

## مشتق و کاربرد آن

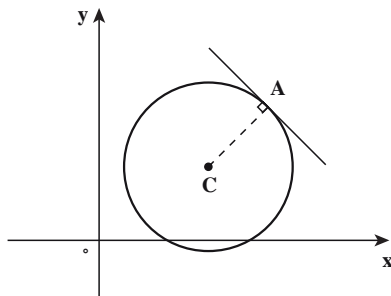
### ۱-۳- آهنگ تغییر و خط مماس

در این فصل به مطالعه حساب دیفرانسیل که درباره تغییر یک کمیت به کمیتی دیگر است می‌پردازیم. مفهوم اصلی حساب دیفرانسیل، مشتق است که تعمیم سرعت و شیب خط مماس است که سال گذشته در حسابان آموزش داده شده است.

می‌دانید مسأله پیدا کردن خط مماس بر منحنی و یافتن سرعت یک متحرک هردو منجر به یافتن یک نوع حد می‌شوند که این حد خاص را مشتق می‌نامند و خواهیم دید که می‌توان آن را در هر شاخه‌ای از علم و مهندسی به آهنگ تغییر تعبیر کرد.

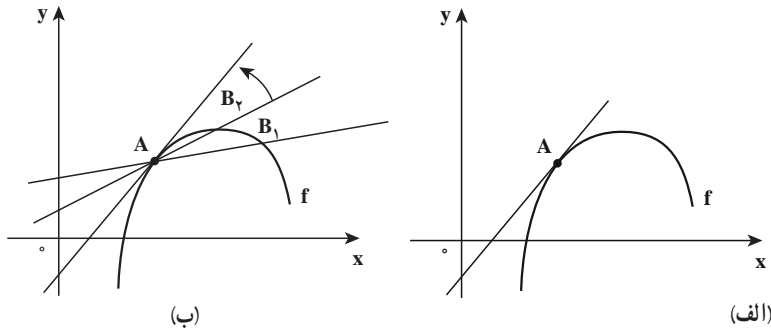
مسأله خط مماس: وقتی می‌گوییم یک خط بر یک منحنی در یک نقطه مماس است به چه معنی است؟

در دایره می‌توان خط مماس در نقطه  $A$  را خط عمود بر خط شعاع در نقطه  $A$  بیان کرد (شکل ۱-۳).



شکل ۱-۳

ولی مسأله برای یک منحنی کلی مشکل تر است مثلاً، در شکل ۲-۳ قسمت (الف) خط مماس چگونه تعریف می شود؟



شکل ۲-۳

و اما مسأله یافتن خط مماس در نقطه A به مسأله یافتن شیب خط مماس در A منجر می شود. این شیب را می توان با شیب خطی که از نقطه A و نقطه دیگری که از منحنی مثلاً  $B_1$  می گذرد تقریب زد (قسمت ب شکل ۲-۳) یک چنین خط را خط قاطع می نامیم.

هرگاه  $A(a, f(a))$  نقطه تماس و  $B_1(a+\Delta x, f(a+\Delta x))$  نقطه دیگری از نمودار f باشد، شیب خط قاطع که از دو نقطه A و  $B_1$  می گذرد عبارت است از:

$$m_{AB_1} = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

طرف راست این تساوی را خارج قسمت تفاضلی می نامیم.  $\Delta x$  را تغییر x و صورت کسر

$\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)$  را تغییر y می نامیم.

زیبایی این روند در آن است که با انتخاب دنباله ای از نقاط که به نقطه تماس نزدیک می شوند

(قسمت ب شکل ۲-۳)، می توان تقریبات دقیق تری به شیب خط مماس به دست آورد.

**تعریف خط مماس:** اگر f بر بازه بازی شامل a تعریف شده و حد زیر

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = m$$

موجود باشد، آنگاه خطی که از نقطه  $(a, f(a))$  گذشته و به شیب m می باشد، خط مماس بر

نمودار f در نقطه  $(a, f(a))$  نامیده می شود.

اغلب شیب خط مماس بر نمودار f در نقطه  $(a, f(a))$  را شیب نمودار f در  $x=a$  می گوئیم.

❖ **مثال:** معادله خط مماس بر نمودار  $f(x) = x^2$  را در نقطه  $A(1,1)$  پیدا کنید.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{\Delta x}$$

**حل:** 

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}(\Delta x + 2)}{\cancel{\Delta x}} = 2$$

شیب خط مماس

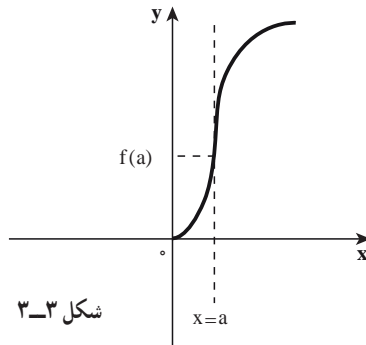
بنابراین معادله خط مماس می‌شود:

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{یا} \quad y = 2x - 1$$

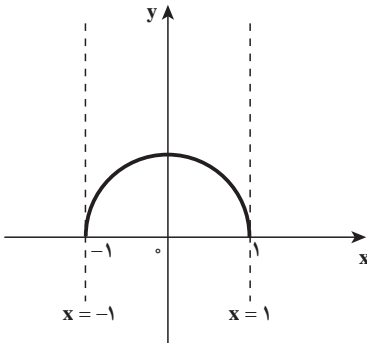
یادداشت: تعریف ما از خط مماس بر یک نمودار خط مماس قائم را در بر نمی‌گیرد. برای خطوط مماس قائم تعریف زیر را می‌آوریم.

اگر  $f$  در  $a$  پیوسته بوده و  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \right| = +\infty$ ، آنگاه خط  $x=a$  که از  $(a, f(a))$

می‌گذرد، خط مماس قائم بر نمودار  $f$  است (شکل ۳-۳ را ببینید).



شکل ۳-۳



شکل ۳-۴

یادداشت: اگر دامنه  $f$  بازه بسته  $[c, d]$  باشد،

آنگاه تعریف خط مماس قائم را با توجه به پیوستگی  $f$  در نقاط انتهایی  $c$  و  $d$  طوری تعمیم می‌دهیم که نقاط انتهایی را در بر گیرد.

به عنوان مثال، خطوط  $x = \pm 1$ ، خطوط مماس

قائم بر منحنی  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  هستند. (شکل ۳-۴)

نشان دهید خط  $x=1$ ، مماس قائم بر منحنی  $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$  می‌باشد.

### ۲-۳- مشتق تابع

همان‌طور که گفته شد و نیز در حسابان دیده‌اید، برای پیدا کردن شیب خط مماس و سرعت یک متحرک به یک نوع از حد برمی‌خوریم. در حقیقت، حدهایی به صورت

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

هنگام محاسبه آهنگ تغییر در بسیاری از شاخه‌های علوم و مهندسی نظیر سرعت واکنش در شیمی یا سرعت ذره در فیزیک و یا هزینه نهایی در اقتصاد پیش می‌آیند. چون به این نوع از حد، بسیار زیاد برمی‌خوریم، به این نوع حد نام خاصی داده‌اند و برای آن از نمادگذاری خاصی استفاده می‌کنند.

