درس ۲ مجموعه ـ زیر مجموعه

یادآوری : در سال‌های قبل با مفهوم مجموعه آشنا شده‌اید؛ برای مثال، مجموعهٔ اعداد اوّل یک‌رقمی به صورت زیر است :

$A=\{۲,۳,۵,۷\}$

می‌توان این مجموعه را با نمادهای ریاضی به صورت $A=\{x \in P \mid x<۱۰\}$ نوشت که در آن P مجموعهٔ اعداد اوّل است. چون عضو ۲ متعلق به مجموعهٔ A است، می‌نویسیم : $۲\in A$، از طرفی واضح است که $۶\notin A$ یعنی عضو ۶ به مجموعهٔ A تعلق ندارد.

کار در کلاس

۱ فرض کنید $A=\{a , b\}$، درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $\{a\} \in A$ ب) $\varnothing\in A$

پ) $\{a\} \subseteq A$ ت) $b\subseteq A$

ث) $a \in A$ ج) $\{a , b\} \subseteq A$

۲ کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر با تهی و کدام یک ناتهی‌اند؟

الف) $\{x \in\mathbb{Z} \mid x^۲=۹$ و $۲x=۴\}$ ب) $\{x \in\mathbb{Z} \mid x+۸=۸\}$

پ) $\{x \in\mathbb{Z} \mid x \neq x\}$ ت) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^۲=۷x\}$

۳ مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضای آنها مشخص کنید.

$A=\{x \in\mathbb{Z} \mid |x| \leq۲\}$

$B = \{m\in\mathbb{Z} \mid m^۳ = m\}$

$C =\{k\in \mathbb{R} \mid k^۲-۱=۰\}$

$D =\{a\in S \mid$ فضای نمونه پرتاب یک تاس است $S\}$

۴ با توجه به مجموعه‌ها در قسمت ۳، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

$A\cap D\subseteq C$ $B\subseteq A$ $B\in A$

$B-D\subseteq A$ $C \not\subseteq A$ $B\subseteq C\cup A$

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه

فعالیت

مجموعه $A=\{a , b , c\}$ را در نظر بگیرید.

۱ همهٔ زیرمجموعه‌های A را بنویسید.

۲ با دو رقم ۰ و ۱ می‌توانیم زیرمجموعه $B=\{b , c\}$ از مجموعهٔ A را با کد سه رقمی ۰۱۱ مشخص کنیم؛ چون $a \notin B$ متناظر با آن کد ۰ و $c \in B$ و b متناظر با آنها کد ۱ را در نظر گرفته‌ایم. همچنین زیرمجموعهٔ $A \supseteq \{a\}$ را با کد ۱۰۰ متناظر می‌کنیم. اکنون شما بقیهٔ زیرمجموعه‌های A را با کدهایی سه رقمی نظیر کنید.

۳ با این روش کدگذاری و به کمک اصل ضرب (سال گذشته در فصل شمارش، بدون شمردن خوانده‌اید) تعداد زیرمجموعه‌های A را تعیین کنید.

رقم سوم   رقم دوم   رقم اوّل

۴ فرض کنید $A=\{a_1 , a_2 , a_3 , a_4\}$، با روش کدگذاری با رقم‌های ۰ و ۱ و به کمک اصل ضرب تعیین کنید که A چند زیرمجموعه دارد.

رقم چهارم   رقم سوم   رقم دوم   رقم اوّل

۵ اگر $A=\{a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n\}$ در این صورت، با این روش کدگذاری مشخص کنید که A چند زیرمجموعه دارد.

رقم nام   …   رقم سوم   رقم دوم   رقم اول

فرض کنید A یک مجموعه n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های A برابر با 2^n است.

مثال : مجموعه $A=\{a , \{a\} , \varnothing\}$ را در نظر بگیرید و همهٔ زیرمجموعه‌های A را در یک مجموعه بنویسید.

