

نقاط بحرانی تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  را در دامنه‌اش بیابید.

❖ ۲- قضیه نقطه بحرانی: فرض کنیم تابع  $f$  روی بازه  $I$  تعریف شده و  $c$  نقطه درونی بازه  $I$  است، اگر  $f(c)$  مقدار اکسترمم تابع، آنگاه باید  $c$  نقطه بحرانی باشد یعنی  $c$  یکی از موارد زیر باشد:

الف)  $c$  یک نقطه درونی بازه  $I$ ، به طوری که  $f'(c) = 0$

ب)  $c$  یک نقطه درونی بازه  $I$  و  $f'(c)$  موجود نباشد.

❖ برهان: ابتدا فرض کنیم  $f(c)$  مقدار ماکسیمم  $f$  روی بازه  $I$  و  $c$  نقطه درونی بازه  $I$  و  $f'(c)$  موجود باشد.

ثابت می‌کنیم  $f'(c) = 0$  است

چون  $f(c)$  مقدار ماکسیمم  $f$  است. پس برای هر  $x$  در  $I$ ،  $f(x) \leq f(c)$  یا  $f(x) - f(c) \leq 0$

اگر  $x < c$  یا  $x - c < 0$  آن وقت

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

و اگر  $x > c$  آن وقت

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

و اما  $f'(c)$  موجود است بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'_-(c) = f'(c) \geq 0 \quad (1)$$

(چرا؟)

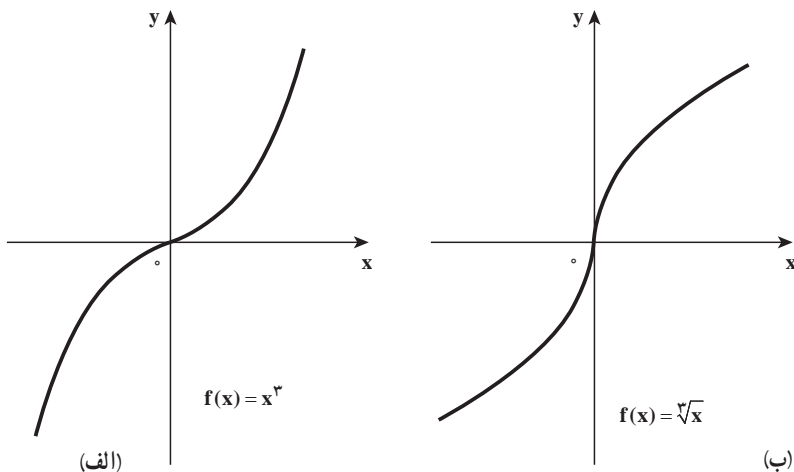
$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'_+(c) = f'(c) \leq 0 \quad (2)$$

(چرا؟)

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود  $f'(c) = 0$

در حالتی که  $f(c)$  مقدار مینیمم تابع است، قضیه را ثابت کنید.

البته باید توجه داشت که هر نقطه بحرانی لزوماً نقطه اکسترم نیست.  
 به عنوان نمونه برای تابع  $f$  با ضابطه  $f(x)=x^3$  داریم  $f'(0)=0$  پس  $x=0$  نقطه بحرانی تابع  $f$  است  
 و این تابع نه مقدار ماکسیمم و نه مقدار مینیمم دارد (شکل ۳-۳ قسمت الف)  
 همچنین نقطه  $x=0$  نقطه بحرانی تابع  $f$  با ضابطه  $f(x)=\sqrt[3]{x}$  است زیرا  $f'(0)$  موجود نیست.  
 (شکل ۳-۳ قسمت ب)



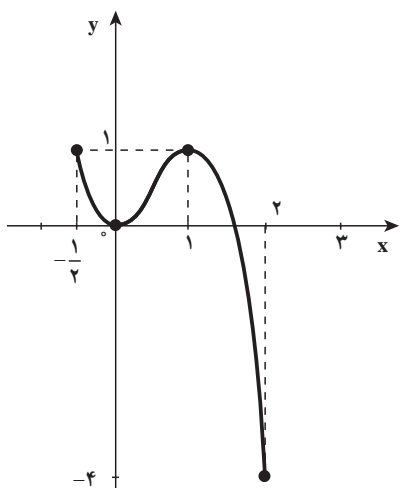
شکل ۳-۳

❖ **مسئله:** چگونه می‌توانیم مقادیر اکسترم تابع را پیدا کنیم.  
 با استفاده از قضایای ۱ و ۲ می‌توانیم مقادیر اکسترم تابع  $f$  را که روی بازه بسته  $I$  پیوسته است  
 به شرح زیر پیدا کنیم.

**گام اول:** پیدا کردن نقاط بحرانی  $f$  روی بازه بسته  $I$   
**گام دوم:** محاسبه مقدار  $f$  در هر یک از نقاط بحرانی و نقاط انتهایی در بازه بسته  $I$  و از بین  
 مقادیر به دست آمده، بزرگ‌ترین آنها مقدار ماکسیمم و کوچک‌ترین آنها مقدار مینیمم تابع  $f$  روی بازه  
 بسته  $I$  می‌باشد.

❖ **مثال:** مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع  $f$  با ضابطه  $f(x)=-2x^3+3x^2$  را روی بازه  $[-\frac{1}{3}, 2]$   
 بیابید.

**حل:** در مثال (۲) نقاط بحرانی این تابع را که عبارت‌اند از  $0$  و  $1$  به دست آوریم، و به ازای  
 این اعداد داریم:



شکل ۳-۳۱

$$f(0)=0 \text{ و } f(1)=1$$

مقادیر تابع در نقاط انتهایی عبارتند از:

$$f(-\frac{1}{4})=1 \text{ و } f(2)=-4$$

بنابراین مقدار ماکسیمم تابع برابر ۱ می‌باشد که

در نقاط  $x = -\frac{1}{4}$  و  $x = 1$  رخ می‌دهد و -۴ مقدار

مینیمم تابع است که در نقطه ۲ اتفاق می‌افتد.

در شکل ۳-۳۱ نمودار تابع  $f$  روی بازه

$[-\frac{1}{4}, 2]$  رسم شده است.

## تمرین در کلاس

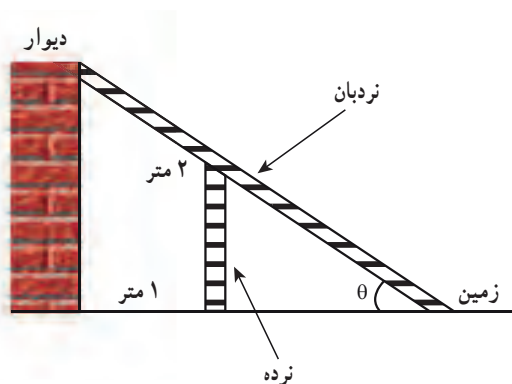
در مثال ۱، مقدار  $x$  را چنان حساب کنید که مقدار حجم (V) بیشترین مقدار ممکن را

داشته باشد.

قابل ذکر است که یکی از مهم‌ترین کاربردهای مشتق در مسائل «بهینه‌سازی» است که در آنها

کمیتی باید ماکسیمم یا مینیمم گردد (مانند مثال ۱ همراه با فعالیت)، مثال‌هایی از این نوع در زندگی

روزمره فراوان است.



شکل ۳-۳۱

❖ **مثال:** در شکل ۳-۳۱ یک نرده

به ارتفاع ۲ متر و به‌طور قائم بر زمین، به

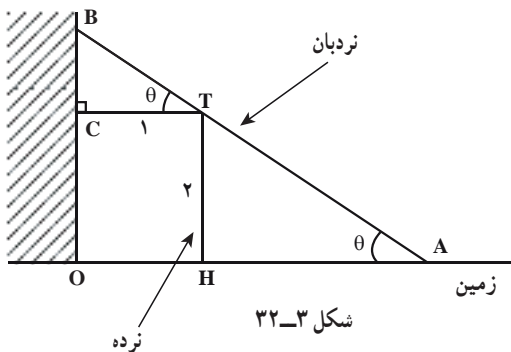
فاصله ۱ متر از یک دیوار قائم قرار دارد.

طول کوتاه‌ترین نردبانی را تعیین کنید که از

روی نرده به ارتفاع ۲ متر گذشته و یک سر

آن روی زمین و خارج نرده و سر دیگر آن

مماس بر دیوار قائم باشد.



