیون رنگی در یک خانه 41% ، سیاه و سفید 85% و از هر دو نوع 32% باشد، احتمال اینکه در این خانه لااقل یکی از دو نوع تلویزیون موجود باشد، چقدر است؟

حل: اگر A پیشامد وجود تلویزیون رنگی، B وجود تلویزیون سیاه و سفید و C وجود هر دو نوع تلویزیون باشد، طبق فرض داریم:

$$P(A) = 0.41, P(B) = 0.85, P(C) = 0.32$$

حال با استفاده از قضیه (۳) می نویسیم:

$$P(A \cup B) = 0.85 + 0.41 - 0.32$$

$$= 1.26 - 0.32 = 0.94$$

مثال ۲: احتمال اینکه شخصی ناراحتی کلیه داشته باشد، 0.23 ، ناراحتی قلبی داشته باشد 0.24 و دست کم یکی از این دو نوع بیماری را داشته باشد 0.38 است. احتمال اینکه هر دو نوع بیماری را دارا باشد چقدر است؟

حل: اگر A پیشامد بیماری کلیوی داشتن و B پیشامد بیماری قلبی داشتن باشد، طبق فرض داریم:

$$P(A) = 0.23$$

$$P(B) = 0.24$$

$$P(A \cup B) = 0.38$$

بنابراین:

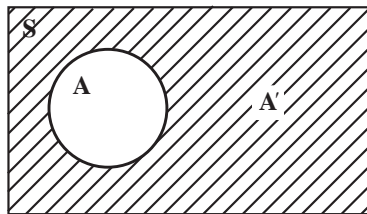
$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.09$$

فرض کنید A پیشامدی در فضای نمونه‌ای S باشد، یعنی $A \subset S$ ، مکمل A نسبت به S را که با A' نشان می‌دهیم پیشامد مکمل A می‌نامیم. در واقع رخ دادن A' به معنای رخ ندادن A است. اجتماع A و A' برابر فضای نمونه‌ای S است ولی از طرف دیگر A و A' مجزا از یکدیگرند یعنی $A \cap A' = \emptyset$ ، پس داریم:

$$P(A) + P(A') = P(A \cup A') = P(S) = 1$$

در نتیجه:

$$P(A') = 1 - P(A)$$



مثال ۳: قبلاً احتمال اینکه n نفر در یک میهمانی روز تولد متفاوتی داشته باشند را محاسبه

کرده‌ایم:

$$P(A) = \frac{365 \times 364 \times \dots \times (365 - n + 1)}{365^n}$$

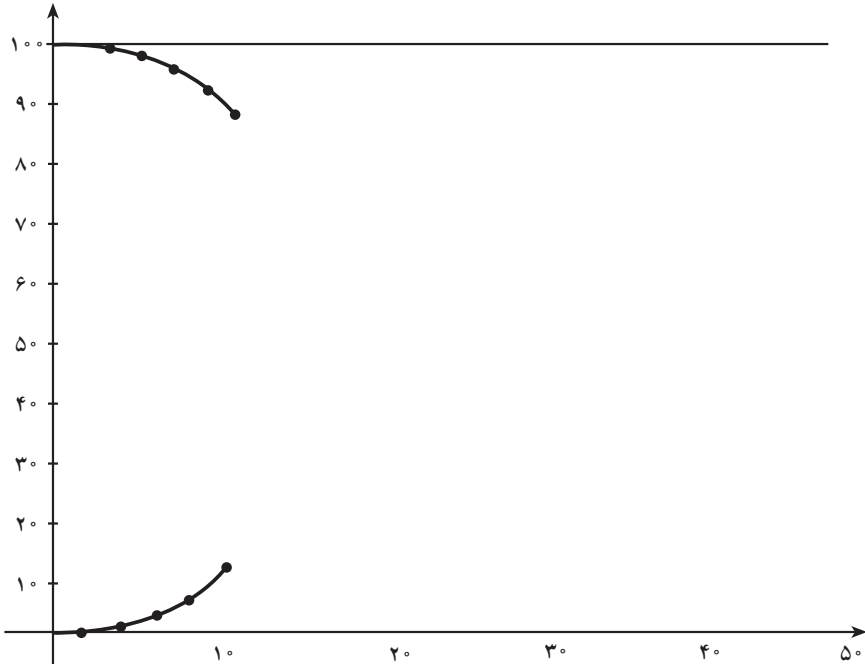
که A همان پیشامد روزهای تولد متفاوت برای n نفر بود. حال اگر بخواهیم احتمال اینکه حداقل دو نفر روز تولد یکسانی داشته باشند را پیدا کنیم چون پیشامد یکسان بودن روز تولد حداقل دو نفر، متمم پیشامد A است، پس

