

ترسیم‌های هندسی و استدلال



هندسه و به‌ویژه ترسیم‌های هندسی از دیرباز مورد استفاده بشر بوده‌است.

ترسیم‌های هندسی

انسان از دوران باستان تاکنون همواره از هندسه و به‌ویژه از ترسیم‌های هندسی برای حل مسائل مختلف یاری گرفته است. از تقسیم‌بندی زمین‌های کشاورزی تا طراحی انواع ابزارهای کاربردی پیشرفته کنونی، همگی نیازمند ترسیم‌های هندسی است.

فعالیت

(برای مراحل زیر از خط‌کش و پرگار استفاده کنید.)

۱- نقطه‌ای مانند O را در صفحه در نظر بگیرید و نقاطی را مشخص کنید که فاصله یکسانی از نقطه O دارند. (مثلاً همه نقاطی که فاصله‌شان از نقطه O برابر ۲ سانتی‌متر است.)

۲- خط d را در نظر بگیرید و تمام نقاطی که به فاصله ۲ سانتی‌متر از خط d قرار دارند را مشخص کنید.

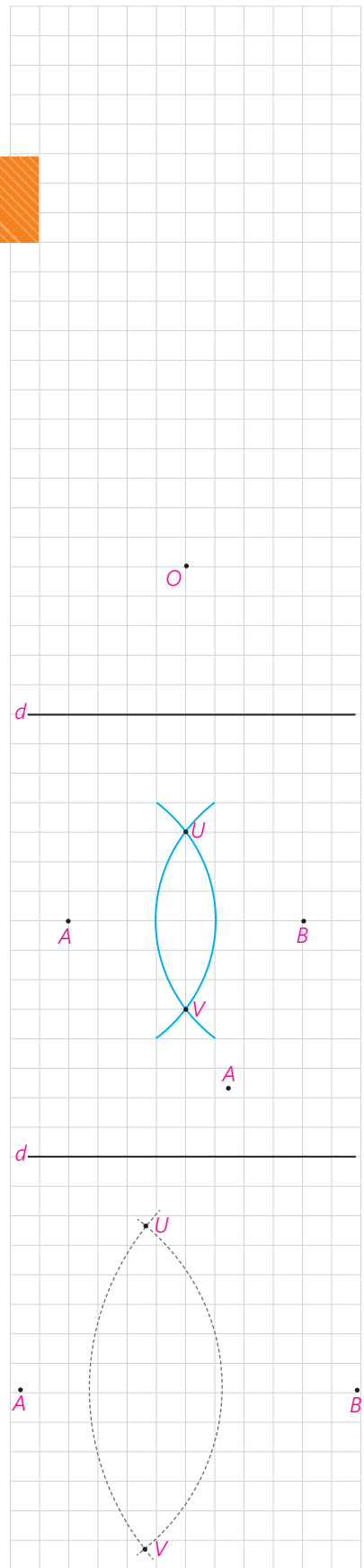
۳- نقاط A و B را در نظر بگیرید. دهانه پرگار را بیش از نصف طول پاره خط AB باز کنید و یک‌بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B و با همان شعاع قبلی کمان بزنید تا یکدیگر را در نقاط U و V قطع کنند. U و V چه ویژگی مشترکی دارند؟

۴- نقطه A ، مانند شکل مقابل به فاصله ۱ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصله ۲ سانتی‌متر از نقطه A باشند.

۵- نقاط A و B را به فاصله ۵ سانتی‌متر از هم در نظر بگیرید. دهانه پرگار را به اندازه ۳ سانتی‌متر باز کنید و از نقطه A یک کمان بزنید. سپس دهانه پرگار را به اندازه ۴ سانتی‌متر باز کنید و از نقطه B یک کمان بزنید.

الف) نقاط روی کمان اول چه ویژگی مشترکی دارند؟

ب) نقاط روی کمان دوم چه ویژگی مشترکی دارند؟



پ) نقاط تقاطع دو کمان فاصله‌شان از نقاط A و B چگونه است؟ برای اینکه چنین نقاط تقاطعی وجود داشته باشند، اندازه شعاع آنها و فاصله نقاط A و B چه شرطی باید داشته باشند؟

ت) طول اضلاع مثلث AUB چقدر است؟

کاردرکلاس

۱- دو نقطه مانند A و B را به فاصله ۳ سانتی متر از هم در نظر بگیرید. نقاطی را بیابید که فاصله‌شان از A، ۲ و از B، $\frac{2}{5}$ سانتی متر باشد.

۲- توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلثی به طول اضلاع ۴ و ۵ و ۶ واحد رسم کرد.

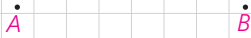
۳- نقاط A و B به فاصله ۷ سانتی متر از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه A برابر _____ و از نقطه B برابر _____ باشد.

جاهای خالی را به گونه‌ای کامل کنید که مسئله زیر:

الف) دو جواب داشته باشد.

ب) یک جواب داشته باشد.

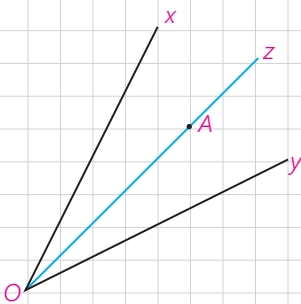
پ) جواب نداشته باشد.