شکل ۳-۳۲

**حل:** اندازه زاویه AB (نردبان) با زمین را  $\theta$  فرض می‌کنیم و طول نردبان ( $L$ ) را به صورت تابعی از  $\theta$  به دست می‌آوریم (شکل ۳-۳۲).  
 $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

$$AB = BT + TA$$

در مثلث‌های قائم‌الزاویه  $\triangle TCB$  و  $\triangle AHT$  داریم:

$$\sin \theta = \frac{2}{AT} \quad \text{و} \quad \cos \theta = \frac{1}{BT}$$

بنابراین

$$L = L(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} + \frac{2}{\sin \theta}$$

$$L'(\theta) = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\sin^3 \theta - 2 \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}$$

$$L'(\theta) = 0 \Rightarrow \sin^3 \theta - 2 \cos^3 \theta = 0 \Rightarrow \tan^3 \theta = 2 \quad \text{یا} \quad \tan \theta = \sqrt[3]{2}$$

و یا  $\theta_0 = \tan^{-1}(\sqrt[3]{2})$  که نقطه بحرانی تابع  $L$  است.

|              |           |                          |                 |
|--------------|-----------|--------------------------|-----------------|
| $\theta$     | $0$       | $\tan^{-1}(\sqrt[3]{2})$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $L'(\theta)$ |           | -                        | +               |
| $L(\theta)$  | $+\infty$ | $L(\theta_0)$<br>Min     | $+\infty$       |

در نتیجه به ازای  $\theta_0 = \tan^{-1}(\sqrt[3]{2})$  مقدار مینیمم  $L(\theta)$  به دست می‌آید. و اگر بخواهیم طول کوتاه‌ترین نردبان را حساب کنیم، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = 1 + \sqrt[3]{4}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{4}}}$$

$$\sin \theta = \tan \theta \cdot \cos \theta = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{4}}}$$

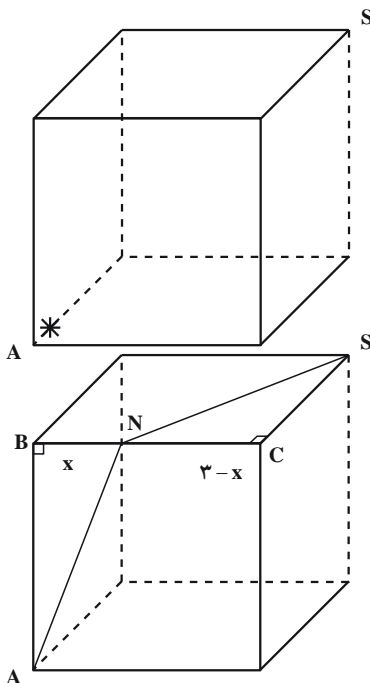
در نتیجه، مقدار مینیمم مطلق  $L(\theta)$  روی بازه  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$  عبارت است از

$$L(\theta_0) = \sqrt{1+\sqrt[3]{4}} + \frac{2\sqrt{1+\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2}} \approx 4/16$$

بنابراین طول کوتاه‌ترین نردبانی که بتوان یک سر آن را از بالای نرده به دیوار تکیه داد و سر دیگرش بر زمین و خارج نرده باشد، تقریباً  $4/16$  متر است.



شان دهید که در بین همه مثلث‌های متساوی‌الساقینی که محیط یکسانی دارند، مثلث متساوی‌الاضلاع دارای بیشترین مساحت است.



شکل ۳-۳۳

❖ **مثال:** (مسئله کوتاه‌ترین مسیر عنکبوت) مطابق شکل ۳-۳۳ یک عنکبوت در گوشه S از سقف اتاق مکعب شکل که هر ضلع آن ۳ متر است قرار دارد و می‌خواهد یک سوسک که در گوشه مقابل او (A) روی کف اتاق خوابیده است را شکار کند. عنکبوت مجبور است روی سقف اتاق حرکت کند (نمی‌تواند پرواز کند) و سپس روی دیوارها یا کف اتاق راه برود، او می‌خواهد کوتاه‌ترین مسیر برای شکار سوسک را پیدا کند. او را راهنمایی کنید. فراموش نکنید که معمولاً موجودات به‌طور غریزی کوتاه‌ترین مسیر را انتخاب می‌کنند.

🚀 **حل:** به کمک مشتق و تعیین کمترین مسیر فرض کنیم مسیر عنکبوت از S به N و از N به A باشد

$$d = SN + NA$$

اگر  $BN=x$  فرض کنیم، آنگاه  $NC=3-x$  بنابراین

$$d(x) = \sqrt{(3-x)^2 + 9} + \sqrt{x^2 + 9}$$
 تابع طول مسیر

$$d'(x) = \frac{-2(3-x)}{2\sqrt{9+(3-x)^2}} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} = \frac{-(3-x)\sqrt{9+x^2} + x\sqrt{9+(3-x)^2}}{\sqrt{9+(3-x)^2} \times \sqrt{x^2+9}}$$

$$d'(x) = 0 \Rightarrow x\sqrt{9+(3-x)^2} = (3-x)\sqrt{9+x^2}$$

طرفین معادله را به توان ۲ رسانده و پس از ساده کردن و حذف جمله‌های مساوی از طرفین

معادله داریم:

$$2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \quad (\text{بازه } (0, 3))$$

|       |                 |               |                 |
|-------|-----------------|---------------|-----------------|
| x     | 0               | $\frac{3}{2}$ | 3               |
| d'(x) | -               | 0             | +               |
| d(x)  | $3(1+\sqrt{2})$ | $3\sqrt{5}$   | $3(1+\sqrt{2})$ |

بنابراین کوتاه‌ترین مسیر وقتی است که N وسط ضلع BC باشد. مقدار مینیمم طول مسیر  $3\sqrt{5}$

است.

قابل ذکر است که این مسأله با یک راه حل کوتاه و ساده هندسی حل می‌شود. حل مسأله را از

راه هندسی انجام دهید.

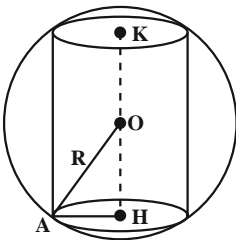
❖ **مثال:** می‌خواهیم در کره‌ای به شعاع R یک استوانه دوار قائم محاط کنیم که بزرگ‌ترین حجم

را داشته باشد، در این صورت شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را بیابید.

**حل:** فرض کنیم استوانه مورد نظر دارای شعاع r و ارتفاع h

می‌باشد و  $AH=r$  و  $KH=h$  و به علت تقارن مرکز کره نقطه O وسط KH

است (شکل ۳-۳۴). بنابراین



شکل ۳-۳۴

$$\triangle OHA: \frac{h^2}{4} + r^2 = R^2$$

و حجم استوانه برابر است با:

$$V = \pi r^2 h = \pi h \left( R^2 - \frac{h^2}{4} \right), \quad 0 \leq h \leq 2R$$

واضح است که اگر  $h=0$  یا  $h=2R$  باشد،  $V=0$ ، بنابراین نقاط بحرانی تابع حجم استوانه را بر حسب متغیر  $h$  در بازه  $(0, 2R)$  پیدا می‌کنیم.

$$V'(h) = \pi(R^2 - \frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{2}) = 0 \Rightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

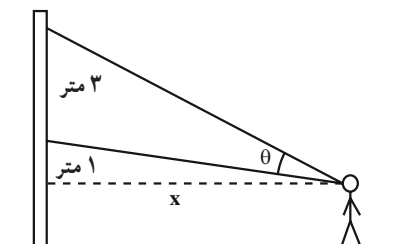
نقطه بحرانی

|         |     |                              |      |
|---------|-----|------------------------------|------|
| $h$     | $0$ | $\frac{2R}{\sqrt{3}}$        | $2R$ |
| $V'(h)$ | $+$ | $0$                          | $-$  |
| $V(h)$  | $0$ | $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ | $0$  |

بنابراین تابع حجم استوانه در بازه  $[0, 2R]$  به ازای  $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$  و  $r = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$  مقدار ماکسیمم حجم آن  $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$  است.

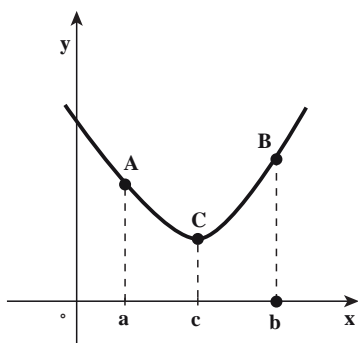
### مسائل بهینه‌سازی

- ۱- مجموع دو عدد مثبت برابر ۹ است. بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای حاصل ضرب آنها را پیدا کنید.
- ۲- حاصل ضرب دو عدد مثبت برابر ۸ است. کمترین مقدار ممکن برای مجموع آنها را پیدا کنید.
- ۳- مساحت بزرگ‌ترین مستطیلی را بیابید که در نیم دایره‌ای به شعاع  $R$  محاط شده است و یک ضلع مستطیل روی قطر نیم دایره قرار دارد.



- ۴- (بهترین دید از یک نقاشی دیواری) شخصی باید در چه فاصله‌ای از یک نقاشی دیواری به ارتفاع ۳ متر بایستد تا بهترین دید را از آن داشته باشد (شکل روبه‌رو)، با این فرض که پایین نقاشی ۱ متر بالاتر از خط دید شخص است.

