

تعریف ۳: فرض کنیم D دامنه تابع f زیر مجموعه‌ای از \mathbb{R} باشد، $a \in D$ تابع $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه a پیوسته است، هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط D مانند $\{a_n\}$ که به a همگراست، دنباله $\{f(a_n)\}$ به $f(a)$ همگرا باشد.

محتوی این تعریف این است که پیوستگی تابع در یک نقطه هم ارز این است که با دقیق‌تر کردن ورودی، می‌توان به خروجی‌های دلخواه دقیق دست یافت.

به کمک تعریف پیوستگی تابع در یک نقطه براساس همگرایی دنباله‌ها می‌توان پیوستگی مجموع، حاصل ضرب و خارج قسمت دو تابع پیوسته را نتیجه گرفت.

❖ **قضیه ۱:** فرض کنیم بازه D اشتراک دامنه تابع‌های f و g باشد و f و g هر دو در نقطه a پیوسته باشند و c عددی ثابت باشد آنگاه تابع‌های زیر نیز در a پیوسته‌اند.

$$\text{الف) } f+g \quad \text{ب) } f-g \quad \text{پ) } cf \quad \text{ت) } f \cdot g \quad \text{ث) } \frac{f}{g} \quad \text{به شرطی که } g(a) \neq 0$$

❖ **برهان:** همه حکم‌ها به سادگی از حکم‌های مشابه برای محاسبه حد مجموع و حاصل ضرب و خارج قسمت در قضیه (۱) نتیجه می‌شوند.

برای نمونه قسمت (ث) را ثابت می‌کنیم.

به ازای هر دنباله دلخواه $\{x_n\}$ از نقاط D که همگرا به a است داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a) \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = g(a)$$

بنابراین

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(a)}{g(a)}, \quad g(a) \neq 0$$

پس طبق تعریف (۳) تابع $\frac{f}{g}$ در نقطه a پیوسته است.

❖ **نکته:** عکس این قضیه همواره درست نیست.

❖ **مثال:** تابع‌های $f(x) = \begin{cases} x & \text{گویا،} \\ x & \text{گنگ،} \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x & \text{گویا،} \\ 1 & \text{گنگ،} \end{cases}$ در $x=0$ حد ندارند و بنابراین در

$$x=0 \text{ پیوسته نیستند. اما برای هر } x \in \mathbb{R} \text{، } (f \cdot g)(x) = 0$$

و این تابع ثابت در هر نقطه‌اش، حد آن با مقدار تابع در آن نقطه برابر است، پس در تمام نقاط از جمله $x=0$ پیوسته است.

دو تابع مثال بزنید که هر دو در نقطه a ناپیوسته باشند ولی مجموع آنها در a پیوسته باشد.

تابع‌هایی مانند تابع چند جمله‌ای و یا تابع کسری گویا، در هر نقطه از دامنه، حد تابع با مقدار تابع در آن نقطه برابر است و این خود ایده‌ای است برای بیان قضیه زیر

❖ قضیه ۲ :

الف) هر چند جمله‌ای همه‌جا پیوسته است یعنی روی $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ پیوسته است.
 ب) هر تابع گویا در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته است.

❖ برهان :

الف) هر چند جمله‌ای تابعی است به شکل

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

که در آن a_0 و a_1 و \dots و a_{n-1} و a_n عددهایی ثابت‌اند
 می‌دانیم

$$\lim_{x \rightarrow c} a_0 = a_0$$

$$\lim_{x \rightarrow c} x^m = c^m, \quad m=1, 2, 3, \dots, n$$

این تساوی به معنی آن است که تابع $f(x) = x^m$ تابعی است پیوسته در نتیجه بنابر قسمت (پ) قضیه (۱) $g(x) = ax^m$ نیز تابعی است پیوسته. چون $P(x)$ مجموع تابع‌هایی پیوسته نظیر $g(x) = ax^m$ و تابعی ثابت است بنابر قسمت الف قضیه (۱) نتیجه می‌شود تابع چند جمله‌ای در \mathbb{R} پیوسته است.

ب) هر تابع گویا تابعی است به شکل $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای‌اند و دامنه f مجموعه $D = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$ است.

از طرفی بنابر قسمت الف قضیه (۲)، $P(x)$ و $Q(x)$ در همه‌جا پیوسته‌اند در نتیجه طبق قسمت (ث) قضیه (۱) تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته است.

❖ **مثال:** تابع $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x^2 - 1}$ روی چه بازه‌هایی پیوسته است؟

حل: دامنه f ، مجموعه $\{+1, -1\}$ ، بنابراین طبق قضیه (۱) تابع f به جز در نقاطی که مخرج آن صفر می‌شود، همه جا پیوسته است در نتیجه تابع روی بازه‌های زیر پیوسته است.
 $(-\infty, -1)$ و $(-1, 1)$ و $(1, +\infty)$



تابع $f(x) = \frac{2}{x-3} + \frac{x+1}{x^2+x+1}$ روی چه بازه‌هایی پیوسته است؟

۱۲-۲- پیوستگی توابع مثلثاتی

در حدهای مثلثاتی ثابت شده است که

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

بنابراین طبق تعریف پیوستگی تابع در نقطه a تابع‌های $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ در هر نقطه a

پیوسته اند در نتیجه تابع $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ بجز در نقاطی که $\cos x = 0$ پیوسته است و تابع $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ بجز در نقاطی که $\sin x = 0$ پیوسته است.

توضیح: در نقاطی که $\cos x = 0$ که $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

و در نقاطی که $\sin x = 0$ که $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

❖ **مثال:** فرض کنید $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$ ، $f(0)$ را چنان تعریف کنید که تابع f در $x=0$ پیوسته

باشد.

حل:
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)}$$

وقتی x به صفر میل می‌کند داریم $(1 - \cos x) \neq 0$ پس

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) = 1 + 1 = 2$$

با انتخاب $f(0) = 2$ تابع f در صفر پیوسته می‌شود.

تمرین در کلاس

تابع $f(x) = \frac{\tan x}{1 + \sin x}$ در چه نقاطی پیوسته است؟

به این ترتیب با اتکا به قضیه (۱) می‌توان با عملیات جبری از تابع‌های پیوسته داده شده، تابع‌های پیوسته جدیدی ساخت و علاوه بر این، روش دیگر، برای تولید تابع‌های پیوسته، ترکیب تابع‌های پیوسته است.

این کار بنا بر قضیه زیر میسر است.

❖ قضیه ۳: اگر تابع f در b پیوسته باشد و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ ، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(b)$$

به عبارت دیگر $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x))$

در حقیقت قضیه (۳) بیانگر آن است که وقتی x به a نزدیک شود، $g(x)$ به b نزدیک می‌شود و

چون f در b پیوسته است، وقتی $g(x)$ به b میل می‌کند آن وقت $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(b)$ همچنین در این قضیه می‌توان نماد حد را به درون نماد تابع بُرد، به شرطی که تابع پیوسته باشد و حد وجود داشته باشد.

به عبارت دیگر در این قضیه تعویض و جابه‌جا کردن نماد « f » با نماد « \lim » مجاز است.