برخی خواص نیمساز و ترسیم آن

فعالیت

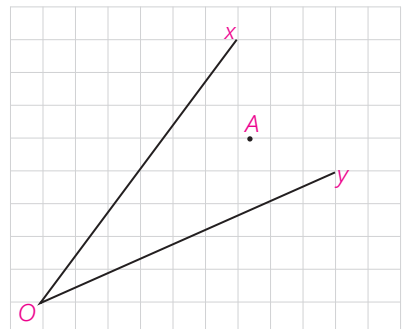
۱- زاویه xOy و نیم خط Oz را نیمساز آن در نظر بگیرید. فرض کنید نقطه A نقطه‌ای دلخواه روی Oz باشد. ثابت کنید که فاصله نقطه A از دو ضلع زاویه xOy یکسان است. (یعنی اگر از نقطه A عمودهایی بر نیم خط‌های Ox ، Oy رسم کنیم طول آنها باهم برابر است.)



نتیجه ۱

اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد .

۲- زاویه xOy و نقطه A را چنان در نظر می‌گیریم که فاصله نقطه A از نیم خط‌های Ox و Oy باهم برابر باشد.
 نشان دهید که نقطه A روی نیمساز زاویه xOy قرار دارد.
 (راهنمایی: پاره خط OA ، و دو عمود از نقطه A بر خطوط Ox و Oy رسم کنید و نشان دهید پاره خط OA همان نیمساز xOy است.)



نتیجه ۲

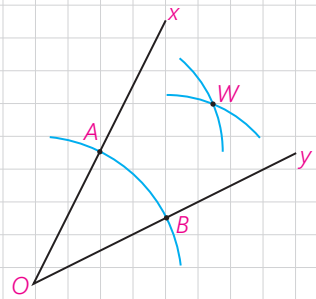
اگر نقطه‌ای به فاصله یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، آن نقطه قرار دارد.

نتیجه

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی یک زاویه قرار داشته باشد، و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی آن زاویه قرار دارد.

فعالیت

- زاویه xOy را در نظر بگیرید. دهانه پرگار را کمی باز کنید و به مرکز O کمانی بزنید تا نیم خط‌های Ox و Oy را به ترتیب در نقاط A و B قطع کند.
 - طول پاره خط‌های OA و OB نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
- دهانه پرگار را کمی باز کنید (بیش از نصف طول AB) و یک بار به مرکز A و بار دیگر با همان اندازه و به مرکز B یک کمان بزنید تا دو کمان مانند شکل در نقطه‌ای مانند W همدیگر را قطع کنند.
 - طول پاره خط‌های AW و BW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
- پاره خط‌های WA و WB و WO را رسم کنید. دو مثلث OAW و OBW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
- اندازه زاویه‌های AOW و BOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
- پاره خط OW برای زاویه xOy چه نوع پاره خطی است؟



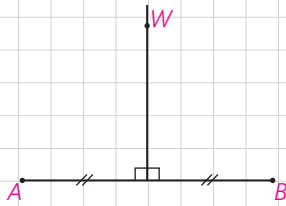
کاردرکلاس

روش رسم نیمساز یک زاویه را توضیح دهید.

برخی خواص عمودمنصف و ترسیم آن

فعالیت

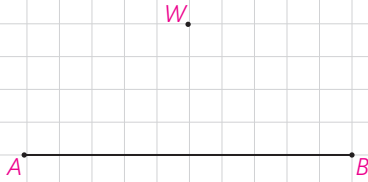
۱- پاره خط AB و عمودمنصف آن را مانند شکل مقابل در نظر بگیرید و فرض کنید W نقطه‌ای روی عمودمنصف AB باشد. نشان دهید نقطه W از دوسر پاره خط AB به یک فاصله است.



نتیجه ۱

اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره خط قرار داشته باشد، از دوسر آن پاره خط

۲- پاره خط AB و نقطه W را به گونه‌ای در نظر بگیرید که نقطه W از A و B به یک فاصله باشد (یعنی $WA = WB$) نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.



(راهنمایی: از نقطه W به A و B و به وسط پاره خط AB وصل کنید و نشان دهید مثلث‌های ایجاد شده باهم هم‌نهشت هستند و از این مطلب استفاده کنید و نشان دهید W روی عمودمنصف پاره خط AB قرار دارد.)

نتیجه ۲

اگر نقطه‌ای از دوسر یک پاره خط به یک فاصله باشد

نتیجه

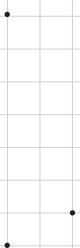
از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره خط باشد و هر نقطه که روی عمودمنصف

فعالیت

۱- یک نقطه را در صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از نقطه مورد نظر بگذرد؟

۲- دو نقطه را در یک صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن دو نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطه مورد نظر بگذرد؟

۳- به نظر شما برای اینکه یک خط به طور کامل مشخص باشد، حداقل چند نقطه از آن خط را باید داشته باشیم؟



فعالیت

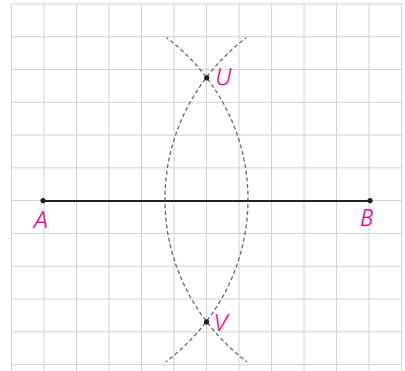
پاره خط AB را مانند شکل مقابل در نظر بگیرید.
 ۱- دهانه پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار از نقطه A و بار دیگر با همان اندازه از نقطه B کمان بزنید تا یکدیگر را در دو نقطه مانند U و V قطع کنند.