- ۵- قرار است محوطه‌ای مستطیل شکل برای نگهداری گوسفندها ساخته شود، یک طرف این محوطه دیوار طولی است که از قبل وجود داشته است و سه طرف دیگر آن را باید زرده گذاری کنیم. اگر  $15^\circ$  متر زرده در اختیار داشته باشیم، بیشترین مساحت ممکن برای محوطه مورد نظر چقدر است؟



شکل ۳-۳۵

تابع‌های صعودی اکید و نزولی اکید: با مشاهده نمودار تابع  $f$  در شکل ۳-۳۵ وقتی نقطه‌ای در امتداد منحنی از  $A$  به  $C$  برود مقادیر تابع با افزایش طول کاهش می‌یابند، و وقتی نقطه در امتداد منحنی از  $C$  به  $B$  برود، مقادیر تابع با افزایش طول افزایش می‌یابند در این صورت گوییم  $f$  بر بازه  $[a, c]$  نزولی اکید و بر بازه  $[c, b]$  صعودی اکید است.

ذیلاً تعاریف تابع‌های صعودی اکید و نزولی اکید و تابع ثابت بر یک بازه را بیان می‌کنیم.

### تعریف ۳:

(الف) تابع  $f$  روی بازه  $I$  صعودی اکید است، اگر برای هر دو عدد  $x_1$  و  $x_2$  در  $I$ ,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

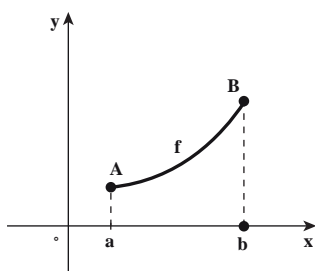
(ب) تابع  $f$  روی بازه  $I$  نزولی اکید است، اگر برای هر دو عدد  $x_1$  و  $x_2$  در  $I$ ,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

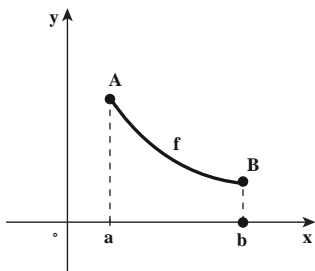
(پ) تابع  $f$  روی بازه  $I$  ثابت است، اگر برای هر دو عدد  $x_1$  و  $x_2$  در  $I$ ,

$$f(x_1) = f(x_2)$$

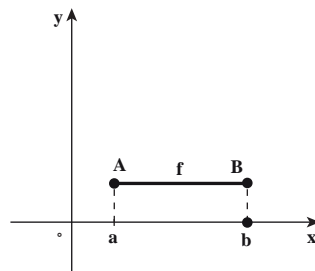
برای یادگیری بهتر تعریف بالا نمودارهای شکل ۳-۳۶ را ببینید.  $I=[a, b]$



$f$  صعودی اکید است



$f$  نزولی اکید است



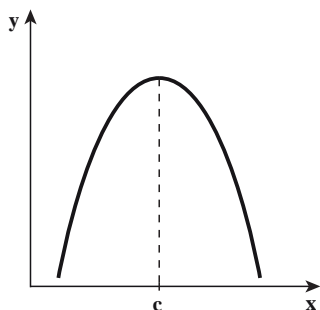
$f$  ثابت است

شکل ۳-۳۶

با توجه به تعریف بالا، تابع  $f$  روی بازه  $I$  اکیداً یکنواست، اگر روی بازه  $I$  یا صعودی اکید و

یا نزولی اکید باشد.





شکل ۳-۳۷

نمودار تابع  $f$  در شکل ۳-۳۷ را در نظر بگیرید.  
 الف) با رسم مماس‌هایی در نقاط مختلف نمودار  $f$  تعیین کنید در چه بازه‌ای شیب مماس‌ها مثبت و در چه بازه‌ای شیب مماس‌ها منفی است.  
 ب) تعیین کنید در چه بازه‌ای مشتق  $f$  مثبت است و در چه بازه‌ای مشتق  $f$  منفی است.

پ) از اینکه  $f'(x)$ ، میزان تغییر مقادیر  $f(x)$  نسبت به  $x$  است، با در نظر گرفتن علامت  $f'(x)$ ، معلوم کنید تابع  $f$  در چه بازه‌ای صعودی اکید است و در چه بازه‌ای نزولی اکید است.

نتایج به دست آمده در فعالیت بالا به ما کمک می‌کند که قضیه زیر را بیان کنیم.

❖ **۳- قضیه ۳:** فرض کنیم تابع  $f$  بر بازه بسته  $[a, b]$  پیوسته و بر بازه باز  $(a, b)$  مشتق پذیر باشد. در

این صورت

الف) اگر به ازای هر  $x$  در  $(a, b)$ ،  $f'(x) > 0$ ، آنگاه تابع  $f$  بر  $[a, b]$  صعودی اکید است.

ب) اگر به ازای هر  $x$  در بازه  $(a, b)$ ،  $f'(x) < 0$ ، آنگاه تابع  $f$ ، بر بازه  $[a, b]$  نزولی اکید است.

پ) اگر به ازای هر  $x$  در بازه  $(a, b)$ ،  $f'(x) = 0$ ، آنگاه تابع  $f$  بر بازه  $[a, b]$  ثابت است.

این قضیه به ما اجازه می‌دهد که بررسی کنیم، یک تابع در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در چه بازه‌هایی نزولی اکید و در چه بازه‌ای ثابت است.

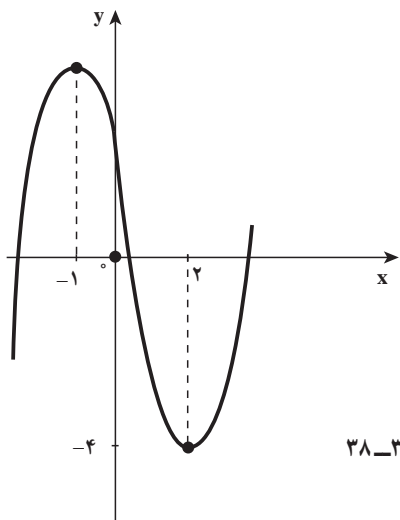
❖ **مثال:** مشخص کنید تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = 2x^2 - 3x^2 - 12x + 7$  در کجاها صعودی اکید و در کجاها نزولی اکید است.

🚀 **حل:** ابتدا مشتق تابع را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

عبارت  $f'(x)$  را تعیین علامت می‌کنیم:

|         |           |      |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $2$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | +    | -   | +         |



شکل ۳-۳۸

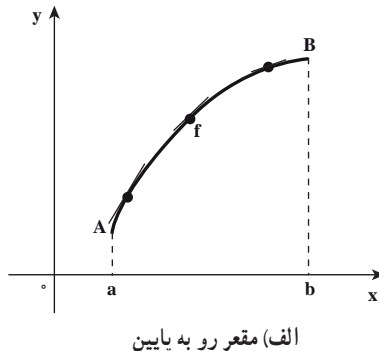
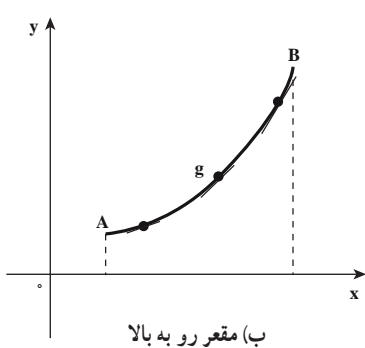
طبق قضیه فوق تابع  $f$  در بازه  $(-1, 2)$  نزولی  
 اکید و در هر یک از بازه‌های  $(-\infty, -1)$  و  $(2, +\infty)$   
 صعودی اکید است و نمودار  $f$  به شکل ۳-۳۸  
 است:  
 در نقاط  $-1$  و  $2$  که مشتق تابع صفر است  
 خط مماس افقی است.



تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$  در چه بازه‌ای صعودی اکید و در چه بازه‌ای نزولی اکید  
 است؟

### ۳-۱۳- مشتق دوم و تقعر نمودار تابع

در شکل ۳-۳۹ نمودار دو تابع صعودی اکید روی بازه  $I$  رسم شده‌اند. هر دوی این نمودارها  
 دو نقطه  $A$  و  $B$  را بهم وصل می‌کنند. اما متفاوت به نظر می‌رسند زیرا نمودار  $f$  پایین خط‌های مماسی است  
 که در نقاط مختلف  $f$  رسم شده‌اند و منحنی  $f$  را روی بازه  $I$  مقعر رو به پایین می‌نامیم. و اما نمودار  $g$  بالای  
 خط‌های مماسی است که در نقاط مختلف  $g$  رسم شده‌اند و منحنی  $g$  را روی بازه  $I$  مقعر رو به بالا می‌نامیم.



شکل ۳-۳۹

### تعریف ۴:

الف) اگر نمودار  $f$  روی بازه  $I$  بالای همه مماس‌هایش باشد آنگاه نمودار  $f$  را **مقعر** رو به بالا می‌نامیم.

ب) اگر نمودار  $f$  روی بازه  $I$  پایین همه مماس‌هایش باشد، آنگاه نمودار  $f$  را **مقعر** رو به پایین می‌نامیم.

اکنون ببینیم مشتق دوم چه کمکی به مشخص کردن تقعر نمودار در یک بازه می‌کند.

با مشاهده شکل (۳-۳۹) به موارد زیر پاسخ دهید.

الف) در قسمت الف) (شکل ۳-۳۹) با حرکت از چپ به راست شیب مماس‌ها کم می‌شوند یا زیاد و در نتیجه تابع  $f'$  (تابع مشتق) تابعی است نزولی اکید یا صعودی اکید.

