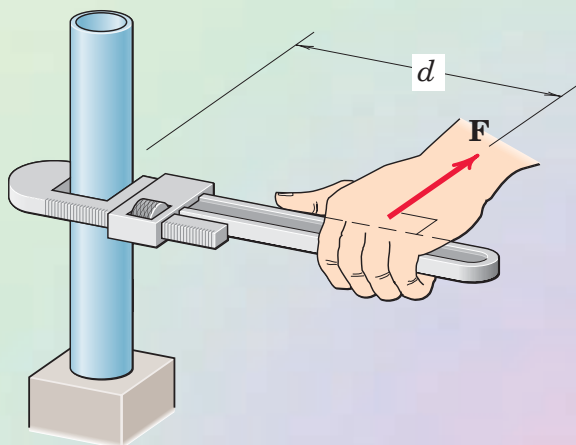
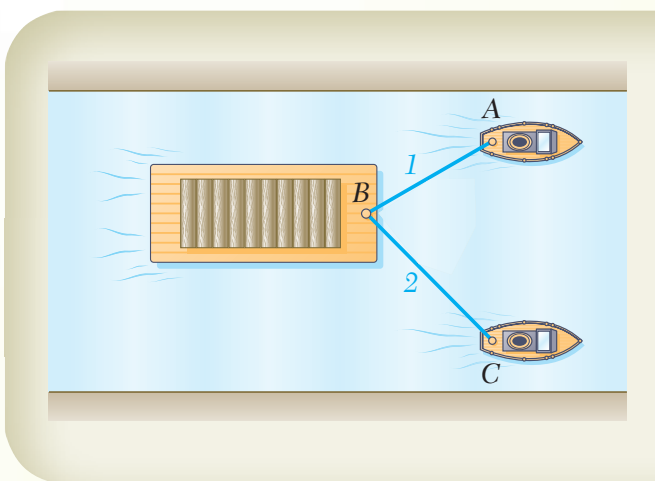


فصل

سوم

نیرو و

سامانه‌های نیروی



## هدف‌های رفتاری

پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

- ۱- انواع نیروها را بشناسد.
- ۲- مقدار و امتداد برآیند نیروهای وارد بر یک نقطهٔ مادی را محاسبه کند.
- ۳- گشتاور یا لنگر را تعریف نماید و مقدار آن را نسبت به یک نقطه محاسبه نموده و جهت آن را تشخیص دهد.
- ۴- قضیه وارینون را تعریف کند و برای محاسبهٔ گشتاور آن را به کار گیرد.
- ۵- زوج نیرو را تعریف نماید و خصوصیات آن را بشناسد.
- ۶- گشتاور زوج نیرو را محاسبه کند.

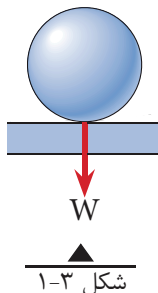
## نیرو

نیرو کمیتی است برداری که می‌تواند باعث ایجاد حرکت، تغییر شکل یا چرخش در اجسام گردد.

### ۱-۳ انواع نیرو

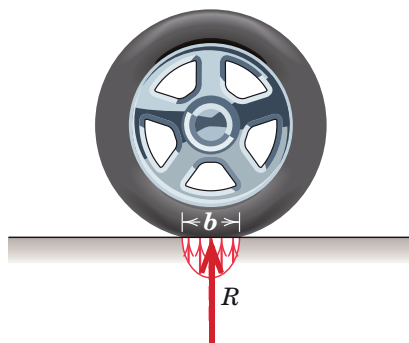
#### ۱-۱-۳ نیروهای خارجی

نیروهایی هستند که از محیط اطراف و در خارج از وجود جسم به آن وارد می‌شوند. مکانیک اجسام صلب (استاتیک) فقط به نیروهای خارجی توجه دارد؛ مانند: وزن گوی در شکل (۱-۳) که به کف وارد می‌شود.



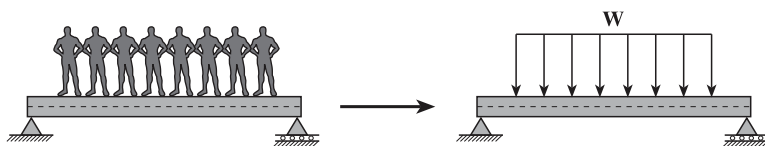
شکل ۱-۳

الف) نیروهای متمرکز: اگر نیرو به طول کوچکی از جسم وارد گردد آنرا نیروی متمرکز می‌نامند. شکل (۲-۳)



شکل ۲-۳

ب) نیروهای گسترده: اگر نیرو در طول قابل توجهی از جسم پخش گردد آنرا نیروی گسترده گویند. شکل (۳-۳)



شکل ۳-۳

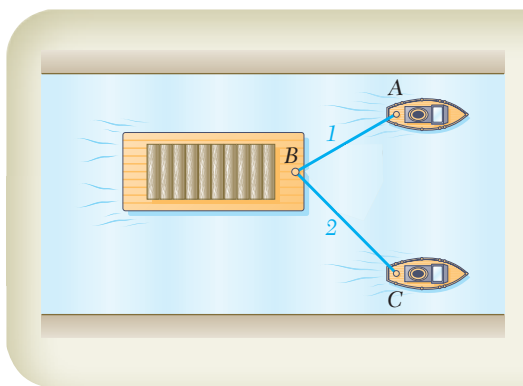
### ۲-۱-۳- نیروهای داخلی

نیروهایی هستند که در داخل جسم و بین ذرات تشکیل دهنده آن ایجاد می‌شوند؛ مانند نیرویی که شخص هنگام اجرای بارفیکس در دستان خود احساس می‌کند؛ در مکانیک اجسام تغییرشکل پذیر (مقاومت مصالح) به نیروهای داخلی توجه می‌شود.