۲- طول پاره خط‌های AU و BU نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

۳- طول پاره خط‌های AV و BV نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

۴- آیا می‌توان گفت نقاط U و V روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارند؟ چرا؟

۵- عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید.



کاردرکلاس

مراحل رسم عمود منصف یک پاره خط را توضیح دهید.

رسم خط عمود بر یک خط و رسم خط موازی با یک خط

فعالیت

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن

خط d و نقطه M را روی آن، مانند شکل مقابل در نظر بگیرید. می‌خواهیم خطی بکشیم که از M بگذرد و بر d عمود باشد.

۱- به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d بیابید؛ به گونه‌ای که M وسط پاره خط AB باشد.

۲- عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید.

۳- عمود منصف پاره خط AB خطی است که بر خط d از نقطه _____ و از نقطه _____



کاردرکلاس

مراحل رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن را توضیح دهید.

فعالیت

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیر واقع بر آن

خط d و نقطه T را که غیر واقع بر آن است، مانند شکل مقابل در نظر بگیرید. می‌خواهیم خطی بکشیم که از T بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۱- به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d به گونه‌ای بیابید که از نقطه T به یک فاصله باشند.

۲- عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید.

۳- آیا عمود منصف پاره خط AB از نقطه T می‌گذرد؟ چرا؟

عمود منصف پاره خط AB خطی است که بر خط d _____ و از نقطه _____

کاردرکلاس

روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای غیر واقع بر آن را توضیح دهید.

فعالیت

رسم خط موازی با خط داده شده از یک نقطه غیر واقع بر آن

خط d و نقطه T مانند شکل مقابل داده شده‌اند.

می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطه T بگذرد و با خط d موازی باشد.

۱- خط d_1 را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه T بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۲- خط d_2 را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه T بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد.

۳- خط d_2 نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d_1 را مورب در نظر

بگیرید.)

کاردرکلاس

روش رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای غیر واقع بر آن را توضیح دهید.

تمرین

۱- فرض کنیم هر چهار ضلعی که قطرهایش منصف هم باشند، متوازی الاضلاع است.

متوازی الاضلعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد. چند متوازی الاضلاع

به طول قطرهای ۴ و ۷ می‌توان رسم کرد؟

۲- فرض کنیم هر چهار ضلعی که قطرهایش باهم برابر و منصف هم باشد، مستطیل است. مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۶ سانتی متر باشد.

۳- فرض کنیم که برای لوزی بودن یک چهارضلعی کافی است که قطرهای آن چهارضلعی عمود منصف یکدیگر باشند. ترسیم‌های زیر را انجام دهید.
الف) یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۵ باشد.
ب) یک لوزی به طول ضلع ۵ و طول قطر ۶ رسم کنید.

۴- دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.
الف) نقطه‌ای بیابید که فاصله آن از هر ضلع زاویه مورد نظر ۲ واحد باشد.
ب) با استفاده از نقطه‌ای که در قسمت (الف) یافته‌اید نیمساز زاویه را رسم کنید.

۵- به قسمت (الف) پاسخ دهید و از نتیجه آن در قسمت (ب) استفاده کنید.
الف) وتری مانند AB از یک دایره را در نظر بگیرید. وضعیت عمود منصف AB و مرکز دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

ب) آیا می‌دانستید که در زمین فوتبال نقطه پنالتی مرکز دایره‌ای است که قسمتی از قوس آن در جلوی محوطه جریمه کشیده شده است؟
یک داور فوتبال لحظه‌ای که اعلام پنالتی می‌کند، متوجه می‌شود که نقطه پنالتی مشخص نیست. اگر او وسایل لازم برای کشیدن خط راست و کمان دایره را داشته باشد، چگونه می‌تواند با استفاده از قوس جلوی محوطه هجده قدم، نقطه پنالتی را مشخص کند.



استدلال



شیوه درست استدلال در زندگی هر فرد و نیز در جامعه انسانی اهمیت فراوانی دارد. استدلال نادرست در بسیاری مواقع، نتیجه‌گیری‌های غلط، تیره‌شدن روابط، ایجاد باورهای نادرست و پیامدهای خطرناک فردی و اجتماعی دیگری را در پی خواهد داشت و حتی ممکن است به ایجاد مشکلات شخصیتی در افراد بینجامد. ممکن است فردی با استدلال‌هایی این‌گونه، همواره راه موفقیت را بر خود بسته ببیند:

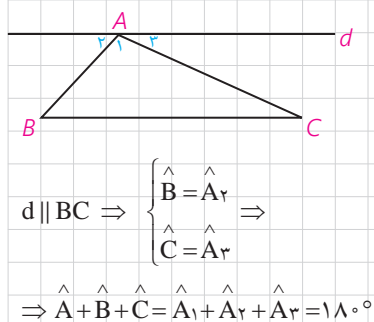
– من در اولین امتحانم موفق نشدم، پس در امتحان‌های بعدی نیز موفق نخواهم شد.