**تعریف:** فرض کنید  $a$  نقطه درونی از دامنه  $f$  است. در این صورت مشتق تابع  $f$  در  $x=a$  که آن را به  $f'(a)$  نشان می‌دهیم، برابر است با

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد.

اگر فرض کنیم  $x = a + \Delta x$  آنگاه  $\Delta x = x - a$

بدیهی است که وقتی  $\Delta x$  به صفر میل کند،  $x$  هم به  $a$  میل می‌کند.

بنابراین

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

فرایند یافتن مشتق یک تابع مشتق‌گیری نام دارد. گوییم تابع  $f$  در  $x$  مشتق‌پذیر است. اگر مشتق آن در  $x$  موجود باشد و بر بازه  $I$  مشتق‌پذیر است اگر در هر نقطه از این بازه مشتق‌پذیر باشد.

❖ **مثال:** مشتق تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = x^2 + x + 1$  را به وسیله فرایند حد در  $(x, f(x))$  بیابید.  
**حل:** توجه داشته باشیم که  $x$  ضمن حدگیری (وقتی  $\Delta x \rightarrow 0$ ) ثابت گرفته می‌شود. بنابراین

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + x + \Delta x + 1 - (x^2 + x + 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(\Delta x + 2x + 1)}{\Delta x} \\ &= 2x + 1 \end{aligned}$$

توضیح اینکه به ازای هر  $x \in D_f$ ،  $f'(x)$  شیب خط مماس بر منحنی  $f$  است.



از  $f'(x)$  را برای تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \sqrt{x}$  به وسیله فرایند حد به ازای  $x > 0$  بیابید و با استفاده از نتیجه به دست آمده، شیب خط مماس در نقطه  $(1, 1)$  را به دست آورید.

### مسائل

- ۱- معادلات خط‌های مماس و قائم بر منحنی  $y = \sqrt{x}$  را در نقطه  $(1, 1)$  بیابید. (بامحاسبه شیب مماس به کمک تعریف)
  - ۲- نقاطی از منحنی  $y = \frac{1}{x}$  را که در آنها خط مماس بر خط  $y = 2x$  عمود است بیابید. (بامحاسبه شیب مماس به کمک تعریف)
  - ۳- آیا تابع‌های زیر در نقطه مشخص شده خط مماس دارند؟  
اگر پاسخ مثبت است معادله خط مماس را بیابید.
- الف)  $f(x) = \sin x$  در  $x = 0$       ب)  $g(x) = |\sin x|$  در  $x = 0$

۴- آیا تابع‌های زیر در نقطه مشخص شده خط مماس دارند؟  
اگر پاسخ مثبت است معادله خط مماس را بیابید.

الف)  $f(x) = |x|$  در  $x=1$       ب)  $g(x) = |x^2 - 1|$  در  $x=1$

پ)  $e(x) = \sqrt[3]{x}$  در  $x=0$       ت)  $t(x) = x \operatorname{sgn}(x)$  در  $x=0$

راهنمایی:  $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$  (تابع علامت)

### ۳-۳- آهنگ تغییر

در این بخش چند مثال برای نمایش و تعبیر تغییرات و آهنگ تغییر پدیده‌های دنیای پیرامون می‌آوریم.

طبیعی است که مانند سرعت یک شیء متحرک، تغییر را وابسته به زمان تلقی کنیم، ولی لزومی ندارد که خود را تا این اندازه مقید سازیم. تغییر نسبت به متغیرهایی غیر از زمان را نیز می‌توان به همان ترتیب مورد بررسی قرار داد. مثلاً یک پزشک می‌خواهد بداند چه تغییرات کوچکی در مقدار دارو می‌تواند واکنش بدن را به آن دارو برانگیزد، و یا اقتصاددانی می‌خواهد نحوه تغییر سرمایه‌گذاری خارجی در کشور معینی را نسبت به نوسانات موجود در نرخ‌های بهره رایج در آن کشور مورد مطالعه قرار دهد. همه این مسائل را می‌توان برحسب آهنگ تغییر یک تابع نسبت به یک متغیر فرمول‌بندی کرد.

❖ **مثال:** فرض کنیم  $s=f(t)=t^2-5t^2+6t$  معادله حرکت (رابطه بین مکان و زمان) ذره‌ای باشد که روی خطی راست حرکت می‌کند و مکان ذره در زمان‌های  $t=1$  و  $t=1+\Delta t$  مشخص است در این صورت اندازه جابجایی این ذره برابر است با

$$\Delta S = f(1+\Delta t) - f(1) = \Delta t(\Delta t^2 - 2\Delta t - 1)$$

و در بازه زمانی  $[1, 1+\Delta t]$ ، از تقسیم اندازه جابجایی بر مدت جابجایی  $(\Delta t)$

**آهنگ متوسط** تغییر مکان ذره به دست می‌آید، که آن را عموماً سرعت متوسط ذره در فاصله

زمانی  $t=1$  تا  $t=1+\Delta t$  نیز می‌نامند، یعنی

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \Delta t^2 - 2\Delta t - 1$$

هرچه  $\Delta t$  کوچکتر شود این سرعت متوسط به سرعت ذره در حول و حوش لحظه  $t=1$  نزدیکتر می‌گردد که در این حالت آن را سرعت لحظه‌ای می‌نامند، در واقع سرعت لحظه‌ای وقتی است که  $\Delta t$  به صفر میل کند، یعنی

$$\text{حد} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \text{سرعت لحظه‌ای در لحظه } t=1$$

$$\Delta t \rightarrow 0$$

بدین ترتیب سرعت لحظه‌ای را **آهنگ لحظه‌ای** تغییر مکان ذره در لحظه  $t=1$  نیز می‌نامند و با استفاده از نمادگذاری ریاضی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

براساس مثال بالا و این نمادگذاری می‌توان ایده اصلی این بخش را معرفی کرد.

### تعریف:

الف) **آهنگ متوسط** تغییر تابع  $f$  نسبت به  $x$  روی بازه  $[a, a+\Delta x]$  عبارت است از

$$\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

ب) **آهنگ آنی** تغییر تابع  $f$  نسبت به  $x$  در  $x=a$  عبارت است از

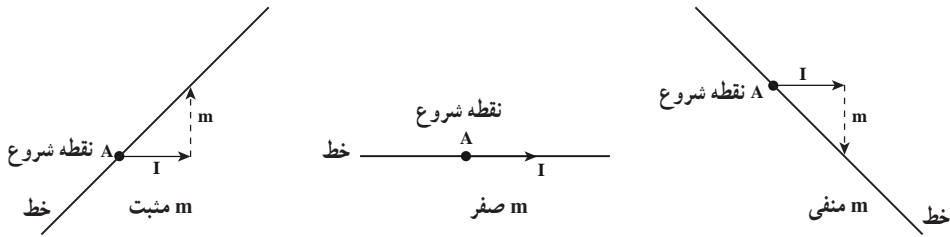
$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

مشروط بر اینکه این حد وجود داشته باشد.