❖ مثال: می‌دانیم تابع $f(x) = |x|$ همه‌جا پیوسته است. و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ بنابراین طبق قضیه (۳)

داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = f(b) = |b|$$

از قضیه (۳) نتیجه می‌گیریم که ترکیب دو تابع پیوسته، خود تابعی پیوسته است. و به بیان دقیق‌تر، اگر تابع g در نقطه a و تابع f در $g(a)$ پیوسته باشد، آنگاه تابع $f \circ g$ در نقطه a پیوسته است.

❖ مثال: نشان دهید تابع $y = \sqrt[3]{\frac{x-2}{x^2+x+1}}$ همه‌جا پیوسته است.

حل:  مخرج کسر زیر رادیکال همواره مخالف صفر است ($\Delta = 1 - 4 < 0$) بنابراین تابع گویای

$$g(x) = \frac{x-2}{x^2+x+1}$$

همه جا پیوسته است.

از طرفی تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ همواره پیوسته است ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sqrt[3]{a}$)


پس ترکیب دو تابع پیوسته f و g یعنی تابع $f(g(x)) = \sqrt[3]{\frac{x-2}{x^2+x+1}}$ همه جا پیوسته است.

همان طور که در مقدمه پیوستگی تابع، گفته شد، تابع هایی وجود دارد که در یک یا چند نقطه از دامنه شان پیوسته اند ولی اطلاق کلمه پیوسته به آنها دور از ذهن به نظر می رسد.

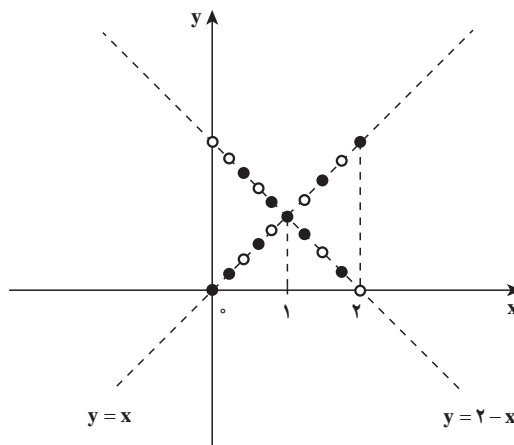
مثال:  تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} x & , \text{گویا} \\ 2-x & , \text{گنگ} \end{cases}$$

نقاطی از تابع f را تعیین کنید که تابع در آن نقاط پیوسته باشد.

حل:  می دانید که در هر بازه باز از اعداد حقیقی هم اعداد گویا وجود دارد و هم اعداد گنگ، بنابراین نقاط تابع f یا روی خط $y=x$ (وقتی که x گویا باشد) و یا روی خط $y=2-x$ (وقتی که x اصم باشد) قرار دارند.

با مشاهده نمودار به صورت نقطه چین تابع در شکل ۲-۲۳ هر چقدر به نقطه (۱، ۱) نزدیک تر شویم



شکل ۲-۲۳

نقطه چین‌ها به هم متراکم‌تر خواهند شد و به نظر می‌رسد که تابع در $x=1$ حد دارد و برای اثبات درستی حدس خود، از تعریف حد به شرح زیر استفاده می‌کنیم.

فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه از اعداد حقیقی باشد به طوری که $a_n \rightarrow 1$ ($a_n \neq 1$)، کافی

است ثابت کنیم $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(a_n) - 1| = 0$ یا $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 1$ در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1)$ و تابع f در نقطه $x=1$ پیوسته است.

و اما به ازای مقادیری از جملات دنباله $\{a_n\}$ که گویا باشند داریم $|f(a_n) - 1| = |a_n - 1|$.

و به ازای مقادیری از جملات دنباله $\{a_n\}$ که گنگ باشند داریم

$$|f(a_n) - 1| = |2 - a_n - 1| = |1 - a_n| = |a_n - 1|$$

و چون $\{a_n\}$ همگرا به عدد 1 است یا $0 \rightarrow |a_n - 1|$ نتیجه می‌گیریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(a_n) - 1| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - 1| = 0$$

بنابراین دنباله $\{f(a_n)\}$ به $f(1) = 1$ همگراست.



ثابت کنید تابع $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ گویا,} \\ 0, & x \text{ گنگ.} \end{cases}$ در نقطه $x=0$ پیوسته است.



۱- نقاط ناپیوستگی تابع f را پیدا کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x > 1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$$

۲- تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ داده شده است. مقدار a را چنان انتخاب کنید

که تابع در $x=0$ پیوسته باشد.

۳- به ازای چه مقدار a ، تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ در $x=0$ پیوسته است.

۴- عددهای a و b را چنان انتخاب کنید که تابع f در نقطه $x=0$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a + [x], & x < 0 \\ b, & x = 0 \\ \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}, & x > 0 \end{cases}$$

۵- تابع $f(x) = [\frac{x}{\pi}]$ در چه نقاطی ناپیوسته است؟

۶- نقاط پیوستگی تابع $f(x) = [\sin x]$ را در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ مشخص کنید.

۷- اگر تابع f در نقطه‌ای پیوسته باشد، ثابت کنید تابع $|f|$ نیز در آن نقطه پیوسته است. آیا

عکس این مطلب نیز درست است؟

۸- دو تابع مثال بزنید که هر دو در یک نقطه ناپیوسته باشند ولی مجموع آنها در آن نقطه

پیوسته باشد.

۹- دو تابع مثال بزنید که هر دو در یک نقطه ناپیوسته باشند ولی ضرب آنها در آن نقطه

پیوسته باشد.

۱۰- با برهان خلف، ثابت کنید :

اگر تابع f در نقطه a پیوسته و تابع g در نقطه a ناپیوسته باشد آنگاه $f+g$ در a ناپیوسته است.

۱۱- با استفاده از قضایای حد و پیوستگی ثابت کنید تابع $f(x) = [x] \sin \pi x$ روی \mathbb{R} پیوسته است.

۱۲- تابع $f(x) = [x^2]$ روی بازه $[2, 2+k]$ پیوسته است، بزرگ‌ترین مقدار k را بیابید.

۱۳- تابع $f(x) = \begin{cases} 4, & x^2 = |x| \\ x+2, & x^2 \neq |x| \end{cases}$ در چند نقطه از دامنه‌اش ناپیوسته است؟

۱۴- تابع $f(x) = \frac{4 - \sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$ در چند نقطه از دامنه‌اش پیوسته است؟

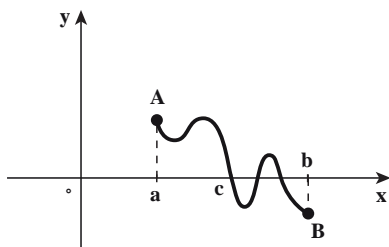
۱۵- نمودار تابع $f(x) = [x] - x + \sin\left(\frac{\pi}{4}[x]\right)$ را در بازه $[2, 5]$ رسم کرده و مشخص کنید، تابع در چند نقطه از این بازه ناپیوسته است.

۱۶- پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} x^2, & x^2 \geq 2|x| \\ 2|x|, & x^2 < 2|x| \end{cases}$ را روی \mathbb{R} بررسی کنید.