ب) در قسمت ب) (شکل ۳-۳۹) با حرکت از چپ به راست شیب مماس‌ها کم می‌شوند یا زیاد و در نتیجه تابع  $g'$  تابعی است نزولی اکید یا صعودی اکید.

پ) علامت  $f''(x)$  و  $g''(x)$  را در بازه  $(a,b)$  تعیین کنید. نتایج به دست آمده در فعالیت بالا به ما کمک می‌کند که قضیه زیر را بیان کنیم.

### ❖ ۴- قضیه تقعر: فرض کنیم $f''(x)$ به ازای هر $x$ از بازه $I$ موجود باشد

الف) اگر به ازای هر  $x$  از  $I$ ،  $f''(x) > 0$  آنگاه نمودار  $f$  روی بازه  $I$  تقعر رو به بالا دارد.

ب) اگر به ازای هر  $x$  از  $I$ ،  $f''(x) < 0$  آنگاه نمودار  $f$  روی بازه  $I$  تقعر رو به پایین دارد.

### ❖ مثال: تابع $f$ با ضابطه $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ روی چه بازه‌هایی صعودی اکید یا

نزولی اکید است و روی چه بازه‌هایی نمودار  $f$  تقعر رو به بالا دارد یا مقعر رو به پایین است.

**حل:** 

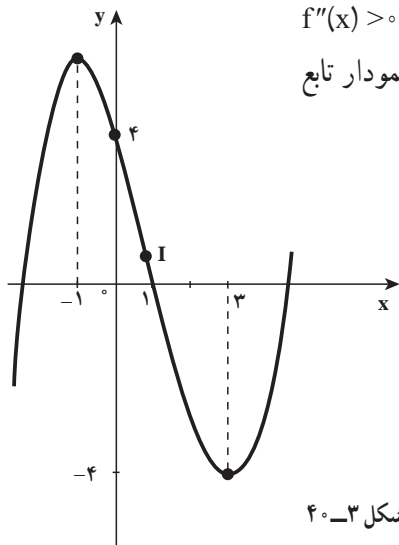
$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$

$$f''(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$$

با تعیین علامت عبارت  $(x+1)(x-3)$  معلوم می‌شود تابع  $f$  روی بازه  $[-1, 3]$  نزولی اکید و روی

هر یک از بازه‌های  $[-1, -\infty)$  و  $(3, +\infty)$  صعودی اکید است. و روی بازه  $(-\infty, 1)$ ،  $f''(x) < 0$  و تقعر

منحنی رو به پایین است و روی بازه  $(1, +\infty)$ ،  $f''(x) > 0$  و تقعر منحنی رو به بالا است. شکل ۳-۴ نمودار تابع  $f$  است.



## تمرین در کلاس

تابع  $f$  با ضابطه  $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$  روی چه بازه‌هایی صعودی اکید یا نزولی اکید و روی چه بازه‌هایی تقعر رو به بالا دارد یا مقعر رو به پایین است.

در مثال (۹) جهت تقعر نمودار  $f$  در نقطه  $I(1, \frac{1}{3})$  تغییر می‌کند، به طوری که روی بازه  $(-\infty, 1)$  تقعر نمودار رو به پایین است و روی بازه  $(1, +\infty)$  تقعر رو به بالا است و خط مماس در نقطه  $I$  به معادله

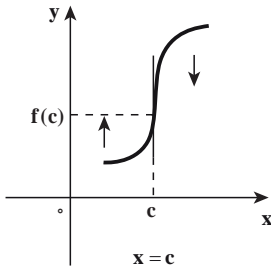
$$y = -4x + \frac{13}{3}$$

می‌باشد چنین نقطه‌ای را نقطه عطف نمودار تابع می‌نامیم.

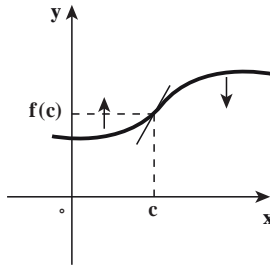
**تعریف ۵:** فرض کنیم تابع  $f$  در  $x=c$  پیوسته باشد در این صورت نقطه  $(c, f(c))$  نقطه عطف نمودار تابع  $f$  است (یا تابع  $f$  در  $c$  نقطه عطف دارد) هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

(الف) نمودار  $f$  در نقطه  $(c, f(c))$  خط مماس داشته باشد.

(ب) تقعر  $f$  در نقطه  $(c, f(c))$  از رو به بالا به رو به پایین (یا به عکس) تغییر نماید.



ب)  $x=c$  مماس قائم



الف)  $m=f'(c)$  شیب خط مماس

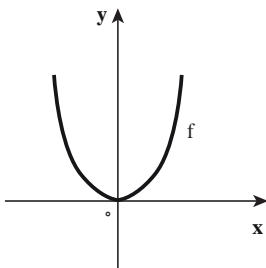
شکل ۳-۴۱

توجه داشته باشید که از شرط (الف) نتیجه می‌شود که یا  $f$  در  $c$  مشتق پذیر است یا نمودار آن در این نقطه خط مماس قائم دارد (شکل ۳-۴۱)

از شرط (ب) نتیجه می‌شود که خط مماس بر نمودار تابع در  $c$  از نمودار عبور می‌کند. (شکل

۳-۴۱)

چون نقطه عطف جایی است که تغير نمودار تغییر می‌کند، باید علامت  $f''(x)$  در این نقاط تغییر نماید. بنابراین در نقاط عطف تابع یا  $f''(c) = 0$  (شکل ۳-۴۱ قسمت الف) و یا  $f''(c)$  تعریف نشده است (قسمت ب شکل ۳-۴۱)



شکل ۳-۴۲

اما شرط  $f''(c) = 0$  وجود نقطه عطف برای نمودار تابع  $f$  در  $c$  را نتیجه نمی‌دهد. به عنوان مثال در تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = x^3$  داریم  $f''(x) = 12x^2$  و  $f''(0) = 0$  ولی  $f''(x)$  در  $0$  تغییر علامت نمی‌دهد و در دامنه‌اش تغير آن رو به بالا است پس  $(0,0)$  نقطه عطف  $f$  نیست. (شکل ۳-۴۲)

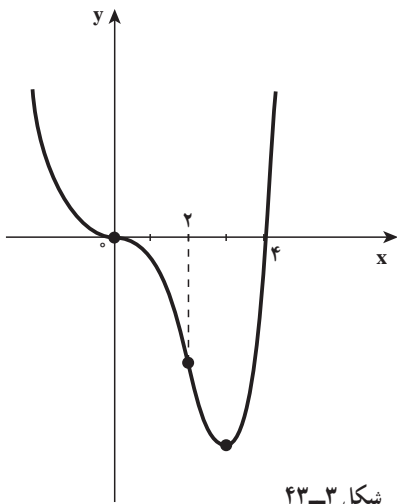
❖ **مثال:** جهت تغير نمودار تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = x^3 - 4x^2$  را در دامنه‌اش بررسی نموده و نقاط عطف آن را به دست آورید.

**حل:** 

$$f'(x) = 3x^2 - 8x$$

$$f''(x) = 6x - 8 = 2(3x - 4)$$

| $x$            | $-\infty$ | $0$        | $2$       | $+\infty$ |
|----------------|-----------|------------|-----------|-----------|
| علامت $f''(x)$ | +         | 0          | -         | +         |
| جهت تغير $f$   | روبه بالا | روبه پایین | روبه بالا |           |

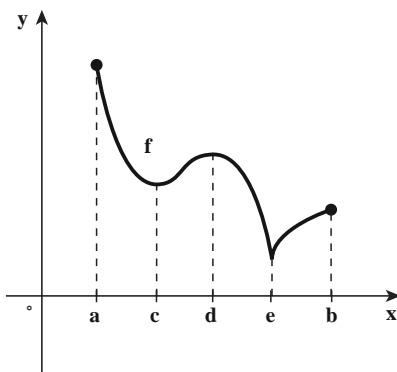


شکل ۳-۴۳

در نقطه  $\circ$  و  $m=f'(2)=-16$  شیب خط مماس بر منحنی  $f$  در نقطه  $\circ$  و  $m=f'(0)=0$  شیب خط مماس بر منحنی  $f$  در نقطه  $\circ$  چون در نقاط  $(0,0)$  و  $(2,-16)$  خط مماس وجود دارد و در این نقاط جهت تقعر منحنی عوض می‌شود، لذا  $(0,0)$  و  $(2,-16)$  نقاط عطف  $f$  هستند. نمودار  $f$  به شکل ۳-۴۳ است.

## تمرین در کلاس

جهت تقعر نمودار تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x}$  را در دامنه‌اش بررسی نموده و نقطه عطف آن را به دست آورید.



شکل ۳-۴۴

## ۳-۴-۱- ماکسیمم و مینیمم موضعی (نسبی)

می‌دانید که مقدار ماکسیمم تابع (در صورت وجود) روی مجموعه  $D=[a,b]$  به عنوان دامنه، بزرگ‌ترین مقدار تابع روی مجموعه  $D$  است که آن را مقدار ماکسیمم (و یا مقدار ماکسیمم سراسری یا مطلق) می‌نامیم. در شکل ۳-۴۴، مقدار ماکسیمم مطلق  $f$  روی بازه  $[a,b]$  است.