برحسب قرارداد وقتی متغیر  $x$  بیانگر زمان باشد به جای کلمه «آنی» واژه «لحظه‌ای» را به کار می‌بریم و اغلب با حذف واژه «آنی» و یا «لحظه‌ای» وقتی می‌گوییم **آهنگ تغییر**، مقصودمان آهنگ آنی یا لحظه‌ای تغییر است.

ویژگی ضریب زاویه یا شیب یک خط: اگر از نقطه‌ای بر خطی با ضریب زاویه  $m$ ، یک واحد به سمت راست حرکت کنیم، در این صورت باید  $m$  واحد در جهت محور  $y$  حرکت نماییم تا به

روی خط باز گردیم. (شکل ۳-۵)



شکل ۳-۵

بنابراین می‌توانیم شیب خط را این‌طور تعریف کنیم:  
افزایش یا کاهش عرض نقطه شروع (A) را وقتی که طول آن را یک واحد در جهت مثبت محور x افزایش دهیم، شیب خط می‌نامیم.

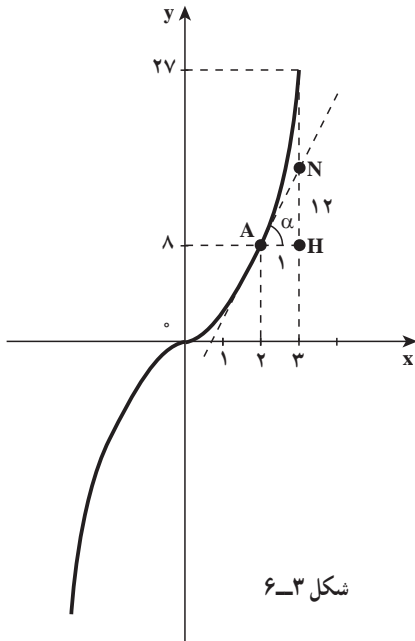
رابطه بین آهنگ تغییر و مسأله مماس: می‌دانیم آهنگ تغییر تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = x^2$  وقتی که  $x=2$  است برابر است با

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(2) = 4$$

در شکل ۳-۶ به تعبیر هندسی عدد ۴

می‌پردازیم.



شکل ۳-۶

$f'(2) = 4$  یعنی در نقطه  $x=2$ ، وقتی

یک واحد به  $x=2$  اضافه شود تقریباً ۴ واحد

به  $y$  اضافه می‌شود و اما  $f(2) = 8$  بنابراین

مقدار تابع ( $y$ ) در نقطه  $x=3$  تقریباً  $8 + 4 = 12$

است. ولی مقدار واقعی  $y$  در نقطه ۳ می‌شود

$$f(3) = 27$$



❖ **مثال:** اگر هوا را به داخل بالونی بدمیم، آهنگ تغییر حجم بالون، وقتی که شعاع آن ۱۵ سانتی متر

است، چقدر است؟

**حل:** اگر  $V$  حجم بالون کروی شکل و  $r$  شعاع بالون باشد، آهنگ تغییر حجم نسبت به شعاع

عبارت است از

$$\frac{dV}{dr} = \frac{d}{dr} \left( \frac{4}{3} \pi r^3 \right) = 4\pi r^2$$

وقتی  $r$  برابر ۱۵ سانتی متر است، حجم بالون با آهنگ  $900\pi = 4\pi \times 225$  سانتی متر مکعب بر

سانتی متر تغییر می کند و به عبارت دیگر، وقتی که شعاع بالون ۱۵ سانتی متر است، اگر یک واحد (یک

سانتی متر) دیگر به شعاع اضافه شود تقریباً  $900\pi$  سانتی متر مکعب به حجم بالون افزوده می گردد.



حجم آب یک منبع آب،  $t$  دقیقه پس از شروع تخلیه، برحسب لیتر برابر است با:

$$V(t) = 250(16-t)^2$$

آهنگ لحظه‌ای تخلیه آب بعد از ۴ دقیقه، چقدر است و آن را توصیف کنید.

**آهنگ تغییر در علم اقتصاد:** فرض کنید  $C(x)$  کل مبلغی باشد که کارخانه‌ای برای تولید  $x$

واحد از یک نوع کالا، هزینه می کند. تابع  $C$  را تابع هزینه می نامند. اقتصاددانان مقدار حد  $\frac{\Delta C}{\Delta x}$  را

وقتی که  $\Delta x \rightarrow 0$ ، یعنی آهنگ لحظه‌ای تغییر هزینه نسبت به تعداد کالای تولید شده را هزینه نهایی

تولید می نامند.

چون معمولاً مقدارهای  $x$  عددهایی صحیح اند، ممکن است بی معنی باشد که  $\Delta x$  را به  $0$  میل

دهیم. بنابراین هزینه نهایی تولید را سهواً به عنوان هزینه اضافی لازم برای تولید یک واحد دیگر از

محصول تعریف می کنند. یعنی  $\Delta C = C(x+1) - C(x)$

برای بهتر فهمیدن این مطلب، رابطه بین آهنگ تغییر و مسأله مماس را دوباره بخوانید.

❖ **مثال:** هزینه ساخت  $x$  یخچال  $c(x)$  تومان است که در آن

$$C(x) = 800000 + 40000x - 500x^2$$

می باشد. هزینه تولید ۱۰۱ امین یخچال چقدر است و معنی آن را توضیح دهید.

$$C'(x) = 4000000 - 1000x \quad \text{هزینه نهایی}$$

$$C'(100) = 4000000 - 100000 = 3000000$$

**حل:** 

یعنی وقتی کارخانه ۱۰۰ یخچال تولید کرده و بخواهد ۱۰۱ امین یخچال را تولید کند تقریباً ۳۰۰۰۰۰ تومان هزینه می کند.