### ۲-۳ برآیند سامانه‌های نیرویی وارد بر نقطه مادی به روش محاسباتی

منظور از برآیند دو یا چند نیرو عبارت است از جمع برداری آن نیروها، بنابراین بردار برآیند به تنهایی اثر همه نیروهای وارد به جسم را دارد.

به عنوان مثال در شکل (۴-۳) شناور B در مسیری به حرکت در می‌آید که در واقع امتداد بردار برآیند دو نیروی وارده از طرف قایق‌های A و C خواهد بود. این بدان معناست که می‌توان به جای دو نیروی مذکور نیروی برآیند آن‌ها را در امتداد مسیر حرکت شناور قرار داده و آن‌را به حرکت درآورد.

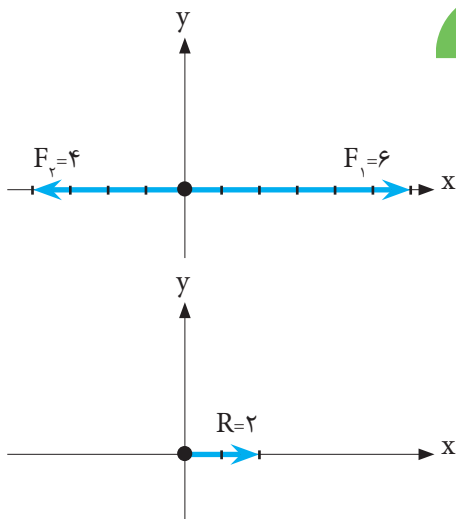


شکل ۴-۳

### ۳-۲-۱- برآیند نیروهای هم‌راستا و موازی

برای محاسبه برآیند نیروهای هم‌راستا کافی است مقادیر آن‌ها را با یکدیگر جمع جبری نماییم.

#### مثال ۱



دو نیروی  $F_1 = 6\vec{i}$  و  $F_2 = -4\vec{i}$

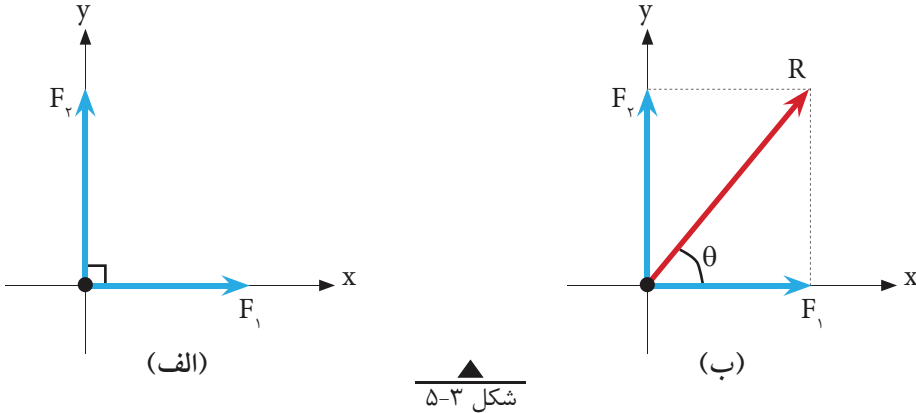
را روی محور مختصات ترسیم نموده و برآیند آن‌ها را محاسبه و ترسیم نمایید.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{R} = 6\vec{i} - 4\vec{i} \Rightarrow \vec{R} = 2\vec{i}$$

### ۳-۲-۲- برآیند دو نیروی متعامد

برای محاسبه مقدار برآیند دو نیروی متعامد مطابق شکل (۳-۵-الف) با استفاده از رابطه فیثاغورث و شکل (۳-۵-ب) داریم:



$$R^2 = F_x^2 + F_y^2 \Rightarrow R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

و برای محاسبه زاویه برآیند با  $F_x$  می‌توان از رابطه تانژانت استفاده نمود:

$$\tan \theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \left( \frac{F_y}{F_x} \right)$$

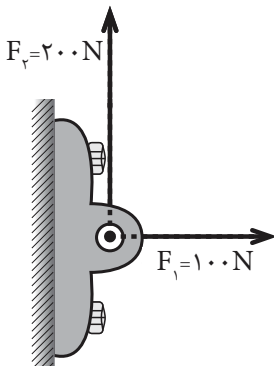
### مثال ۲

در شکل زیر مطلوب است:

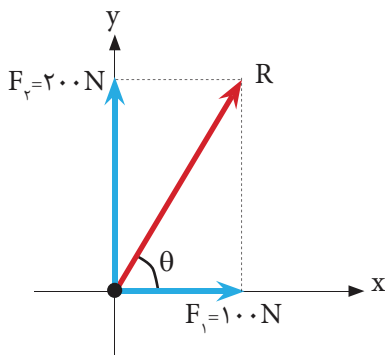
الف) ترسیم برآیند ( $R$ )

ب) تعیین مقدار برآیند

ج) تعیین زاویه برآیند با افق یا امتداد  $F_x$



الف)

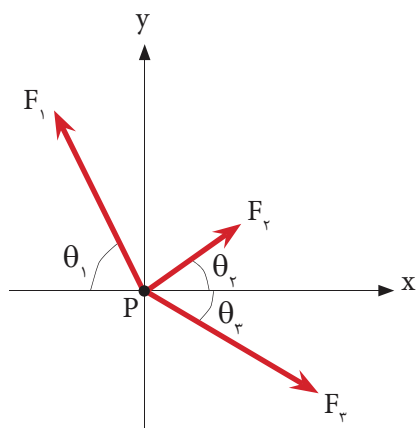


ب)  $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{100^2 + 200^2} = \sqrt{50000} \Rightarrow R = 223.61 \text{ N}$