– تیم مورد علاقه من از ابتدای فصل در تمام بازی‌هایش شکست خورده است، پس در بازی آینده نیز شکست خواهد خورد.

■ استقرا و استنتاج

در سال‌های قبل تاحدی با استدلال و اثبات آشنا شدید. نوعی از استدلال، که با آن روبه‌رو شدید به این صورت بود که از مشاهدات و بررسی موضوعی در چند حالت، نتیجه‌ای کلی در آن موضوع گرفته می‌شود یا به اصطلاح «از جزء به کل می‌رسیم». البته با چنین استدلالی نمی‌توان همواره به درستی نتیجه گرفته شده مطمئن بود.

به‌طور مثال اگر فردی با مشاهده اینکه سه نفر از افراد یک کلاس به رنگ سبز علاقه دارند، نتیجه‌گیری کند که همه افراد آن کلاس به رنگ سبز علاقه دارند، فرد مورد نظر از استدلال استقرایی استفاده کرده است.



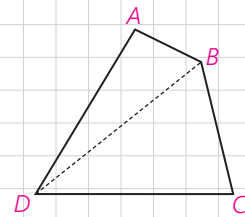
نوع دیگری از استدلال که با آن آشنا شدید، براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایه واقعیت‌هایی است که درستی آنها را پذیرفته‌ایم و به آن استدلال استنتاجی گفته می‌شود. به‌طور مثال با دانستن رابطه بین خطوط موازی و مورب و زوایای بین آنها، اثبات اینکه مجموع زوایای داخلی یک مثلث 180° است به طریق مقابل، یک استدلال استنتاجی است که با نمادهای ریاضی نوشته شده است. توجه کنید که استدلال استنتاجی را به صورت کلامی نیز می‌توان انجام داد.

به استدلال‌هایی که دو دانش‌آموز برای مسئله زیر ارائه داده‌اند، دقت کنید و در مورد میزان اعتبار هریک از آنها گفت‌وگو کنید.

مسئله: مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.

پژمان: در تمام چهارضلعی‌های مربع، مستطیل، لوزی و متوازی‌الاضلاع با توجه به اینکه زاویه‌های مجاور مکمل یکدیگرند به‌سادگی ثابت می‌شود که مجموع زوایای داخلی آنها 360° است. بنابراین مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.

پیمان: می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است. یک چهارضلعی دلخواه مانند ABCD در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم و دو رأس مقابل آن، مثلاً D و B را به هم وصل می‌کنیم. مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD با مجموع زاویه‌های داخلی دو مثلث $\triangle ABD$ و $\triangle BCD$ برابر است؛ بنابراین مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD برابر است با 360° .



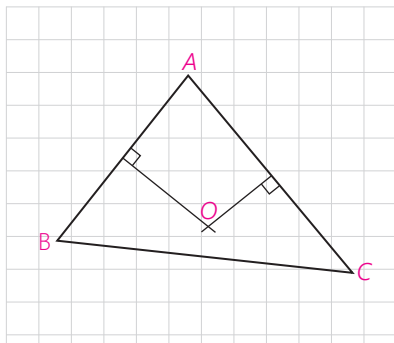
پیمان ادعا می‌کند که با این استدلال ثابت می‌شود که مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی برابر 360° است. آیا به نظر شما این ادعای او درست است؟

آیا همین استدلال را برای هر چهارضلعی دیگری که به شما بدهند، می‌توانید به کار ببرید؟ اگر جواب شما مثبت است، پس این ویژگی را که «مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD در مسئله قبل برابر 360° است»، به سایر چهارضلعی‌های محدب می‌توان تعمیم داد.

– نوع استدلال ارائه‌شده توسط هر کدام از دانش‌آموزان را بیان کنید.

مثال: می‌دانیم که هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد.

حال با کامل کردن استدلال استنتاجی بیان شده نتیجه بگیرید که سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث هم‌س‌اند (در یک نقطه به هم می‌رسند).



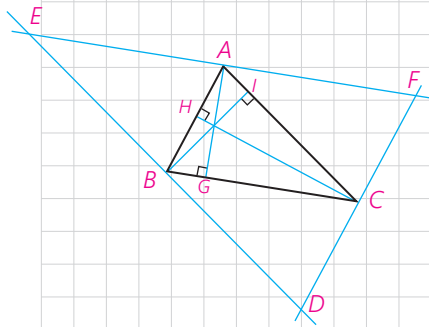
استدلال: مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. چون پاره‌های AB و AC متقاطع‌اند، عمود منصف‌های آنها نیز در نقطه‌ای مانند O متقاطع‌اند.

۱- نقطه O روی عمود منصف پاره خط AC است؛ بنابراین $AO = CO$

۲- نقطه O روی عمود منصف پاره خط AB است؛ بنابراین $AO = BO$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: $AO = BO = CO$ بنابراین نقطه O روی $AO = BO = CO$ قرار دارد. در نتیجه نقطه O محل برخورد $AO = BO = CO$.