## تمرین در کلاس

یک کارخانه پارچه بافی، طاقه هایی از پارچه ای به عرض ثابت تولید می کند. هزینه تولید  $x$  متر از این پارچه  $C(x)$  تومان است.  
الف) معنی  $C'(x)$  چیست؟  
ب) معنی  $C'(1000) = 900$  چیست؟

## مسائل

- ۱- حجم یک مکعب به طول ضلع  $x$  عبارت است از  $V = x^3$ ، آهنگ تغییر حجم مکعب نسبت به  $x$  را وقتی  $x = 4$  است بیابید.
- ۲- آهنگ تغییر مساحت دایره را نسبت به قطر آن بیابید.
- ۳- فرض کنید آنفلوآنزا در یک منطقه شیوع پیدا کرده است و مسئولین اداره بهداشتی تعداد افراد مبتلا به بیماری در زمان  $t$  (برحسب روز از زمان شیوع) را برابر  $P(t) = 60t^2 - t^3$  تخمین می زنند، با شرط اینکه  $0 \leq t \leq 40$ .  
الف) آهنگ تغییر بخش آنفلوآنزا را در  $t = 30$  پیدا کنید.  
ب) چه زمانی آهنگ بخش آنفلوآنزا ۹۰۰ نفر در روز است؟
- ۴- فرض کنید تابع هزینه تولید  $x$  واحد از محصولی  $C(x) = 0.05x^3 - 3x$  و سطح تولید روزانه ۱۰۰ واحد است  
الف) هزینه افزایش تولید از ۱۰۰ به ۱۰۱ واحد در روز چقدر است؟  
ب) هزینه نهایی در این سطح تولید چقدر است؟
- ۵- فرض کنید که درآمد حاصل از تولید  $x$  واحد از محصولی  $R(x) = 0.1x^2 - 3x$ ، درآمد نهایی «آهنگ آبی تغییر درآمد» را در سطح تولید ۱۸۰۰ واحد حساب کنید.

### ۴-۳- تابع مشتق

می‌دانیم که مشتق تابع  $f$  در نقطه‌ای ثابت مانند  $x_0$  (در صورت وجود):

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (1)$$

در این بخش دیدگاه خود را تغییر می‌دهیم و می‌گذاریم  $x_0$  تغییر کند. اگر در رابطه (۱)،  $x_0$  را

با متغیر  $x$  جایگزین کنیم، داریم

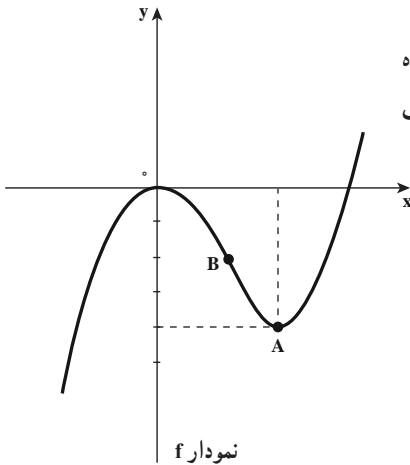
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2)$$

به ازای هر  $x$  ای که این حد وجود داشته باشد،  $x$  را به  $f'(x)$  نظیر می‌کنیم. به این ترتیب  $f'$  می‌توانیم تابع جدیدی در نظر بگیریم و آن را تابع مشتق  $f$  (مشتق  $f$ ) بنامیم و می‌دانیم تعبیر هندسی مقدار  $f'$  به ازای  $x$ ، یعنی  $f'(x)$ ، شیب خط مماس بر نمودار  $f$  در نقطه  $(x, f(x))$  است.

نامیدن تابع  $f'$  به مشتق  $f$  به خاطر این است که به کمک حدگیری در رابطه (۲)، از  $f$  «مشتق»

شده است.

دامنه  $f'$  مجموعه  $\{x : f' \text{ وجود دارد}\}$  است که زیرمجموعه‌ای از دامنه  $f$  است.



شکل ۷-۳

❖ **مثال:** نمودار تابع  $f$  در شکل ۷-۳ نشان داده

شده است. با استفاده از آن نمودار تابع  $f'$  را به تقریب

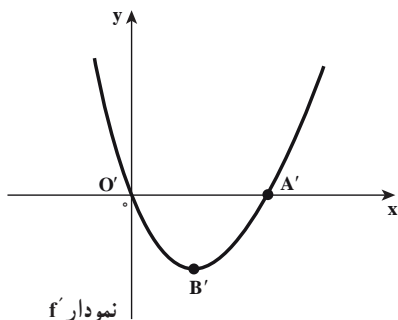
نشان دهید.

🚀 **حل:** شیب خط‌های مماس بر منحنی  $f$  قبل از نقطه  $O$  مثبت است پس در این جاها  $f'(x)$

مثبت است و خط مماس در نقطه  $O$  افقی است پس به ازای طول این نقطه مقدار  $f'$  صفر است و بین

$O$  و  $A$  شیب خط‌های مماس منفی است پس در این جاها  $f'(x)$  منفی است و نمودار  $f'$  زیر محور  $x$

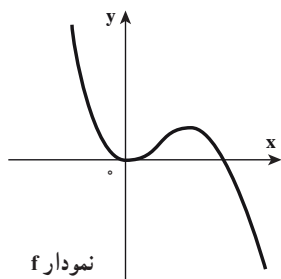
است و خط مماس در نقطه A افقی است پس به ازای طول این نقطه مقدار تابع  $f'$  صفر است در نتیجه نمودار  $f'$  محور x را در نقاط  $O'$  و  $A'$



شکل ۸-۳

( $O'$  با  $O$  و  $A'$  با  $A$  هم طول اند) قطع می کند.

و بعد از نقطه A شیب خط های مماس مثبت است پس در این جاها  $f'(x)$  مثبت است و نمودار  $f'$  بالای محور x است. بنابراین نمودار  $f'$  را می توان به صورت شکل ۸-۳ نشان داد دقت کنید، نقطه  $B'$  روی نمودار  $f'$  نقطه ای است هم طول با نقطه B از نمودار f که بعداً در مورد آن توضیح خواهیم داد.



نمودار f

شکل ۹-۳

نمودار تابع f به شکل ۹-۳ است، از روی

آن نمودار  $f'$  را حدس زده و آن را رسم کنید.

❖ **مثال:** اگر  $f(x) = x^3$ ، ضابطه  $y = f'(x)$  را پیدا کنید.

**حل:** از رابطه (۲) استفاده می کنیم، با این فرض که h متغیر است و ضمن محاسبه حد مورد نظر x را موقتاً ثابت در نظر می گیریم.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3hx^2 + h^3 - \cancel{x^3}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(3x^2 + 3hx + h^2)}{\cancel{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3hx + h^2) = 3x^2 \end{aligned}$$

بنابراین  $f'(x) = 3x^2$

یادداشت: برای مشتق تابع  $y=f(x)$  علاوه بر نماد  $f'(x)$ ، نماد  $\frac{dy}{dx}$  یا  $y'_x$  به کار می‌رود.



اگر  $f(x) = \sqrt{x}$ ، ضابطه تابع  $f'$  را به دست آورده و به کمک نمودار  $f$ ، نمودار  $f'$  را رسم کنید.

نقاط مشتق‌ناپذیر: وقتی  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  و یا  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  وجود

داشته باشد می‌گوییم  $f$  در  $x_0$  مشتق‌پذیر است و یا  $f$  در  $x_0$  مشتق دارد. در نقطه‌ای که  $f$  مشتق‌پذیر نیست، می‌گوییم  $f$  مشتق‌ناپذیر است و یا مشتق  $f$  وجود ندارد.