$$P(A') = 1 - \frac{365 \times 364 \times \dots \times (365 - n + 1)}{365^n}$$

احتمال‌های اینکه حداقل دو نفر در یک گروه موجود باشند که روز تولدشان یکسان باشد و نیز اینکه هیچ دو نفری روز تولد یکسان نداشته باشند در صفحه بعد آورده شده است. هر کدام از این احتمال‌ها به نزدیک‌ترین درصد گرد شده است.

تعداد افراد در گروه	احتمال متفاوت بودن همه روز تولدها	احتمال وجود دو نفر با روز تولد یکسان
۲	%۱۰۰	%۰
۴	%۹۸	%۲
۶	%۹۶	%۴
۸	%۹۳	%۷
۱۰	%۸۸	%۱۲
۱۲	%۸۳	%۱۷
۱۴	%۷۸	%۲۲
۱۶	%۷۲	%۲۸
۱۸	%۶۵	%۳۵
۲۰	%۵۹	%۴۱
۲۲	%۵۲	%۴۸
۲۴	%۴۶	%۵۴
۲۶	%۴۰	%۶۰
۲۸	%۳۵	%۶۵
۳۰	%۲۹	%۷۱
۳۲	%۲۵	%۷۵
۳۴	%۲۰	%۸۰
۳۶	%۱۷	%۸۳
۳۸	%۱۴	%۸۶
۴۰	%۱۱	%۸۹
۴۲	%۹	%۹۱
۴۴	%۷	%۹۳
۴۶	%۵	%۹۵
۴۸	%۴	%۹۶
۵۰	%۳	%۹۷

حال اگر این جدول را روی نموداری که محور x های آن نماینده تعداد اعضای موجود در گروه و محور y های آن درصد احتمال های مزبور به ترتیب مشخصی باشد، پیاده کنیم، نمودار زیر را به دست می آوریم.



لازم به تذکر است که با توجه به مثال ۷ بخش ۹-۱، وقتی $n > ۳۶۵$ است $P(A) = ۰$ خواهد بود. در مورد جدول و نمودار بالا یک تمرین در تمرین ها آورده شده است.

مثال ۴: از مجموعه اعداد $\{۱, ۲, ۳, \dots, ۱۰۰۰\}$ ، عددی به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال

اینکه عدد انتخابی بر ۳ یا بر ۵ یا هر دو بخش پذیر باشد چقدر است؟

حل: تعداد اعداد صحیح بین ۱ و N که بر k بخش پذیرند از تقسیم N بر k و سپس $\left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor$ به دست

می آید (به مثال ۶ در قسمت ۴-۱ مراجعه کنید). بنابراین اگر A پیشامد بخش پذیر بودن عدد انتخابی بر

۳ و B پیشامد بخش پذیر بودن عدد انتخابی بر ۵ باشد، آنگاه

$$P(A) = \frac{۳۳۳}{۱۰۰۰}$$

$$P(B) = \frac{۲۰۰}{۱۰۰۰}$$

و $A \cap B$ پیشامد بخش پذیر بودن عدد انتخابی بر هر دو عدد ۳ و ۵ است. برای محاسبه احتمال پیشامد $A \cap B$ ، چون ۳ و ۵ نسبت به هم اول هستند پس اگر عددی بر ۳ و ۵ بخش پذیر باشد، بر ۱۵ نیز بخش پذیر است. برعکس، اگر عددی بر ۱۵ بخش پذیر باشد، هم زمان بر ۳ و ۵ نیز بخش پذیر است.

$$P(A \cap B) = \frac{\left[\frac{1000}{15} \right]}{1000} = \frac{66}{1000} \quad \text{بنابراین}$$

در نتیجه بنا به قضیه ۳، احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{333}{1000} + \frac{200}{1000} - \frac{66}{1000} = \frac{467}{1000}$$

مثال ۵: با توجه به مثال ۴ و قضیه ۳، برای محاسبه احتمال سه پیشامد یعنی $P(A \cup B \cup C)$

فرمولی پیدا کنید.