خواندنی

مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های A، مجموعهٔ توانی A نامیده می‌شود و آن را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم.

اگر A، n عضو داشته باشد، در این صورت $P(A)$، 2^n عضو دارد.

اگر $A \subseteq B$ به‌طوری که $A \neq B$، آن‌گاه A زیرمجموعهٔ محض یا سرهٔ B نامیده می‌شود.

مثال : مجموعهٔ متناهی A را در نظر بگیرید، اگر ۲ عضو به اعضای A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴۸ واحد افزایش می‌یابد، مشخص کنید A چند عضوی است.

حل : فرض کنیم A، n عضو داشته باشد، پس دارای 2^n زیرمجموعه است؛ اگر ۲ عضو به اعضای A اضافه شود، در این صورت تعداد زیرمجموعه‌های A، ۴۸ واحد افزایش می‌یابد؛ یعنی در این حالت، تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه برابر با 2^n+48 است.

از طرفی وقتی ۲ عضو به اعضای A اضافه می‌شود، تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه جدید، برابر است با 2^{n+2} است.

بنابراین داریم :

$$2^n+48 = 2^{n+2}= 2^n \times 2^2$$

$$\Rightarrow 2^n+48=4\times 2^n \Rightarrow 4\times 2^n-2^n=48$$

$$\Rightarrow 3\times 2^n=48 \Rightarrow 2^n=16=2^4 \Rightarrow n=4$$

در نتیجه مجموعهٔ A، چهار عضوی است.

افراز یک مجموعه

فعالیت

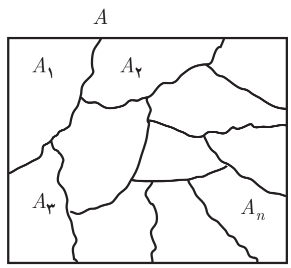
۱ مجموعهٔ $A=\{a, b, c\}$ را در نظر بگیرید. تمام زیرمجموعه‌های A به غیر از $\varnothing$ را بنویسید.

۲ از بین زیرمجموعه‌های ناتهی A که در بالا نوشتید، دو زیرمجموعه چنان در نظر بگیرید که اوّلاً اشتراکی نداشته باشند و ثانیاً اجتماع آنها برابر با A شود.

۳ همهٔ جواب‌های ممکن برای قسمت قبل را به‌دست آورید.

۴ آیا می‌توان سه زیرمجموعه در قسمت ۱ چنان یافت که اشتراک دوبه‌دوی آنها تهی باشد و اجتماع آنها برابر با A شود؟

فرض کنیم $A\neq\varnothing$ یک مجموعه و $A_1, A_2, \ldots, A_n$ زیر مجموعه‌های A باشند. مجموعهٔ A به n زیرمجموعه $A_1, A_2, \ldots, A_n$ افراز شده است، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد.



I) $\forall\ 1 \leq i\leq n ; A_i\neq\varnothing$

II) $\forall i, j\ (i\neq j ; A_i\cap A_j=\varnothing)$

III) $A_1\cup A_2\cup \ldots \cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n} A_i= A$

کار در کلاس

مجموعهٔ $A=\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ را در نظر بگیرید، کدام یک از حالت‌های زیر یک افراز برای A محسوب می‌شود؟

۱ $\{1, 3, 5\}$ و $\{2, 6\}$ و $\{4, 8, 9\}$

۲ $\{1, 3, 5\}$ و $\{2, 4, 6, 8\}$ و $\{5, 7, 9\}$

۳ $\{1, 3, 5\}$ و $\{2, 4, 6, 8\}$ و $\{7, 9\}$

تعریف زیر مجموعه به کمک نمادهای ریاضی

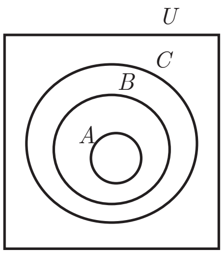
فرض کنید A و B دو مجموعه باشند به طوری که هر عضو A، عضوی از B باشد، در این صورت A را زیرمجموعهٔ B نامیده و می‌نویسند $A\subseteq B$. اگر عضوی در A وجود داشته باشد، به طوری که آن عضو در مجموعهٔ B نباشد، در این صورت A زیرمجموعه B نیست و می‌نویسند $A\not\subseteq B$. با استفاده از نمادهای ریاضی می‌توان تعریف‌های $A\subseteq B$ و $A\not\subseteq B$ را به صورت زیر نوشت:

$$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,;\,(x\in A \Rightarrow x\in B)$$

$$A\not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x\,;\,(x\in A \wedge x\notin B)$$

روش عضوگیری دلخواه

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم $A\subseteq B$ و اعضای مجموعه‌های A و B در دسترس نباشند، کافی است عضوی دلخواه مانند x از A فرض کنیم، سپس با استفاده از فرض‌های داده شده نشان دهیم که x در B وجود دارد. از آنجا که x دلخواه بوده است در واقع هر عضو A در B است. بنابراین، با توجه به تعریف زیرمجموعه، ثابت کرده‌ایم $A\subseteq B$. در زیر چند ویژگی مهم در مجموعه‌ها با روش عضوگیری دلخواه ثابت شده است.



ویژگی ۱ــ فرض کنید A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، به طوری که $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ ثابت کنید $A\subseteq C$.

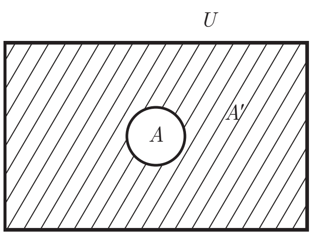
اثبات: برای اثبات $A\subseteq C$، باید ثابت کنیم که: $\forall x\,;\,(x\in A \Rightarrow x\in C)$

برای این منظور از فرض‌ها یعنی $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ استفاده می‌کنیم.

$$\forall x\,;\; x\in A \overset{A\subseteq B}{\Rightarrow} x\in B \overset{B\subseteq C}{\Rightarrow} x\in C$$

در نتیجه داریم:

$$\forall x\,;\,(x\in A \Rightarrow x\in C) \Rightarrow A\subseteq C$$



ویژگی ۲ــ فرض کنید A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A\subseteq B$. ثابت کنید $B'\subseteq A'$. (A' و B' به ترتیب متمم‌های مجموعه‌های A و B هستند).

قبل از اثبات این ویژگی، تعریف متمم یک مجموعه را یادآوری می‌کنیم. فرض کنیم A مجموعه‌ای با مرجع U باشد، متمم مجموعهٔ A برابر با مجموعهٔ اعضایی از U است که متعلق به مجموعهٔ A نباشند و آن را با A' نمایش می‌دهند.

$$A'=\{x\in U \mid x\notin A\}$$

از این تعریف نتیجه می‌گیریم که اگر $x\in A$ آن‌گاه $x\notin A'$ یا اگر $x\in A'$ آن‌گاه $x\notin A$.

اثبات: برای اینکه ثابت کنیم $B'\subseteq A'$ باید نشان دهیم که: $\forall x\,;\,(x\in B' \Rightarrow x\in A')$ بنابراین داریم:

$$\forall x\,;\,(x\in B' \Rightarrow x\notin B \overset{A\subseteq B}{\Rightarrow} x\notin A \Rightarrow x\in A')$$

در نتیجه داریم:

$$\forall x\,;\,(x\in B' \Rightarrow x\in A') \Rightarrow B'\subseteq A'$$

ویژگی ۳ــ برای هر مجموعه دلخواه مانند A با مجموعه مرجع U ثابت کنید : $\varnothing\subseteq A$.

اثبات : برای اثبات $\varnothing\subseteq A$ باید نشان دهیم که ارزش گزاره شرطی $\forall x\,;\,(x\in\varnothing \Rightarrow x\in A)$ همواره درست است. چون در این گزارهٔ شرطی، ارزش مقدّم یعنی $x\in\varnothing$ نادرست است، پس به انتفای مقدّم ارزش گزارهٔ شرطی درست است و در نتیجه $\varnothing\subseteq A$.