❖ مثال: مشتق‌پذیری تابع  $f(x) = |x^2 - 1|$  را در نقطه  $x=1$  بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1}$$

حل:

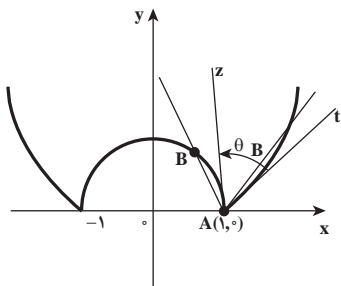
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$$

و اما

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} = -2$$

ملاحظه می‌کنید که این حد وجود ندارد بنابراین تابع  $f(x) = |x^2 - 1|$  در  $x=1$  مشتق‌پذیر نیست (و یا به عبارت دیگر در  $(1, 0)$  خط مماس وجود ندارد) نمودار تابع  $f$  در شکل ۳-۱ نشان داده شده است.

در این شکل مشاهده می‌شود وقتی  $B$  از سمت چپ به  $A$  میل کند قاطع  $AB$  به مماس چپ



شکل ۳-۱

$AZ$  میل می‌کند که شیب آن  $-2$  است، در این صورت

می‌گوییم تابع  $f$  دارای مشتق چپ است.

و اگر  $B$  از سمت راست به  $A$  میل کند قاطع

$AB$  به مماس راست  $At$  میل می‌کند که شیب آن  $2$

است، در این صورت می‌گوییم تابع  $f$  دارای مشتق

راست است.

در این وضعیت نقطه  $A$ ، یک نقطه «گوشه» برای تابع  $f$  است.  
بنابراین اگر  $A(x_0, f(x_0))$  یک نقطه گوشه برای تابع  $f$  باشد و مشتق چپ یعنی

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

و مشتق راست یعنی

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

وجود داشته ولی با هم نابرابر باشند، آنگاه یک مماس چپ در نقطه  $A$  به شیب  $m_1 = f'_-(x_0)$  وجود دارد که معادله آن می‌شود

$$y = m_1(x - x_0) + f(x_0)$$

و همین‌طور، در نقطه  $A$  یک مماس راست به شیب  $m_2 = f'_+(x_0)$  وجود دارد

$$y = m_2(x - x_0) + f(x_0)$$

به معادله :

و اگر زاویه بین دو مماس چپ و راست در نقطه گوشه را به  $\theta$  نشان دهیم، دو حالت برای محاسبه  $\theta$  در نظر می‌گیریم :

$$(1) \text{ اگر } m_1 \cdot m_2 = -1, \text{ آنگاه } \theta = 90^\circ$$

$$(2) \text{ اگر } m_1 \cdot m_2 \neq -1 \text{ آنگاه } \theta \text{ از رابطه زیر به دست می‌آید.}$$

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

که در مثال بالا اندازه زاویه بین دو مماس چپ و راست ( $\theta$ ) از رابطه زیر به دست می‌آید. (چرا؟)

$$\tan \theta = \left| \frac{-2 - 2}{1 - 4} \right| = \frac{4}{3}$$



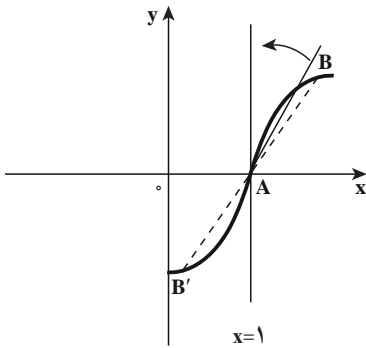
الف) با محاسبه مشتق چپ و مشتق راست تابع  $f(x) = |x|$  در نقطه  $x = 0$ ، نشان دهید مبدأ مختصات یک نقطه گوشه برای  $f$  است و سپس اندازه زاویه ایجاد شده در نقطه گوشه را به دست آورید.

ب) نشان دهید مبدأ مختصات یک گوشه برای تابع  $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ ، می‌باشد و اندازه زاویه ایجاد شده در گوشه را به دست آورید.

❖ **مثال:** مشتق‌پذیری تابع  $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$  را در  $x=1$  بررسی نمایید.

🚀 **حل:** تابع  $f$  در  $x=1$  پیوسته است (چرا؟) و

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = +\infty$$



بنابراین تابع در  $x=1$  مشتق‌پذیر نیست و اما طبق

تعریف مماس قائم، تابع در نقطه  $(1, 0)$  مماس قائم دارد به

معادله  $x=1$  (شکل روبه‌رو را ببینید)

با مشاهده شکل روبه‌رو قاطع  $AB$  به خط مماس به

معادله  $x=1$  میل می‌کند.

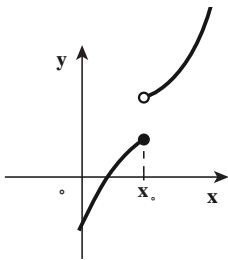
بنابراین تابع  $f$  که در نقطه  $(x_0, f(x_0))$  مماس قائم

داشته باشد، در آن نقطه مشتق‌ناپذیر است.

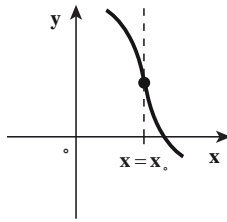
در سوّمین حالت، اگر تابع در نقطه  $x_0$  پیوسته

نباشد، آن وقت در  $a$  مشتق‌پذیر نیست. بنابراین در هر نقطه ناپیوستگی  $f$  مشتق‌پذیر نیست.

سه حالتی را که برای مشتق‌ناپذیری ذکر کردیم در شکل ۱۱-۳ دیده می‌شوند.

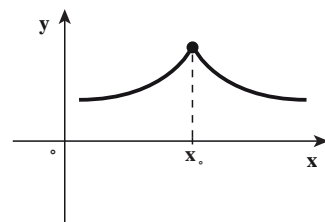


(پ) ناپیوستگی داشتن



(ب) مماس قائم داشتن

شکل ۱۱-۳



(الف) گوشه داشتن



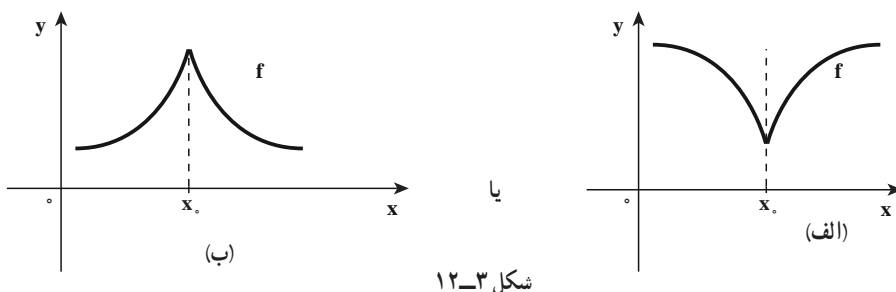
تابع  $f(x) = \sqrt{x^2}$  را در نظر بگیرید.

(الف) ثابت کنید  $f'(0)$  وجود ندارد.

(ب) به ازای هر  $x \neq 0$ ،  $f'(x)$  را پیدا کنید (ضابطه تابع مشتق).