۱۷- عددهای a و b را چنان انتخاب کنید که تابع $f(x) = (x^2 - bx + a) \operatorname{sgn}(x^2 + x - 2)$ روی \mathbb{R} پیوسته باشد. (sgn تابع علامت است)

۱۳-۲ ویژگی‌های مهم تابع‌های پیوسته

بیشتر ویژگی‌های تابع‌های پیوسته ناشی از این خصوصیت شهودی آنها است که نمودار تابع پیوسته بر یک بازه به صورتی ملموس دارای اتصال و یکپارچگی است.



شکل ۲-۲۴

اکنون فرض کنید تابع f بر بازه $[a, b]$ پیوسته باشد. و مقدار آن در a مثبت و مقدار آن در b منفی باشد، باید حداقل، در یک نقطه از این بازه مانند c مقدار صفر را اختیار کند.

چون تابع f بر بازه $[a, b]$ پیوسته است، (هموار و یکپارچه است) ناچار است در گذر از نقطه $A(a, f(a))$

بالای محور x به نقطه $B(b, f(b))$ پایین محور x حداقل در یک جا، محور x را قطع کند. (شکل


۲-۲۴ را ببینید)

طبق این ویژگی «اتصال و یکپارچگی» تابع، قضیه زیر را بیان می‌کنیم.

❖ **قضیه ۴:** (قضیه بولزانو) اگر تابع f در بازه بسته $[a, b]$ پیوسته و $f(a)f(b) < 0$ آنگاه حداقل،

یک عدد مانند c در بازه باز (a, b) وجود دارد که $f(c) = 0$

❖ **مثال:** با استفاده از قضیه بولزانو ثابت کنید معادله $x^2 + x - 3 = 0$ ریشه‌ای در بازه $(1, 2)$ دارد.

 **حل:** تابع $f(x) = x^2 + x - 3$ را در نظر می‌گیریم، می‌دانیم که تابع چند جمله‌ای f که در هر نقطه از

\mathbb{R} یا بازه $(-\infty, +\infty)$ پیوسته است پس در بازه $[1, 2]$ نیز پیوسته است از طرفی $f(1) f(2) < 0$ (چرا؟)


بنابراین طبق قضیه بولزانو دست کم یک عدد c در بازه باز $(1, 2)$ وجود دارد که $f(c) = 0$ یعنی c ریشه معادله $x^2 + x - 3 = 0$ است.



نشان دهید معادله $x - \cos x = 0$ ، ریشه‌ای در بازه $(0, 1)$ دارد.

❖ **مثال:** اگر تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته و k عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ ، $f(a) < f(b)$ و $f(x) = f(x) - k$ ،

نشان دهید، وجود دارد $c \in (a, b)$ که $g(c) = 0$

 **حل:** طبق فرض داریم $g(a) = f(a) - k < 0$ و $g(b) = f(b) - k > 0$ و تابع g در بازه $[a, b]$ پیوسته

است. (چرا؟) پس بنابر قضیه بولزانو وجود دارد $c \in (a, b)$ که $g(c) = 0$ یا $f(c) = k$ ایده مثال فوق قضیه مقدار میانی است که در زیر بیان می‌شود.

❖ **قضیه ۵:** (قضیه مقدار میانی): فرض کنیم f روی بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد و k عددی

بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، در این صورت حداقل یک عدد مانند c در بازه $[a, b]$ وجود دارد که $f(c) = k$.

قضیه مقدار میانی می‌گوید که برای تابع پیوسته f ، اگر x همه مقادیر بین a و b را بگیرد، $f(x)$

باید همه مقادیر بین $f(a)$ و $f(b)$ را بگیرد. به عنوان مثال ساده‌ای از این قضیه، قد افراد را در نظر

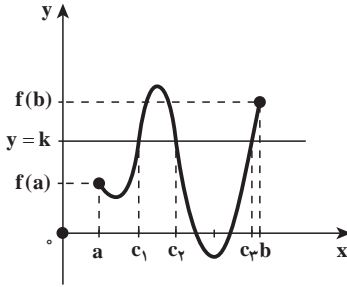
بگیریم. فرض کنید قد پسر بچه‌ای در ۱۳ سالگی 150° سانتی‌متر و در ۱۴ سالگی 165° سانتی‌متر باشد

پس به ازای هر قد h سانتی‌متر بین 150° سانتی‌متر و 165° سانتی‌متر باید زمانی چون t باشد که قدش

درست h سانتی‌متر بوده است. این امر معقول به نظر می‌رسد زیرا می‌دانیم رشد افراد پیوسته است و قد

نمی‌تواند جهشی ناگهانی داشته باشد قضیه مقدار میانی وجود حداقل یک عدد c در بازه بسته $[a, b]$

را تضمین می‌کند، البته ممکن است بیش از یک عدد مانند c که $f(c)=k$ وجود داشته باشد (شکل ۲-۲۵ را ببینید)



شکل ۲-۲۵

تعبیر هندسی قضیه مقدار میانی: شکل بالا نشان می‌دهد خط افقی $y=k$ بین خط‌های $y=f(a)$ و $y=f(b)$ می‌باشد. چون نمودار f بدون بریدگی و مانند یک ریسمان به هم پیوستگی و یکپارچگی دارد، برای رفتن از نقطه $(a, f(a))$ به نقطه $(b, f(b))$ باید خط $y=k$ را قطع کند و در شکل بالا خط $y=k$ نمودار f را در سه نقطه c_1 و c_2 و c_3 قطع کرده است.

❖ **مثال:** نشان دهید که خط $y=2$ نمودار تابع $f(x)=(x-1)^2(x-3)^2+x$ را قطع می‌کند.

حل: چون تابع چند جمله‌ای f در بازه $(-\infty, +\infty)$ پیوسته است پس f در بازه $[1, 3]$ نیز پیوسته است. از طرفی $f(1)=1$ و $f(3)=3$

بنابراین طبق قضیه مقدار میانی خط $y=2$ که بین خطوط $y=1$ و $y=3$ قرار دارد نمودار f را قطع می‌کند.

تمرین در کلاس

آیا تابع $f(x) = \frac{x^3}{4} + \sin \pi x + 4$ در بازه $[-2, 2]$ مقدار ۵ را می‌تواند داشته باشد؟

۱۴-۲- پیوستگی تابع وارون یک تابع پیوسته

فرض کنیم $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ تابع باشد و $B = \{f(x) : x \in D\}$ مجموعه مقادیر f باشد (D دامنه f) اگر f یک به یک باشد، به ازای هر عضو B مانند y یک و فقط یک x در D وجود دارد که

$$f(x)=y$$

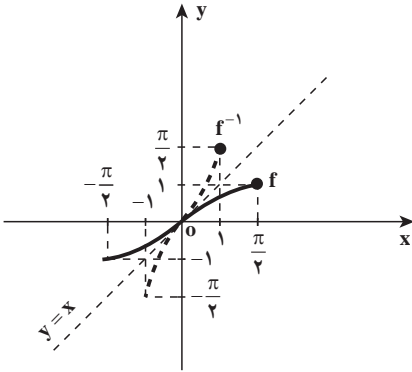
به این ترتیب، تابعی مانند $f^{-1}: B \rightarrow \mathbb{R}$ تعریف می‌شود که $f^{-1}(y)=x$ ، تابع f^{-1} را وارون f

می‌نامیم و دو حکم زیر درست‌اند.