کار در کلاس

۱ برای مجموعه‌های A و B با مرجع U ثابت کنید که $A\subseteq A\cup B$.

اثبات :

$$\forall x;\ (x\in A \Rightarrow x\in A \vee x\in B)\Rightarrow x\in A\cup B$$

بنابراین داریم :

$$\forall x;(x\in A \Rightarrow x\in A\cup B)\Rightarrow A\subseteq A\cup B$$

درستی استدلال بالا را توضیح دهید.

۲ فرض کنیم A و B و C و D چهار مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید : اگر $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ آن‌گاه $A\cup C\subseteq B\cup D$.

اثبات : جاهای خالی را پر کنید :

$$\forall x;[x\in(A\cup C)]\Rightarrow\begin{cases}x\in A\Rightarrow\cdots & (\text{زیرا } A\subseteq B)\\ \vee & \vee\\ \cdots\ \Rightarrow\ x\in D & (\text{زیرا } C\subseteq D)\end{cases}\ \Rightarrow x\in B\ \vee\ x\in D\Rightarrow\ldots\ldots$$

بنابراین داریم :

$$\forall x;\ [x\in(A\cup C)\Rightarrow x\in(B\cup D)]\Rightarrow\cdots\cdots$$

۳ فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید : اگر $A\subseteq C$ و $B\subseteq C$ آن‌گاه $(A\cup B)\subseteq C$.

راهنمایی : از ویژگی قسمت ۲ استفاده کنید.

دو مجموعه مساوی

فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند به طوری که هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B عضوی از A باشد؛ یعنی $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$، در این صورت A با B مساوی است و می‌نویسیم : $A=B$. به عبارت دیگر می‌توان تساوی دو مجموعه را به صورت زیر نوشت :

$$A=B\Leftrightarrow[(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)]$$

کار در کلاس

فرض کنید $A=\{۱,۲\}$، کدام یک از مجموعه‌های زیر با A مساوی است؟ (با ذکردلیل).

الف) $\{x\in\mathbb{Q}\mid x^۲-۳x+۲=۰\}$ ب) $\{x\in\mathbb{R}\mid ۱\le x\le ۲\}$

پ) $\{x\in\mathbb{Q}\mid ۲x^۲+۳x+۱=۰\}$ ت) $\{x\in\mathbb{N}\mid ۱\le x\le ۲\}$

مثال : فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید : $A\cap B=B\cap A$. (خاصیت جابه‌جایی اشتراک).

اثبات : برای اثبات حکم باید درستی دو رابطهٔ زیر را نشان دهیم :

$$A\cap B\subseteq B\cap A \quad (۱) \;;\quad B\cap A\subseteq A\cap B \qquad (۲)$$

اثبات (۱) :

(طبق خاصیت جابه‌جایی $\wedge$) $\quad \forall x;\ [x\in(A\cap B)\Rightarrow x\in A\wedge x\in B\Rightarrow x\in B\wedge x\in A$

$$\Rightarrow x\in B\cap A]$$

به روش مشابه می‌توان درستی رابطهٔ (۲) را نشان داد.

مثال : فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند؛ ثابت کنید که اگر $A\subseteq B$ آن‌گاه $A-B=\varnothing$.