با توجه به مطالب بالا در مورد  $f(d)$  چه می‌توان گفت؟

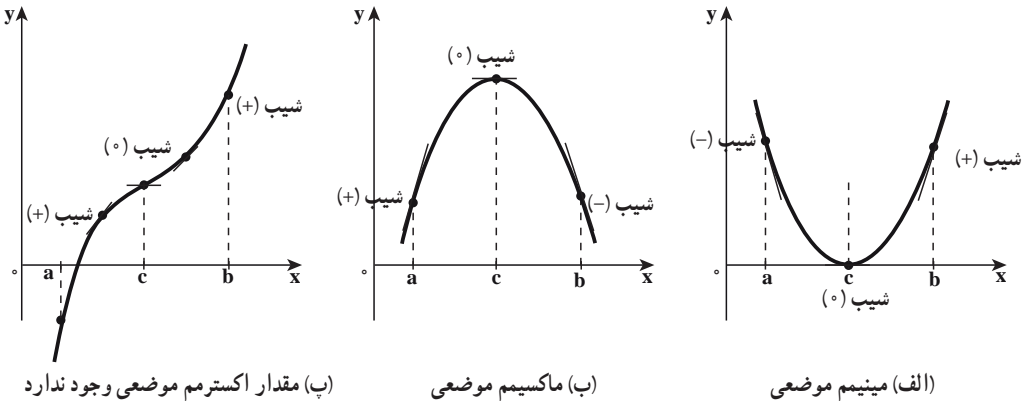
اگر  $f(a)$  را به عنوان قهرمان دوی  $100$  متر در سراسر کشور ایران تصور کنیم،  $f(d)$  را می‌توان قهرمان دو  $100$  متر در یک منطقه از کشور تصور کرد و به زبان ریاضی  $f(d)$  مقدار ماکسیمم موضعی (نسبی) تابع  $f$  در یک همسایگی به مرکز  $d$  نامیده می‌شود.

به طریق مشابه  $f(e)$  مقدار مینیمم سراسری مجموعه  $D$  است و آن را مقدار مینیمم مطلق  $f$  روی مجموعه  $D$  نیز می‌گویند. و  $f(c)$  مقدار مینیمم موضعی (نسبی) تابع  $f$  در یک همسایگی به مرکز  $c$  است بدیهی است که  $f(e)$  نیز مقدار مینیمم موضعی (نسبی) تابع  $f$  در یک همسایگی به مرکز  $e$  می‌باشد.

**تعریف ۶:** فرض کنیم  $D$  دامنه تابع  $f$  که شامل نقطه  $c$  است، می‌گوییم:

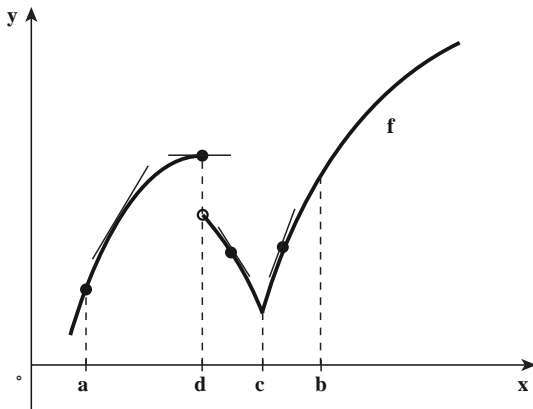
- (الف)  $f(c)$  یک مقدار ماکسیمم موضعی تابع  $f$  است، هرگاه عددی مانند  $r > 0$  وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر  $x$  متعلق به دامنه  $f$  و  $|x-c| < r$ ،  $f(x) \leq f(c)$  وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر  $x$  متعلق به دامنه  $f$  است، هرگاه عددی مانند  $r > 0$  وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر  $x$  متعلق به دامنه  $f$  و  $|x-c| < r$ ،  $f(x) \geq f(c)$  وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر  $x$  متعلق به دامنه  $f$  است که یا مقدار ماکسیمم موضعی و یا مقدار مینیمم موضعی تابع  $f$  باشد.

در شکل ۳-۴ مشاهده می‌شود که تابع  $f$  در نقاط  $a$  و  $d$  و  $b$  دارای ماکسیمم موضعی و در نقاط  $c$  و  $e$  دارای مینیمم موضعی است و از بین نقاط بحرانی درون بازه، نقاط اکسترم موضعی به دست می‌آیند ولی ادعا نمی‌کنیم که هر نقطه بحرانی، یک اکسترم موضعی است. شکل ۳-۴ قسمت (پ) این را روشن می‌کند.



شکل ۳-۴

از شکل ۳-۴ معلوم است که در قسمت (الف) روی بازه  $(a,c)$  مشتق منفی است و روی بازه



(c,b) مشتق مثبت است و در نقطه c مینیمم موضعی داریم و در قسمت (ب) که روی بازه (a,c) مشتق مثبت و روی بازه (c,b) مشتق منفی است در نقطه c ماکسیمم موضعی داریم و البته در نقاط اکسترمم موضعی شکل ۳-۴۵،  $f'(c)=0$  است و اما قابل ذکر است که لزومی ندارد در نقاط اکسترمم موضعی تابع مشتق داشته باشد (شکل ۳-۴۶ را ببینید).

شکل ۳-۴۶- تابع در  $x=c$  مشتق ندارد و در این نقطه مینیمم موضعی دارد.

در این شکل، روی بازه (c,b) مشتق مثبت و روی بازه (d,c) مشتق منفی است و  $f'(c)$  موجود نیست (تابع در نقطه c بازگشتی است) و  $f(c)$  مقدار مینیمم موضعی است. روی بازه (d,c) مشتق تابع منفی و روی بازه (a,d) مشتق مثبت است و  $f(d)$  مقدار ماکسیمم موضعی است ضمن اینکه تابع در نقطه d ناپیوسته و در نتیجه مشتق ندارد. این تجربیات مبنای آزمون زیر است.

## آزمون مشتق اول

فرض کنیم c نقطه بحرانی تابع f باشد که بر بازه باز  $I=(a,b)$  شامل c پیوسته است. هرگاه بر این بازه، جز احتمالاً در نقطه c، مشتق پذیر باشد، در این صورت:

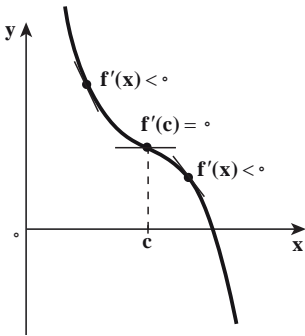
(الف) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه (a,c)،  $f'(x) > 0$ ، و به ازای تمام مقادیر x در بازه (c,b)،  $f'(x) < 0$ ، آنگاه  $f(c)$  یک مقدار ماکسیمم موضعی f است.

(ب) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه (a,c)،  $f'(x) < 0$ ، و به ازای تمام مقادیر x در بازه (c,b)،  $f'(x) > 0$ ، آنگاه  $f(c)$  یک مقدار مینیمم موضعی f است.

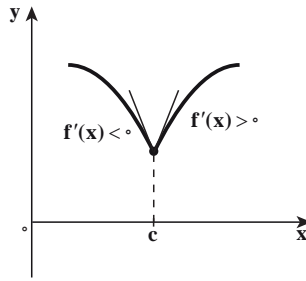
(پ) اگر  $f'$  در c تغییر علامت ندهد آنگاه  $f(c)$ ، نه مقدار مینیمم موضعی است و نه مقدار ماکسیمم موضعی است.

با تجسم کردن نمودارهای شکل های صفحه بعد و شکل ۳-۴۷ به سادگی می توان آزمون مشتق اول را به خاطر سپرد.

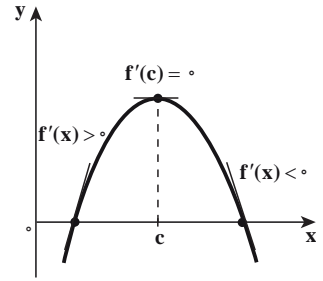




اکسترمم موضعی ندارد



$f(c)$  مقدار مینیمم موضعی  $f'(c)$  موجود نیست



$f(c)$  مقدار ماکسیمم موضعی

شکل ۳-۴۷

❖ مثال: مقادیر اکسترمم موضعی تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x}$  را روی بازه  $(-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$

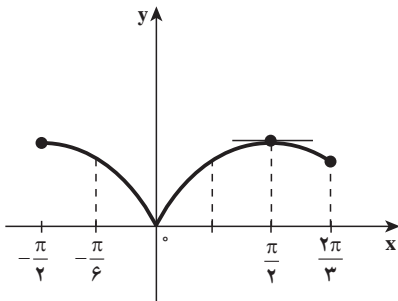
پیدا کنید.