(الف) به ازای هر $x \in D$ ، $f^{-1}(f(x))=x$

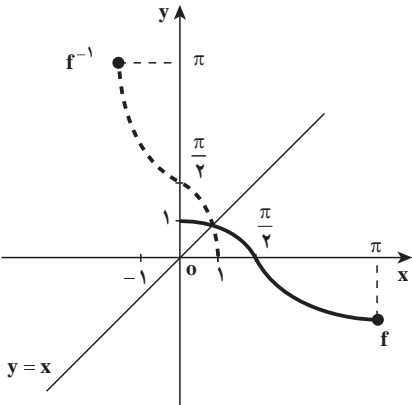
(ب) به ازای هر $y \in B$ ، $f(f^{-1}(y))=y$

همان‌طور که در حسابان آموزش داده شده است، به خاطر اینکه f^{-1} نقش x و y نسبت به f را عوض می‌کند، نمودار f^{-1} قرینه نمودار f نسبت به خط $y=x$ است (شکل ۲-۲۶ را ببینید).



شکل ۲-۲۶ نمودار f و نمودار f^{-1} نسبت به $y=x$ قرینه‌اند

در این شکل نمودارهای $f(x)=\sin x$ و $f^{-1}(x)=\sin^{-1}(x)$ که نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند، دیده می‌شوند. تابع f در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ یک به یک و صعودی است همچنین تابع f^{-1} در بازه $[-1, 1]$ یک به یک و صعودی می‌باشد و در شکل ۲-۲۷ که نمودارهای $f(x)=\cos x$ و $f^{-1}(x)=\cos^{-1}(x)$ نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند، دیده می‌شوند.



شکل ۲-۲۷ نمودار f و نمودار f^{-1} (نقطه‌چین) نسبت به $y=x$ قرینه‌اند

تابع f در بازه $[0, \pi]$ یک به یک و نزولی است. همچنین تابع f^{-1} در بازه $[-1, 1]$ یک به یک و نزولی می‌باشد.

تمرین در کلاس

نمودار و دامنه تابع وارون، توابع زیر را در صفحه مختصات رسم کنید.

(الف) $f(x)=\tan x$ ، $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (ب) $g(x)=\cot x$ ، $0 < x < \pi$

در مثال‌های بالا مشاهده می‌شود وقتی تابع f یک به یک و پیوسته است، تابع وارون آن نیز یک به یک و پیوسته است و این خود ایده‌ای است برای بیان قضیه زیر که کاربرد مهمی از قضیه مقدار میانی است.

❖ **قضیه ۶:** فرض کنیم f تابعی یک به یک و پیوسته باشد که دامنه آن بازه بسته D است. اگر f^{-1} با دامنه B ، تابع وارون f باشد، آنگاه تابع f^{-1} در هر نقطه از B پیوسته است.

❖ **مثال:** می‌دانیم وارون تابع $f(x)=x^2$ ، تابع $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ است. چون تابع f تابعی است یک به یک پیوسته، پس تابع $y=\sqrt{x}$ نیز یک به یک و پیوسته است.

همچنین تابع $f(x)=\sin x$ با دامنه $D=[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ یک به یک و پیوسته است. پس طبق قضیه (۶) تابع $f^{-1}(x)=\sin^{-1}(x)$ با دامنه $B=[-1, 1]$ یک به یک و پیوسته است.

مسائل

- ۱- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} x-1, & 1 < x < 2 \\ 2x-4, & 3 < x < 4 \end{cases}$ ، تابع f^{-1} در چند نقطه از دامنه اش ناپیوسته است، نمودار f^{-1} را رسم کنید.
- ۲- نشان دهید که معادله $x^2-x-1=0$ در بازه $[1, 2]$ جواب دارد.
- ۳- نشان دهید معادله $x^5+x^4+2x^3-x+2=0$ در بازه $[-2, 0]$ دارای جواب است.
- ۴- ثابت کنید معادله $\sin x - x^2 + x + 1 = 0$ حداقل دو ریشه در بازه $[-\pi, \pi]$ دارد.
- ۵- ثابت کنید که اگر $P(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه فرد باشد، آنگاه معادله $P(x) = 0$ حداقل دارای یک ریشه حقیقی است.

۲-۱۵- حدهای نامتناهی (حد بی نهایت)

می‌دانید در عبارت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ (۱) عددی است حقیقی و چنین حدهایی را اصطلاحاً حدود متناهی نیز می‌نامند.

اکنون عبارت (۱) را برای وقتی $+\infty$ یا $-\infty$ جایگزین L می‌شوند، تعریف می‌کنیم. این تعریف‌ها به لحاظ منطقی همان تعریف قبلی حد هستند، با این تفاوت که نشانه نزدیکی $f(x)$ ‌ها به $+\infty$ ، بزرگ شدن دلخواه آنها است و نیز نشانه نزدیکی $f(x)$ ‌ها به $-\infty$ ، کوچک تر شدن دلخواه آنها است و در حقیقت نمادگذاری سودمندی برای توصیف رفتار توابعی است که مقادیرشان به دلخواه بزرگ یا کوچک می‌شوند.

هرگاه رفتار تابع $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ را در نزدیکی یک بررسی نماییم (شکل ۲-۲۸)، به این نتیجه می‌رسیم که وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر و یا کوچک‌تر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود، $(x-1)^2$ با مقادیر مثبت به صفر نزدیک خواهد شد و مقدار $\frac{1}{(x-1)^2}$ بدون هیچ محدودیتی افزایش می‌یابد و یا $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ را می‌توان از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کرد ($f(x)$ به $+\infty$ میل می‌کند) به شرطی که x را به اندازه کافی به ۱ نزدیک کنیم. به عنوان مثال اگر بخواهیم $\frac{1}{(x-1)^2}$ بزرگ‌تر از 1000000 باشد

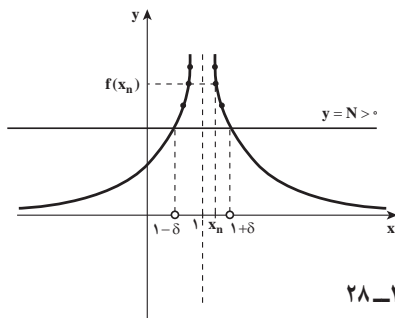
$$\text{و یا } \frac{1}{(x-1)^2} > 1000000 \quad \text{داریم:} \quad (x-1)^2 < \frac{1}{1000000}$$

$$|x-1| < \frac{1}{10000} \quad \text{و یا}$$

$$1 - \frac{1}{10000} < x < 1 + \frac{1}{10000}$$

$$(x-1)^2 < \frac{1}{1000000} \quad \text{یعنی اگر } |x-1| < \frac{1}{10000} \text{ آنگاه:}$$

$$\frac{1}{(x-1)^2} > 1000000$$



یعنی اگر بخواهیم $f(x)$ بزرگ‌تر از عدد 1000000 باشد کافی است x در همسایگی محذوف ۱ و به شعاع $\frac{1}{10000}$ قرار گیرد.

بنابراین در یک همسایگی محذوف ۱، $f(x)$ می‌تواند از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر شود. در این وضعیت گفته می‌شود، وقتی x به ۱ میل کند، $f(x)$ به $+\infty$ میل می‌کند و از نمادگذاری $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ استفاده می‌کنیم.