(پ) نشان دهید که تابع  $f$  در  $(0, 0)$  مماس قائم دارد و نمودار  $f$  را رسم کنید.

یادداشت: اگر تابع  $f$  در نقطه  $(x_0, f(x_0))$  دارای مماس قائم با نموداری به شکل ۱۲-۳ باشد در آن صورت،  $(x_0, f(x_0))$  نقطه بازگشتی تابع نامیده می‌شود.



$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$$

به عنوان نمونه در تمرین کلاسی بالا معلوم می‌شود که مبدأ مختصات نقطه بازگشتی تابع  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$  است.

### ۳-۵- نتایج اولیه مشتق‌پذیری

اگر بنا باشد مشتق هر تابعی را با استفاده از تعریف مشتق حساب کنیم کار محاسبه مشتق، دشوار و عذاب‌آور است. خوشبختانه راه آسانتری نیز هست و آن هم به دست آوردن تعدادی قاعده مشتق‌گیری، این قواعد ما را قادر می‌سازند تا مشتق ترکیب‌های پیچیده توابع را به آسانی از مشتق

توابع مقدماتی که این توابع را ساخته‌اند محاسبه کنیم، مثلاً قادر خواهیم بود مشتق تابع  $y = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$  را به دست آوریم. با این فرض که مشتق توابع مقدماتی  $y = x^2$  و  $y = \sqrt{x}$  را بدانیم. در نتیجه می‌توانیم رده بزرگی از توابع مشتق را معرفی کنیم.

سپس به ذکر پاره‌ای از خواص ابتدایی مشتق و کاربردهای آن می‌پردازیم. و اما برای اثبات بعضی از قواعد مشتق‌گیری، لازم است قضیه‌ای بدیهی ولی بسیار مهم زیر را بدانیم و صرف نظر از جزئیات، این قضیه بیان می‌کند که اگر نمودار یک تابع در نقطه‌ای هموار (مشتق‌پذیر) باشد، نمی‌تواند در آن نقطه ناپیوسته باشد.



❖ **قضیه ۱:** اگر تابع  $f$  در  $a$  مشتق پذیر باشد، آن وقت در  $a$  پیوسته است.

قضیه (۱) نشان می‌دهد که مشتق پذیری در یک نقطه، پیوستگی در آن نقطه را نتیجه می‌دهد، اما، عکس این قضیه درست نیست. یعنی ممکن است یک تابع در یک نقطه پیوسته باشد ولی در آن نقطه مشتق پذیر نباشد. مانند تابع  $f(x)=|x|$  که در  $x=0$  پیوسته است ولی در این نقطه مشتق پذیر نیست  
 $(f'_+(0)=1 \text{ و } f'_-(0)=-1)$

❖ **برهان قضیه (۱):** چون  $f$  در  $a$  مشتق پذیر است داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

برای اثبات پیوستگی  $f$  در  $a$  باید نشان دهیم که

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$$

با استفاده از قضایا و قواعد حد، داریم

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times h \right) \\ &= f(a) + f'(a) \times 0 = f(a) \end{aligned}$$

❖ **مثال:** مقادیر  $a$  و  $b$  را به قسمی تعیین کنید که تابع  $f(x) = \begin{cases} (x+1)^3, & x \leq 0 \\ ax + a + b, & x > 0 \end{cases}$  در  $x=0$  مشتق پذیر باشد.

📏 **حل:** برای مشتق پذیر بودن تابع  $f$  در  $x=0$ ، ابتدا لازم است  $f$  در  $x=0$  پیوسته باشد. یعنی تساوی‌های زیر برقرار باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$1 = a + b = 1$$

$$a + b = 1 \quad \text{و یا}$$

و با اجرا گذاشتن شرط مشتق پذیری، باید  $f'_+(0) = f'_-(0)$  و اما

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x+1)^3 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} ((x+1)^2 + (x+1) + 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax + a + b - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{x} = a$$

بنابراین با انتخاب  $a=3$  و  $b=-2$  تابع  $f$  در  $x=0$  مشتق پذیر است.

تابع  $f$  در نقطه  $a$  پیوسته است، ثابت کنید تابع  $g(x) = (x-a)f(x)$  در نقطه  $a$  مشتق پذیر است.

همان طور که گفته شد، محاسبه مشتق توابع به کمک تعریف در بعضی از موارد بسیار دشوار است، لذا قضیه زیر که محاسبه مشتق توابع را آسان می‌سازد، ارائه می‌شود.

❖ **قضیه ۲:** هرگاه توابع  $f$  و  $g$  در نقطه  $a$  مشتق پذیر باشند و  $c$  یک عدد ثابت باشد.

آن وقت توابع  $f+g$  و  $f \cdot g$  و  $cf$  و  $\frac{f}{g}$  ( $g(a) \neq 0$ ) همگی در نقطه  $a$  مشتق پذیر هستند و

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a) \quad \text{(الف)}$$

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a) \cdot f(a) \quad \text{(ب)}$$

$$(cf)'(a) = cf'(a) \quad \text{(پ)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g^2(a)} \quad \text{(ت)}$$

در قسمت (الف) قاعده مجموع را می‌توان به مجموع هر تعدادی از تابع‌ها تعمیم داد

❖ **مثال:** معادله حرکت ذره‌ای  $s = t^3 - 4t^2 + 2t + 3$  است. ( $s$  بر حسب سانتی‌متر و  $t$  بر حسب ثانیه است)

شتاب این ذره را به عنوان تابعی از زمان پیدا کنید. پس از گذشت ۳ ثانیه شتاب چقدر است.

$$V(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 8t + 2 \quad \text{سرعت} \quad \text{حل: } \img alt="pen icon" data-bbox="815 588 867 622"/>$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 6t - 8$$

پس از گذشت ۳ ثانیه شتاب برابر است با:

$$a(3) = 10 \text{ cm/s}^2$$

معادله خط مماس بر منحنی  $y = \frac{x}{x^2 + 6}$  را در نقطه  $(2, 0/2)$  پیدا کنید.

❖ **برهان قضیه (۲):** اثبات قسمت‌های (الف)، (ب)، (پ) قضیه (۲) در کتاب حسابان آموزش

داده شده است. بنابراین به اثبات قسمت (ت) می‌پردازیم.