ج)  $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_2}{F_1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{200}{100}\right) \Rightarrow \theta = 63.43^\circ$

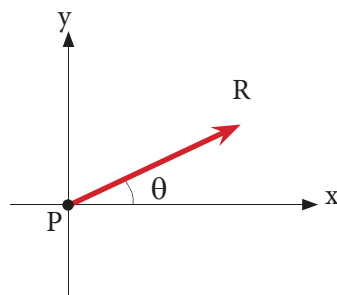
### ۳-۲-۳- محاسبه برآیند سامانه چندنیروی وارد به نقطه مادی

هر گاه بر یک نقطه مادی مانند P مطابق شکل (۳-۶-الف) نیروهای  $F_1$  و  $F_2$  و  $F_3$  وارد شود، به کمک تجزیه به شرح زیر می توان اندازه برآیند این نیروها (R) و راستای برآیند با محور x یعنی  $\theta$  را تعیین نمود. شکل (۳-۶-ب)



(الف)

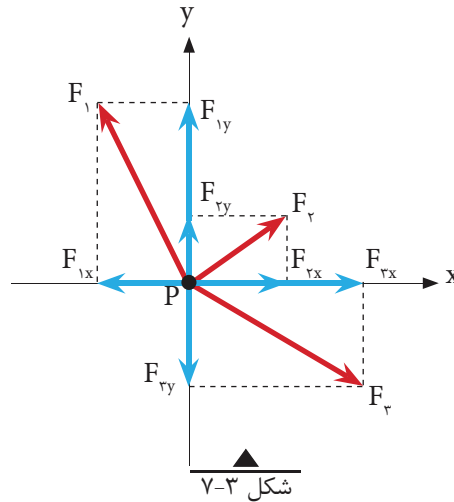
$\cong$



(ب)

شکل ۳-۶

گام اول: تجزیه هر یک از نیروها روی محورهای  $x$  و  $y$ : شکل (۷-۳)



گام دوم: نمایش برداری تمامی نیروها بر حسب بردارهای  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$ ؛

گام سوم: محاسبه جمع جبری نیروهای هم‌راستا روی محورهای  $x$  و  $y$

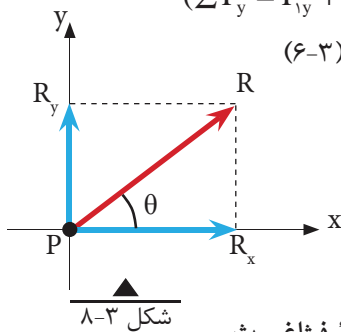
$$R_x = \sum F_x, \quad R_y = \sum F_y \quad (۵-۳)$$

$\sum F_x$ : مجموع مؤلفه‌های هم‌راستا با محور  $x$  ( $\sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$ )

$\sum F_y$ : مجموع مؤلفه‌های هم‌راستا با محور  $y$  ( $\sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$ )

گام چهارم: نمایش برداری بردار برآیند ( $R$ ) مطابق رابطه (۶-۳)

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} \quad (۶-۳)$$



گام پنجم: نمایش ترسیمی بردار برآیند

مطابق شکل (۸-۳)

گام ششم: محاسبه اندازه (مقدار) برآیند با استفاده از رابطه فیثاغورث

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (۷-۳)$$

گام هفتم: محاسبه زاویه برآیند با امتداد محور  $x$  ها ( $\theta$ )

با استفاده از رابطه تانژانت و با توجه به شکل ترسیم شده

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{R_y}{R_x} \right| \quad (۸-۳) \quad \text{در گام پنجم}$$



### مثال ۳

دو نیرو مطابق شکل توسط دو کابل بر یک سنگ معدنی وارد می‌شود. مطلوب است:

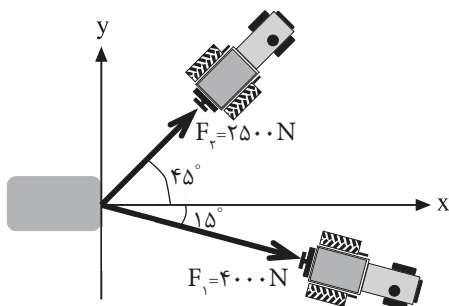
الف) نمایش برداری برآیند

ب) نمایش ترسیمی بردار برآیند

ج) محاسبه اندازه بردار برآیند

د) محاسبه زاویه برآیند با افق

ه) ترسیم مسیر جابه‌جایی سنگ

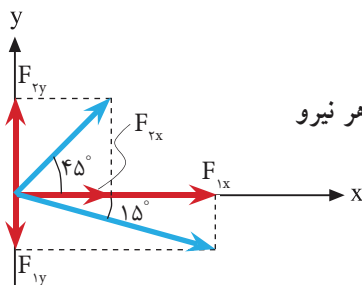


حل:

الف)

گام اول:

- تجزیه نیروها با توجه به اندازه و زاویه هر نیرو

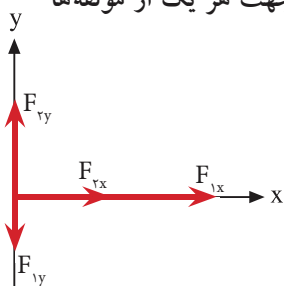


$$\begin{cases} F_{1x} = F_1 \cos \theta_1 = 4000 \times \cos 15^\circ \Rightarrow F_{1x} = 3863/70 \text{ N} \\ F_{1y} = F_1 \sin \theta_1 = 4000 \times \sin 15^\circ \Rightarrow F_{1y} = 1035/28 \text{ N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{2x} = F_2 \cos \theta_2 = 2500 \times \cos 45^\circ \Rightarrow F_{2x} = 1767/77 \text{ N} \\ F_{2y} = F_2 \sin \theta_2 = 2500 \times \sin 45^\circ \Rightarrow F_{2y} = 1767/77 \text{ N} \end{cases}$$