برای درک بهتر، مطلب بالا را روی نمودار تابع توضیح می‌دهیم. (در مثال بالا $N=1000000$ و $\delta = \frac{1}{10000}$)

برای هر خط افقی $y=N>0$ یک همسایگی محذوف ۱ و به شعاع $\delta>0$ ایجاد می‌شود که به

ازای هر $x_n \in D_f$ که در این همسایگی صدق کند، $f(x_n) > N$ است x_n مقدار جمله n ام دنباله $\{x_n\}$ است که به ۱ همگراست).

اکنون به صورت رسمی به تعریف حد نامتناهی (حد بی نهایت) می پردازیم.

تعریف ۱: فرض کنیم تابع D زیر مجموعه ای از \mathbb{R} و $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد، در این صورت، گوئیم حد تابع f در a ، $+\infty$ است و می نویسیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ هرگاه به ازای هر

دنباله از نقاط دامنه f مانند $\{x_n\}$ که همگرا به a است و $x_n \neq a$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = +\infty$

❖ **مثال:** به کمک تعریف ثابت کنید: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = +\infty$

🚀 **حل:** به ازای هر دنباله $\{x_n\}$ ، $(x_n \neq 0)$ همگرا به صفر، دنباله $\{f(x_n)\}$ و اگر به $+\infty$ است (چرا؟)

اگر رفتار تابع $f(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$ را در نزدیکی ۱ بررسی نماییم (شکل ۲-۲۹) به این نتیجه

می رسیم که وقتی x با مقادیر بزرگ تر و یا کوچک تر از ۱ به ۱ نزدیک می شود، مقدار $\frac{-1}{(x-1)^2}$ بدون هیچ محدودیتی و با مقادیر منفی کاهش می یابد.

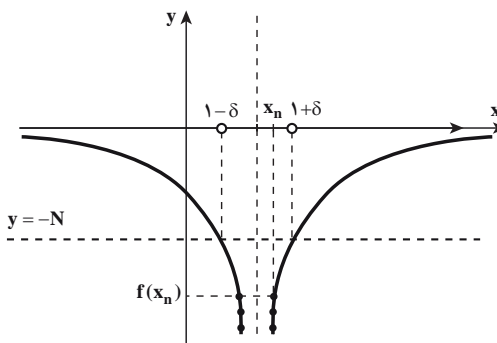
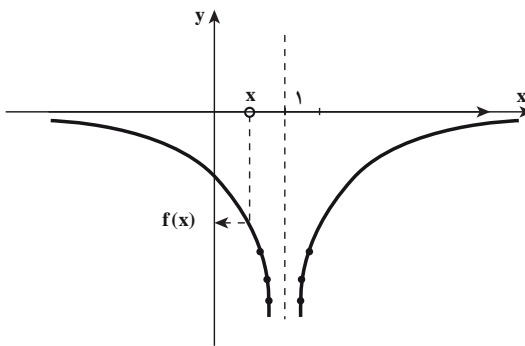
و یا $f(x)$ را می توان از هر عدد منفی کوچک تر کرد ($f(x)$ به $-\infty$ میل می کند) به شرطی که x به اندازه کافی به ۱ نزدیک شود.

این وضعیت تابع را در مجاورت $x=1$ ، روی نمودار تابع توضیح می دهیم. فرض کنید N یک عدد مثبت دلخواه است با رسم هر خط افقی $y=-N$ در شکل روبه رو یک همسایگی محذوف ۱ و به شعاع $\delta > 0$ ایجاد می شود که برای هر $x_n \in D_f$ که در این

همسایگی صدق کند، $f(x_n) < -N$

x_n مقدار جمله n ام دنباله $\{x_n\}$ است که به ۱ همگراست)

اکنون به صورت رسمی به تعریف حد نامتناهی (حد منهای بی نهایت) می پردازیم.



شکل ۲-۲۹

تعریف ۲: فرض کنید D زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R} (مجموعه اعداد حقیقی)، دامنه تابع f باشد.

گوئیم حد تابع f در a ، $-\infty$ است و می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ اگر به ازای هر دنباله از نقاط

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = -\infty, \quad x_n \neq a \text{ است و } a \text{ همگرا به } \{x_n\} \text{ دامنه } f \text{ مانند}$$

❖ **مثال:** به کمک تعریف (۲) ثابت کنید

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$$

حل: برای هر دنباله دلخواه $\{x_n\}$ که همگرا به ۲ است و $x_n \neq 2$ داریم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(x_n - 2)^2} = -\infty$$

زیرا وقتی دنباله $\{x_n\}$ به ۲ همگرا باشد، دنباله $\{(x_n - 2)^2\}$ با مقادیر مثبت به صفر همگراست بنابراین دنباله $\{f(x_n)\}$ به $-\infty$ واگراست.

عبارت‌های

$$۱- \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \qquad ۲- \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$۳- \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \qquad ۴- \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

مشابه تعریف‌های ۱ و ۲، قابل تعریف هستند. به عنوان مثال عبارت (۲) به معنی آن است که: اگر

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \text{ آنگاه } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = -\infty, \quad x_n > a \text{ که } a \text{ همگرا به } \{x_n\} \text{ به ازای هر دنباله}$$



عبارت‌های ۱ و ۳ و ۴ را مشابه تعریف ۱ و ۲ تعریف کنید.

۲-۱۶- حد توابع کسری و مجانب قائم

با توجه به تعریف و مثال‌های حدهای مثبت بی‌نهایت و منفی بی‌نهایت مشخص می‌شود که در یک تابع کسری وقتی x به a میل کند و حد مخرج کسر صفر و حد صورت کسر عددی مخالف صفر باشد، حد تابع کسری $+\infty$ یا $-\infty$ است و این خود یک ایده‌ای است برای مطرح کردن قضیه مهم صفحه بعد

❖ **قضیه ۱:** فرض کنید: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$:
 الف) اگر $L > 0$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

ب) اگر $L > 0$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

پ) اگر $L < 0$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

ت) اگر $L < 0$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

توضیح اینکه این قضیه برای حدود یک طرفه (چپ یا راست) نیز برقرار است.
 برای اینکه به کاربرد قضیه (۱) در محاسبه حدود نامتناهی بیشتر آشنا شویم به مثال‌های زیر توجه کنید.