حل: بر اساس خواص مجموعه‌ها داریم

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$$

$$P[(A \cup B) \cup C] = P[(A \cup B) \cup C]$$

و در نتیجه

اگر $A \cup B$ را یک مجموعه فرض کنیم، آنگاه از قضیه ۳ خواهیم داشت:

$$P[(A \cup B) \cup C] = P[(A \cup B)] + P(C) - P[(A \cup B) \cap C] \quad (۱)$$

اما مجدداً از قضیه ۳ به دست می‌آوریم

$$P[(A \cup B)] = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (۲)$$

و طبق خاصیت بخش پذیری اشتراک نسبت بر اجتماع

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

اما طبق قضیه ۳

$$P[(A \cup B) \cap C] = P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]$$

$$= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P[(A \cap C) \cap (B \cap C)]$$

$$(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

چون

$$P[(A \cup B) \cap C] = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

پس

(۳)

از جایگذاری رابطه‌های (۲) و (۳) در رابطه (۱) نتیجه می‌شود

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B)$$

$$- P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

در این مثال و قضیه ۳ می‌بینید که بعضی از احتمال‌ها جمع می‌شوند و بعضی دیگر، از مجموع احتمال‌ها، کم می‌شوند. جمع و تفریق احتمال‌ها اصل شمول و عدم شمول نامیده می‌شود. در واقع، «شمول» مربوط به احتمال‌هایی است که جمع می‌شوند و عدم شمول مربوط به احتمال‌هایی است که کم می‌شوند.

با استفاده از قضیه ۳ و مثال ۵ می‌توان اصل شمول و عدم شمول را در حالت کلی (برای n پیشامد) یعنی $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$ به دست آورد.

برای این کار، ابتدا همه اشتراک‌های ممکن پیشامدهای A_1, A_2, \dots, A_n را پیدا کرده و احتمال آنها را به دست می‌آوریم. پس از آن، احتمال اشتراک‌هایی که دارای تعداد فردی از پیشامدها هستند را با علامت مثبت و احتمال اشتراک‌هایی که دارای تعداد زوجی از پیشامدها هستند را با علامت منفی به آنها اضافه می‌کنیم که به این فرایند، اصل شمول و عدم شمول می‌گوییم. تمرین زیر، به پیدا کردن این الگو کمک می‌کند.

تمرین: اصل شمول و عدم شمول را برای ۴ پیشامد اثبات کنید.

مثال ۶: فرض کنید ۲۰٪ مردم یک شهر روزنامه الف، ۲۵٪ روزنامه ب، ۱۳٪ روزنامه پ، ۱۰٪ روزنامه‌های الف و ب، ۸٪ روزنامه‌های الف و پ، ۵٪ روزنامه‌های ب و پ و بالاخره ۴٪ هر سه روزنامه را می‌خوانند.

احتمال اینکه شخصی به تصادف از اهالی این شهر انتخاب شود که هیچ یک از این روزنامه‌ها را نخواند، چقدر است؟

حل: اگر E, F و G به ترتیب پیشامدهای خواندن روزنامه‌های الف، ب و پ باشد، پیشامد اینکه فرد انتخاب شده دست کم یکی از روزنامه‌های الف، ب و پ را بخواند، $E \cup F \cup G$ است. در نتیجه احتمال اینکه فرد انتخاب شده هیچ یک از روزنامه‌ها را نخواند، برابر $1 - P(E \cup F \cup G)$ است. پس طبق اصل شمول و عدم شمول

$$P(E \cup F \cup G) = P(E) + P(F) + P(G) - P(E \cap F)$$

$$- P(E \cap G) - P(F \cap G) + P(E \cap F \cap G)$$

$$= 0/25 + 0/20 + 0/13 - 0/10 - 0/08 - 0/05 + 0/04 = 0/39$$

بنابراین، احتمال مطلوب برابر است با :

$$1 - 0/39 = 0/61$$

تمرین

۱- برای انتخاب یک نفر جهت عضویت در انجمن خانه و مدرسه یک دبیرستان، چهار نفر کاندید شده‌اند. اگر احتمال انتخاب شدن A دو برابر احتمال انتخاب شدن B باشد و B و C شانس برابر در انتخاب شدن داشته باشند، ولی احتمال انتخاب شدن C دو برابر احتمال انتخاب شدن D باشد، مطلوب است :

الف) احتمال اینکه C موفق به انتخاب شود؛

ب) A موفق به انتخاب نشود.