گام دوم:

- فرم برداری هر بردار با توجه به شکل مقابل و جهت هر یک از مؤلفه‌ها



$$\vec{F}_1 = 3863/70 \vec{i} - 1035/28 \vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = 1767/77 \vec{i} + 1767/77 \vec{j}$$



گام سوم:

- تعیین مجموع نیروهای هم‌راستا با محورهای  $x$  و  $y$  ( $\Sigma F_x$  و  $\Sigma F_y$ )

$$R_x = \Sigma F_x = 1767/77 + 3863/70 \Rightarrow R_x = 5631/47 \text{ N}$$

$$R_y = \Sigma F_y = 1767/77 - 1035/28 \Rightarrow R_y = 732/49 \text{ N}$$

گام چهارم:

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$$

- نمایش برداری بردار برآیند

$$\vec{R} = 5631/47 \vec{i} + 732/49 \vec{j}$$

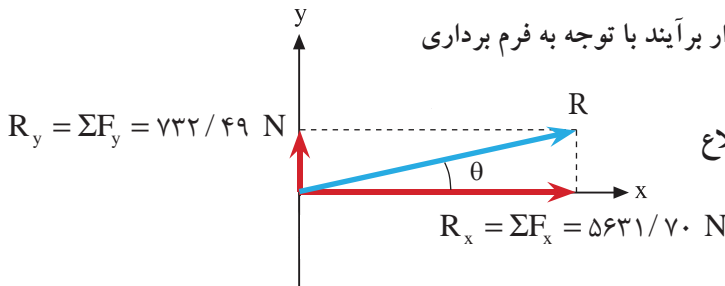
(ب)

گام پنجم:

- نمایش ترسیمی بردار برآیند با توجه به فرم برداری

بردار برآیند

و روش متوازی‌الاضلاع



(ج)

گام ششم:

- محاسبه اندازه بردار برآیند به کمک رابطه (۷-۳)

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \Rightarrow R = \sqrt{5631/47^2 + 732/49^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = 5678/91 \text{ N}}$$

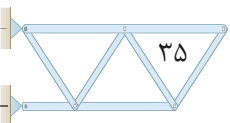
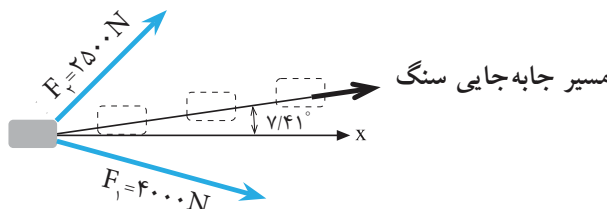
(د)

گام هفتم:

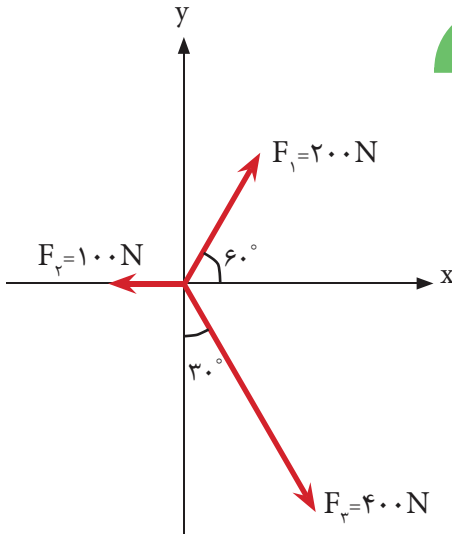
- محاسبه زاویه بردار برآیند با محور  $x$  ها به کمک رابطه (۸-۳)

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{R_y}{R_x} \right| \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \left| \frac{732/49}{5631/70} \right| \Rightarrow \boxed{\theta = 7/41^\circ}$$

(ه) مسیر جابه‌جایی سنگ در راستای بردار برآیند مطابق شکل زیر خواهد بود.



## مثال ۴



در شکل روبه‌رو مطلوب است:

الف - محاسبه مقدار برآیند نیروها

ب - محاسبه زاویه برآیند با افق

ج - ترسیم بردار برآیند

د - نمایش برداری بردار برآیند

حل:

الف) تجزیه هر یک از نیروها با توجه به روابط  $F_x = F \cos \theta$  و  $F_y = F \sin \theta$  و زاویه هر نیرو

با محور x ها:

$$\vec{F}_1 = 200 \cdot \cos 60^\circ \vec{i} + 200 \cdot \sin 60^\circ \vec{j} = 100 \vec{i} + 173/2 \vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = -100 \vec{i}$$

$$\vec{F}_3 = 400 \cdot \cos 60^\circ \vec{i} - 400 \cdot \sin 60^\circ \vec{j} = 200 \vec{i} - 346/4 \vec{j}$$

$$R_x = \sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$

$$R_x = \sum F_x = 100 - 100 + 200 \Rightarrow R_x = 200 \text{ N}$$

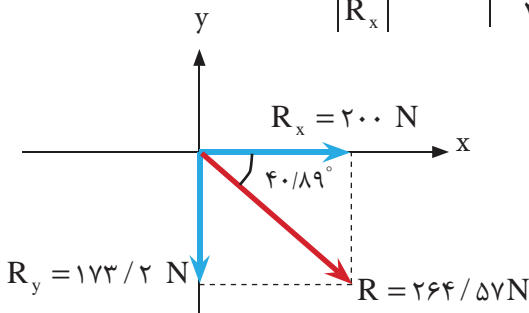
$$R_y = \sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$

$$R_y = \sum F_y = 173/2 + 0 - 346/4 \Rightarrow R_y = -173/2 \text{ N}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{200^2 + (-173/2)^2} \Rightarrow R = 264/57 \text{ N}$$