❖ **مثال:** حدهای نامتناهی زیر را مشخص کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 3x - 4} \quad \text{ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2} \quad \text{الف)}$$

 **حل:**

الف) وقتی $x \rightarrow 0^+$ ، حد صورت کسر یک و حد مخرج کسر صفر است و مخرج کسر یعنی x^2 در یک همسایگی محذوف صفر مثبت است بنابراین طبق قسمت الف قضیه (۱) داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2} = +\infty$$

ب) وقتی x با مقادیر کوچک‌تر از ۱ به ۱ میل کند، حد صورت کسر ۳ است و حد مخرج کسر یعنی $(x-1)(x+4)$ صفر است و مخرج کسر به ازای $x < 1$ ، مثلاً در بازه باز $(1-\delta, 1)$ منفی است بنابراین طبق قسمت ب قضیه (۱) داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 3x - 4} = -\infty$$

حدهای زیر را حدس زده و با استفاده از قضیه (۱) جواب حد را پیدا کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x \quad -۴$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x \quad -۳$$

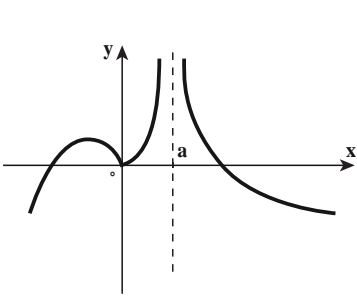
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x]-1}{x^2-1} \quad -۲$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x+1}{x+2} \quad -۱$$

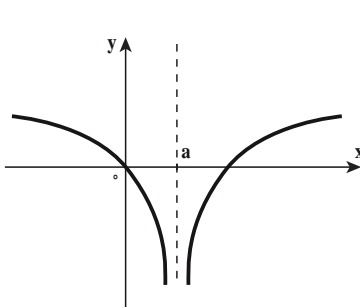
مجاناب قائم تابع: به توصیف عبارت‌های $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ در شکل

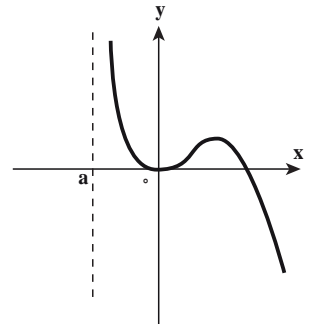
۲-۳ توجه می‌کنیم.



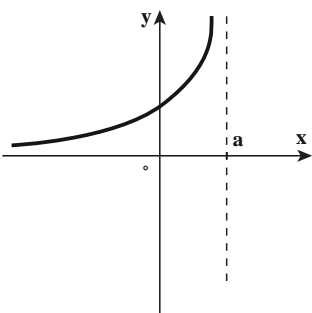
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$



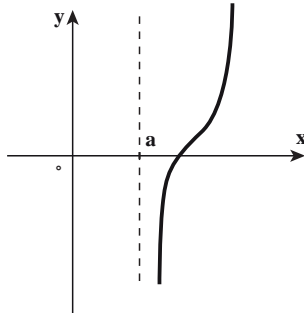
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$



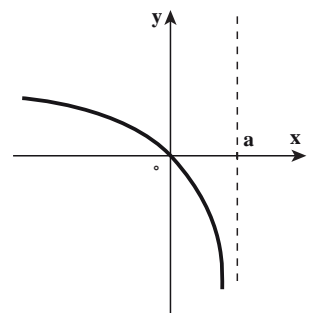
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

شکل ۲-۳

در نمودارهای شکل ۲-۳ دیده می‌شود که تابع f در $x=a$ تعریف نشده است و وقتی x از هر دو طرف و یا از طرف راست و یا از طرف چپ به a میل کند، $f(x)$ بی‌کران افزایش یا کاهش می‌یابد و این خود ایده‌ای است برای مطرح کردن مجانب قائم تابع که در رسم نمودارها بسیار مفید است.

تعریف ۳: خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع f می‌نامند، هرگاه حداقل یکی از حکم‌های زیر درست باشد.

$$۱- \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

$$۲- \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$۳- \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

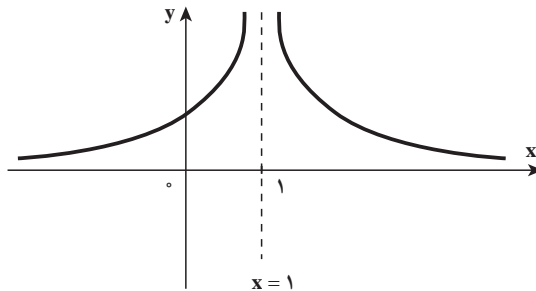
$$۴- \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

$$۵- \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$۶- \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

مثلاً خط $x=a$ مجانب قائم هر یک از شش حالت نشان داده شده در شکل ۲-۳ است.

❖ **مثال:** خط $x=1$ مجانب قائم تابع $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ است زیرا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$



تمرین در کلاس

۱- مجانب‌های تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ را در صورت وجود به دست آورید.

۲- مجانب‌های قائم تابع‌های زیر را به دست آورید.

ب) $g(x) = \tan x, -\pi \leq x \leq \pi$

الف) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$

۱۷-۲- حد در بی‌نهایت و مجانب افقی

تاکنون برای بررسی رفتار تابع f در نزدیکی نقطه مانند $x=a$ ، از «حد» استفاده کرده‌ایم و در آنجا

x را به سمت a میل می‌دادیم

اما هرگاه تابع f در بازه‌هایی مانند $(c, +\infty)$ و یا $(-\infty, c)$ تعریف شده باشد، علاقه‌مندیم که بدانیم، اگر x به دلخواه بزرگ (مثبت) و یا کوچک (منفی) می‌شود، و به بیان دیگر وقتی x به سمت $+\infty$ و یا به سمت $-\infty$ میل می‌کند، چه بر سر $f(x)$ می‌آید. دانستن رفتار انتهای تابع برای رسم نمودار آن بسیار مفید است.

تعریف ۴: فرض کنید f تابعی باشد که در بازه‌ای مانند $(c, +\infty)$ تعریف شده و L عددی حقیقی باشد. می‌گوییم حد تابع f وقتی x به $+\infty$ میل می‌کند برابر L است و می‌نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه f مانند $\{x_n\}$ ، واگرا به $+\infty$ ، دنباله $\{f(x_n)\}$ به L همگرا باشد.



تعریف مشابه برای حد در منفی بی‌نهایت را فرمول‌بندی کنید.

❖ **مثال:** ثابت کنید، اگر r یک عدد گویای مثبت باشد آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^r} = 0 \quad (\text{ب}) \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^r} = 0 \quad (\text{الف})$$

حل:

الف) برای هر دنباله دلخواه $\{x_n\}$ که واگرا به $+\infty$ است داریم:

$$f(x_n) = \frac{1}{(x_n)^r} \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^r} = 0 \qquad \text{دنباله } \{f(x_n)\} \text{ همگرا به صفر است (چرا؟) پس}$$

ب) برای هر دنباله دلخواه $\{x_n\}$ که واگرا به $-\infty$ است داریم:

$$f(x_n) = \frac{1}{(x_n)^r} \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^r} = 0 \qquad \text{و } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 0 \text{ (چرا؟) بنابراین}$$

تذکر: قوانینی که در مورد $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ثابت کردیم در مورد حد در بی‌نهایت نیز برقرارند

مثلاً اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L_2$: آنگاه :

$$۱- \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$$

$$۲- \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = L_1 L_2$$

$$۳- \lim_{x \rightarrow +\infty} cf(x) = cL_1, \quad c \text{ یک عدد ثابت}$$

$$۴- \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad (L_2 \neq 0)$$

$$۵- \lim_{x \rightarrow +\infty} c = c$$

این قوانین برای وقتی که x به $-\infty$ میل کند نیز برقرارند.

بدیهی است که نتایج قضیه‌های ۱ و ۲ و ۳ بخش دوم با تغییرات جزئی در مورد حد در بی‌نهایت

نیز برقرارند. (چرا؟)

❖ **مثال:** مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5x + 1}{3x^2 - x}$ را حساب کنید.