۲- یک شرکت بازرگانی فقط به یک کارمند نیاز دارد. از بین متقاضیان خانم اکبری، خانم معینی و خانم حیدری واجد شرایط هستند. به دلیل مهارت‌های حرفه‌ای خانم معینی، احتمال اینکه ایشان استخدام شوند ۲۰٪ بیشتر از خانم اکبری و ۲۰٪ بیشتر از خانم حیدری است. احتمال اینکه خانم معینی استخدام شود چقدر است؟

۳- برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S ثابت کنید :

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) \quad \text{الف)}$$

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \quad \text{ب)}$$

۴- سه خاصیت احتمالات را برای فضاها گسسته ثابت کنید.

۵- آمار نشان می‌دهد که در یکی از شهرهای بزرگ، ۲۵٪ جرائم در طول روز و ۲۰٪ جرائم در درون شهر صورت می‌گیرد. اگر تنها ۲۰٪ جرائم در حومه شهر و در طول روز اتفاق بیفتند، در این صورت چند درصد جرم‌ها درون شهر و در طول شب رخ می‌دهند؟ چند درصد جرم‌ها در حومه شهر و در طول شب اتفاق می‌افتد؟

۶- برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S داریم : $P(A) = P(B) = 1/2$ ، نشان دهید :

$$P(A \cap B) = 1/4$$

۷- فرض کنیم که شخصی از شهر اصفهان دیدن کند، احتمال اینکه از عالی قاپو بازدید کند ۷۴/۰، احتمال اینکه از بازار اصفهان بازدید کند ۷۰/۰، احتمال اینکه از مسجد جامع بازدید کند ۶۴/۰، احتمال اینکه از عالی قاپو و بازار هر دو دیدن کند ۴۶/۰، احتمال اینکه بازار اصفهان و مسجد

جامع را ببیند $0/44$ و احتمال اینکه از عالی قاپو و مسجد جامع دیدن کند $0/72$ است. احتمال اینکه به بازدید هر سه مکان برود $0/34$ است. احتمال اینکه این شخص لا اقل یکی از این سه مکان را دیدن کند چقدر است؟

۸ - نشان دهید که :

$$P(A) \geq P(A \cap B) \quad \text{الف)}$$

$$P(A) \leq P(A \cup B) \quad \text{ب)}$$

۹ - با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید اگر A_1, A_2, \dots, A_n n پیشامد دو به دو مجزا باشند، آنگاه :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

۱۰ - با استفاده از قضیه ۳ ثابت کنید که برای دو پیشامد دلخواه A و B

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

۱۱ - جدول و نمودار مربوط به روز تولد را به یاد بیاورید و به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) نقطه برخورد دو نمودار بالا و پایین چه اهمیتی دارد ؟

اگر نمودار را به راست ادامه دهیم :

ب) نمودار مربوط به وجود دو نفر با روز تولد یکسان چه تغییری می کند؟

پ) نمودار مربوط به عدم وجود دو نفر با روز تولد یکسان چه تغییری می کند؟

۱۲ - عددی به تصادف از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ انتخاب می کنیم. احتمال اینکه :

الف) عدد انتخابی بر ۳ بخش پذیر باشد، اما بر ۵ بخش پذیر نباشد، چقدر است؟

ب) عدد انتخابی نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش پذیر باشد، چقدر است؟

۱۳ - از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ عددی به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال اینکه عدد

انتخابی بر ۴ بخش پذیر و بر ۵ و ۷ بخش پذیر نباشد چقدر است؟

۱۴ - رابطه های زیر همیشه درست نیستند. برای اثبات این ادعا، برای هر حالت یک مثال نقض

بزنید.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{الف)}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad \text{ب)}$$

۱۵ - تعداد بیماران یک بیمارستان ۶۳ نفر است که از این افراد، ۳۷ نفر مرد و ۲۰ نفر برای عمل

جراحی بستری شده اند. اگر ۱۲ نفر از بین بستری شدگان برای عمل جراحی مرد باشند، در این صورت

چند نفر از ۶۳ بیمار نه مرد هستند و نه برای عمل جراحی بستری شده‌اند.