مثال: استدلال استنتاجی زیر را کامل کنید و نتیجه بگیرید که سه ارتفاع هر مثلث هم‌رس‌اند.



استدلال: مثلث دلخواه ABC را در نظر بگیرید و از هر رأس آن خطی به موازات ضلع مقابل به آن رأس رسم کنید تا مطابق شکل مقابل مثلثی مانند DEF به وجود آید.

مثلث ABC با مثلث‌های ACF و ABE هم‌نهشت است (چرا؟).

بنابراین $AE = BC = AF$ و لذا نقطه A پاره خط EF است.

$$\left. \begin{array}{l} AG \perp BC \\ BC \parallel EF \end{array} \right\} \Rightarrow AG \perp EF \quad \text{از طرفی:}$$

لذا خط AG پاره خط EF است.

به‌طور مشابه می‌توان نشان داد:

پاره خط BI، پاره خط DE است.

پاره خط CH، پاره خط DF است.

بنابراین، ارتفاع‌های مثلث ABC، روی عمود منصف‌های اضلاع مثلث هستند و در نتیجه هم‌رس‌اند.

مثال: می‌دانیم که هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. حال با کامل کردن استدلال استنتاجی بیان شده نتیجه بگیرید که نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث هم‌رس‌اند.

استدلال: مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. نیمسازهای زاویه‌های A و B مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌ای مانند P قطع می‌کنند. از نقطه P، مانند شکل سه عمود به اضلاع مثلث رسم می‌کنیم.

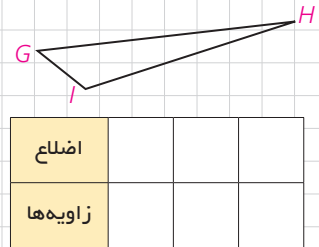
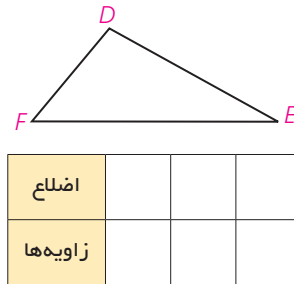
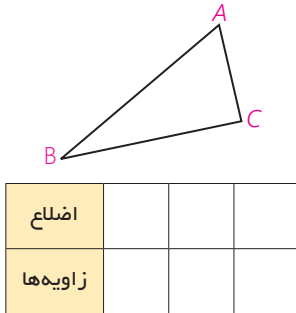
۱- نقطه P روی نیمساز زاویه A است؛ بنابراین $PE = PF$

۲- نقطه P روی نیمساز زاویه B است؛ بنابراین $PE = PG$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: $\text{_____} = \text{_____}$ بنابراین نقطه P روی _____ در نتیجه نقطه P محل برخورد _____ .

فعالیت

به مثلث‌های زیر دقت کنید. در سطر اول جدول، نام اضلاع مثلث را به ترتیب از بزرگ به کوچک و در سطر دوم، نام زاویه‌های مثلث را نیز به ترتیب از بزرگ به کوچک بنویسید.

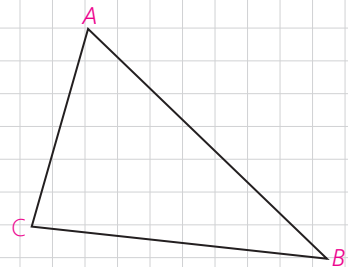


چه رابطه‌ای بین هر ضلع و زاویه زیر آن وجود دارد؟
 با توجه به این رابطه درباره یک مثلث دلخواه چه حدسی می‌توان زد؟
 برای رسیدن به این حدس از چه نوع استدلالی استفاده کردید؟
 آیا با این استدلال می‌توان مطمئن بود که حدس مورد نظر درست است؟

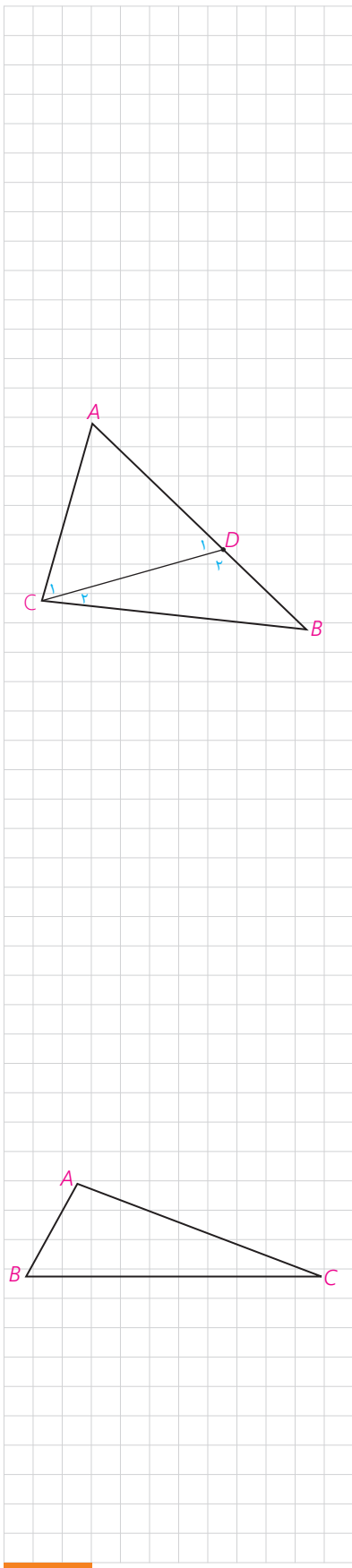
مسئله: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، **بزرگ‌تر است** از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.