حل:

$$f'(x) = \frac{2 \cos x}{3 \sqrt[3]{\sin x}}, \quad x \neq 0$$

به ازای  $x = \frac{\pi}{2}$  که در بازه  $(-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$  است،  $f'(x) = 0$  پس  $x = \frac{\pi}{2}$  یک نقطه بحرانی تابع  $f$  است و  $x = 0$  ریشهٔ مخرج کسر  $f'(x)$  است پس  $f'(0)$  موجود نیست و  $x = 0$  نقطهٔ بحرانی  $f$  است که در بازه  $(-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$  قرار دارد.

به ازای هر  $x$  از بازه  $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ ،  $f'(x) < 0$  و برای هر  $x$  از بازه  $(0, \frac{\pi}{2})$ ،  $f'(x) > 0$  بنابراین طبق آزمون مشتق اول  $f(0) = 0$  یک مقدار مینیمم موضعی تابع  $f$  است.



شکل ۳-۴۸

چون به ازای هر  $x$  از بازه  $(0, \frac{\pi}{2})$ ،  $f'(x) > 0$  و برای

هر  $x$  از بازه  $(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$ ،  $f'(x) < 0$  پس بنا بر آزمون مشتق اول

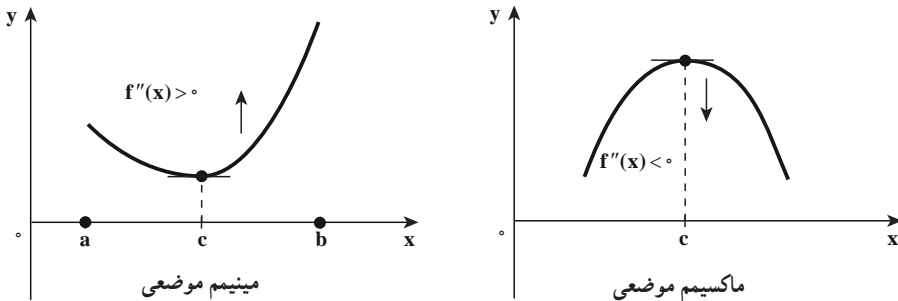
$f(\frac{\pi}{2}) = 1$  یک مقدار ماکسیمم موضعی تابع  $f$  است. نمودار  $f$

روی بازه  $[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$  به شکل ۳-۴۸ است.

مقدارهای ماکسیمم و مینیمم موضعی تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \sqrt{3}x - 2\cos x$  را روی بازه  $(0, 2\pi)$  پیدا کنید.

آزمون مشتق دوم: گاهی می‌توان از مشتق دوم برای انجام آزمون ساده‌ای برای مقادیر ماکسیمم و مینیمم موضعی استفاده کرد.

این آزمون مبتنی بر این است که اگر تابع  $f$  چنان باشد که  $f'(c) = 0$  و بازه‌بازی شامل نقطه  $c$  باشد نمودار  $f$  بر آن تقعر رو به بالا داشته باشد،  $f(c)$  یک مقدار مینیمم موضعی  $f$  است و به همین نحو، اگر تابع  $f$  چنان باشد که  $f'(c) = 0$  و بازه‌بازی شامل  $c$  باشد که نمودار  $f$  بر آن تقعر رو به پایین داشته باشد،  $f(c)$  یک مقدار ماکسیمم موضعی  $f$  است. (شکل ۳-۴۹ را ببینید)



شکل ۳-۴۹

### آزمون مشتق دوم برای اکسترمم‌های موضعی

- فرض کنیم  $(c, f(c))$  نقطه بحرانی تابع  $f$  باشد که در آن  $f'(c) = 0$  و  $f'$  به ازای جمیع  $x$ های بازه  $I$ ، شامل  $c$  موجود باشد. هرگاه  $f''(c)$  وجود داشته و
- (الف)  $f''(c) < 0$ ، آنگاه  $f$  در  $c$  ماکسیمم موضعی دارد.
  - (ب)  $f''(c) > 0$ ، آنگاه  $f$  در  $c$  مینیمم موضعی دارد.

❖ **مثال:** به فرض آنکه  $f(x) = x^2 e^{-x}$ ، با اعمال آزمون مشتق دوم، اکسترم‌های موضعی  $f$  را بیابید و نمودار  $f$  را رسم کنید.

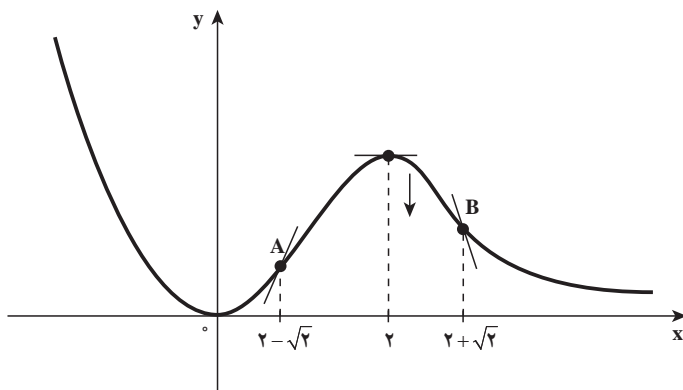
**حل:** ابتدا نقاط بحرانی  $f$  را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 2xe^{-x} - e^{-x} \times x^2 = x(2-x)e^{-x} = 0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } x=2$$

نقاط بحرانی ۰ و ۲ و  $c=0$  که  $f'(0)=0$  و  $f'(2)=0$  و  $f'$  به ازای هر  $x$  از بازه  $I=(-\infty, +\infty)$  موجود است.

$$f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$$

چون  $f''(0) = 2 > 0$  پس  $f(0) = 0$  مقدار مینیم موضعی  $f$  است و  $f''(2) = -2e^{-2} < 0$  پس  $f(2) = 4e^{-2}$  مقدار ماکسیم موضعی  $f$  است و نمودار  $f$  به شکل ۵-۳ است.  $A$  و  $B$  نقاط عطف  $f$  هستند.



شکل ۳-۵

**تمرین در کلاس**

به فرض آنکه  $f(x) = x^4 - 2x^3$ ، با اعمال آزمون مشتق دوم، مقادیر اکسترم‌های موضعی  $f$  را بیابید و نمودار  $f$  را رسم کنید.

۱- اگر تابع  $f$  دارای ماکزیمم مطلق بوده و  $g(x) = |f(x)|$  باشد، آیا  $g$  حتماً ماکزیمم مطلق دارد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۲- نقاط بحرانی تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = x|x^2 - 1|$  را پیدا کنید.

۳- نقاط بحرانی تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = |x - 1|\sqrt[3]{x^2}$  را پیدا کنید.

۴- نقاط بحرانی و نقاط اکسترمم مطلق توابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = x^2 - 3x + 1, \quad -\frac{3}{2} \leq x \leq 3 \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = \sin^2 x + 2 \cos x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad (\text{ب})$$

۵- ارتفاع یک توپ (به متر) در لحظه  $t$  (به ثانیه) از تابع مکان به معادله  $S(t) = 3t - 5t^2$  به دست می‌آید. بازه زمانی بازی را بیابید که بر آن توپ پایین می‌آید. ارتفاع ماکسیمم توپ چقدر است؟

۶- جهت تقعر منحنی  $f$  با ضابطه  $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$  را به کمک قضیه تقعر بررسی نموده و نقطه عطف تابع را در صورت وجود پیدا کنید.

۷- به ازای چه مقادیری از  $a$ ، تقعر منحنی  $f$  با ضابطه  $f(x) = x^2 + ax^3 + 3x^2$  همواره رو به بالا است.

۸- نشان دهید که نقطه عطف تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = x(x-6)^2$  وسط پاره خطی است که نقاط ماکسیمم و مینیمم موضعی تابع را به هم وصل می‌کند.

۹- در یکنوایی و مقادیر اکسترمم تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$  بحث کنید. چرا در  $x = \pm 2$  مماس‌های عمود بر محور طول‌ها وجود دارند؟

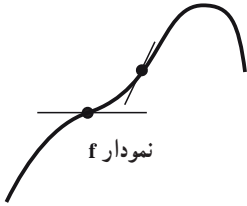
۱۰- غلظت  $c$  یک داروی شیمیایی در جریان خون  $t$  ساعت پس از تزریق در ماهیچه مساوی است با:

$$c = \frac{3t}{27+t^3}$$

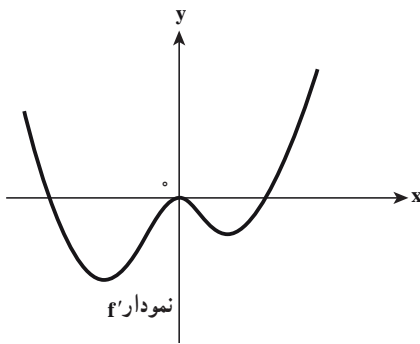
چه وقت غلظت ماکزیمم است؟

۱۱- یک تابع چند جمله‌ای از درجه ۳ بیابید که در  $(2, 4)$  ماکسیمم نسبی، در  $(4, 2)$  مینیمم نسبی داشته باشد.