۱۶- A, B, C سه پیشامد هستند. ثابت کنید رابطه

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

درست است اگر و تنها اگر رابطه زیر درست باشد:

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 0$$

۱۷- ثابت کنید

$$P(A \cap B \cap C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$$

۱۸- به کمک استقرای ریاضی، نامساوی تمرین ۱۷ را برای n پیشامد ثابت کنید.

- ۱- شووینگ تی - لین ویو - فنگ لین. نظریه مجموعه ها و کاربردهای آن، (ترجمه: حمید رسولیان). مرکز نشر دانشگاهی، تهران، چاپ ۱۳۶۸.
- ۲- ایان استیوارت - دیوید تال. مبانی ریاضیات (ترجمه: محمدمهدی ابراهیمی)، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، چاپ ۱۳۶۵.
- ۳- مصاحب، غلامحسین. آنالیز ریاضی، جلد اول، مؤسسه انتشارات فرانکلین، تهران، ۱۳۴۸.
- ۴- ظهوری زنگنه، بیژن؛ گویا، مریم؛ گویا، زهرا؛ دوره های کوتاه مدت عملی یا کارگاهی آموزش ریاضی، اداره کل آموزش های ضمن خدمت، تهران، ۱۳۷۲.
- ۵- پولیا، جورج. چگونه مسئله را حل کنیم. (ترجمه: احمد آرام). انتشارات کیهان، تهران، چاپ دوم، ۱۳۶۹.
- ۶- چانک، کای، لای. نظریه مقدماتی احتمال و فرایندهای تصادفی، (ترجمه: ابوالقاسم میامتی، قاسم وحیدی)، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۵.
- ۷- فروند، جان. و. والیول، رونالد. آمار ریاضی، (ترجمه: علی عمیدی و محمد قاسم وحید اصل) مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۱.
- ۸- بلایس، تی. اس. رابرتسون، ای. اف. جبر به روش تمرین، (ترجمه: حسین دوستی) ناشر مبتکران، تهران، ۱۳۷۰.
- ۹- لیانگ شین هان، اعداد مختلط و هندسه، (ترجمه: محمد بهفروزی)، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۶.
- ۱۰- جهانی پور، روح الله. احتمال (جلد دوم)، از سری کتاب های موضوعی انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۷۹.
- ۱۱- قهرمانی، سعید. مبانی احتمال (ترجمه: غلامحسن شاهکار و ابوالقاسم بزرگ نیا)، مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۷۷.
- ۱۲- راس، شلدون، مبانی احتمال، (ترجمه: علی همدانی و احمد پارسیان)، انتشارات شیخ بهایی، ۱۳۷۵.
- 13- Albert D. polimeni H. Joseph. **Straight Foundations. of Discrete. Mathematics.** State University of New York-Fredonia 1990.
- 14- Billstein R., Libeskind, S., Lott J., **A Problem Solving Approach to Mathematics for Elementary School Teachers**, (2nd ed.) Benjamin-Cummings Publish. Co. 1904.
- 15- Churchill R. V. , Brown J. W. , Verhey R. F. , **Complex Variables and Applications**, Mc-Graw Hill 1990.
- 16- Feller, W. **An Introduction to Probability Theory and its Applications**, John Wiley & Sons, 1968.
- 17- Graham R., Knuth D., Pathshinik O., **Concrete Mathematics**, Addison-Wesley 1989.
- 18- Jacob. H. R. **Mathematics, a human endeavor**, W. H. Freeman, (1982 2nd ed.)
- 19- Larson L. C. , **Problem Solving Through Problems**, Springer Verlag, 1983.
- 20- Ghahramani, S. **Fundamentals of probability**, Prentic-Hall, Inc, (2000 2nd ed.)
- 21- Grimmett G., Stirzaker D., **Probability and random processes**. Clarendon press. Oxford, 1982