استدلال: برای واضح شدن مطلب و کمک به حل مسئله، شکل مثلث را رسم می‌کنیم. آیا می‌توان هر نوع مثلث دلخواهی کشید؟ مانند آنچه در مسئله گفته شده است، مثلثی می‌کشیم که دو ضلع نابرابر داشته باشد و ویژگی خاص دیگری نداشته باشد.

فرض: $AB > AC$
 حکم: $\text{_____} > \text{_____}$



۱- در مثلث متساوی الساقین زوایای روبه‌رو به ساق‌ها با هم برابرند.
 ۲- اندازه هر زاویه خارجی یک مثلث برابر است با مجموع اندازه‌های دو زاویه داخلی غیرمجاورش. بنابراین هر زاویه خارجی مثلث از هر زاویه داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است.



می‌دانیم طبق فرض $AB > AC$ است؛ لذا می‌توانیم نقطه D را روی AB جایی انتخاب کنیم که $AC = AD$

★ اندازه زاویه‌های C_1 و C_2 نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{C}_1 \square \hat{C}_2$

مثلث ADC چه نوع مثلثی است؟

★★ اندازه زاویه‌های C_1 و D_1 نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{C}_1 \square \hat{D}_1$

زاویه D_1 چه نوع زاویه‌ای برای مثلث DBC است؟

★★★ اندازه زاویه‌های D_1 و B نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{D}_1 \square \hat{B}$

از \star و $\star\star$ و $\star\star\star$ چه نتیجه‌ای درباره اندازه زاویه‌های B و C می‌توان گرفت؟ $\hat{C} \square \hat{B}$

همان‌طور که مشاهده کردید در مثلثی مانند $\triangle ABC$ فرض کردیم که ضلع $AB > AC$ است و نشان دادیم: زاویه روبه‌رو به $AC >$ زاویه روبه‌رو به AB است. چرا می‌توان این موضوع را درباره تمام مثلث‌هایی که دو ضلع نابرابر دارند، پذیرفت؟ برخی نتایج مهم و پرکاربرد که مانند مسئله قبل با استدلال استنتاجی به دست می‌آید، قضیه نامیده می‌شود.

قضیه ۱: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.

فرض: $AB < AC$
 حکم: $\hat{C} < \hat{B}$

– بار دیگر به آنچه انجام شد، دقت کنید. بررسی اندازه‌های اضلاع و زوایای مثلث‌های مختلف، دقت در کشف رابطه میان این اندازه‌ها، حدس در برقراری رابطه‌ای خاص، طرح مسئله، اثبات درستی مسئله و نهایتاً نتیجه‌گیری.

بسیاری از نتایج ریاضی، طی چنین مراحل طی توسط علاقه‌مندان به ریاضی به دست آمده است. مراحل این روند و حتی حدس‌ها و تفکراتی که درست نیست اما در این مراحل صورت می‌گیرد، می‌تواند موجب ارتقای تفکر ریاضی شود.

اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم به آنچه حاصل می‌شود «عکس قضیه» گفته می‌شود. عکس یک قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.

به طور مثال عکس قضیه ۱ به صورت زیر است :

عکس قضیه ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر.

فرض: $\hat{C} < \hat{B}$
حکم: $AB < AC$

مثال:

قضیه: اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.

عکس قضیه: اگر در یک چهارضلعی قطرهای یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مثال:

قضیه: اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

فرض: $AB = AC$

حکم: $BH = CH'$

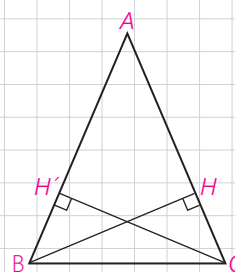
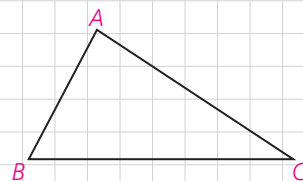
عکس قضیه: اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

فرض: $BH = CH'$

حکم: $AB = AC$

در واقع معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض، که حکم از آن ناشی می‌شود با حکم جابه‌جا می‌شود؛ مثلاً در مثال قبل مثلث بودن ABC و ارتفاع بودن BH و CH' در خود قضیه و عکس آن جزء مفروضات است.

عکس قضیه ۱ در صفحات بعد اثبات شده است.



گزاره یک جمله خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد، اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد. گزاره می‌تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن گزاره ساده می‌گویند و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از چند گزاره ساده باشد که به آن گزاره مرکب می‌گویند؛ مثلاً گزاره‌های «فردا هوا بارانی است» و «پانزده عددی اول است»، هرکدام یک گزاره ساده است و «فردا هوا بارانی و پانزده یک عدد اول است» یک گزاره مرکب است.

مثال :

الف) جمله‌های زیر گزاره‌اند :

– مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° درجه است.