(ب)

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{R_y}{R_x} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{-173/2}{200} \right| \Rightarrow \theta = 40/89^\circ$$



(ج)

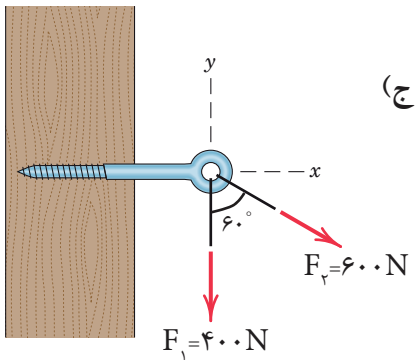
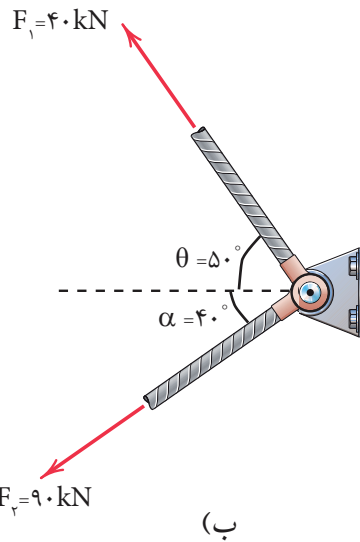
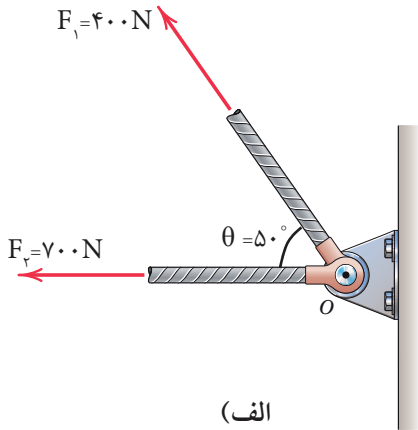
$$\vec{R} = 200 \vec{i} - 173/2 \vec{j} \quad (\text{د})$$

۱- در شکل های زیر مطلوب است:

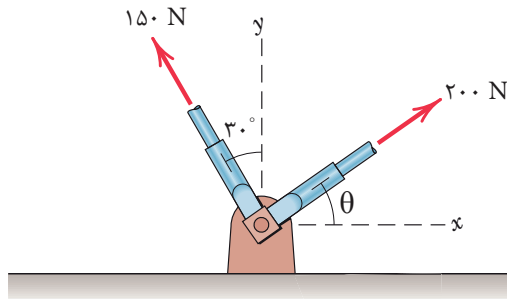
الف) محاسبه مقدار برآیند دو نیرو

ب) محاسبه زاویه برآیند با  $F_1$

ج) محاسبه زاویه برآیند با امتداد افق



۲- در شکل زیر مقدار زاویه  $\theta$  را چنان تعیین نمایید که برآیند دو نیرو بر محور  $y$  ها منطبق گردد. سپس در این حالت مقدار برآیند را محاسبه کنید.



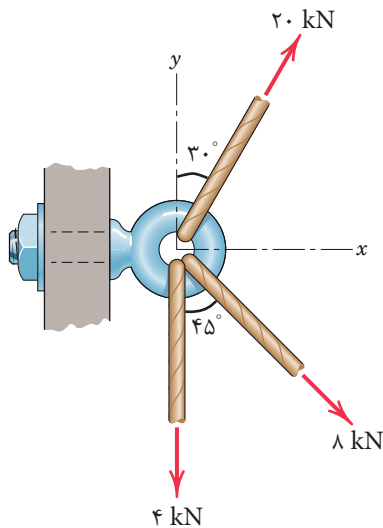
۳- در شکل روبه‌رو مطلوب است:

الف) محاسبه مقدار برآیند نیروها

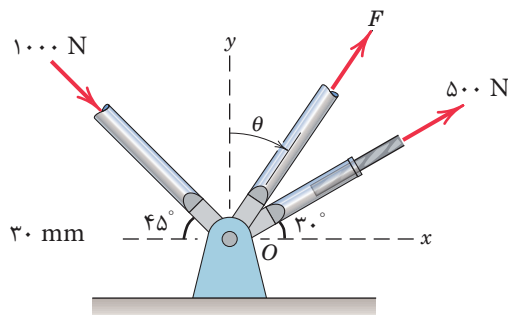
ب) محاسبه زاویه برآیند با افق

ج) ترسیم بردار برآیند

د) نمایش برداری بردار برآیند



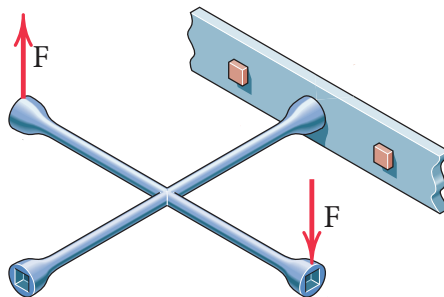
۴- در شکل زیر نیروی  $F$  و زاویه  $\theta$  را طوری تعیین نمایید که برآیند نیروها روی محور افق و مقدار آن برابر  $1500 \text{ N}$  در جهت مثبت باشد.