۱۲- شکل مقابل نمودار تابع  $f$  است در مورد مقادیر اکسترمم نسبی  $f'$  (تابع مشتق  $f$ ) بحث کنید.

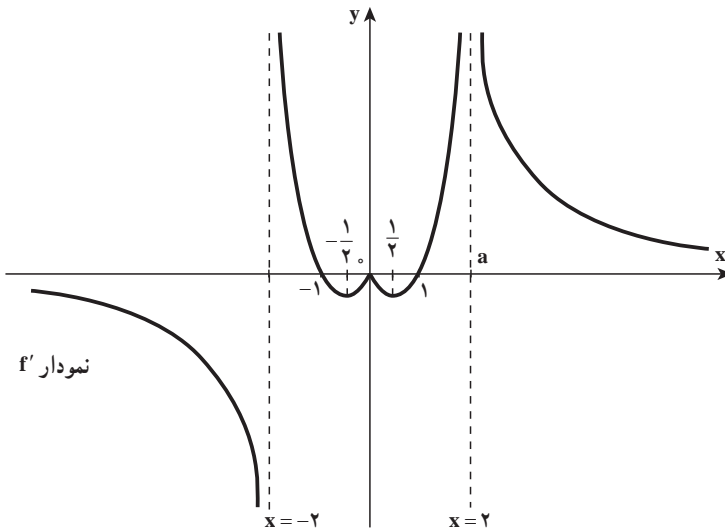


۱۳- شکل مقابل نمودار تابع مشتق، تابع  $f$  است تابع  $f$  چند نقطه عطف دارد؟ دلیل خود را بیان کنید.



۱۴- تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = xe^x$  را در نظر بگیرید با استفاده از هر نوع اطلاعاتی که می‌توانید از خود تابع و مشتق‌های اول و دوم آن به دست آورید، نمودار  $f$  را رسم کنید.

۱۵- نمودار تابع  $f'$  (تابع مشتق، تابع همواره پیوسته  $f$ ) به شکل زیر می‌باشد. تابع  $f$  در چه نقاطی ماکسیمم نسبی و یا مینیمم نسبی دارد؟ و نقاط عطف تابع  $f$  را در صورت وجود مشخص کنید.



### ۱۵-۳- آهنگ‌های تغییر وابسته


اگر هوا را به درون بالن بدمیم و تغییرات حجم بالن را وابسته به تغییر شعاع بدانیم، وقتی که اندازه شعاع  $r$  سانتی متر است و یک سانتی متر به شعاع بالن افزوده شود، آهنگ تغییر حجم بالن به صورت زیر حساب می‌شود.

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V'(r) = 4\pi r^2$$

وقتی اندازه شعاع بالن  $r$  است و یک سانتی متر به شعاع بالن افزوده شود، آهنگ تغییر حجم بالن  $4\pi r^2$  است. (به حجم بالن تقریباً  $4\pi r^2$  سانتی متر مکعب افزوده می‌شود) در مثال بالا کمیت حجم وابسته به کمیت شعاع است، اکنون اگر کمیت شعاع وابسته به زمان (متغیر  $t$ ) باشد، آنگاه کمیت حجم نیز به زمان وابسته خواهد شد.

بنابراین حجم و شعاع بالن دو کمیت وابسته به هم هستند که نسبت به متغیر سومی به نام زمان تغییر می‌کنند و اما محاسبه مستقیم آهنگ افزایش حجم بالن از محاسبه آهنگ افزایش شعاع بالن ساده‌تر است، لذا برای مطالعه پدیده‌های طبیعی و مسائل واقعی مربوط به آهنگ‌های وابسته، ایده این است که آهنگ تغییر کمیتی را که حساب کردن آن ساده‌تر است، بر حسب کمیت دیگر حساب می‌کنیم و برای انجام این عمل، معادله‌ای پیدا می‌کنیم که این دو کمیت را به هم مرتبط کند و سپس با استفاده از قاعده زنجیری از طرفین این معادله نسبت به زمان مشتق می‌گیریم. بررسی این ایده را همراه با حل کردن مثال‌های زیر توضیح می‌دهیم.

❖ **مثال:** بالنی را از هوا پر می‌کنیم، به طوری که حجم آن با آهنگ  $8^\circ$  سانتی متر مکعب بر ثانیه افزایش می‌یابد، وقتی شعاع بالن  $2^\circ$  سانتی متر است، شعاع بالن با چه آهنگی افزایش می‌یابد؟  
**حل:**  خواندن دقیق صورت مسأله و تشخیص معلوم و مجهول و استفاده از نمادگذاری مناسب.

**معلوم:** آهنگ افزایش حجم هوا  $8^\circ$  سانتی متر مکعب بر ثانیه است.  
**مجهول:** آهنگ افزایش شعاع وقتی که شعاع  $2^\circ$  سانتی متر است کمیت‌های حجم و شعاع را با نماد ریاضی می‌نویسیم.

V حجم بالن و r شعاع آن

می‌دانید که آهنگ تغییر، مشتق است و در این مثال کمیت‌های حجم و شعاع وابسته به زمان

(t) هستند.

معلوم:  $\frac{dv}{dt} = 80 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$

بنابراین:

مجهول:  $\frac{dr}{dt}$ ، وقتی که  $r = 20 \text{ cm}$  است.

برای اینکه  $\frac{dv}{dt}$  و  $\frac{dr}{dt}$  را به هم مربوط کنیم، ابتدا V و r را با دستور حجم کره به هم مربوط

می‌کنیم:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

برای اینکه از معلوم مسأله استفاده کنیم از دو طرف این معادله نسبت به t مشتق می‌گیریم

(مشتق‌گیری از سمت راست با استفاده از قاعده زنجیری انجام می‌شود)

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$80 = 4\pi \times 400 \times \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{20\pi} \approx 0.016$$

بنابراین شعاع بالن با آهنگی در حدود 0.016 سانتی‌متر بر ثانیه افزایش می‌یابد.

برای اینکه به ظرافت‌های بیشتر در بررسی این‌گونه مسائل پی ببریم، نیاز به تجربه واقعی است

که فعالیت زیر این فرصت را فراهم می‌کند.



مردی که قدش ۱۸۰ سانتی‌متر است با سرعت ۰/۴

متر بر ثانیه روی زمین مسطحی به سمت تیر چراغ برق قدم

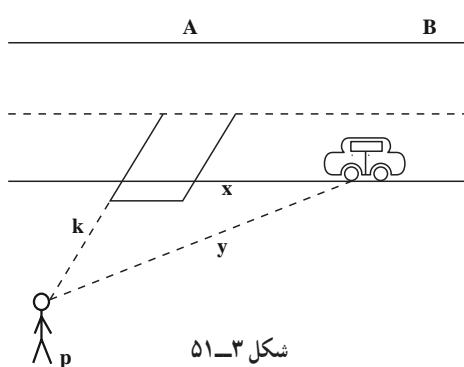
می‌زند. اگر لامپ چراغ برق از زمین ۴ متر ارتفاع داشته

باشد طول سایه مرد وقتی که در فاصله ۲/۴ متری تیر چراغ

برق قرار دارد با چه سرعتی کاهش می‌یابد؟ در این زمان

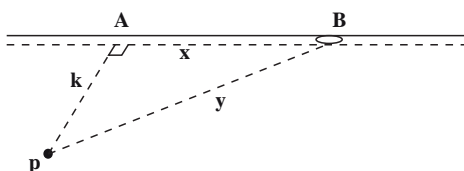
سایه سر او با چه سرعتی حرکت می‌کند؟

همان گونه که در فعالیت (۱) دیده شد، مدل سازی این گونه مسأله ها از اهمیت بالایی برخوردار است و نیازمند مهارت در استفاده از مشتق یا آهنگ تغییر است که در مثال بعدی فرصت را برای هر دو هدف فراهم می کند.



شکل ۳-۵۱

با آهنگ  $9^\circ$  کیلومتر بر ساعت افزایش می یابد. اتومبیل با چه سرعتی در حرکت است؟



❖ **مثال:** (دوربین راداری) پلیس راهنمایی در نزدیک بزرگراهی ایستاده است. و از یک دوربین راداری برای ثبت سرعت های غیرمجاز استفاده می کند (شکل ۳-۵۱ را ببینید) و دوربین را به سمت اتومبیلی نشان می رود که در همین لحظه از جلوی او می گذرد. وقتی راستای دوربین با راستای بزرگراه زاویه  $45^\circ$  می سازد، ملاحظه می کند که فاصله بین اتومبیل و دوربین

شکل را به صورت مقابل در نظر می گیریم در مثلث قائم الزاویه PAB می توان نوشت:

$$x^2 + k^2 = y^2 \quad (1)$$

از طرفین رابطه (۱) نسبت به زمان (t)

مشتق می گیریم.

$$2x \frac{dx}{dt} + 0 = 2y \frac{dy}{dt}$$

$$x \frac{dx}{dt} = y \frac{dy}{dt}$$

و یا

در مثلث قائم الزاویه PAB،  $\hat{P} = \hat{B} = 45^\circ$  سپس  $x = k$  و  $y = k\sqrt{2}$

طبق صورت مسأله دوربین رادار نشان می دهد که  $\frac{dy}{dt} = 9 \text{ km/h}$

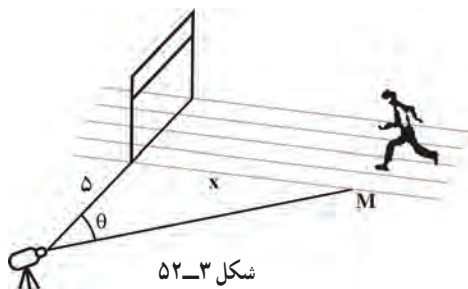
بنابراین

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k\sqrt{2} \times 9^\circ}{k} = 9 \cdot \sqrt{2} \approx 127 \text{ km/h}$$

پس سرعت اتومبیل در حدود ۱۲۷ کیلومتر بر ساعت است.