– $3 < 2$

ب) جمله‌های زیر گزاره نیستند :

– آیا فردا هوا بارانی است؟

– چه هوای خوبی!

– کتابت را مطالعه کن.

نقیض یک گزاره : همان‌طور که گفته شد، ارزش یک گزاره یا درست است و یا نادرست. نقیض یک گزاره مانند مثال‌های زیر ساخته می‌شود و ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره است.

مثال :

الف) گزاره : «a از b بزرگ‌تر است.»

نقیض آن : «چنین نیست که a از b بزرگ‌تر باشد.» که معادل است با «a از b بزرگ‌تر نیست.» و معادل است با «a از b کوچک‌تر و یا با b برابر است.»

ب) گزاره : «مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.»

نقیض آن : «چنین نیست که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.» که معادل است با «مثلی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 180° نیست.»

پ) گزاره : «یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی اش 360° نیست.»

نقیض : «چنین نیست که یک چهارضلعی وجود داشته باشد که مجموع زوایای داخلی اش 360° نیست.» که معادل است با «هر چهارضلعی مجموع زوایای داخلی اش 360° است.»

در برخی گزاره‌ها به جای اینکه درباره چیزی خبری قطعی داده شود، خبری که اعلام می‌شود با یک شرط بیان می‌شود؛ مثلاً «اگر باران بیارد، مسابقه برگزار نخواهد شد.» به چنین گزاره‌هایی، گزاره‌های شرطی می‌گویند.

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی کاربرد دارد، **برهان غیرمستقیم** یا **برهان خلف** است. بدین صورت که به جای اینکه به طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم غلط باشد (یا به عبارتی فرض می‌کنیم، نقیض حکم درست باشد) و به یک تناقض یا به یک گزاره غلط یا غیرممکن می‌رسیم. در این حالت نتیجه می‌گیریم که فرض غلط بودن حکم نادرست بوده و حکم نمی‌تواند غلط باشد.

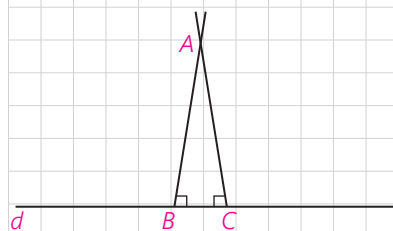
مثال: از یک نقطه غیر واقع بر خط نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد.

فرض: نقطه‌ای مانند A غیر واقع بر خطی مانند d وجود دارد.

حکم: از نقطه A نمی‌توان بیش از یک عمود بر خط d رسم کرد.

استدلال: با برهان غیرمستقیم فرض می‌کنیم حکم غلط باشد؛ یعنی فرض می‌کنیم از نقطه A دو عمود بر خط d رسم کرده‌ایم که مانند شکل، خط d را در نقاط B و C قطع کرده‌اند. در این صورت مجموع زوایای داخلی مثلث ABC بزرگ‌تر از 180° خواهد شد و این غیرممکن است. پس امکان رسم دو عمود از یک نقطه غیر واقع بر یک خط وجود ندارد؛ یعنی حکم نمی‌تواند غلط باشد.

حال می‌خواهیم درستی عکس قضیه ۱ را با برهان غیرمستقیم ثابت کنیم.



عکس قضیه ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع مقابل به زاویه بزرگ‌تر، **بزرگ‌تر است** از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر.

برای واضح شدن مسئله و کمک به حل آن، شکل مثلث را رسم می‌کنیم و با استفاده از آن فرض و حکم را می‌نویسیم.

فرض: $\hat{A} > \hat{B}$

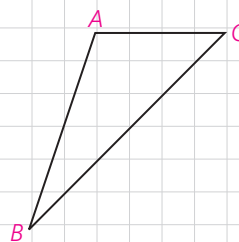
حکم: $BC > AC$

اثبات: با برهان غیرمستقیم فرض می‌کنیم حکم _____ باشد. بنابراین باید _____ یا _____.

هر دو حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم هر دو حالت به تناقض منجر می‌شود.

حالت اول: اگر $BC < AC$ باشد، طبق قضیه ۱ باید _____ که با فرض در تناقض است.

حالت دوم: اگر $BC = AC$ باشد، $\triangle ABC$ یک مثلث _____ خواهد بود و می‌دانیم در این حالت باید $\hat{A} = \hat{B}$ باشد که در تناقض با فرض است. لذا هر دو حالت $BC < AC$ و $BC = AC$ غیرممکن‌اند؛ بنابراین $BC > AC$ است و حکم درست است.



قضیه‌های دوشرطی

همان گونه که دیدیم، قضیه ۱ و عکس آن هر دو درست است؛ بنابراین می‌توانیم بگوییم که :

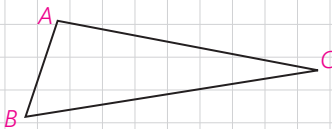
اگر در مثلثی، دو ضلع نابرابر باشند، زاویهٔ مقابل به ضلع بزرگ‌تر، **بزرگ‌تر است** از زاویهٔ مقابل به ضلع کوچک‌تر، و برعکس.

چنین قضیه‌هایی را «قضیه‌های دوشرطی» می‌نامیم.