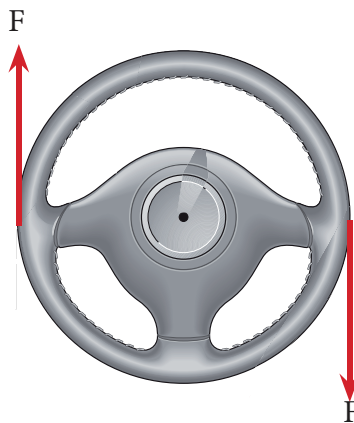
### ۳-۳ گشتاور، لنگر (مُمان)

یکی از اثرات نیرو بر اجسام تمایل به ایجاد چرخش در آن‌ها می‌باشد که به این پدیده گشتاور گفته می‌شود.

مطابق شکل‌های (۹-۳) و (۱۰-۳) نیرو باعث چرخش در اجسام می‌گردد.



شکل ۹-۳



شکل ۱۰-۳

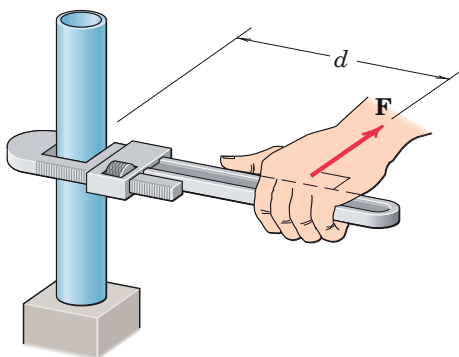
مقدار گشتاور حول یک محور عبارت است از حاصل ضرب نیرو ( $F$ ) در کوتاه‌ترین فاصله نیرو یا امتداد آن تا محور مورد نظر ( $d$ ). گشتاور را با  $M$  نمایش می‌دهند و رابطه آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$M = F \cdot d \quad (۹-۳)$$

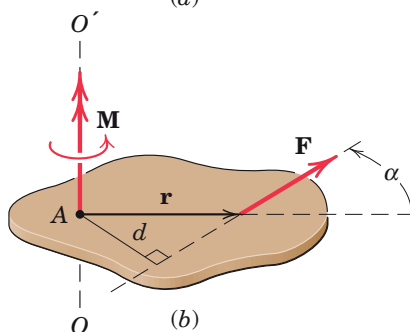
با توجه به شکل (۱۲-۳) نیروی  $F$  حول محور  $OO'$  ایجاد گشتاور می نماید. در این شکل  $d$  کوتاه ترین فاصله امتداد نیروی  $F$  تا محور  $OO'$  می باشد که بازوی لنگر نیز خوانده می شود بنابراین خواهیم داشت:

$$M_{OO'} = F \cdot d$$

(۱۰-۳)



(a)



(b)

شکل ۱۱-۳

گشتاور نیز کمیتی برداری است که آن را با نماد  $\uparrow$  نمایش می دهند و جهت آن مطابق ضرب بردارها خواهد بود که در مقاطع بالاتر با آن آشنا خواهید شد.

در این کتاب به دلیل بررسی نیروها در صفحه، گشتاور حول نقطه در نظر گرفته می شود لذا جهت چرخش آن در جهت عقربه ساعت  $\curvearrowright$  و یا خلاف عقربه ساعت  $\curvearrowleft$  خواهد بود. بنابراین با توجه به شکل (۱۱-۳-b) گشتاور نیروی  $F$  حول نقطه  $A$  واقع بر محور  $OO'$  به صورت رابطه (۱۱-۳) خواهد بود.

$$M_A = F \cdot d$$

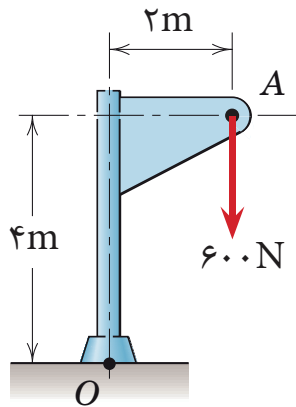
(۱۱-۳)

## قرارداد:

در این کتاب جهت چرخش عقربه‌های ساعت مثبت فرض می‌شود.

### مثال ۵

گشتاور نیروی  $F$  حول نقطه  $O$  را محاسبه و جهت چرخش آن را بنویسید.



حل:

$$F = 600 \text{ N}$$

$$d = 2 \text{ m}$$

$$M_o = F \cdot d \Rightarrow M_o = 600 \times 2 \Rightarrow M_o = 1200 \text{ N.m} \quad \text{ساعت گرد}$$

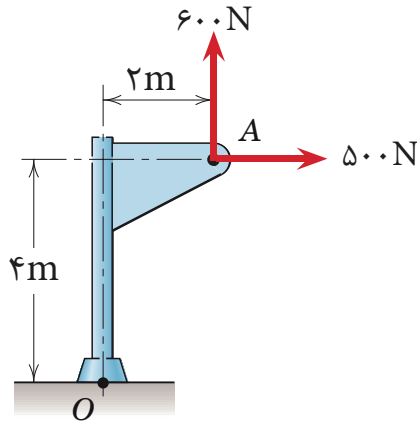
### گشتاور چند نیرو ۴-۳

اگر به یک جسم چند نیرو اعمال شود گشتاور آن‌ها نسبت به یک نقطه برابر است با مجموع جبری گشتاور هر نیرو نسبت به آن نقطه یعنی:

$$M_o = \sum_{i=1}^n F_i d_i = F_1 d_1 + F_2 d_2 + \dots + F_n d_n \quad (۱۲-۳)$$

## مثال ۶

در شکل زیر گشتاور نیروهای نشان داده شده را حول نقطه  $O$  محاسبه کنید و جهت آن را بنویسید.