اثبات :

(زیرا $A\subseteq B$) $\quad A-B=\{x\in U\,|\,x\in A\wedge x\notin B\}=\{x\in U\,|\,x\in B\wedge x\notin B\}=\varnothing$

$$\Rightarrow A-B=\varnothing$$

تمرین

۱ مجموعه‌های زیر را که شامل شکل‌های هندسی در صفحه هستند، در نظر بگیرید :

$C=\{x\,|$ یک لوزی است $x\}$ $\qquad$ $A=\{x\,|$ یک چهارضلعی است $x\}$

$D=\{x\,|$ یک مربع است $x\}$ $\qquad$ $B=\{x\,|$ یک مستطیل است $x\}$

کدام یک از روابط زیر درست است؟(با ذکر دلیل)

الف) $D\subseteq C$ $\qquad$ ب) $B\subseteq D$

پ) $A\subseteq B$ $\qquad$ ت) $D\subseteq A$

۲ فرض کنید $A=\{۱,۲,۳,\ldots,۸,۹\}$ و $B=\{۲,۴,۶,۸\}$ و $C=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ و $D=\{۳,۴,۵\}$ و $E=\{۳,۵\}$.

در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید : X می‌تواند کدام یک از این مجموعه‌ها باشد؟

الف) X و B عضو مشترکی ندارند. $\qquad$ ب) $X\subseteq A$ ولی $X\not\subseteq C$

پ) $X\subseteq D$ ولی $X\not\subseteq B$ $\qquad$ ت) $X\subseteq C$ ولی $X\not\subseteq A$

۳ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $\varnothing=\{\varnothing\}$ $\qquad$ ب) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$

پ) $\varnothing\notin\{\varnothing\}$ $\qquad$ ت) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\in\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing\}\}$

۴ کدام یک از مجموعه‌های زیر باهم مساوی‌اند؟

$B=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x^۳=x\}$ $\qquad$ $A=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,|m|<۲\}$

$D=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,m^۲\leq ۱\}$ $\qquad$ $C=\{y\in\mathbb{Z}\,|\,y^۲\leq ۲y\}$

$E=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,m^۳+۲m=۳m^۲\}$

۵ مثال‌هایی از مجموعه‌های دلخواه A و B و C بیاورید که برای آنها حکم‌های زیر درست باشند.

الف) $A\in B$ و $B\in C$ و $A\notin C$

ب) $A\in B$ و $B\in C$ و $A\in C$

پ) $A\in B$ و $A\subseteq B$

۶ اگر دو عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۳۸۴ واحد کم می‌شود، مجموعهٔ A چند زیرمجموعه دارد؟

۷ اگر $A=\{۲\,,\,x+۲y\,,۴\}$ و $B=\{۴\,,۵\,,\,x-y\}$ و $A=B$ در این صورت، مقادیر x و y را بیابید.

۸ ثابت کنید برای مجموعه‌های A و B با مرجع U داریم : $A-B\subseteq A$.

۹ فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید : اگر $A\subseteq B$ آن‌گاه :

الف) $A\cup C\subseteq B\cup C$

ب) $A\cap C\subseteq B\cap C$

۱۰ مجموعه‌های A و B و C و D با مرجع U را در نظر بگیرید، ثابت کنید : اگر $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ آن‌گاه :

الف) $A\cap C\subseteq B\cap D$

ب) $A\cap C\subseteq B\cup D$

۱۱ الف) فرض کنید : $A\subseteq\varnothing$ ثابت کنید : $A=\varnothing$. ب) فرض کنید $U\subseteq A$ ثابت کنید : $A=U$.

۱۲ هرگاه A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A\cap B=\varnothing$ در این صورت ثابت کنید :

الف) $B-A=B$

ب) $B\subseteq A'$

۱۳ فرض کنید : $X=\{a,b,c,d,e,f,g\}$، کدام یک از حالت‌های زیر یک افراز برای X محسوب می‌شود.

الف) $\{d,g\}$ و $\{b\}$ و $\{a,c,e\}$

ب) $\{b,e,f\}$ و $\{c,d\}$ و $\{a,e,g\}$

پ) $\{d,f\}$ و $\{c\}$ و $\{a,b,e,g\}$

ت) $\{a,b,c,d,e,f,g\}$

ث) $\{e\}$ و $\{f,g\}$ و $\{d\}$ و $\{b,c\}$ و $\{a\}$