قضیه‌های دوشرطی را می‌توان با نماد \Leftrightarrow (اگر و تنها اگر) بیان کرد؛ به‌طور مثال قضیهٔ فوق و عکس آن را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد :

فرض کنیم $\triangle ABC$ یک مثلث باشد

$$BC > AB \Leftrightarrow \hat{A} > \hat{C}$$



مثال : در یک مثلث، دو ضلع با هم برابرند؛ اگر و تنها اگر ارتفاع‌های نظیر آنها با هم برابر باشند.

مثال نقض

نوع دیگری از استدلال که با آن آشنا شده‌اید، استدلال با مثال نقض است. گاهی در برخی موضوعات (چه ریاضی و چه غیرریاضی) یک حکم به‌صورت کلی بیان می‌شود؛ بدین صورت که در مورد تمام اعضای یک مجموعه یک حکم بیان می‌شود. موارد زیر نمونه‌هایی از حکم‌های کلی است :

(الف) «همهٔ اعداد صحیح، مثبت‌اند.» (حکمی کلی در مورد تمام اعداد صحیح)

(ب) «هر چهار ضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است.» (حکم کلی در مورد تمام چهارضلعی‌هایی که چهار ضلع برابر دارند)

(پ) «مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.» (حکم کلی در مورد تمام چهارضلعی‌های محدب)

(ت) «به‌ازای هر عدد طبیعی n ، مقدار عبارت $n^2 + n + 41$ عددی اول است.» (حکم کلی در مورد تمام اعداد طبیعی)

حدس خود را دربارهٔ درستی یا نادرستی حکم کلی «الف» بنویسید. چگونه می‌توانید درستی حدس خود را ثابت کنید؟

می‌دانیم که (-2) یک عدد صحیح و منفی است؛ بنابراین حکم کلی «الف» با ارائهٔ

همین مثال رد می‌شود. به چنین مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی نادرست است، **مثال نقض** گفته می‌شود. دربارهٔ درستی یا نادرستی «ب» چه می‌توانید بگویید؟

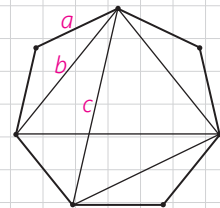
اگر برای یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض بیابیم، دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم چه می‌توان گفت؟ آیا در موارد (پ) و (ت) می‌توانید مثال نقض پیدا کنید؟

آیا اگر در مورد یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض پیدا کنیم، باید درستی آن حکم کلی را نتیجه‌گیری کنیم؟ در مورد (پ) مثال نقض وجود ندارد؛ اما این برای پذیرش حکم کلی (پ) کافی نیست و باید توجه کرد که «برای نشان دادن درستی یک حکم کلی باید اثبات ارائه کنیم.» دربارهٔ گزینهٔ (ت) چه می‌توان گفت؟

اگر درستی یا نادرستی یک حکم کلی را نتوانیم اثبات کنیم و برای رد آن مثال نقض نیز نتوانیم بیابیم، نمی‌توان دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم کلی نتیجه‌ای گرفت.

کاردکلاس

۱- در شکل مقابل نقطه‌ها، رأس‌های یک هفت‌ضلعی منتظم به طول ضلع a می‌باشند. فاصلهٔ هر رأس از رأس بعدی برابر a و از دومین رأس بعد از آن برابر b و از سومین رأس بعد از آن برابر c است. آیا حکم کلی زیر درست است؟ «با وصل کردن هر سه رأس از این شکل یک مثلث متساوی‌الساقین، به دست می‌آید.»



۲- آیا حکم‌های کلی زیر درست است؟ چرا؟

الف) برای هر دو مجموعهٔ A و B ، یا $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$

ب) هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، هم‌نهشت‌اند.



تمرین

۱- می‌دانیم که از یک نقطهٔ خارج از یک خط فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.

۲- با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC ، $AB \neq AC$ ، آنگاه $\hat{B} \neq \hat{C}$.

۳- گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) در هر مثلث، اندازه بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازه کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

۴- نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) هر لوزی یک مربع است.

ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.

پ) مثلثی با دو زاویه قائمه وجود ندارد.

ت) همه فلزات جامدند.

۵- عکس هر یک از قضایای زیر را بنویسید و سپس آنها را به صورت یک قضیه

دوشرطی بنویسید.

الف) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه روبه‌رو به آنها نیز برابرند.

ب) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهایش عمود منصف یکدیگرند.

پ) در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

ت) اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت‌های برابر نیز دارند.

۶- فرض کنیم ABC مثلثی دلخواه و AD نیمساز زاویه A باشد. دلایل هر یک از

نتایج زیر را بنویسید و نتیجه نهایی که در پایان آمده است را کامل نمایید.

الف) $\hat{D}_2 > \hat{A}_1$ ، زیرا _____ .

ب) $\hat{D}_2 > \hat{A}_2$ ، زیرا _____ .

پ) $AC > DC$ ، زیرا _____ .

ت) با روندی مشابه سه قسمت قبل نشان دهید: $AB > BD$

ث) حال نشان دهید: $AB + AC > BC$

نتیجه: در هر مثلث، مجموع اندازه‌های هر دو ضلع از اندازه _____ ، _____

است.