## تمرین در کلاس



شکل ۳-۵۲

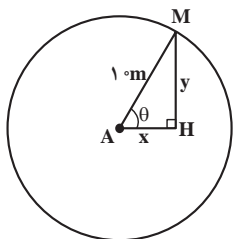
شکل ۳-۵۲، یک دوربین تلویزیون را (که در ۵ متری خط پایان روی یک مسیر مستقیم قرار دارد) نشان می‌دهد که دوندۀ المپیک M را تعقیب می‌کند.

وقتی دوندۀ در ۵ متری خط پایان است با

سرعت  $1^\circ$  متر بر ثانیه می‌دود. سرعت چرخش دوربین در این لحظه چقدر است؟

برای یادگیری و تسلط بیشتر در حل مسائل آهنگ‌های وابسته مثال دیگری را مطرح می‌کنیم.

**مثال:** (چرخ و فلک) شخصی بر چرخ و فلکی به شعاع  $1^\circ$  متر سوار شده است که در هر دقیقه یک دور می‌زند. وقتی فاصله افقی آن شخص از مرکز قائم گذرنده از مرکز چرخ و فلک برابر ۵ متر است، سرعت بالا رفتن یا پایین آمدن آن شخص چقدر خواهد بود؟



شکل ۳-۵۳

**حل:** فرض کنیم محل نشستن شخص روی چرخ و فلک باشد و  $x$  فاصله افقی شخص در لحظه  $t$ ، از خط قائمی که از مرکز می‌گذرد و  $y$  ارتفاع نقطه  $M$  از خط افقی که از مرکز می‌گذرد (طبق شکل ۳-۵۳) و  $\theta$  زاویه نشان داده شده در شکل باشد.

در مثلث قائم‌الزاویه AHM داریم:

$$x = 1 \cdot \cos \theta \quad \text{و} \quad y = 1 \cdot \sin \theta$$

اکنون از دو طرف معادله  $y = 1 \cdot \sin \theta$  نسبت به زمان  $(t)$  مشتق می‌گیریم.

$$\frac{dy}{dt} = 1 \cdot \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$$

و اما بنا بر صورت مسأله معلوم می‌شود:

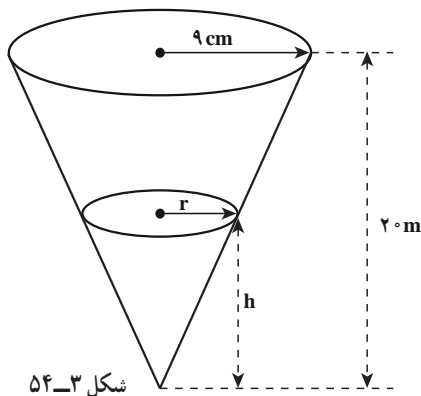
$$\frac{d\theta}{dt} = 1 \text{ رادیان بر دقیقه} = 2\pi \text{ دور بر دقیقه}$$

و در لحظه‌ای که،  $x$  برابر ۵ متر است، داریم  $\cos \theta = \frac{5}{1} = \frac{1}{4}$

$$\frac{dy}{dt} = 1 \cdot \frac{1}{4} \times 2\pi = 1 \cdot \pi \approx 3.14 \text{ m/min}$$

یعنی در لحظه‌ای که  $x$  برابر ۵ متر است، سرعت بالا یا پایین رفتن حدود  $\frac{31}{4}$  متر بر دقیقه است.

## تمرین در کلاس



ظرف قیفی شکل با ارتفاع  $20$  سانتی متر و شعاع قاعده  $9$  سانتی متر چنان قرار گرفته است که رأس آن در پایین است و ظرف به شکل مخروط دوار است. (شکل ۳-۵۴)

فرض کنید آب با سرعت  $\frac{1}{8}$  سانتی متر مکعب بر ثانیه در این ظرف ریخته شود آهنگ افزایش ارتفاع آب را وقتی ارتفاع آب  $6$  سانتی متر است پیدا کنید.

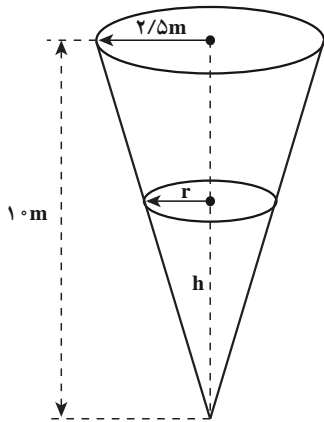
## آنالیز ریاضی به اندازه خود طبیعت گسترده است (فوریه ۱۸۲۰-۱۷۶۸)

### مسائل

- جسمی با سرعت  $8$  سانتی متر بر ثانیه به عدسی نزدیک می‌گردد، اگر نسبت فاصله‌های جسم و تصویر آن از عدسی  $\frac{2}{\sqrt{2}}$  باشد، تصویر جسم با چه سرعتی و در کدام جهت تغییر می‌کند؟ (در عدسی‌های نازک رابطه  $\frac{1}{s} + \frac{1}{S} = \frac{1}{f}$  برقرار است، که در آن  $s$  فاصله جسم از عدسی و  $S$  فاصله تصویر از عدسی و  $f$  فاصله کانونی عدسی است)
- مخزنی استوانه‌ای به شعاع  $3$  متر را با آهنگ  $2$  متر مکعب بر دقیقه از آب پر می‌کنند. ارتفاع آب با چه آهنگی بالا می‌آید؟
- شعاع کره‌ای با آهنگ  $3$  میلی متر بر ثانیه بزرگ می‌شود. در لحظه‌ای که قطر کره  $60$  میلی متر است، حجم کره با چه آهنگی افزایش می‌یابد.

۴- اگر ارتفاع بادبادک شما از زمین  $20^\circ$  متر باشد و فاصله افقی آن از شما  $30^\circ$  متر و با آهنگ

۸ متر در دقیقه به طور افقی از شما دور شود طول ریسمان با چه آهنگی افزایش می یابد؟



۵- آب با سرعت ۹ متر مکعب بر ساعت وارد منبعی

می شود که نشستی دارد. این منبع به شکل مخروطی است که

رأس آن به طرف پایین است و عمق آن  $10^\circ$  متر و قطر قاعده

آن ۵ متر است. وقتی عمق آب ۵ متر است، سطح آن با آهنگ

$18$  سانتی متر بر ساعت بالا می رود، در این لحظه آب با چه

آهنگی به خارج نشست می کند؟

### ۳- ۱۶- رسم نمودار توابع

تاکنون نمودار توابعی به صورت خط راست و یا خط شکسته مانند نمودار تابع  $y = |x-1|$  در

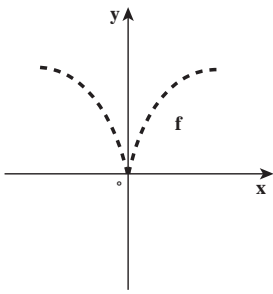
کتاب های ریاضی سال های قبل دیده اید. نمودار توابعی نظیر  $y = x^2$  و  $y = \frac{1}{x}$  و یا  $y = \sqrt[3]{x^2}$  را

می توانیم با نقطه یابی در یک صفحه مختصات شطرنجی شناسایی و ترسیم کنیم. اما مشکلی که در

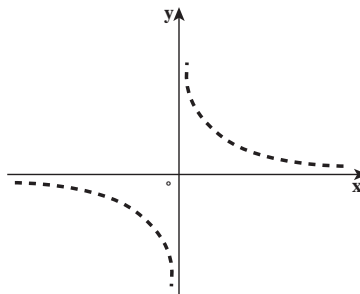
اینجا وجود دارد، از پیش نمی توانیم رفتار این گونه توابع را پیش بینی کنیم، در نتیجه فقط با افزایش

نقاطی از صفحه که مختصات آنها در معادله این توابع صدق می کند، شکل دقیق تری از نمودار ترسیم

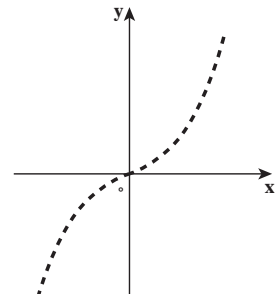
می گردد. (شکل ۳-۵۵ را ببینید)



$$y = \sqrt[3]{x^2}$$



$$y = \frac{1}{x}$$



$$y = x^3$$

شکل ۳-۵۵