فرض کنیم  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  و  $a$  نقطه‌ای باشد که در آن  $f$  و  $g$  مشتق پذیر باشند و  $g(a) \neq 0$  خارج قسمت تفاضلی مربوط به  $h$  در نقطه  $a$  عبارت است از

$$\frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \frac{1}{x - a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)} \right) = \frac{1}{x - a} \times \frac{f(x)g(a) - g(x)f(a)}{g(x)g(a)}$$

اکنون با افزودن و کاستن  $f(a)g(a)$  در صورت کسر، داریم

$$\begin{aligned} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} &= \frac{g(a)f(x) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{(x - a)g(x)g(a)} \\ &= \frac{g(a)(f(x) - f(a)) - f(a)(g(x) - g(a))}{(x - a)g(x)g(a)} \\ &= \frac{1}{g(a)g(x)} \left[ g(a) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right] \end{aligned}$$

چون تابع  $g$  در  $a$  مشتق پذیر است، پس بنا بر قضیه (۱) در  $a$  پیوسته و در نتیجه  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$

از این رو با محاسبه حد کسر  $\frac{h(x) - h(a)}{x - a}$  و با استفاده از قوانین حد مجموع، حد حاصل ضرب و حد خارج قسمت نتیجه می‌شود

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \frac{1}{g^2(a)} \left[ g(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right]$$

و یا

$$h'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$



اگر تابع‌های  $f$  و  $g$  در نقطه  $a$  مشتق پذیر باشند، در این صورت ثابت کنید تابع  $f \cdot g$  در نقطه  $a$  مشتق پذیر است و

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

### ۳-۶- مشتق توابع مثلثاتی

همان طور که می دانید تابع های مثلثاتی سینوس و کسینوس در دامنه تعریفشان پیوسته اند. اکنون مشتق پذیری این توابع را روی دامنه تعریفشان ثابت می کنیم و دستورهایی برای مشتق آنها بدست می آوریم و بنابر قضیه (۲) کافی است مشتق پذیری توابع سینوس و کسینوس ثابت شود زیرا دو تابع دیگر  $\tan$  و  $\cot$  به صورت خارج قسمت این دو تابع تعریف می شوند.

یادآور می شویم که در عبارات  $\sin x$ ،  $\cos x$ ،  $\tan x$ ،  $\cot x$ ،  $x$  برحسب رادیان است. همچنین

$$\text{در فصل حد، نشان دادیم که } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cosh h}{h} = 0 \text{ و } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh h}{h} = 1 \text{ (برحسب رادیان)}$$

$$\text{اکنون ثابت می کنیم } \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \text{ (برحسب رادیان است)}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

❖ برهان:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \sinh \cos x - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\sinh}{h} \right) \cos x - \left( \frac{1 - \cosh}{h} \right) \sin x \right]$$

چون در محاسبه حد وقتی  $h$  به صفر میل کند،  $x$  را ثابت می گیریم،

بنابراین

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin x = \sin x, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \cos x = \cos x$$

در نتیجه

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h} - \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cosh}{h}$$

$$= \cos x \times 1 - (\sin x)(0) = \cos x$$



$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

به طور مشابه ثابت کنید:

❖ **مثال:** اگر  $f(x) = \tan x$ ، مطلوب است تعیین  $\frac{dy}{dx}$

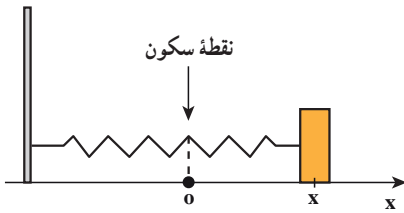
🚀 **حل:** چون  $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$  و  $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$  داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{\cos^2 x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

و یا  $\frac{dy}{dx} = 1 + \tan^2 x$  (به‌ازای هر  $x$  عضو دامنه  $f$ )

**تمرین در کلاس**

برای تابع  $y = \cot x$ ،  $\frac{dy}{dx}$  را تعیین کنید.



شکل ۳-۱۳

❖ **مثال:** جسمی که به انتهای فنری متصل

است به‌طور افقی روی سطحی صاف نوسان می‌کند

(شکل ۳-۱۳) معادله حرکت این جسم  $x(t) = 6 \sin t$

است که در آن  $t$  بر حسب ثانیه است و  $x$  بر حسب سانتی‌متر

الف) سرعت و شتاب این جسم را در لحظه  $t$

بدست آورید.

ب) موقعیت، سرعت و شتاب جسم مورد نظر را در زمان  $t = \frac{2\pi}{3}$  و جهت حرکت در این زمان

چگونه است؟

🚀 **حل:** الف)

$$\text{سرعت } V(t) = \frac{dx}{dt} = 6 \cos t$$

$$\text{شتاب } a(t) = \frac{dv}{dt} = -6 \sin t$$

$$x\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 6 \sin \frac{2\pi}{3} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm} \quad \text{ب)}$$

در موقعیت  $3\sqrt{3}$  سانتی‌متری از نقطه سکون است.

$$\text{سرعت } V\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 6\left(-\frac{1}{3}\right) = -3 \text{ cm/s}$$

چون سرعت منفی است، حرکت جسم به سمت چپ است.

$$a\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -3\sqrt{3} \text{ cm/s}^2$$

قاعده توانی: یکی از فرمول‌های قابل توجه حسابان، فرمول

$$\frac{d}{dx}(x^r) = rx^{r-1}$$

است، که به قاعده توانی معروف است. وقتی با استفاده از تعریف مشتق مثال‌هایی مانند:

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x, \quad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2, \quad \frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

را حل می‌کنید، فرمول بالا تداعی می‌شود، آنچه جالب است این است که قاعده توانی برای هر عدد حقیقی  $r$  برقرار است. مثلاً، ثابت می‌کنیم

$$\frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-3}, \quad \frac{d}{dx}(x^{\frac{2}{3}}) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

و یا در بحث نماهای گنگ ثابت می‌شود:

$$\frac{d}{dx}(x^\pi) = \pi x^{\pi-1}$$

این قاعده طبعاً محدودیت‌هایی دارد، مثلاً در:

$$\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

دامنه عبارت است از مجموعه  $x$ هایی که مثبت‌اند.

با توجه به حالت‌های نمای  $r$ ، قاعده توانی در چند مرحله ثابت می‌شود.

حالت اول:  $r=n$ ، که در آن  $n$  عدد صحیح نامنفی است.

$$\frac{d}{dx}(x^1) = 1x^0 \quad \text{و} \quad \frac{d}{dx}(x^0) = 0x^{-1} \quad \text{می‌گوید} \quad \text{قاعده توانی می‌گوید } n=1 \text{ و } n=0, (n=0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{یا ساده‌تر } \frac{d}{dx}(1) = 0 \quad \text{و} \quad \frac{d}{dx}(x) = 1 \quad \text{وقتی } x \neq 0.$$

از این رو، در دامنه پذیرفته شده درست است. البته، هیچکس عملاً از آن در این حالات استفاده

نمی‌کند، زیرا فرمول‌های  $\frac{d}{dx}(1) = 0$  و  $\frac{d}{dx}(x) = 1$  بدون توسل به قاعده توانی (و در IR) برقرارند.