حل:

$$F_1 = 500 \text{ N}$$

$$d_1 = 4 \text{ m}$$

$$F_2 = 600 \text{ N}$$

$$d_2 = 2 \text{ m}$$

$$M_o = F_1 d_1 + F_2 d_2$$

$$M_o = 500 \times 4 - 600 \times 2$$

$$M_o = +800 \text{ N.m} \quad \text{ساعت گرد}$$

## ۵-۳ قضیه وارینون

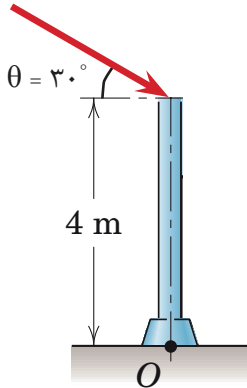
گشتاور برآیند چند نیرو حول یک نقطه معین برابر است با مجموع گشتاورهای آنها حول همان نقطه و یا گشتاور یک نیرو حول هر نقطه برابر است با مجموع گشتاورهای مؤلفه‌های آن نیرو حول همان نقطه.

کاربرد این قضیه در مثال ۷ نشان داده شده است.



## مثال ۷

$$F = 600 \text{ N}$$



گشتاور نیروی  $F$  را در شکل زیر به دو روش

حساب کنید:

الف) با استفاده از تعریف گشتاور

ب) به کمک قضیه وارینون

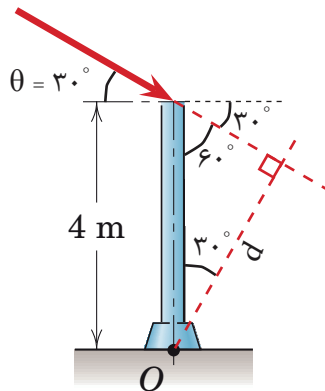
حل:

الف) با استفاده از تعریف:

ابتدا با استفاده از روابط مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه بازوی لنگر یعنی (d) را محاسبه

می‌نماییم؛ داریم:

$$F = 600 \text{ N}$$



$$\cos \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{d}{4} \Rightarrow d = 4 \times \cos 30^\circ \Rightarrow d = 3.46 \text{ m}$$

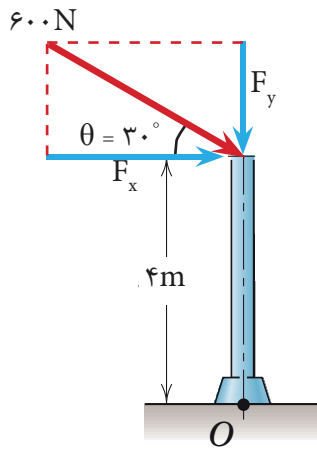
$$M_o = F \cdot d \Rightarrow M_o = 600 \times 3.46 \Rightarrow \boxed{M_o = 2078.4 \text{ N.m}}$$

ب) با استفاده از قضیه وارینون

در این روش ابتدا نیروی  $F$  را به دو مؤلفه متعامد تجزیه نموده و گشتاور آن‌ها را نسبت به نقطه  $O$  محاسبه و با یکدیگر جمع می‌نمائیم.

$$F_x = F \cdot \cos \theta \Rightarrow F_x = 600 \times \cos 30^\circ \Rightarrow F_x = 519.61 \text{ N}$$

$$F_y = F \cdot \sin \theta \Rightarrow F_y = 600 \times \sin 30^\circ \Rightarrow F_y = 300 \text{ N}$$



با توجه به شکل بازوی لنگر  $F_x$  برابر ۴ متر و چون امتداد مؤلفه  $F_y$  از نقطه  $O$  می‌گذرد، بازوی لنگر آن صفر است.  
خواهیم داشت:

$$M_o = \sum_{i=1}^n F_i d_i \Rightarrow M_o = F_x d_x + F_y d_y$$

$$M_o = F_x \times 4 + F_y \times 0 = 519.61 \times 4$$

$$\boxed{M_o = 2078.44 \text{ N.m}} \quad \curvearrowright$$

نکته:

هرگاه امتداد یک نیرو از نقطه‌ای عبور نماید گشتاور آن نیرو نسبت به همان نقطه برابر صفر است.

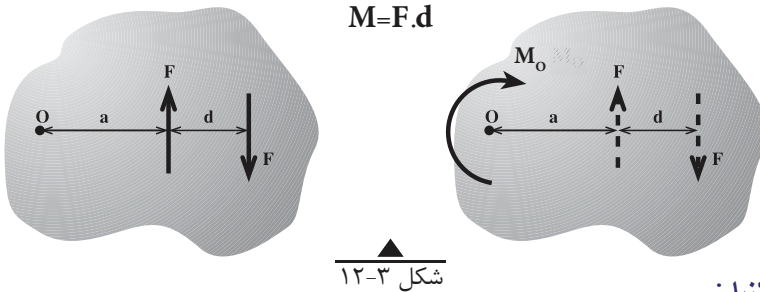
### ۶-۳ زوج نیرو:

به دو نیروی مساوی - موازی و مختلف‌الجهت زوج نیرو گفته می‌شود.