حل: وقتی x بزرگ می‌شود، بدیهی است که صورت و مخرج کسر هر دو بزرگ می‌شوند، در نتیجه معلوم نیست چه بر سر مقادیر این کسر می‌آید بنابراین از معلومات جبری مان کمک می‌گیریم و تابع کسری را به شکل دیگری می‌نویسیم.

ابتدا صورت و مخرج را بر بزرگ‌ترین توانی از x که در مخرج وجود دارد تقسیم می‌کنیم، (چون مقدارهای بزرگ x برای محاسبه این حد به کار می‌روند پس می‌توان فرض کرد $x \neq 0$) در این کسر بزرگ‌ترین توان x در مخرج ۲ است، در نتیجه :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5x + 1}{3x^2 - x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x^2 + 5x + 1}{x^2}}{\frac{3x^2 - x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{1}{x}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2})}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - \frac{1}{x})} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + 5 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} \\ &= \frac{2 + 0 + 0}{3 - 0} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

❖ **مثال:** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$ را حساب کنید.

حل: وقتی x بزرگ است، $\sqrt{x^2 + x}$ و x هر دو بزرگ اند و بسیار دشوار است که بدانیم چه بر سر تفاضل آنها می آید، لذا ابتدا از جبرمقدماتی استفاده می کنیم و تابع را به شکل دیگری می نویسیم. برای این کار صورت و مخرج را (می توانیم فرض کنیم که مخرج تابع ۱ است) در مزدوج صورت یعنی $(\sqrt{x^2 + x} + x) \neq 0$ ضرب می کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)}{1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{1 \times (\sqrt{x^2 + x} + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} \quad (|x| = x, x > 0) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



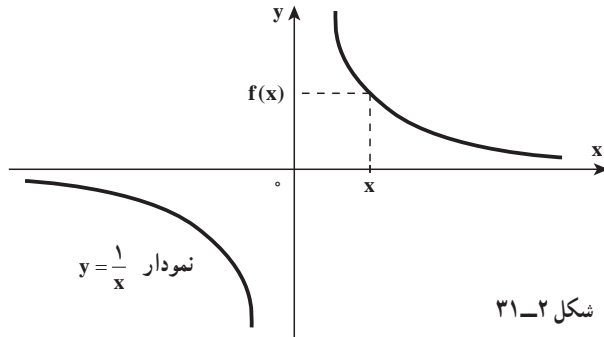
۱- مطلوبست محاسبه:

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + x + 1}{x^3 - x + 2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 1}}{2x - 3}$ پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos \frac{1}{x}$

۲- اگر به ازای هر $x > 1$ ، $\frac{2x^2 + 3x}{x^2} < f(x) < \frac{2x - 1}{x}$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ را پیدا کنید.

مجانب افقی

نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ به شکل ۳۱-۲ است. در نمودار تابع f ، وقتی x با مقادیر مثبت بی کران افزایش و یا با مقادیر منفی بی کران کاهش یابد، $f(x)$ به ترتیب با مقادیر مثبت یا منفی به صفر نزدیک می شود و به عبارت دیگر نمودار تابع در بی نهایت دور مثبت یا منفی به خط افقی $y=0$ بسیار نزدیک می شود و این توصیف، خود ایده ای است برای تعریف مجانب افقی.



تعریف ۵: خط $y=L$ را مجانب افقی نمودار تابع f می نامند به شرطی که

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

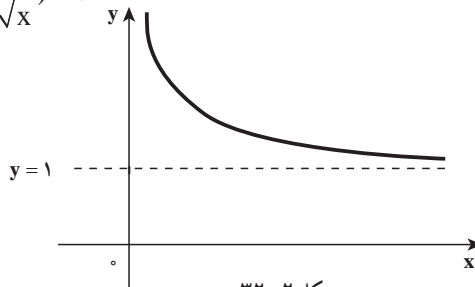
یا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

❖ **مثال:** خط $y=1$ مجانب افقی تابع $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ است که در شکل ۳۲-۲ نشان داده شده

است، زیرا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1$$



پرسش: خط مجانب قائم تابع $y = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ را به دست آورید.

مجانب‌های افقی تابع‌های زیر را به دست آورید.

$$۱- y = \frac{2x+1}{x-2}$$

$$۲- y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$۳- y = \frac{\sin x}{x}$$

۱۸-۲- حد بی‌نهایت در بی‌نهایت و مجانب مایل

در تابع $f(x)=x^2$ وقتی x بزرگ می‌شود، x^2 هم بزرگ می‌شود، مثلاً،

x	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰
x^2	۱۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰

در واقع می‌توانیم با بزرگ گرفتن x به اندازه کافی، x^2 را به هر اندازه دلخواه بزرگ کنیم و

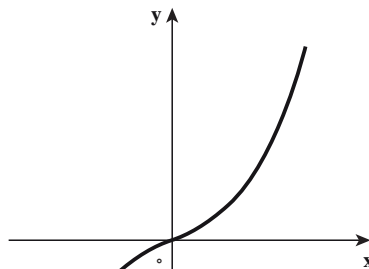
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

می‌نویسیم

و به‌طور مشابه، وقتی x کوچک منفی می‌شود، x^2 هم کوچک منفی می‌شود و می‌نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = -\infty$$

درستی این حکم‌های حدی را می‌توان به‌صورت شهودی از روی نمودار تابع $f(x)=x^2$ حدس زد.



نمودار $f(x)=x^3$

اکنون به‌صورت رسمی به تعریف حد بی‌نهایت در بی‌نهایت می‌پردازیم.

تعریف ۶: می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه f مانند $\{x_n\}$ و اگر $x_n \rightarrow +\infty$ ، دنباله $\{f(x_n)\}$ و اگر $x_n \rightarrow +\infty$ باشد.

تمرین در کلاس

با توجه به تعریف ۶، نمادهای $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ را به طور مشابه تعریف کنید.

مثال: به کمک تعریف ثابت کنید: $\lim_{x \rightarrow -\infty} cx^2 = -\infty$ (c عدد ثابت منفی)

حل: به ازای هر دنباله دلخواه $\{x_n\}$ از دامنه تابع $f(x) = cx^2$ که $x_n \rightarrow -\infty$ است داریم

$$f(x_n) = cx_n^2$$

می‌دانید که دنباله $\{f(x_n)\}$ و اگر $x_n \rightarrow -\infty$ است (c < 0) و دنباله $\{x_n^2\}$ و اگر $x_n \rightarrow +\infty$ است)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} cx^2 = -\infty$$

بنابراین

مثال: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x)$$

حل:

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right) = +\infty$$

تذکر مهم: همواره نمی‌توان از قاعده‌های حدگیری برای حدهای نامتناهی استفاده کرد. زیرا $+\infty$ و یا $-\infty$ عدد نیستند.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty - \infty$$

مثلاً نوشتن اینکه

غلط است ($+\infty - \infty$) را نمی‌توان تعریف کرد) با این وجود، می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x^2 - 1) = +\infty$$

زیرا x و x^2-1 هر دو به دلخواه بزرگ می‌شوند در نتیجه حاصل ضرب آنها نیز بزرگ می‌شود و با نوشتن اینکه:

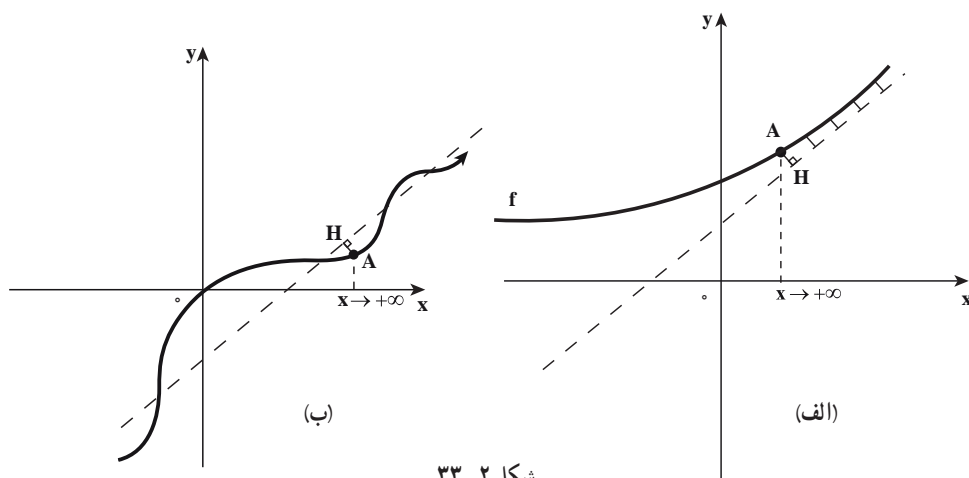
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+1)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)} = \frac{-\infty}{-\infty}$$

غلط است ($\frac{\infty}{\infty}$ را نمی‌توان تعریف کرد) و برای محاسبه این حد می‌نویسیم (صورت و مخرج

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{2}{1}$$

کسر بر $x < 0$ تقسیم شده است)

مجانب مایل: خط L به معادله $y=mx+b$ ($m \neq 0$) و تابع $y=f(x)$ را در نظر می‌گیریم. چنانچه فاصله نقطه متغیر $A(x, f(x))$ تا خط مستقیم L وقتی $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ به صفر نزدیک شود (قسمت‌های الف و ب در شکل ۲-۳۲ را ببینید) آنگاه خط L مجانب مایل نمودار f نامیده می‌شود.



شکل ۲-۳۳

❖ **تبصره:** به بیان نادقیق اگر نمودار تابع f در دور دست‌ها ($+\infty$ یا $-\infty$) به خط نامتناهی L به دلخواه نزدیک شود، خط L یک مجانب f خواهد بود.

تعریف: خط $y=mx+b$, $m \neq 0$ مجانب مایل نمودار تابع f است، هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \quad (\text{الف})$$

❖ **مثال:** مجانب مایل تابع $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 + x - 1}$ را (در صورت وجود) به دست آورید.

🚀 **حل:** چون درجه صورت یعنی ۳ بزرگ تر از درجه مخرج کسر است ابتدا عبارت صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم.

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 + 1 \\ \underline{+ x^3 + x^2 - x} \\ -4x^2 + x + 1 \\ \underline{+ 4x^2 + 4x - 4} \\ 5x - 3 \end{array}$$

در نتیجه $f(x) = x - 4 + \frac{5x - 3}{x^2 + x - 1}$

چون $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 3}{x^2 + x - 1} = 0$ (چرا؟) پس $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 4)] = 0$ (همین نتیجه برای حالت $x \rightarrow -\infty$ نیز درست است)

بنابراین خط $y = x - 4$ مجانب مایل تابع f می باشد.

پرسش: با توجه به راه حل مثال بالا، آیا می توان نتیجه گرفت یک تابع کسری گویا با چه شرایطی مجانب مایل دارد؟ و سپس راه حلی کوتاه برای محاسبه مجانب مایل تابع کسری گویا بیان کنید.

مسئله: فرض کنید خط $y = mx + b$ مجانب مایل تابع $y = f(x)$ است. مقادیر m و b را حساب کنید.

۱- فاصله نقطه متغیر $A(x, f(x))$ تا خط $y - mx - b = 0$ را به دست آورید.

۲- اگر $h(x)$ فاصله نقطه $A(x, f(x))$ تا خط $y - mx - b = 0$ باشد. مقادیر m و b

را چنان تعیین کنید که $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ یا $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$

پس از انجام فعالیت بالا نتیجه می گیریم که اگر خط $y = mx + b$ مجانب مایل تابع

$y = f(x)$ باشد آنگاه: $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ یا $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$ یا $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx]$

۱- فاصله نقطه $M(x_1, y_1)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با $d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

❖ **مثال:** معادله مجانب مایل تابع $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 3}$ را وقتی $x \rightarrow +\infty$ به دست آورید.

 **حل:** بنابر دستورالعمل‌های بالا داریم

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} \right) = 3$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + \sqrt{x^2 + 3} - 3x)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} + 3 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 + 3} + x} = 0$$

بنابراین خط $y = 3x$ مجانب مایل تابع است.

 **تمرین در کلاس**

در مثال بالا معادله مجانب مایل را وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، به دست آورید.

مسائل مجانب‌ها:

الف) معادله مجانب‌های مایل و افقی تابع‌های زیر را به دست آورید.

$$1- y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$2- y = x - \sqrt{x^2 + 2x}$$

$$3- y = \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 3}$$

$$4- y = x + \sqrt{4x^2 + x + 1}$$

ب) اندازه زاویه بین دو خط مجانب مایل تابع $y = \sqrt{x^2 + 4x}$ را حساب کنید.

۱- حدهای زیر را به دست آورید.

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow \pi^+} \cot x \quad (\text{ب}) & \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x] - 2}{x - 2} \quad (\text{ب}) & \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2} \quad (\text{الف}) \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-1)^{[x]+1}}{x^2 - 4} \quad (\text{ج}) & \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x - 2}{x^2 - 2x - 8} \quad (\text{ث}) & \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi^-}{2}} \tan x \quad (\text{ت}) \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \quad (\text{ح}) & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \frac{\tan x}{\cot x} \quad (\text{ج}) \end{array}$$

۲- در نظریه نسبت جرم ذره ای با سرعت V برابر است با $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ که در آن m_0 جرم سکون ذره است و c سرعت نور وقتی که $V \rightarrow c^-$ چه اتفاقی می افتد؟

۳- حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x - 1}{2x^2 - 1} \quad (\text{ب}) & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x - 3} \quad (\text{الف}) & \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x}) \quad (\text{ت}) & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{x^2 + 3x - 1} \quad (\text{پ}) & \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 3} \right] \quad (\text{ج}) & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 - 3x}) \quad (\text{ث}) & \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{8x^3 + 2x^2 - 2x}) \quad (\text{ح}) & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \tan^{-1} x}{2 - x} \quad (\text{ج}) & \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) \quad (\text{د}) & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 3}} \quad (\text{خ}) & \end{array}$$

۴- حدود زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}} \quad (\text{ب}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 1}{x^2 + x - 1} \quad (\text{الف})$$

۵- ثابت کنید که اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و g در یک همسایگی محذوف a کراندار باشد آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \left(\frac{1}{x} + [x] \right) \text{ و سپس } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty \text{ را پیدا کنید.}$$