از این رو، فرض کنیم  $n \geq 2$  و  $f(x) = x^n$  در این صورت

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n) - x^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1})}{\cancel{h}}
 \end{aligned}$$

با حذف عامل  $h \neq 0$ ، همه جملات باقی مانده جز جمله اول دارای عامل  $h$  هستند در نتیجه وقتی

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \quad h \rightarrow 0 \text{ خواهیم داشت:}$$

حالت دوم:  $r = n$ ، که در آن  $n$  عدد صحیح منفی است. با انتخاب  $m = -n > 0$  و  $x \neq 0$ ،

$$f(x) = x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

لذا بنابر قضیه ۲ (مشتق خارج قسمت) و  $\frac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1}$  داریم:

$$f'(x) = \frac{0 \times x^m - mx^{m-1} \times 1}{(x^m)^2} = -mx^{m-1-2m}$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

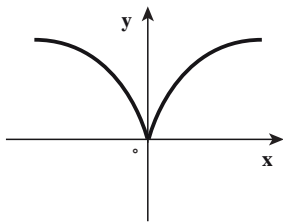
حالت سوم: وقتی  $r$  عدد گویای  $\frac{p}{q}$  باشد و  $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$  ثابت می شود (در بخش بعدی)

به ازای هر  $x$  از دامنه تابع مشتق

$$f'(x) = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$$

حالت چهارم: وقتی  $r$  عدد گنگی باشد، مثل  $\frac{d}{dx}(x^\pi) = \pi x^{\pi-1}$ . فعلاً نمی توانیم به اثبات

آن بپردازیم زیرا هنوز علامتی مانند  $x^\pi$  و یا  $x^{\sqrt{\pi}}$  را تعریف نکرده ایم.



شکل ۳-۱۴

❖ **مثال:** فرض کنید  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

(الف) دامنه تابع مشتق  $f$  را تعیین کنید.

(ب) ضابطه تابع مشتق  $f$  را به دست آورید.

✍ **حل:** (الف) قبلاً نمودار  $f$  به شکل ۳-۱۴ رسم شده و در مبدأ

نقطه بازگشتی دارد، پس تابع  $f$  در  $x = 0$  مشتق ناپذیر است.

$$D_{f'} = \mathbb{R} - \{0\}$$

بنابراین

$$\frac{d}{dx}(x^{\frac{2}{3}}) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

پ) به ازای هر  $x$  عضو دامنه تابع  $f'$  داریم.

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

بنابراین

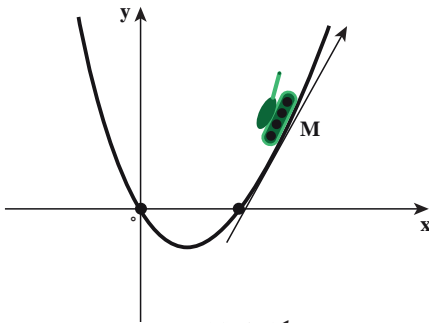


با فرض اینکه  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ، حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(1+h) - f^3(1)}{h}$  را به دست آورید.

❖ **مثال:** یک تانک دشمن در صفحه مختصات خودی روی منحنی  $f(x) = x^2 - x$  حرکت می کند

(شکل ۳-۱۵) و یک بسیجی با (آر - بی - جی - ۷) در نقطه  $(4, 8)$  منتظر شکار تانک است و زمان مطلوب وقتی است که مسیر گلوله خط راستی مماس بر منحنی  $f$  باشد، نقطه مطلوب مسیر تانک را تعیین کنید.

**حل:** فرض کنید  $M(a, a^2 - a)$  نقطه مطلوب باشد. در این صورت، ابتدا معادله خط مماس بر منحنی را در نقطه  $M$  به دست می آوریم.



شکل ۳-۱۵

$$f'(x) = 2x - 1$$

$$y - (a^2 - a) = f'(a)(x - a)$$

$$y - a^2 + a = (2a - 1)(x - a)$$

خط مماس از نقطه  $(4, 8)$  می گذرد بنابراین

$$8 - a^2 + a = (2a - 1)(4 - a)$$

$$a^2 - 8a + 12 = 0$$

$$a = 2 \text{ یا } a = 6$$

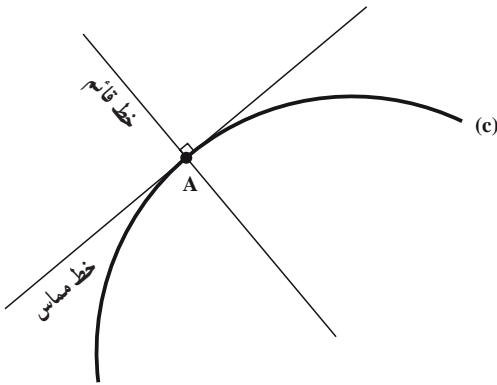
پس مسیر موشک در نقطه  $(2, 2)$  بر مسیر تانک مماس است.

یادداشت: مثال فوق نشان می دهد که از نقطه  $A(4, 8)$  خارج منحنی  $y = x^2 - x$  می توان

دو خط مماس به شیب های  $m_1 = f'(2) = 3$  و  $m_2 = f'(6) = 11$  بر منحنی  $f$  رسم کرد، با نقاط تماس

$$M(2, 2) \text{ و } B(6, 30)$$





شکل ۳-۱۶

یادداشت: به کمک قاعده‌های مشتق‌گیری و بدون مراجعه به تعریف مشتق علاوه بر خط‌های مماس، می‌توانیم خط‌های قائم را هم پیدا کنیم. خط قائم بر منحنی (C) در نقطه A خطی است که از A می‌گذرد و بر خط مماس بر منحنی در A عمود است (در فیزیک بخش نور، به زاویه میان پرتوهای نور و خط عمود بر عدسی نیاز است) (شکل ۳-۱۶ را ببینید).



۱- معادله خط‌های مماس و قائم بر منحنی  $y = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$  در نقطه  $(\frac{1}{3}, 0)$  را پیدا کنید.

۲- از نقطه  $A(0, -1)$  دو خط مماس بر منحنی  $f(x) = x^2 + x$  رسم شده است معادلات این دو خط مماس را به دست آورید.

۳- خط  $y = 2x + 1$  در نقطه  $x_0 = 1$  بر منحنی پیوسته  $y = f(x)$  مماس است مقدار

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) + 3f(x) - 18}{x - 1}$$

را حساب کنید.

### ۳-۷- مشتق‌های مرتبه‌های بالاتر

برای به دست آوردن تابع شتاب، از تابع موقعیت (مکان)، باید از تابع موقعیت دوبار مشتق گرفت.

$$S(t) \text{ (تابع موقعیت)}$$

$$V(t) = S'(t) \text{ (تابع سرعت)}$$

$$a(t) = V'(t) = S''(t) \text{ (تابع شتاب)}$$

$a(t)$  را مشتق دوم  $s(t)$  نامیده و آن را با  $s''(t)$  نشان می‌دهیم مشتق دوم، مثالی است از مشتق مرتبه‌های بالاتر بنابراین اگر تابع مشتق یعنی  $f'$  مشتق‌پذیر باشد، تابع مشتق  $f'$  را با  $f''$  نشان داده و آن را مشتق مرتبه دوم (و یا مشتق دوم)  $f$  می‌نامیم.