#### ۳-۶-۱- خصوصیات زوج نیرو:

- ۱- برآیند زوج نیرو صفر است؛
- ۲- در اجسام ایجاد گشتاور (چرخش) می‌نماید؛
- ۳- گشتاور زوج نیرو نسبت به هر نقطه دلخواه مقداری ثابت و برابر است با حاصل ضرب اندازه یک نیرو در فاصله بین آن‌ها. شکل (۳-۱۲)

$$M = F \cdot d$$



تحقیق کنید:

چگونه می‌توان به کمک گشتاورگیری نسبت به یک نقطه دلخواه مانند O در شکل (۳-۱۲) خصوصیت سوم زوج نیرو را اثبات کرد.

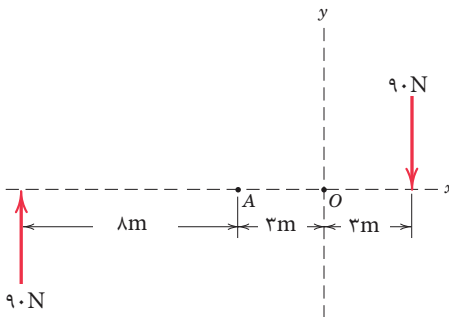
### مثال ۸

در شکل روبه‌رو مطلوب است محاسبه گشتاور دو نیروی ۹۰ نیوتنی:

(الف) حول نقطه A

(ب) حول نقطه O

(ج) با استفاده از خاصیت زوج نیرو



حل:

(الف)  $M_A = 90 \times 8 + 90 \times 6 = 1260 \text{ N.m}$

(ب)  $M_O = 90 \times 11 + 90 \times 3 = 1260 \text{ N.m}$

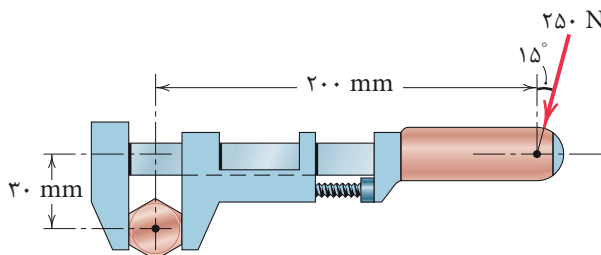
(ج)  $M = F \cdot d = 90 \times 14 = 1260 \text{ N.m}$



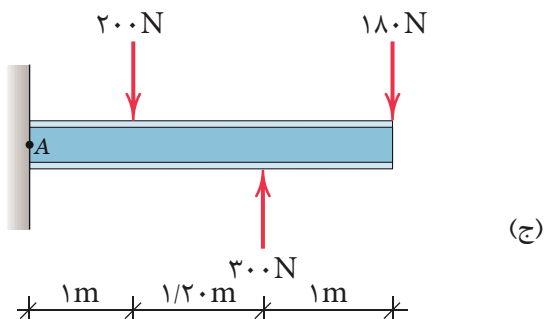
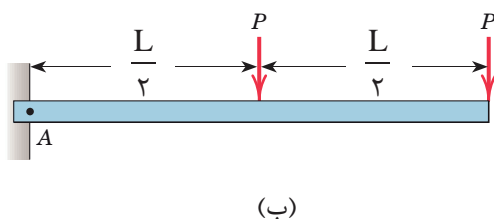
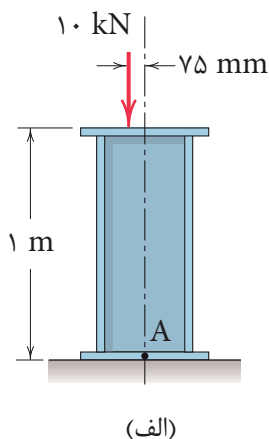
## خلاصه فصل

- نیرو کمیتی است برداری که باعث حرکت، تغییر شکل و یا چرخش اجسام می‌گردد.
- انواع نیرو عبارتند از: نیروهای خارجی، نیروهای داخلی.
- منظور از برآیند دو یا چند نیرو عبارت است از نیرویی که به تنهایی اثر همه نیروها را در خود داشته باشد.
- برای تعیین برآیند چند نیرو از روش تجزیه به مؤلفه‌های متعامد استفاده می‌شود و مقدار برآیند از رابطه  $R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2}$
- و زاویه برآیند با محور x ها از رابطه  $\theta = \tan^{-1} \left| \frac{R_y}{R_x} \right|$  به دست می‌آید.
- گشتاور یک نیرو نسبت به یک محور عبارت است از حاصل ضرب نیرو (F) در کوتاه‌ترین فاصله نیرو تا آن محور (d). و از رابطه  $M = F.d$  به دست می‌آید.
- قضیه وارینون: گشتاور برآیند چند نیرو حول یک نقطه معین برابر است با مجموع گشتاورهای آن‌ها حول همان نقطه.
- به دو نیروی مساوی، موازی و مختلف‌الجهت زوج نیرو گفته می‌شود.
- گشتاور زوج نیرو برابر است با حاصل ضرب یکی از نیروها در فاصله بین آن‌ها.

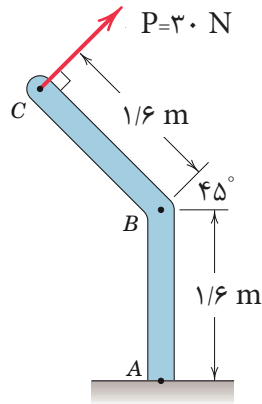
۱- در شکل زیر گشتاور نیروی ۲۵۰ نیوتنی را حول مرکز پیچ محاسبه نموده و جهت گشتاور را تعیین نمایید.



۲- در شکل‌های زیر گشتاور نیرو را حول نقطه A محاسبه نمایید.



۳- گشتاور نیروی P حول نقطه A و B را به دست آورید.



۴- در شکل های زیر مطلوب است محاسبه  $M_A$ .

